распределений // Теория вероятностей и ее применения.— 1987.— Т. 32, вып. 4.— С. 691—702.
14. **Grübel R.** Functions of discrete probability measures: rates of convergence in the renewal theory // Z. Wahr. verw. Gebiet.— 1983.— Bd 64.— S. 341—357.
15. **Grübel R.** On subordinated distributions and generalized renewal measures // Ann. Probab.— 1987.— V. 15, N 1.— P. 394—415.
16. **Grübel R.** Über unbegrenzt teilbare Verteilungen // Arch. Math.— 1983.— V. 41, Fasc. 1.— P. 80—88.
17. **Улановский А. М.** Об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений на бесконечности // Теория функций, функциональный анализ и их приложения.— Харьков, 1981.— Вып. 35.— С. 100—107.
18. **Круглов В. М., Антонов С. Н.** Об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве // Теория вероятностей и ее применения.— 1982.— Т. 27, вып. 4.— С. 625—642.
19. **Круглов В. М, Антонов С. Н.** Еще раз об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве // Там же.— 1984.— Т. 29, вып. 4.— С. 735—742.
20. **Круглов В. М.** Дополнительные главы теории вероятностей: Учеб. пособие.— М.: Высш. шк., 1984.— 264 с.
21. **Omey E.** Infinite divisibility and random sums of random vectors // Yokohama Math. J.— 1985.— Vol. 33.— P. 39—48.
22. **Хилле Э., Филлипс Р.** Функциональный анализ и полугруппы.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.— 829 с.
23. **Шрейдер Ю. А.** Строение максимальных идеалов в кольцах со сверткой // Мат. сб.— 1950.— Т. 27, № 2.— С. 297—318.
24. **Рогозин Б. А., Сгибнев М. С.** Банаховы алгебры мер на прямой // Сиб. мат. журн.— 1980.— Т. 21, № 2.— С. 160—169.
25. **Рогозин Б. А.** Асимптотика коэффициентов в теоремах Леви — Винера об абсолютно сходящихся тригонометрических рядах // Там же.— 1973.— Т. 14, № 6.— С. 1304—1312.
26. **Essén M.** Banach algebra methods in renewal theory // J. Anal. Math.— 1973.— Vol. 26.— P. 303—336.
27. **Сгибнев М. С.** Банаховы алгебры мер класса $\mathcal{S}(\gamma)$ // Сиб. мат. журн.— 1988.— Т. 29, № 4.— С. 162—171.
28. **Наймарк М. А.** Нормированные кольца.— М.: Наука, 1968.— 664 с.
29. **Wermer J.** Banach Algebras and Several Complex Variables.— New York a. o.: Springer, 1976.— 161 p.
30. **Van Dulst D., Frenk J. B. G.** On Banach algebras, subexponential distributions and renewal theory.— Amsterdam, 1984.— 57 p.— (Preprint; University of Amsterdam, Department of Mathematics; Report 84—20).
31. **Круглов В. М.** Замечание к теории безгранично делимых законов // Теория вероятностей и ее применения.— 1970.— Т. 15, вып. 2.— С. 330—336.
32. **Шилов Г. Е.** О локально аналитических функциях // Успехи мат. наук.— 1966.— Т. 21, вып. 6.— С. 177—182.
33. **Невё Ж.** Математические основы теории вероятностей.— М.: Мир, 1969.— 309 с.
34. **Владимиров В. С.** Обобщенные функции в математической физике.— М.: Наука, 1976.— 280 с.

ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ДВУГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ, ЗАДАННЫХ НА ЦЕПИ МАРКОВА

В. И. ЛОТОВ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается конечная однородная неразложимая непериодическая цепь Маркова $\{\varkappa_n\}_{n\geqslant 0}$ с множеством состояний $D=\{1, \ldots, m\}$ и матрицей переходных вероятностей $\mathcal{P}=\|p_{jk}\|_{j,k\in D}$. Пусть $\{\xi_{jk}^{(n)}\}$, $n\geqslant 1$, j, $k\in D$ — не зависящее от $\{\varkappa_n\}$ семейство независимых случайных величин, одинаково распределенных при фиксированных j, k. Положим

$$S_0=0,\quad S_n=S_{n-1}+\xi_{\varkappa_{n-1}\varkappa_n}^{(n)},\quad n>0. \tag{1}$$

Очевидно $\{\varkappa_n, S_n\}$ есть двумерный марковский процесс, эволюция которого определяется матрицей

$$F(\mu) = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d\mathbf{P}(S_1 < y, \varkappa_1 = k/\varkappa_0 = j) \right\| = \| p_{jk} f_{jk}(\mu) \|, \qquad (2)$$

где $f_{jk}(\mu) = \mathbf{E} e^{i\mu\xi_{jk}^{(1)}}$. Для произвольных положительных чисел a и b введем случайную величину

$$N = N(a, b) = \min\{n: S_n \notin (-a, b)\},$$

равную моменту первого выхода последовательности $\{S_n\}$ из интервала $(-a, b)$. Полагаем $N = \infty$, если $S_n \in (-a, b)$ при всех n.

Цель работы состоит в получении полных асимптотических разложений по степеням $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{a}{n}, \frac{b}{n}$ для распределений вида

$$\mathbf{P}(S_N \in A, N = n, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j), \ \mathbf{P}(S_n \in B, N \leqslant n, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j) \quad (3)$$

при условии, что $a = a(n) \to \infty$, $b = b(n) \to \infty$, $a + b = o(n)$.

Для обычных случайных блужданий ($m = 1$) асимптотические свойства распределений граничных функционалов, связанных с достижением траекторией $S_1, S_2, \ldots$ фиксированного уровня (однограничная задача) или с первым выходом из интервала (двуграничная задача), исследованы достаточно полно. Среди множества подходов здесь выделим факторизационный метод, он обеспечивает наибольшие возможности для получения асимптотических разложений. Известно (см., например, [1]), что преобразование Фурье — Стилтьеса распределений практически всех интересующих нас функционалов в однограничной задаче могут быть выражены через компоненты факторизации. А. А. Боровковым в [2] развит аналитический метод, который исчерпывающим образом решает проблему полных асимптотических разложений в однограничной задаче. Этот метод включает в себя несколько этапов. На первом из них строятся разного сорта факторизационные тождества для преобразований (двойных и даже тройных) Фурье — Стилтьеса искомых распределений. Последующий анализ полученных выражений требует детального изучения аналитической структуры компонент факторизации — их нулей, особенностей, возможностей аналитического продолжения и т. д. Весьма полное исследование этих вопросов в условиях крамеровского типа также проведено в [2], что позволило затем асимптотически обратить полученные тождества по одной из переменных (слово «асимптотически» означает, что обращение произведено не в точном виде, а с точностью до пренебрежимо малого остатка). Итогом являются так называемые асимптотические представления производящих функций по переменной, связанной со «временем». Дальнейший асимптотический анализ главных частей этих представлений осуществляется с помощью модификаций метода перевала, также разработанных А. А. Боровковым, и позволяет получить полные асимптотические разложения искомых распределений в широком спектре уклонений.

Эта схема исследований была впоследствии перенесена на аналогичные задачи с одной границей для случайных процессов с независимыми приращениями и непрерывным временем [3] и для полумарковских процессов (1) [4]. По этой же схеме построена настоящая работа.

Интерес к случайным блужданиям типа (1) объясняется, с одной стороны, их приложениями, например, к задачам последовательного анализа в статистике, к задачам теории массового обслуживания и другим, с другой — они могут рассматриваться как естественное обобщение классической схемы случайного блуждания, допуская специфическую зависимость скачков, но в то же время позволяя получить аналоги многих результатов в граничных задачах, установленных ранее при $m = 1$.

Изучение распределений, связанных с выходом случайного блуждания (1) из интервала, может быть сведено к системам интегральных уравнений на конечном (возможно, растущем) интервале с ядрами, зависящими от разности аргументов. Этим уравнениям удовлетворяют в разных задачах либо сами искомые вероятности, либо их преобразования Фурье — Стилтьеса. Таким образом, полученные результаты одновременно дают асимптотические представления решений соответствующих систем интегральных уравнений.

Процессы типа (1) рассматривались в работах многих авторов, причем большая часть их посвящена однограничным задачам и связанным с ними изучением свойств факторизации (см., например, [4—8] и литературу там). Настоящая работа обобщает результаты автора [9, 10], которые были получены в двуграничных задачах для классической схемы блуждания $m=1$. В своих общих чертах метод остался тем же, хотя при этом появились новые трудности и усложнилась техника. § 2 содержит предварительные сведения, необходимые для понимания дальнейшего. Основным является § 3, где найдены асимптотические представления производящих функций распределений (3). Выяснилось, что их природа та же, что и в случае $m=1$, поэтому дальнейший асимптотический анализ проводится в § 4 по известной из [9] схеме с некоторыми изменениями и дополнениями. Излагаемый метод позволяет получать полные асимптотические разложения распределений (3) при любых ограничениях на a и b, совместимых с требованиями $a=a(n)\to\infty$, $b=b(n)\to\infty$, $a=o(n)$, $b=o(n)$, $a+b\geqslant C\sqrt{n}$, а также при произвольных $A\subset(-\infty,\ -a]\cup[b,\ \infty)$ и $B\subset(-a,\ b)$ таких, что $b-\sup\limits_{x\in B}x\to\infty$, $a+\inf\limits_{x\in B}x\to\infty$. Основные результаты приведены в теоремах 3—5, другие разложения из указанного диапазона уклонений читатель может выписать по известному алгоритму.

§ 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Здесь будут изложены необходимые в дальнейшем сведения из [4] о факторизации матричной функции $E-zF(\mu)$ (E — единичная матрица размерности m) и об аналитических свойствах компонент факторизации. Для обычных случайных блужданий ($m=1$) аналитическая структура компонент факторизации впервые подробно исследована в [2]. Кроме того, здесь будут введены и изучены функции, в терминах которых в § 3 формулируются основные результаты об асимптотических представлениях производящих функций.

Всюду в дальнейшем предполагаются выполненными условие Крамера (K): $v_-^*-v_+^*>0$, где v_+^* (соответственно v_-^*) — точная нижняя (верхняя) грань тех v, при которых все интегралы в (2) абсолютно сходятся при $\mu=iv$, и условие (C): найдется элемент матрицы $F(\mu)$ такой, что прообраз Фурье n-й степени этого элемента при некотором целом $n\geqslant 1$ содержит абсолютно непрерывную компоненту.

Если все интегралы в (2) конечны при $\mu=iv_-^*$, то положим $v_-=v_-^*$, в противном случае $v_-^*>0$ и под v_- будем понимать произвольное действительное число такое, что $0<v_-<v_-^*$. Аналогично $v_+=v_+^*$, если все интегралы в (2) сходятся при $\mu=iv_+^*$, в противном случае $v_+^*<v_+<0$. Точки $v_\pm$ могут выбираться как угодно близкими к $v_\pm^*$ в случае несовпадения.

Пусть $\lambda(\mu)$ — максимальное по модулю собственное значение матрицы $F(\mu)$, а $I(\mu)$ и $l(\mu)$ — соответствующие ему вектор-столбец и вектор-строка такие, что $l(\mu)I(\mu)=1$. Обозначим $z_0=1\Big/\inf\limits_{v_+^*<v<v_-^*}\lambda(iv)$. В широких предположениях (например, при $v_-^*<\infty$, $v_+^*>-\infty$) существует единственная точка $v_0 \in (v_+, v_-)$, в которой $\lambda(iv_0) = z_0^{-1}$. Другие случаи здесь не рассматриваются (см. по поводу них замечание в [4]). При $0 < z < z_0$ уравнение $1 - z\lambda(iv) = 0$ имеет не более двух вещественных решений $v = \mu_\pm(z)$, $\mu_+(z) < v_0 < \mu_-(z)$. Обозначим $z_\pm = 1 \Big/ \lim\limits_{v \to v_\pm^*} \lambda(iv)$.

Функция $\mu_+(z)$ $(\mu_-(z))$ является аналитической в окрестности интервала (z_+, z_0) $((z_-, z_0))$, разрезанной по лучу $\operatorname{Re} z \geqslant z_0$, причем в окрестности точки z_0 справедливы разложения

$$\mu_\pm(z) = v_0 \pm i\psi_1\sqrt{z - z_0} - \psi_2(z - z_0) \pm \ldots \tag{4}$$

Здесь корень квадратный понимается в смысле главного значения, $\psi_1 > 0$.

Обозначим через $V(\alpha, \beta)$ банахову алгебру матриц порядка m, элементы которых являются преобразованиями Фурье — Стилтьеса непрерывных слева функций $\varphi(x)$, имеющих на любом конечном отрезке ограниченную вариацию и таких, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} |d\varphi(x)|$ абсолютно сходится при $\alpha \leqslant \operatorname{Im} \mu \leqslant \beta$. Пусть $V_+(\alpha)$ — подмножество $V(\alpha, \beta)$, образованное матрицами вида $\left\| \int\limits_0^\infty e^{i\mu y} d\varphi_{jk}(y) \right\|$, $V_-(\beta)$ — подмножество $V(\alpha, \beta)$, образованное матрицами вида $\left\| \int\limits_{-\infty}^{+0} e^{i\mu y} d\varphi_{jk}(y) \right\|$.

При $|z| \leqslant z_0$, $v_+ \leqslant \operatorname{Im} \mu \leqslant v_-$ матричная функция $E - zF(\mu)$ допускает факторизацию двух типов:

$$E - zF(\mu) = R_{z-}(\mu) R_{z+}(\mu) = L_{z+}(\mu) L_{z-}(\mu),$$

соответственно называемую правой и левой факторизацией. Ее компоненты обладают следующими свойствами. Положительные компоненты $L_{z+}(\mu)$, $R_{z+}(\mu)$ как функции переменной μ принадлежат $V_+(v_+)$, отрицательные компоненты $L_{z-}(\mu)$, $R_{z-}(\mu)$ принадлежат $V_-(v_-)$. Как функции переменной z, принимающие значения в нормированных кольцах $V_\pm(x_\pm)$, компоненты факторизации аналитичны в круге $|z| < z_0$ и, более того, аналитически продолжаются в окрестность любой точки на границе этого круга, кроме точки $z = z_0$. В окрестности точки $z = z_0$ компоненты факторизации являются аналитическими функциями переменной $t = i\sqrt{z - z_0}$. Пусть, далее, $|z - z_0| \geqslant \delta > 0$, $|z| = z_0$. Тогда при некотором $\gamma > 0$

$$(E - zF(\mu))^{-1} \in V(v_0 - \gamma, v_0 + \gamma),$$

$$R_{z\pm}^{-1}(\mu) \in V_\pm(v_0 \mp \gamma), \quad L_{z\pm}^{-1}(\mu) \in V_\pm(v_0 \mp \gamma).$$

Здесь и далее δ, δ_1, γ — достаточно малые (д. м.) положительные числа. Указанные свойства, однако, перестают быть верными в окрестности точки z_0. Обозначим $a_\pm = v_\pm \mp 1$, $A_{z\pm} = l(i\mu_\pm(z)) l(i\mu_\pm(z))$, $F_{z\pm}(\mu) = E - (\mu_\pm(z) - a_\pm)(i\mu + \mu_\pm(z))^{-1} A_{z\pm}$, тогда

$$F_{z\pm}^{-1}(\mu) = E + (\mu_\pm(z) - a_\pm)(i\mu + a_\pm)^{-1} A_{z\pm}$$

и при д. м. $\delta > 0$, $\gamma > 0$, $|z - z_0| < \delta$

$$\mathscr{R}_z(\mu) \equiv F_{z-}(\mu)(E - zF(\mu)) F_{z+}(\mu) \in V(v_+, v_-),$$

$$\mathscr{L}_z(\mu) \equiv F_{z+}(\mu)(E - zF(\mu)) F_{z-}(\mu) \in V(v_+, v_-),$$

$$\mathscr{R}_z^{-1}(\mu) \in V(v_0 - \gamma, v_0 + \gamma), \quad \mathscr{L}_z^{-1}(\mu) \in V(v_0 - \gamma, v_0 + \gamma),$$

$$\mathscr{R}_{z+}(\mu) \equiv R_{z+}(\mu) F_{z+}(\mu) \in V_+(v_+),$$

$$\mathscr{L}_{z+}(\mu) \equiv F_{z+}(\mu) L_{z+}(\mu) \in V_+(v_+),$$

$$\mathscr{R}_{z-}(\mu) \equiv F_{z-}(\mu) R_{z-}(\mu) \in V_-(v_-),$$

$$\mathscr{L}_{z-}(\mu) \equiv L_{z-}(\mu) F_{z-}(\mu) \in V_-(v_-),$$

$$\mathscr{R}_{z\pm}^{-1}(\mu) \in V_\pm(v_0 \mp \gamma), \quad \mathscr{L}_{z\pm}^{-1}(\mu) \in V_\pm(v_0 \mp \gamma).$$

Более подробная информация о свойствах компонент факторизации содержится в [4—8].

Пусть $z \in \mathscr{D}_\delta = \{z\colon\ |z| < z_0,\ |z - z_0| < \delta\}$. Обозначим

$$\mathscr{V}(z, \mu) = -(i\mu + \mu_+(z))^{-1}(\mu_+(z) - a_+)A_{z+}\mathscr{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z))R_{z+}(\mu)$$

и покажем, что $\mathscr{V}(z, \mu) \in V_+(v_+)$. Действительно, матрица

$$(\mu_+(z) - a_+)A_{z+}\mathscr{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z))R_{z+}(\mu) \tag{5}$$

равна нулевой при $\mu = i\mu_+(z)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно представить $R_{z+}(\mu)$ в виде

$$R_{z+}(\mu) = \mathscr{R}_{z+}(\mu)(E + (\mu_+(z) - a_+)(i\mu + a_+)^{-1}A_{z+}),$$

подставить это выражение в (5) и положить $\mu = i\mu_+(z)$. Тогда в силу утверждения 5.2 работы [4] заключаем, что $\mathscr{V}(z, \mu) \in V_+(v_+)$. Более того, справедливо представление вида

$$\mathscr{V}(z, \mu) = \left\| \int_0^\infty e^{i\mu y} v_{jk}(z, y)\, dy \right\|, \quad \int_0^\infty e^{-v_+ y} |v_{jk}(z, y)|\, dy < \infty.$$

Аналогично введем матричную функцию

$$\mathscr{U}(z, \mu) = -(i\mu + \mu_-(z))^{-1}(\mu_-(z) - a_-)A_{z-}\mathscr{L}_{z-}^{-1}(i\mu_-(z))L_{z-}(\mu),$$

для которой также справедливо представление

$$\mathscr{U}(z, \mu) = \left\| \int_{-\infty}^0 e^{i\mu y} u_{jk}(z, y)\, dy \right\|, \quad \int_{-\infty}^0 e^{-v_- y} |u_{jk}(z, y)|\, dy < \infty.$$

Положим $H_1(z) = \mathscr{U}(z, i\mu_+(z))$, $H_2(z) = \mathscr{V}(z, i\mu_-(z))$, $H(z) = H_2(z)H_1(z)$, $\tilde{H}(z) = H_1(z)H_2(z)$.

Лемма 1. *При* $z \in \mathscr{D}_\delta$

$$H_1(z)I(i\mu_+(z)) = h_1(z)I(i\mu_-(z)),$$

$$H_2(z)I(i\mu_-(z)) = h_2(z)I(i\mu_+(z)),$$

где $h_1(z)$, $h_2(z)$ — *аналитические функции переменной* $i\sqrt{z - z_0}$, $h_1(z_0) = h_2(z_0) = 1$.

Доказательство. Обозначим $\nu(z) = \mu_+(z) - \mu_-(z)$ и для краткости будем на время опускать аргумент z. Имеем

$$H_1 I(i\mu_+) = I(i\mu_-)\ (\mu_- - a_-)\nu^{-1}l(i\mu_-)\mathscr{L}_-^{-1}(i\mu_-)\mathscr{L}_-(i\mu_+) \times$$
$$\times [E - (\mu_- - a_+)(\mu_+ - a_-)^{-1}A_-]I(i\mu_+) =$$
$$= I(i\mu_-)(\mu_- - a_-)\nu^{-1}l(i\mu_-)\mathscr{L}_-^{-1}(i\mu_-)[\mathscr{L}_-(i\mu_-) - i\nu\mathscr{L}'_+(i\mu_-) + \ldots]\cdot$$
$$\cdot[E - (\mu_- - a_-)(\mu_+ - a_-)^{-1}I(i\mu_-)l(i\mu_-)]\cdot[I(i\mu_-) + i\nu I'(i\mu_-) + \ldots] =$$
$$= I(i\mu_-)(\mu_- - a_-)\nu^{-1}l(i\mu_-)[E + O(\nu)]\{I(i\mu_-)\nu(\mu_+ - a_-)^{-1} +$$
$$+ i\nu[I'(i\mu_-) - (\mu_- - a_-)(\mu_+ - a_-)^{-1}A_-I'(i\mu_-)] + O(\nu^2)\}.$$

Здесь и далее символы $O(\nu)$, $O(\nu^2)$ и т. д. по отношению к матрице употребляются в том случае, когда подобный вид имеет каждый элемент матрицы. Замечая, наконец, что

$$l(i\mu_-)\left[I'(i\mu_-) - \frac{\mu_- - a_-}{\mu_+ - a_-}A_-I'(i\mu_-)\right] = \frac{\nu}{\mu_+ - a_-}\, l(i\mu_-)I'(i\mu_-),$$

получим требуемый результат. Второе соотношение доказывается аналогично. Лемма доказана.

Следствие 1. *Вектор* $I(i\mu_+(z))$ *является собственным вектором матрицы* $H(z)$, *соответствующим собственному значению* $h(z) = h_1(z)h_2(z)$; $I(i\mu_-(z))$ *является собственным вектором для* $\tilde{H}(z)$, *соответствующим* *тому же собственному значению* $h(z)$. *Функция* $h(z)$ *является аналитической в окрестности нуля функцией переменной* $t=i\sqrt{z-z_0}$, $h(z_0)=1$.

Обозначим также

$$K(z)=-(\mu_+(z)-a_+)(\mu_-(z)-a_-)A_{z+}\mathscr{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z))\mathscr{R}_{z-}^{-1}(i\mu_-(z))A_{z-},$$

$$\widetilde{K}(z)=-(\mu_+(z)-a_+)(\mu_-(z)-a_-)A_{z-}\mathscr{L}_{z-}^{-1}(i\mu_-(z))\cdot\mathscr{L}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z))A_{z+},$$

и пусть $K(z)=\|K_{jk}(z)\|$, $\widetilde{K}(z)=\|\widetilde{K}_{jk}(z)\|$, $j,\ k=1,\ldots,m$.

§ 3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

Положим

$$S_{jk}(z,A)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\mathbf{P}(S_n\in A,\ N>n,\ \varkappa_n=k/\varkappa_0=j),\quad A\subset(-a,b),$$

$$T_{jk}(z,A)=\sum_{n=1}^{\infty}z^n\mathbf{P}(S_N\in A,\ N=n,\ \varkappa_n=k/\varkappa_0=j),\quad A\subset(-\infty,-a]\cup[b,\infty).$$

Здесь A обозначает всюду борелевские множества, $|z|<1$.

Вопрос о нахождении матричных функций $S=\|S_{jk}\|$ и $T=\|T_{jk}\|$ в точном виде тесно связан с получением и использованием явных выражений для компонент факторизации, что удается сделать лишь при дополнительных ограничениях на исходный процесс (см. [8]). В то же время для целей асимптотического анализа распределений достаточно ограничиться нахождением асимптотических представлений функций S и T в окрестности точки z_0 (ниже будет установлена возможность аналитического продолжения этих функций в круг $|z|<z_0$) и оценкой их на множестве $|z|=z_0$, $|z-z_0|>\delta$. Обозначим $\mu(z)=\exp\{\mu_+(z)-\mu_-(z)\}$.

Теорема 1. *Существуют числа* $\delta>0$, $\gamma>0$ *такие, что при* $z\in\mathscr{D}_\delta$ *и достаточно больших* (д. б.) $a+b$

$$T_{jk}(z,[x,\infty))=\frac{\exp\{\mu_+(z)b\}\left(1-\mu^a(z)h_1(z)\right)}{1-\mu^{a+b}(z)h(z)}\int_{x-b}^{\infty}v_{jk}(z,y)\,dy+$$
$$+e^{v_0x}\left[O\left(e^{-\gamma x}\right)+O\left(e^{-\gamma(x-b+a)}\right)\right],\quad x\geqslant b,\tag{6}$$

$$T_{jk}(z,(-\infty,x])=\frac{\exp\{-\mu_-(z)a\}\left(1-\mu^b(z)h_2(z)\right)}{1-\mu^{a+b}(z)h(z)}\int_{-\infty}^{x+a}u_{jk}(z,y)\,dy+$$
$$+e^{v_0x}\left[O\left(e^{\gamma x}\right)+O\left(e^{\gamma(x+a-b)}\right)\right],\quad x\leqslant-a,\tag{7}$$

равномерно по z.

Теорема 2. *Пусть* $-a<x_1<0<x_2<b$, $x_1+a\to\infty$, $b-x_2\to\infty$. *Тогда найдутся числа* $\delta>0$, $\gamma>0$ *такие, что при* $z\in\mathscr{D}_\delta$ *и д. б.* $a+b$

$$S_{jk}(z,[x_1,x_2])=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\mathbf{P}(S_n\in[x_1,x_2],\ \varkappa_n=k/\varkappa_0=j)-$$
$$-\frac{\mu^a(z)\left(1-\mu^b(z)h_2(z)\right)}{1-\mu^{a+b}(z)h(z)}\cdot\frac{\exp\{\mu_+(z)x_2\}-\exp\{\mu_+(z)x_1\}}{\mu_+(z)\left(\mu_-(z)-\mu_+(z)\right)}\widetilde{K}_{jk}(z)-$$
$$-\frac{\mu^b(z)\left(1-\mu^a(z)h_1(z)\right)}{1-\mu^{a+b}(z)h(z)}\cdot\frac{\exp\{\mu_-(z)x_2\}-\exp\{\mu_-(z)x_1\}}{\mu_-(z)\left(\mu_-(z)-\mu_+(z)\right)}K_{jk}(z)+$$
$$+(z-z_0)^{-1/2}\left[O\left(e^{v_0x_2-\gamma\min(a,b-x_2)}\right)+O\left(e^{v_0x_1-\gamma\min(b,a+x_1)}\right)\right]\tag{8}$$

равномерно по z.

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$Q_0(z,\mu)=\left\|\int\limits_{-a+0}^{b} e^{i\mu y}S_{jk}(z,dy)\right\|,$$

$$Q_1(z,\mu)=\left\|\int\limits_{-\infty}^{-a+0} e^{i\mu y}T_{jk}(z,dy)\right\|,$$

$$Q_2(z,\mu)=\left\|\int\limits_{b}^{\infty} e^{i\mu y}T_{jk}(z,dy)\right\|.$$

Эти функции определены во всяком случае при $\operatorname{Im}\mu=0$, $|z|<1$. Они связаны соотношением

$$Q_0(z,\ \mu)\,(E-zF(\mu))=E-Q_1(z,\ \mu)-Q_2(z,\ \mu), \tag{9}$$

которое следует из формулы полной вероятности. При $m=1$ оно установлено Кемперманом [11], в нашем случае это соотношение получено в [12]. Там же установлено, что (9) выполняется при всех z и μ таких, что $|z|<1/\lambda(i\operatorname{Im}\mu)$.

Пусть z и μ таковы, что существуют $R_{z\pm}^{-1}(\mu)\in V_\pm(\operatorname{Im}\mu)$, $L_{z\pm}^{-1}(\mu)\in\in V_\pm(\operatorname{Im}\mu)$ и имеет место (9). Тогда

$$Q_0(z,\mu)\,R_{z-}(\mu)=(E-Q_1(z,\mu)-Q_2(z,\mu))\,R_{z+}^{-1}(\mu).$$

Будем обозначать далее

$$\left[\left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y}\,d\varphi_{jk}(y)\right\|\right]^A=\left\|\int\limits_A e^{i\mu y}\,d\varphi_{jk}(y)\right\|$$

для всякого измеримого множества $A\subset R$. Так как

$$[Q_0(z,\ \mu)R_{z-}(\mu)]^{(-\infty,\,b)}=Q_0(z,\ \mu)R_{z-}(\mu),$$

то

$$Q_0(z,\mu)\,R_{z-}(\mu)=\left[(E-Q_1(z,\mu)-Q_2(z,\mu))\,R_{z+}^{-1}(\mu)\right]^{(-\infty,b)},$$

и одновременно

$$\left[(E-Q_1(z,\mu)-Q_2(z,\mu))\,R_{z+}^{-1}(\mu)\right]^{[b,\infty)}\equiv 0.$$

Замечая, что $Q_2(z,\mu)\,R_{z+}^{-1}(\mu)=\left[Q_2(z,\mu)\,R_{z+}^{-1}(\mu)\right]^{[b,\infty)}$, получим

$$\begin{aligned} Q_0(z,\mu)&=\left[(E-Q_1(z,\mu))\,R_{z+}^{-1}(\mu)\right]^{(-\infty,b)}R_{z-}^{-1}(\mu),\\ Q_2(z,\mu)&=\left[(E-Q_1(z,\mu))\,R_{z+}^{-1}(\mu)\right]^{[b,\infty)}R_{z+}(\mu). \end{aligned} \tag{10}$$

Эти соотношения впервые получены в [11] для случая $m=1$. Используя левую факторизацию, аналогичным путем находим

$$\begin{aligned} Q_0(z,\mu)&=\left[(E-Q_2(z,\mu))\,L_{z-}^{-1}(\mu)\right]^{(-a,\infty)}L_{z+}^{-1}(\mu),\\ Q_1(z,\mu)&=\left[(E-Q_2(z,\mu))\,L_{z-}^{-1}(\mu)\right]^{(-\infty,-a]}L_{z-}(\mu). \end{aligned} \tag{11}$$

Для произвольной матричной функции $f(\mu)\in V(v_0)$ положим

$$\begin{aligned} (Af)(z,\mu)&=\left[f(\mu)\,L_{z-}^{-1}(\mu)\right]^{(-\infty,-a]}L_{z-}(\mu),\\ (Bf)(z,\mu)&=\left[f(\mu)\,R_{z+}^{-1}(\mu)\right]^{[b,\infty)}R_{z+}(\mu), \end{aligned}$$

тогда подстановка (11) в (10) приводит к тождеству

$$Q_2(z,\ \mu)=(BE)(z,\ \mu)-(BAE)(z,\ \mu)+(BAQ_2)(z,\ \mu), \tag{12}$$

и точно так же подстановка (10) в (11) влечет

$$Q_1(z,\ \mu)=(AE)(z,\ \mu)-(ABE)(z,\ \mu)+(ABQ_1)(z,\ \mu). \tag{13}$$

Исследуем далее аналитические свойства операторов A и B. Пусть $z \in \mathscr{D}_\delta$ при некотором $\delta > 0$, $\mu_+(|z|) < \operatorname{Im}\mu < \mu_-(|z|)$. Тогда, очевидно, $|\lambda(\mu)| < \lambda(i \operatorname{Im}\mu) < |z|^{-1}$ (см. [4, утв. 4.1]) и соотношение (9) имеет место. Более того, при таких z и μ существуют матрицы $R_{z\pm}^{-1}(\mu)$ и $L_{z\pm}^{-1}(\mu)$. Например, для $R_{z+}^{-1}(\mu)$ это вытекает из соотношения $\mathscr{R}_{z+}(\mu) = R_{z+}(\mu) F_{z+}(\mu)$ и существования $\mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu)$, в остальных случаях — аналогично. Поэтому для всякой функции $f \in V(v_0 - \gamma, v_0)$ имеем

$$[f(\mu) R_{z+}^{-1}(\mu)]^{[b,\infty)} = [f(\mu) F_{z+}(\mu) \mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu)]^{[b,\infty)} = [f(\mu) \mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu)]^{[b,\infty)} -$$
$$- (\mu_+(z) - a_+) [f(\mu) A_{z+} \mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu) (i\mu + \mu_+(z))^{-1}]^{[b,\infty)}.$$

Матрица $\mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu)$ принадлежит $V_+(v_0 - \gamma)$ при некотором $\gamma > 0$, поэтому

$$f(\mu) \mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu) \in V(v_0 - \gamma, v_0),$$
$$[f(\mu) \mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu)]^{[b,\infty)} \in V_+(v_0 - \gamma) \quad \text{при } b \geqslant 0.$$

Пусть

$$f(\mu) A_{z+} \mathscr{R}_{z+}^{-1}(\mu) = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d_y W_{jk}(z, y) \right\|.$$

Для μ таких, что $\operatorname{Im}\mu > \mu_+(|z|)$ в силу соотношения

$$\lambda(i \operatorname{Re}\mu_+(z)) \geqslant |\lambda(i\mu_+(z))| = |z^{-1}| = \lambda(i\mu_+(|z|))$$

имеем $\operatorname{Re}\mu_+(z) \leqslant \mu_+(|z|)$, т. е. $\operatorname{Im}\mu > \operatorname{Re}\mu_+(z)$ и, следовательно, справедливо

$$\left[(i\mu + \mu_+(z))^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d_y W_{jk}(z, y) \right]^{[b,\infty)} =$$
$$= - \left[\int_0^{\infty} e^{(i\mu + \mu_+(z))y} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d_y W_{jk}(z, y) \right]^{[b,\infty)} =$$
$$= - \int_b^{\infty} e^{i\mu y} \int_{-\infty}^{y} e^{\mu_+(z)(y-t)} d_t W_{jk}(z, t)\, dy =$$
$$= - \int_b^{\infty} e^{(i\mu + \mu_+(z))y} \left[\left(f(i\mu_+(z)) A_{z+} \mathscr{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z)) \right)_{jk} - \int_y^{\infty} e^{-\mu_+(z)t} d_t W_{jk}(z,t) \right] dy =$$
$$= e^{(i\mu + \mu_+(z))b} (i\mu + \mu_+(z))^{-1} \left(f(i\mu_+(z)) A_{z+} \mathscr{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z)) \right)_{jk} +$$
$$+ \int_b^{\infty} e^{(i\mu + \mu_+(z))y} \int_y^{\infty} e^{-\mu_+(z)t} d_t W_{jk}(z, t)\, dy. \tag{14}$$

Здесь и далее G_{jk} означает элемент матрицы G с номером (j, k). Последнее слагаемое в (14) также принадлежит $V_+(v_0 - \gamma)$, если $z \in \mathscr{D}_\delta$ и δ достаточно мало. Действительно, в силу (4) при малых δ $|\operatorname{Re}\mu_\pm(z) - v_0| \leqslant \gamma/2$ и потому

$$\int_b^{\infty} \left| e^{-(v_0 - \gamma)y + \mu_+(z)y} \int_y^{\infty} e^{-\mu_+(z)t} d_t W_{jk}(z, t) \right| dy =$$
$$= \int_b^{\infty} \left| e^{-(v_0 - \gamma - \mu_+(z))y} \int_y^{\infty} e^{-\mu_+(z)t + (v_0 - \gamma)t} d_t \widetilde{W}_{jk}(z, t) \right| dy \leqslant$$
$$\leqslant \int_b^{\infty} \int_y^{\infty} \left| e^{(v_0 - \gamma - \mu_+(z))(t-y)} \right| |d_t \widetilde{W}_{jk}(z, t)|\, dy \leqslant$$
$$\leqslant \int_b^{\infty} \int_y^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-y)} |d_t \widetilde{W}_{jk}(z, t)|\, dy < \infty.$$

Здесь $\widetilde{W}_{jk}(z, t)$ — функция ограниченной вариации по t. Таким образом, при $z \in \mathscr{D}_\delta$

$$(Bf)(z, \mu) = e^{(i\mu+\mu_+(z))b} f(i\mu_+(z)) \mathscr{V}(z, \mu) + \Delta(z, \mu) R_{z+}(\mu), \tag{15}$$

где

$$\Delta(z, \mu) = [\Delta(z, \mu)]^{[b, \infty)} \in V_+(v_0 - \gamma)$$

при некотором $\gamma > 0$. Аналогичным путем устанавливается, что если $f_1 \in V(v_0, v_0 + \gamma)$, то при $z \in \mathscr{D}_\delta$

$$(Af_1)(z, \mu) = e^{-(i\mu+\mu_-(z))a} f_1(i\mu_-(z)) \mathscr{U}(z, \mu) + \Delta_1(z, \mu) L_{z-}(\mu), \tag{16}$$

$$\Delta_1(z, \mu) = [\Delta_1(z, \mu)]^{(-\infty, -a]} \in V_-(v_0 + \gamma)$$

при некотором $\gamma > 0$.

Будем использовать представления (15), (16) в (12), беря в качестве f матрицы E, $(AE)(z, \mu)$, $(AQ_2)(z, \mu)$, а в качестве f_1 матрицы E и $Q_2(z, \mu)$. При $z \in \mathscr{D}_\delta$ $Q_2(z, \mu) \in V_+(v_0)$, $(AE)(z, \mu) \in V_-(v_0)$, $(AQ_2)(z, \mu) \in V_-(v_0)$. Имеем таким образом

$$(BE)(z, \mu) = e^{(i\mu+\mu_+(z))b} \mathscr{V}(z, \mu) + \Delta^{(1)}(z, \mu) R_{z+}(\mu), \tag{17}$$

$$(AE)(z, \mu) = e^{-(i\mu+\mu_-(z))a} \mathscr{U}(z, \mu) + \Delta_1^{(1)}(z, \mu) L_{z-}(\mu), \tag{18}$$

$$(AQ_2)(z, \mu) = e^{-(i\mu+\mu_-(z))a} Q_2(z, i\mu_-(z)) \mathscr{U}(z, \mu) + \Delta_1^{(2)}(z, \mu) L_{z-}(\mu), \tag{19}$$

$$\begin{aligned}(BAE)(z, \mu) = {} & e^{(i\mu+\mu_+(z))b} \mu^a(z) H_1(z) \mathscr{V}(z, \mu) + \Delta^{(2)}(z, \mu) R_{z+}(\mu) + \\ & + e^{(i\mu+\mu_+(z))b} \Delta_1^{(1)}(z, i\mu_+(z)) L_{z-}(i\mu_+(z)) \mathscr{V}(z, \mu),\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}(BAQ_2)(z, \mu) = {} & e^{(i\mu+\mu_+(z))b} \mu^a(z) Q_2(z, i\mu_-(z)) H_1(z) \mathscr{V}(z, \mu) + \\ & + \Delta^{(3)}(z, \mu) R_{z+}(\mu) + e^{(i\mu+\mu_+(z))b} \Delta_1^{(2)}(z, i\mu_+(z)) L_{z-}(i\mu_+(z)) \mathscr{V}(z, \mu),\end{aligned} \tag{21}$$

и после подстановки в (12) получаем

$$\begin{aligned}Q_2(z, \mu) = {} & e^{(i\mu+\mu_+(z))b} [E - \mu^a(z) H_1(z) + \mu^a(z) Q_2(z, i\mu_-(z)) H_1(z)] \mathscr{V}(z, \mu) + \\ & + D(z, \mu) R_{z+}(\mu) + e^{(i\mu+\mu_+(z))b} D_1(z, i\mu_+(z)) L_{z-}(i\mu_+(z)) \mathscr{V}(z, \mu).\end{aligned} \tag{22}$$

Здесь $D(z, \mu) = \Delta^{(1)}(z, \mu) - \Delta^{(2)}(z, \mu) + \Delta^{(3)}(z, \mu) \in V_+(v_0 - \gamma)$, $D_1(z, \mu) = \Delta_1^{(2)}(z, \mu) - \Delta_1^{(1)}(z, \mu) \in V_-(v_0 + \gamma)$, $\gamma > 0$. Полагая в (22) $\mu = i\mu_-(z)$, получим тождество

$$\begin{aligned}Q_2(z, i\mu_-(z)) = {} & \mu^b(z)[E - \mu^a(z)(H_1(z) - Q_2(z, i\mu_-(z)) H_1(z))] H_2(z) + \\ & + D(z, i\mu_-(z)) R_{z+}(i\mu_-(z)) + \mu^b(z) D_1(z, i\mu_+(z)) L_{z-}(i\mu_+(z)) H_2(z).\end{aligned} \tag{23}$$

Это выражение для $Q_2(z, i\mu_-(z))$ подставляем в правую часть (22), в получившееся выражение опять подставляем (23) и т. д. В результате s-кратного применения этой процедуры получим ($s \geqslant 1$)

$$\begin{aligned}Q_2(z, \mu) = {} & e^{(i\mu+\mu_+(z))b} \Big[(E - \mu^a(z) H_1(z)) \sum_{j=0}^{s} \mu^{(a+b)j}(z) H^j(z) + \\ & + \mu^{a+s(a+b)}(z) Q_2(z, i\mu_-(z)) H_1(z) H^s(z) \Big] \mathscr{V}(z, \mu) + D(z, \mu) R_{z+}(\mu) + \\ & + e^{(i\mu+\mu_+(z))b} \Big[D_1(z, i\mu_+(z)) L_{z-}(i\mu_+(z)) \sum_{j=0}^{s} \mu^{(a+b)j}(z) H^j(z) + \\ & + \mu^a(z) D(z, i\mu_-(z)) R_{z+}(i\mu_-(z)) H_1(z) \sum_{j=0}^{s-1} \mu^{(a+b)j}(z) H^j(z) \Big] \mathscr{V}(z, \mu).\end{aligned} \tag{24}$$

Далее воспользуемся следствием 1, в силу которого $H^j(z)\mathscr{V}(z, \mu) = h^j(z)\mathscr{V}(z, \mu)$ (см. определение функции $\mathscr{V}(z, \mu)$), $H_1(z)\mathscr{V}(z, \mu) =$

$= h_1(z)\mathscr{V}(z, \mu)$. Поэтому (24) перепишется так:

$$Q_2(z, \mu) = e^{(i\mu+\mu_+(z))b}\left[\left(1 - \mu^a(z)h_1(z)\right)\sum_{j=0}^{s}\mu^{(a+b)j}(z)\,h^j(z)\right]\mathscr{V}(z, \mu) +$$
$$+ \mu^{a+s(a+b)}(z)\,h_1(z)\,Q_2(z, i\mu_-(z))\,\mathscr{V}(z, \mu) + D(z, \mu)\,R_{z+}(\mu) +$$
$$+ e^{(i\mu+\mu_+(z))b}\left[D_1(z, i\mu_+(z))\,L_{z-}(i\mu_+(z))\sum_{j=0}^{s}\mu^{(a+b)j}(z)\,h^j(z) +\right.$$
$$\left. + \mu^a(z)\,D(z, i\mu_-(z))\,R_{z+}(i\mu_-(z))\,h_1(z)\sum_{j=0}^{s-1}\mu^{(a+b)j}(z)\,h^j(z)\right]\mathscr{V}(z, \mu). \qquad (25)$$

Покажем, что элементы матрицы $Q_2(z, i\mu_-(z))$ ограничены в $\mathscr{D}_\delta$ равномерно по a и b. Из неравенства $\lambda(i\operatorname{Re}\mu_-(z)) \geqslant |\lambda(i\mu_-(z))| = |z^{-1}| = \lambda(i\mu_-(|z|))$ вытекает $\operatorname{Re}\mu_-(z) \geqslant \mu_-(|z|)$, стало быть,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_b^{\infty} e^{-\mu_-(z)y}\,\mathbf{P}(S_N \in dy, N = n, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n \int_b^{\infty} e^{-\mu_-(|z|)y}\,\mathbf{P}(S_N \in dy, N = n, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j),$$

т. е. поэлементно $|Q_2(z, i\mu_-(z))| \leqslant Q_2(|z|, i\mu_-(|z|))$. Пусть $\tilde{Q}_2(z, \mu)$ совпадает с функцией $Q_2(z, \mu)$, вычисленной при $a = \infty$. Очевидно, $Q_2(|z|, i\mu_-(|z|)) \leqslant \tilde{Q}_2(|z|, i\mu_-(|z|))$ (все матричные неравенства понимаются поэлементно). Но $\tilde{Q}_2(z, \mu) = (BE)(z, \mu)$ и в силу асимптотического представления (17) при $z \in \mathscr{D}_\delta$

$$\tilde{Q}_2(|z|, i\mu_-(|z|)) \leqslant Ce^{(\mu_+(|z|)-\mu_-(|z|))b} \leqslant C_1.$$

Здесь и далее C, C_1 — матрицы с постоянными положительными элементами.

При д. б. $a + b$ и $z \in \mathscr{D}_\delta$ имеет место $|\mu^{a+b}(z)h(z)| < 1$, поэтому слагаемое $\mu^{a+s(a+b)}(z)h_1(z)h^s(z)Q_2(z, i\mu_-(z))\mathscr{V}(z, \mu)$ в (25) стремится к нулевой матрице при всех $z \in \mathscr{D}_\delta$ и $s \to \infty$, кроме того сходится ряд $\sum_{j=0}^{\infty}\mu^{(a+b)j}(z)\,h^j(z) = \left(1 - \mu^{a+b}(z)\,h(z)\right)^{-1}$.

Лемма 2.

$$L_{z-}(i\mu_+(z))I(i\mu_+(z)) = (\mu_-(z) - \mu_+(z))C_1(z)I(i\mu_+(z)),$$
$$R_{z+}(i\mu_-(z))I(i\mu_+(z)) = (\mu_-(z) - \mu_+(z))C_2(z)I(i\mu_+(z)),$$

где $C_1(z)$, $C_2(z)$ — матрицы с ограниченными в $\mathscr{D}_\delta$ элементами.

Доказательство.

$$L_{z-}(i\mu_+(z))I(\mu_+(z)) = \mathscr{L}_{z-}(i\mu_+(z))\cdot$$
$$\cdot[E - (\mu_-(z) - a_-)(\mu_+(z) - a_-)^{-1}A_{z-}]I(i\mu_+(z)) =$$
$$= \mathscr{L}_{z-}(i\mu_+(z))\{E - (\mu_-(z) - a_-)(\mu_+(z) - a_-)^{-1}[A_{z+} +$$
$$+ i(\mu_-(z) - \mu_+(z))(Il)'(i\mu_+(z)) + \ldots]\}I(i\mu_+(z)) =$$
$$= \mathscr{L}_{z-}(i\mu_+(z))[(\mu_+(z) - \mu_-(z))(\mu_+(z) - a_-)^{-1}I(i\mu_+(z)) +$$
$$+ i(\mu_-(z) - \mu_+(z))(Il)'(i\mu_+(z))I(i\mu_+(z)) + \ldots] =$$
$$= (\mu_-(z) - \mu_+(z))C_1(z)I(i\mu_+(z));$$
$$R_{z+}(i\mu_-(z))I(i\mu_+(z)) = \mathscr{R}_{z+}(i\mu_-(z))[E -$$
$$- (\mu_+(z) - a_+)(\mu_-(z) - a_+)^{-1}A_{z+}]I(i\mu_+(z)) =$$
$$= \mathscr{R}_{z+}(i\mu_-(z))(\mu_-(z) - \mu_+(z))(\mu_-(z) - a_+)^{-1}I(i\mu_+(z)),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. *При д. б. $a+b$ функция*

$$\psi(z, s, a+b) \equiv (\mu_-(z) - \mu_+(z)) \sum_{j=0}^{s} \mu^{(a+b)j}(z)\, h^j(z)$$

ограничена в $\mathscr{D}_\delta$ равномерно по $s \geqslant 1$ и $a+b$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для целых a и b.

$$|\psi(z, s, a+b)| \leqslant c \frac{|1-\mu(z)|}{|1-\mu^{a+b}(z)\, h(z)|} \leqslant c\,|1-\mu(z)| \times$$

$$\times \left[(1-|\mu(z)|)\left(1+|\mu(z)|+\ldots+|\mu(z)|^{a+b-1}+|\mu(z)|^{a+b}\frac{1-|h(z)|}{1-|\mu(z)|}\right)\right]^{-1}.$$

При $z \in \mathscr{D}_\delta$ отношение $\dfrac{|1-\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}$ ограничено, а выражение

$$1+|\mu(z)|+\ldots+|\mu(z)|^{a+b-1}+|\mu(z)|^{a+b}\frac{1-|h(z)|}{1-|\mu(z)|}$$

больше единицы при $z=z_0$ и д. б. $a+b$. В силу непрерывности это верно при $z \in \mathscr{D}_\delta$ при некотором $\delta = \delta(a+b)$, к тому же как функция $a+b$ эта величина не убывает. Лемма доказана.

Точно так же можно установить равномерную по a и b ограниченность в $\mathscr{D}_\delta$ функций

$$\frac{1-\mu^a(z)\, h_1(z)}{1-\mu^{a+b}(z)\, h(z)}, \quad \frac{1-\mu^b(z)\, h_2(z)}{1-\mu^{a+b}(z)\, h(z)}.$$

Устремляя в (25) $s \to \infty$, получим теперь

$$Q_2(z, \mu) = \frac{e^{(i\mu+\mu_+(z))b}\left(1-\mu^a(z)\, h_1(z)\right)}{1-\mu^{a+b}(z)\, h(z)} \mathscr{V}(z, \mu) + D(z, \mu)\, R_{z+}(\mu) +$$

$$+ e^{(i\mu+\mu_+(z))b}\,[D_1(z, i\mu_+(z))\, C_3(z) + D(z, i\mu_-(z)) C_4(z)]\, \mathscr{V}(z, \mu),$$

где $C_3(z)$, $C_4(z)$ — матрицы с ограниченными равномерно по a, b и $z \in \mathscr{D}_\delta$ элементами.

Далее, в представлениях

$$D(z, \mu) = \left\| \int_b^\infty e^{i\mu y}\, d_y G_{jk}(z, y) \right\|, \quad \operatorname{Im}\mu = v_0 - \gamma,$$

$$D_1(z, \mu) = \left\| \int_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y}\, d_y \widetilde{G}_{jk}(z, y) \right\|, \quad \operatorname{Im}\mu = v_0 + \gamma$$

имеет место равномерно по $z \in \mathscr{D}_\delta$, a и b

$$|G_{jk}(z, x) - G_{jk}(z, \infty)| = O\left(e^{(v_0-\gamma)x}\right), \quad x \to \infty,$$

$$|\widetilde{G}_{jk}(z, x) - \widetilde{G}_{jk}(z, -\infty)| = Q\left(e^{(v_0+\gamma)x}\right), \quad x \to -\infty.$$

Это следует из [2, лемма 2], при этом необходимо убедиться, что вариации функций

$$\int_x^\infty e^{-(v_0-\gamma)y}\, d_y G_{jk}(z, y),\ x \geqslant b, \quad \int_{-\infty}^x e^{-(v_0+\gamma)y}\, d_y \widetilde{G}_{jk}(z, y), \quad x \leqslant -a$$

ограничены равномерно по z, a и b. Как следует из вывода формул (15) и (16), для этого достаточно, чтобы аналогичными свойствами обладали функции f и f_1, что имеет место в каждом конкретном случае (17) —

(21). Например, при $f_1 = Q_2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z|^n \int_b^{\infty} \mathrm{e}^{-(v_0+\gamma)y} \mathbf{P}(S_N \in dy, N = n, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n \int_b^{\infty} \mathrm{e}^{-\mu_-(|z|)y} \mathbf{P}(S_N \in dy, N = n, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j) = Q_{2jk}(|z|, i\mu_-(|z|)) \leqslant c$$

(последнее неравенство установлено ранее).

Оценим величины $D(z, i\mu_-(z))$ и $D_1(z, i\mu_+(z))$. Здесь

$$|D_{jk}(z, i\mu_-(z))| = \left| \int_b^{\infty} e^{-\mu_-(z)y} d_y G_{jk}(z, y) \right| =$$

$$= \left| \int_b^{\infty} \mathrm{e}^{(v_0-\gamma-\mu_-(z))y} \mathrm{e}^{-(v_0-\gamma)y} d_y G_{jk}(z, y) \right| \leqslant \left| \int_b^{\infty} \mathrm{e}^{-\gamma y} \mathrm{e}^{-(v_0-\gamma)y} d_y G_{jk}(z, y) \right| \leqslant c\mathrm{e}^{-\gamma b},$$

$$|D_{1jk}(z, i\mu_+(z))| = \left| \int_{-\infty}^{-a} \mathrm{e}^{-\mu_+(z)y} d_y \widetilde{G}_{jk}(z, y) \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{-a} \mathrm{e}^{(v_0+\gamma-\mu_+(z))y} \mathrm{e}^{-(v_0+\gamma)y} d_y \widetilde{G}_{jk}(z, y) \right| \leqslant c\mathrm{e}^{-\gamma a}.$$

Кроме того, в представлении

$$\mathrm{e}^{(i\mu+\mu_+(z))b} \mathscr{V}(z, \mu) = \mathrm{e}^{\mu_+(z)b} \left\| \int_b^{\infty} \mathrm{e}^{i\mu y} v_{jk}(z, y-b)\, dy \right\|$$

справедливо при $x \geqslant b$

$$\left| \mathrm{e}^{\mu_+(z)b} \int_x^{\infty} v_{jk}(z, y-b)\, dy \right| = e^{v_0 b} \cdot O\left(\mathrm{e}^{(v_0-\gamma)(x-b)}\right) = O\left(\mathrm{e}^{v_0 x - \gamma(x-b)}\right).$$

Таким образом,

$$D(z, \mu) R_{z+}(\mu) + \mathrm{e}^{(i\mu+\mu_+(z))b} [D_1(z, i\mu_+(z)) C_3(z) + D(z, i\mu_-(z)) C_4(z)] \mathscr{V}(z, \mu) =$$

$$= \left\| \int_b^{\infty} \mathrm{e}^{i\mu y} d_y r_{jk}(z, y) \right\|, \tag{26}$$

где

$$\left| \int_x^{\infty} d_y r_{jk}(z, y) \right| = O\left(e^{(v_0-\gamma)x}\right) + O\left(e^{v_0 x - \gamma(x-b+a)}\right), \tag{27}$$

что и доказывает (6). Соотношение (7) доказывается по той же схеме симметричными рассуждениями, в которых отправным пунктом является тождество (13). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть при $z \in \mathscr{D}_\delta$ $\mu_+(|z|) < \operatorname{Im} \mu < \mu_-(|z|)$. В этом случае существует матрица $(E - zF(\mu))^{-1}$ и в силу (9)

$$Q_0(z, \mu) = (E - Q_1(z, \mu) - Q_2(z, \mu))(E - zF(\mu))^{-1}.$$

Воспользуемся далее асимптотическими представлениями для $Q_1(z, \mu)$ и $Q_2(z, \mu)$, вытекающими из (6) и (7), в силу которых

$$Q_0(z, \mu) = (E - zF(\mu))^{-1} + \frac{\exp\{-(i\mu + \mu_-(z))a\}\left(1 - \mu^b(z) h_2(z)\right)}{1 - \mu^{a+b}(z) h(z)} \times$$

$$\times \frac{\mu_-(z) - a_-}{i\mu + \mu_-(z)} A_{z-} \mathscr{L}_{z-}^{-1}(i\mu_-(z)) L_{z+}^{-1}(\mu) + \frac{\exp\{(i\mu + \mu_+(z))b\}\left(1 - \mu^a(z) h_1(z)\right)}{1 - \mu^{a+b}(z) h(z)} \times$$

$$\times \frac{\mu_+(z) - a_+}{i\mu + \mu_+(z)} A_{z+} \mathscr{R}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z)) R_{z-}^{-1}(\mu) +$$

$$+ \left(\left\| \int_b^{\infty} \mathrm{e}^{i\mu y} d_y r_{jk}(z, y) \right\| + \left\| \int_{-\infty}^{-a+0} \mathrm{e}^{i\mu y} d_y \widetilde{r}_{jk}(z, y) \right\| \right) (E - zF(\mu))^{-1}. \tag{28}$$

Здесь $\left\|\int\limits_b^\infty e^{i\mu y}d_y r_{jk}(z,\ y)\right\|$ и $\left\|\int\limits_{-\infty}^{-a+0} e^{i\mu y}d_y\widetilde{r}_{jk}(z, y)\right\|$ — остаточные члены в асимптотических представлениях для $Q_2(z,\ \mu)$ и $Q_1(z,\ \mu)$ соответственно; первый из них введен в (26), (27), второй обладает свойством

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{x} d_y\widetilde{r}_{jk}(z, y)\right| = O\left(e^{(v_0+\gamma)x}\right) + O\left(e^{v_0x+\gamma(x+a-b)}\right), \quad x \leqslant -a.$$

Так как при рассматриваемых z и μ все собственные числа матрицы $zF(\mu)$ по модулю меньше единицы, то

$$(E - zF(\mu))^{-1} = E + zF(\mu) + z^2F^2(\mu) + \ldots =$$
$$= \left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y}d_y\sum_{n=0}^{\infty} z^n\mathbf{P}(S_n\in dy, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j)\right\|. \tag{29}$$

Пусть, далее,

$$(i\mu + \mu_-(z))^{-1}L_{z+}^{-1}(\mu) = \left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y}d_yf_{jk}^{(1)}(z, y)\right\|,$$

$$(i\mu + \mu_+(z))^{-1}R_{z-}^{-1}(\mu) = \left\|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y}d_yf_{jk}^{(2)}(z, y)\right\|,$$

тогда

$$\left[\frac{e^{-i\mu a}L_{z+}^{-1}(\mu)}{i\mu + \mu_-(z)}\right]^{[x_1,x_2]} = \left\|\int\limits_{x_1}^{x_2+0} e^{i\mu y}d_yf_{jk}^{(1)}(z, y+a)\right\|,$$

$$\left[\frac{e^{i\mu b}R_{z-}^{-1}(\mu)}{i\mu + \mu_+(z)}\right]^{[x_1,x_2]} = \left\|\int\limits_{x_1}^{x_2+0} e^{i\mu y}d_yf_{jk}^{(2)}(z, y-b)\right\|,$$

значит, при $b - x_2 \to \infty$, $a + x_1 \to \infty$ для получения асимптотических представлений функции $S(z,\ [x_1,\ x_2])$ необходимо изучить асимптотику функций $f_{jk}^{(1)}(z, y)$ при $y \to \infty$ и $f_{jk}^{(2)}(z, y)$ при $y \to -\infty$. Для первой из них

$$L_{z+}^{-1}(\mu)(i\mu + \mu_-(z))^{-1} = \mathscr{L}_{z+}^{-1}(\mu)F_{z+}(\mu)(i\mu + \mu_-(z))^{-1} =$$
$$= \mathscr{L}_{z+}^{-1}(\mu)(i\mu + \mu_-(z))^{-1} - \frac{\mu_+(z) - a_+}{(i\mu + \mu_+(z))(i\mu + \mu_-(z))}\mathscr{L}_{z+}^{-1}(\mu)A_{z+} =$$
$$= -\frac{\mu_+(z) - a_+}{(i\mu+\mu_-(z))(i\mu+\mu_+(z))}\mathscr{L}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z))A_{z+} + q_1(z, \mu),$$

где $q_1(z,\ \mu) \in V(v_0 - \gamma,\ v_0)$, кроме того,

$$(i\mu + \mu_-(z))^{-1}(i\mu + \mu_+(z))^{-1} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(i\mu+\mu_-(z))y}\int\limits_{\max(0,y)}^{\infty} e^{(\mu_+(z)-\mu_-(z))t}\,dt\,dy,$$

стало быть

$$\left\|\int\limits_{a+x_1}^{a+x_2+0} d_yf_{jk}^{(1)}(z, y)\right\| = \frac{e^{\mu_+(z)(x_2+a)} - e^{\mu_+(z)(x_1+a)}}{\mu_+(z)(\mu_-(z) - \mu_+(z))}(\mu_+(z) - a_+)\times$$
$$\times\mathscr{L}_{z+}^{-1}(i\mu_+(z))A_{z+} + O\left(e^{(v_0-\gamma)(a+x_1)}\right) + O\left(e^{(v_0-\gamma)(a+x_2)}\right). \tag{30}$$

Аналогично находим

$$\frac{R_{z-}^{-1}(\mu)}{i\mu + \mu_+(z)} = -\frac{(\mu_-(z) - a_-)\mathscr{R}_{z-}^{-1}(i\mu_-(z))A_{z-}}{(i\mu + \mu_-(z))(i\mu + \mu_+(z))} + q_2(z, \mu),$$

где $q_2(z, \mu) \in V(v_0, v_0+\gamma)$, следовательно,

$$\left\| \int\limits_{x_1-b}^{x_2-b+0} d_y f_{jk}^{(2)}(z, y) \right\| = \frac{e^{\mu_-(z)(x_2-b)} - e^{\mu_-(z)(x_1-b)}}{\mu_-(z)(\mu_-(z)-\mu_+(z))} (\mu_-(z) - a_-) \times$$

$$\times \mathcal{R}_{z-}^{-1}(i\mu_-(z)) A_{z-} + O\left(e^{(v_0+\gamma)(x_2-b)}\right) + O\left(e^{(v_0+\gamma)(x_1-b)}\right). \qquad (31)$$

Соотношения (29)—(31) вместе с (28) дают главные члены в разложении (8). Осталось исследовать остаточный член в (28). Пусть

$$(E - zF(\mu))^{-1} = \left\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d_y g_{jk}(z, y) \right\|.$$

Изучим поведение $g_{jk}(z, y)$ при $y \to \pm\infty$. Имеем

$$(E - zF(\mu))^{-1} = F_{z+}(\mu) \mathcal{R}_z^{-1}(\mu) F_{z-}(\mu) = \mathcal{R}_z^{-1}(\mu) -$$

$$- (\mu_+(z) - a_+)(i\mu + \mu_+(z))^{-1} A_{z+} \mathcal{R}_z^{-1}(\mu) -$$

$$- (\mu_-(z) - a_-)(i\mu + \mu_-(z))^{-1} \mathcal{R}_z^{-1}(\mu) A_{z-} +$$

$$+ \frac{(\mu_+(z) - a_+)(\mu_-(z) - a_-)}{(i\mu + \mu_-(z))(i\mu + \mu_+(z))} A_{z+} \mathcal{R}_z^{-1}(\mu) A_{z-}.$$

Выделяя, как и ранее, особенности функции $(E - zF(\mu))^{-1}$, получаем

$$\int\limits_x^{\infty} d_y g_{jk}(z, y) = c_{jk}(z)(\mu_-(z) - \mu_+(z))^{-1} \int\limits_x^{\infty} e^{\mu_+(z)t} dt + O\left(e^{(v_0-\gamma)x}\right), \quad x \to \infty,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{x} d_y g_{jk}(z, y) = \tilde{c}_{jk}(z)(\mu_-(z) - \mu_+(z))^{-1} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\mu_-(z)t} dt + O\left(e^{(v_0+\gamma)x}\right), \quad x \to -\infty,$$

где функции c_{jk}, $\tilde{c}_{jk}$ ограничены в $\mathcal{D}_\delta$. Следовательно, в представлении

$$\left(\left\| \int\limits_b^{\infty} e^{i\mu y} d_y r_{jk}(z, y) \right\| + \left\| \int\limits_{-\infty}^{-a} e^{i\mu y} d_y \tilde{r}_{jk}(z, y) \right\| \right) (E - zF(\mu))^{-1} = \left\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d_y \rho_{jk}(z, y) \right\|$$

имеем после несложных вычислений

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} d_y \rho_{jk}(z, y) = \left[O\left(e^{v_0 x_2}\right) + O\left(e^{v_0 x_1}\right) \right] \left[O\left(e^{-\gamma a}\right) + O\left(e^{-\gamma b}\right) \right] (\mu_-(z) - \mu_+(z))^{-1}.$$

Таким образом, с учетом (30) и (31) суммарный остаточный член в (8) будет иметь вид

$$\left[O\left(e^{(v_0-\gamma)(a+x_1)}\right) + O\left(e^{(v_0-\gamma)(a+x_2)}\right) \right] e^{-\mu_-(z)a} +$$

$$+ \left[O\left(e^{(v_0+\gamma)(x_2-b)}\right) + O\left(e^{(v_0+\gamma)(x_1-b)}\right) \right] e^{\mu_+(z)b} +$$

$$+ \left[O\left(e^{v_0 x_2}\right) + O\left(e^{v_0 x_1}\right) \right] \left[O\left(e^{-\gamma a}\right) + O\left(e^{-\gamma b}\right) \right] (\mu_-(z) - \mu_+(z))^{-1} =$$

$$= \left[O\left(e^{v_0 x_2 - \gamma \min(a,\, b-x_2)}\right) + O\left(e^{v_0 x_1 - \gamma \min(b,\, a+x_1)}\right) \right] (z - z_0)^{-1/2}.$$

Теорема 2 доказана.

Для последующего контурного интегрирования производящих функций T_{jk} и S_{jk} нам потребуется их оценка на множестве $L_\delta = \{|z| = z_0, |z - z_0| \geqslant \delta\}$. Рассмотрим сначала $T_{jk}(z, (-\infty, x])$ при $x \leqslant -a$. Нетрудно видеть, что при $z \in L_\delta$ $Q_1(z, \mu) \in V_-(v_0+\gamma)$ при некотором $\gamma > 0$. Это следует из (11), так как $L_{z-}^{\pm 1}(\mu) \in V_-(v_0+\gamma)$, $Q_2(z, \mu) \in V_+(v_0+\gamma)$, и потому $[(E - Q_2(z, \mu)) L_{z-}^{-1}(\mu)]^{(-\infty, -a]} \in V_-(v_0+\gamma)$. Применяя опять лемму 2 из [2], будем иметь при $z \in L_\delta$

$$T_{jk}(z, (-\infty, x]) = O\left(e^{(v_0+\gamma)x}\right), \quad x \leqslant -a \tag{32}$$

равномерно по z, a и b. Аналогично

$$T_{jk}(z, [x, \infty)) = O\left(e^{(v_0-\gamma)x}\right), \quad x \geqslant b \tag{33}$$

равномерно по $z \in L_\delta$, a и b. Далее, в силу основного тождества (9)

$$S_{jk}(z, \ [x_1, x_2]) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{P}(S_n \in [x_1, x_2], \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j) -$$

$$- \sum_{q=1}^{m} \left(\int_{x_1}^{x_2} d_y \int_{b}^{\infty} g_{qk}(z, y-t)\, T_{jq}(z, dt) - \int_{x_1}^{x_2} d_y \int_{-\infty}^{-a} g_{qk}(z, y-t)\, T_{jk}(z, dt) \right)$$

и остается воспользоваться в этом соотношении формулами (32), (33) и асимптотическими представлениями

$$\int_{x}^{\infty} d_y g_{jk}(z, y) = O\left(e^{(v_0-\gamma)x}\right), \ \int_{-\infty}^{-x} d_y g_{jk}(z, y) = O\left(e^{-(v_0+\gamma)x}\right), \quad x \to \infty,$$

которые справедливы при $z \in L_\delta$, так как $(E - zF(\mu))^{-1} \in V(v_0 - \gamma, v_0 + \gamma)$ для таких z. Получаем в итоге равномерно по $z \in L_\delta$, x_1 и x_2

$$S_{jk}(z, [x_1, x_2]) - \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{P}(S_n \in [x_1, x_2], \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j) =$$

$$= O\left(e^{v_0 x_2 - \gamma \min(a,b)}\right) + O\left(e^{v_0 x_1 - \gamma \min(a,b)}\right). \tag{34}$$

§ 4. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Обозначим через Γ контур, полученный из дуги $|z| = z_0$, $|z - z_0| < \delta$ искривлением внутрь $\mathcal{D}_\delta$ вблизи точки $z = z_0$. Имеем тогда

$$\mathbf{P}(S_N \in A, N = n, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=z_0} T_{jk}(z, A)\, z^{-n-1}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T_{jk}(z, A)\, z^{-n-1}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\delta} T_{jk}(z, A)\, z^{-n-1}\, dz.$$

В силу (32) и (33) последний интеграл есть $O\left(z_0^{-n} e^{(v_0+\gamma)x}\right)$ при $A = (-\infty, x]$, $x \leqslant -a$ и $O\left(z_0^{-n} e^{(v_0-\gamma)x}\right)$ при $A = [x, \infty)$, $x \geqslant b$. Точно так же в силу (34) для нахождения $\mathbf{P}(S_n \in [x_1, x_2], N \leqslant n, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j)$ достаточно вести интегрирование соответствующей производящей функции лишь по контуру Γ, образующаяся при этом погрешность имеет порядок, указанный в (34), умноженный на z_0^{-n}. Во всех случаях вдоль контура Γ мы можем заменить производящие функции их асимптотическими представлениями (6)—(8). Дело сводится, таким образом, к необходимости строить асимптотические разложения для интегралов вида

$$J(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} G(z)\, z^{-n-1}\, dz,$$

где функция G имеет вид

$$G_1(z) = f(z) \exp\{(k_1\mu_+(z) - k_2\mu_-(z))\, a + (k_3\mu_+(z) - k_4\mu_-(z))\, b\} \times$$

$$\times \frac{1 - \mu^b(z)\, h_2(z)}{1 - \mu^{a+b}(z)\, h(z)} + \frac{\delta(z)}{(z - z_0)^{1/2}}$$

или

$$G_2(z) = f(z) \exp\{(k_1\mu_+(z) - k_2\mu_-(z))\, b + (k_3\mu_+(z) - k_4\mu_-(z))\, a\} \times$$

$$\times \frac{1 - \mu^a(z)\, h_1(z)}{1 - \mu^{a+b}(z)\, h(z)} + \frac{\delta(z)}{(z - z_0)^{1/2}}.$$

Здесь $k_1, \ldots, k_4$ — неотрицательные постоянные величины, $f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} f_k i^k (z - z_0)^{k/2}$, $\delta(z)$ — аналитическая в $\mathscr{D}_\delta$ и непрерывная на границе функция, оценки которой содержатся в (6) — (8).

Подробное изложение способа построения полных асимптотических разложений для интегралов подобного вида содержится в [9] с той лишь разницей, что там предполагается $z_0 = 1$, что несущественно с точки зрения применения метода. В связи с этим мы ограничимся здесь кратким изложением схемы действий с формулировкой результатов и указанием алгоритмов вычисления коэффициентов разложений. Рассмотрим сначала случай $G(z) = G_1(z)$ и пусть $a = a(n) = o(n)$, $b = b(n) = o(n)$, $n \to \infty$. Интеграл

$$\frac{z_0^n}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\delta(z)\, dz}{(z - z_0)^{1/2} z^{n+1}}$$

имеет ту же оценку, что и $\delta(z)$ в $\mathscr{D}_\delta$, а функцию $\Pi(z) = (1 - \mu^b(z) \times h_2(z))(1 - \mu^{a+b}(z) h(z))^{-1}$ при любом $M \geqslant 1$ можно представить в виде $\Pi(z) = \sum_{s=0}^{M-1} (1 - \mu^b(z) h_2(z)) \mu^{(a+b)s}(z) h^s(z) + \Pi(z) \mu^{(a+b)M}(z) h^M(z)$. В соответствии с этим с точностью до экспоненциального остатка известного вида $J(n)$ можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{s=0}^{M-1} (J_{1s}(n) - J_{2s}(n)) + J_M(n)\right],$$

где

$$J_{rs}(n) = z_0^{-n} e^{v_0[a(k_1-k_2)+b(k_3-k_4)]} \int_\Gamma \tilde{a}_r(z)\, e^{n\tilde{h}_{rs}(z)}\, dz, \quad s = 0, \ldots, M-1,$$

$$J_M(n) = z_0^{-n} e^{v_0[a(k_1-k_2)+b(k_3-k_4)]} \int_\Gamma \tilde{a}_1(z)\, \Pi(z)\, e^{n\tilde{h}_{1M}(z)}\, dz,$$

$$\tilde{h}_{1s}(z) = (\tau_1 s + \tau_2 s)(\mu_+(z) - \mu_-(z)) + \tau_1 (k_1\mu_+(z) - k_2\mu_-(z)) + \tau_2 (k_3\mu_+(z) - k_4\mu_-(z)) + s\tau_3 \ln h(z) - \ln\frac{z}{z_0} - \tau_1 v_0 (k_1 - k_2) - \tau_2 v_0 (k_3 - k_4),$$

$$\tilde{h}_{2s}(z) = \tilde{h}_{1s}(z) + \tau_2(\mu_+(z) - \mu_-(z)), \quad \tilde{a}_1(z) = f(z) z^{-1},$$

$$\tilde{a}_2(z) = h_2(z)\, \tilde{a}_1(z), \quad \tau_1 = \frac{a}{n}, \quad \tau_2 = \frac{b}{n}, \quad \tau_3 = \frac{1}{n},$$

и пусть после замены $t = i(z - z_0)^{1/2}$

$$a_r(t) = -2t\tilde{a}_r(z), \ \eta(t) = h(z), \ \psi_\pm(t) = \mu_\pm(z), \ h_{rs}(t) = \tilde{h}_{rs}(z)$$

(везде в дальнейшем переменная r принимает значения только 1 или 2). Пусть Γ_1 — образ Γ в плоскости переменной t, тогда

$$J_{rs}(n) = z_0^{-n} e^{v_0[a(k_1-k_2)+b(k_3-k_4)]} \int_{\Gamma_1} a_r(t)\, e^{nh_{rs}(t)}\, dt.$$

Исследование этих интегралов проводится с помощью модификации метода перевала, изложенной в [2]. Точки перевала t_{rs} функций $h_{rs}(t)$ определяются из уравнений $h'_{rs}(t) = 0$. Рассмотрим уравнения

$$F_1(t, z_1, z_2, z_3, z_4) \equiv z_1(\psi'_+(t) - \psi'_-(t)) + z_2 \frac{\eta'(t)}{\eta(t)} + z_3(k_1\psi'_+(t) - k_2\psi'_-(t)) + z_4(k_3\psi'_+(t) - k_4\psi'_-(t)) + \frac{2t}{z_0 - t^2} = 0, \tag{35}$$

$$F_2(t, z_1, z_2, z_3, z_4) \equiv F_1(t, z_1, z_2, z_3, z_4) + z_4(\psi'_+(t) - \psi'_-(t)) = 0. \tag{36}$$

Существуют решения $t_1(z_1, z_2, z_3, z_4)$ и $t_2(z_1, z_2, z_3, z_4)$ уравнений (35) и (36) соответственно, представимые в некоторой τ-окрестности нуля в виде сходящихся рядов по степеням z_1, z_2, z_3, z_4. Коэффициенты этих разложений без труда вычисляются известным образом. Заметим, что

$$h'_{rs}(t) = F_r(t, (\tau_1+\tau_2)s, \tau_3 s, \tau_1, \tau_2). \tag{37}$$

Полагая $M-1=[\tau n/(a+b)]$, мы обеспечим принадлежность τ-окрестности нуля всех аргументов в (37). Таким образом, для точек перевала t_{rs} получим разложения по степеням $(\tau_1+\tau_2)s$, $\tau_3 s$, τ_1, τ_2, а после перегруппировки — по степеням τ_1, τ_2, τ_3:

$$t_{rs} \equiv t_r((\tau_1+\tau_2)s, \tau_3 s, \tau_1, \tau_2) = -\psi_1 z_0\left(s+\frac{k_1+k_2}{2}\right)\tau_1 - \\ -\psi_1 z_0\left(s+\frac{k_3+k_4}{2}+r-1\right)\tau_2 - \frac{s\eta_1 z_0}{2}\tau_3 + O((\tau_1+\tau_2)^2 s^2).$$

Число ψ_1 определено в (4), $\eta_1=\eta'(0)$. Поскольку в окрестности нуля

$$h_{rs}(t) = \psi_1 t\,[(2s+k_1+k_2)\tau_1 + (2(s+r-1)+k_3+k_4)\tau_2] + \\ + s\eta_1\tau_3 t + \frac{t^2}{z_0}[1+O(s(\tau_1+\tau_2))] + O(t^3),$$

справедливы разложения

$$h_{rs}(t_{rs}) = -z_0\left[\psi_1\left(s+\frac{k_1+k_2}{2}\right)\tau_1 + \psi_1\left(s+r-1+\frac{k_3+k_4}{2}\right)\tau_2 + \right. \\ \left. + \frac{s\eta_1}{2}\tau_3\right]^2 + O((\tau_1+\tau_2)^3 s^3),$$

$$h''_{rs}(t_{rs}) = \frac{2}{z_0} + O(s(\tau_1+\tau_2)).$$

Применение метода Лапласа оценки интегралов дает нам при каждом целом $q \geqslant 1$

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{s=0}^{M-1}(J_{1s}(n) - J_{2s}(n)) = z_0^{-n} e^{v_0[a(k_1-k_2)+b(k_3-k_4)]} \times \\ \times\left[\sum_{j=0}^{q-1} n^{-j-\frac{1}{2}} \sum_{s=0}^{M-1}\left(D_{1sj}e^{nh_{1s}(t_{1s})} - D_{2sj}e^{nh_{2s}(t_{2s})}\right) + \right. \\ \left. + n^{-q-\frac{1}{2}}\sum_{s=0}^{M-1}\left(R_{1sq}e^{nh_{1s}(t_{1s})} - R_{2sq}e^{nh_{2s}(t_{2s})}\right)\right], \tag{38}$$

где величины R_{rsj} ограничены равномерно по $s=0, \ldots, M-1$ и n,

$$D_{rsj} = \frac{(-1)^{1/2}}{2\pi}\sum_{i=0}^{2j} q_{2j,i}^{r,s}\left(-h_{rs}^{(0)}\right)^{-i-j-\frac{1}{2}}\Gamma\left(i+j+\frac{1}{2}\right),$$

а $q_{j,i}^{r,s}$ — коэффициент при z^j в произведении

$$\frac{1}{i!}\left(a_{rs}^{(0)} + a_{rs}^{(1)}z + \ldots\right)\left(h_{rs}^{(1)}z + h_{rs}^{(2)}z^2 + \ldots\right)^i,$$

$$a_{rs}^{(k)} = \frac{a_r^{(k)}(t_{rs})}{k!}, \quad h_{rs}^{(k)} = \frac{1}{(k+2)!}h_{rs}^{(k+2)}(t_{rs}), \quad k=0, 1, \ldots.$$

В силу выбора числа M интегралом $J_M(n)$ можно пренебречь (см. [9]).

Если $\frac{a+b}{\sqrt{n}} \to \infty$, то при суммировании по s в (38) достаточно ограничиться слагаемым при $s=0$, все последующие будут отличаться от него множителем порядка $O\left(e^{-\gamma(a+b)^2/n}\right)$. Это и даст нам окончательный результат для таких a и b.

Пусть

$$a = a_1\sqrt{n},\ b = b_1\sqrt{n},\ 0 < c_1 \leqslant a_1,\ b_1 \leqslant c_2 < \infty. \tag{39}$$

В этом случае суммирование по s в (38) можно распространить до ∞, что не изменит вида остаточного члена. Имеем здесь $\tau_1 = \frac{a_1}{\sqrt{n}}$, $\tau_2 = \frac{b_1}{\sqrt{n}}$, $\tau_3 = \frac{1}{n}$ и справедливо разложение

$$D_{rsj} \exp\left\{nh_{rs}(t_{rs}) + \psi_1^2 z_0\left[a_1\left(s + \frac{k_1+k_2}{2}\right) + b_1\left(s + r - 1 + \frac{k_3+k_4}{2}\right)\right]^2\right\} = \\ = \sum_{i=0}^{\infty} n^{-i/2} q_i^{r,j}(s),$$

где $q_i^{r,j}(s)$ — многочлены от s, a_1 и b_1 степени не выше $3i$ по каждой переменной. Обозначим

$$P_{ij} = \sum_{s=0}^{\infty}\left(q_i^{1,j}(s)\exp\left\{-\psi_1^2 z_0\left[a_1\left(s + \frac{k_1+k_2}{2}\right) + b_1\left(s + \frac{k_3+k_4}{2}\right)\right]^2\right\} - \right. \\ \left. - q_i^{2,j}(s)\exp\left\{-\psi_1^2 z_0\left[a_1\left(s + \frac{k_1+k_2}{2}\right) + b_1\left(s + 1 + \frac{k_3+k_4}{2}\right)\right]^2\right\}\right), \tag{40}$$

тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{s=0}^{M-1}(J_{1s}(n) - J_{2s}(n)) = z_0^{-n} e^{v_0[a(k_1-k_2)+b(k_3-k_4)]} \times \\ \times\left(\sum_{j=0}^{q-1} n^{-j-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} n^{-i/2} P_{ij} + O\left(n^{-q-\frac{1}{2}}\right)\right)$$

при каждом $q \geqslant 1$. Заметим, что коэффициенты P_{ij} зависят среди всего прочего от пяти параметров: $P_{ij} = P_{ij}(k_1, k_2, k_3, k_4, j)$. Этими обозначениями мы в дальнейшем будем пользоваться.

Наконец, мы можем рассмотреть ситуацию $b = b_1\sqrt{n}$, $a = o(b)$ или, наоборот, $a = a_1\sqrt{n}$, $b = o(a)$. Здесь получатся полные асимптотические разложения для $J(n)$ по степеням величин $\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ и $\theta_2 = \frac{a}{\sqrt{n}}$ в первом случае и по степеням θ_1 и $\theta_3 = \frac{b}{\sqrt{n}}$ во втором. Подробно это сделано в [9], поэтому мы ограничимся ссылкой на эту работу.

Для исследования $J(n)$ при $G(z) = G_2(z)$ достаточно в предыдущих рассмотрениях заменить $h_2(z)$ на $h_1(z)$ и поменять местами a и b. Полученные в этой ситуации коэффициенты P_{ij} мы будем снабжать штрихами.

Перейдем к окончательным формулировкам теорем. Ясно, что описанный выше метод вместе с найденными в § 3 асимптотическими представлениями производящих функций позволяет получать полные асимптотические разложения для распределений $\mathbf{P}(S_N \in A,\ N = n,\ \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j)$ при любых $A \subset (-\infty, -a] \cup [b, \infty)$ и для $\mathbf{P}(S_n \in [x_1, x_2],\ N \leqslant n,\ \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j)$ при $a + x_1 \to \infty$, $b - x_2 \to \infty$ во всем спектре уклонений, совместимых с требованиями $a \to \infty$, $b \to \infty$, $a + b = o(n)$, $a + b \geqslant c\sqrt{n}$. Мы приведем здесь некоторые из них.

Теорема 3. *Пусть* $(a+b)/\sqrt{n}\to\infty$ *при* $n\to\infty$. *Тогда для любого* $x\leqslant -a$ *и любого целого* $q\geqslant 1$

$$\mathbf{P}(S_N\leqslant x, N=n, \varkappa_n=k/\varkappa_0=j)=$$
$$=z_0^{-n}e^{-v_0a}\left[\sum_{l=0}^{q-1} n^{-l-\frac{1}{2}}\left(D_{10l}e^{nh_{10}(t_{10})}-D_{20l}e^{nh_{20}(t_{20})}\right)+\right.$$
$$\left.+n^{-q-\frac{1}{2}}O\left(\exp\{-z_0\psi_1^2a^2/n\}\right)\right](1+O(\exp\{-\gamma(a+b)^2/n\}))+$$
$$+O\left(z_0^{-n}e^{(v_0+\gamma)x}\right)+O\left(z_0^{-n}e^{(v_0+\gamma)(x+a-b)}\right),$$

при этом в определении D_{2ol} *следует положить* $f(z)=\int\limits_{-\infty}^{x+a}u_{jk}(z,y)\,dy$, $k_1=$ $=k_3=k_4=0$, $k_2=1$.

Ясно, что в случае достаточно быстрого роста b, например, при $b=n^{1/2+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, слагаемое $D_{20l}e^{nh_{20}(t_{20})}$ отличается от $D_{10l}e^{nh_{10}(t_{10})}$ множителем порядка $e^{-\gamma n^{2\varepsilon}}$ и по этой причине может быть отнесено в остаточный член, т. е. в этом случае двуграничная задача сводится к однограничной.

Аналогичным образом может быть выписано разложение для $\mathbf{P}(S_N\geqslant x,\ N=n,\ \varkappa_n=k/\varkappa_0=j)$, $x\geqslant b$.

Далее рассмотрим наиболее важную, на наш взгляд, ситуацию нормальных уклонений границ.

Теорема 4. *Пусть выполнено* (39). *Тогда для каждого целого* $q\geqslant 1$ *справедливо*

1) $\mathbf{P}(S_N\leqslant x,\ N=n,\ \varkappa_n=k/\varkappa_0=j)=$

$$=z_0^{-n}e^{-v_0a}\left[\sum_{l=0}^{q-1} n^{-l-\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{\infty} n^{-i/2}P_{il}(0,1,0,0,f_x^{j,k})+O\left(n^{-q-\frac{1}{2}}\right)\right],$$

где $x\leqslant -a$, $f_x^{j,k}(z)=\int\limits_{-\infty}^{x+a}u_{jk}(z,y)\,dy$, $P_{00}(0,1,0,0,f_x^{j,k})=0$, $P_{10}(0,1,0,0,$

$$f_x^{j,k})=f_x^{j,k}(z_0)z_0^{1/2}\psi_1\pi^{-1/2}\sum_{s=0}^{\infty}\left\{\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)a_1+sb_1\right]e^{-\psi_1^2z_0\left[a_1\left(s+\frac{1}{2}\right)+sb_1\right]^2}-\right.$$
$$\left.-\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)a_1+(s+1)b_1\right]e^{-\psi_1^2z_0\left[a_1\left(s+\frac{1}{2}\right)+b_1(s+1)\right]^2}\right\};$$

2) $P(S_N\geqslant x,\ N=n,\ \varkappa_n=k/\varkappa_0=j)=$

$$=z_0^{-n}e^{v_0b}\left[\sum_{l=0}^{q-1} n^{-l-\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{\infty} n^{-i/2}P'_{il}(1,0,0,0,\tilde{f}_x^{j,k})+O\left(n^{-q-\frac{1}{2}}\right)\right],$$

где $x\geqslant b$, $\tilde{f}_x^{j,k}(z)=\int\limits_{x-b}^{\infty}v_{jk}(z,y)\,dy$, $P'_{00}(1,0,0,0,\tilde{f}_x^{i,k})=0$, $P'_{10}(1,0,0,0,$

$$\tilde{f}_x^{j,k})=\tilde{f}_x^{j,k}(z_0)z_0^{1/2}\psi_1\pi^{-1/2}\sum_{s=0}^{\infty}\left\{\left[sa_1+\left(s+\frac{1}{2}\right)b_1\right]e^{-\psi_1^2z_0\left[sa_1+\left(s+\frac{1}{2}\right)b_1\right]^2}-\right.$$
$$\left.-\left[(s+1)a_1+\left(s+\frac{1}{2}\right)b_1\right]e^{-\psi_1^2z_0\left[(s+1)a_1+\left(s+\frac{1}{2}\right)b_1\right]^2}\right\}.$$

Теорема 5. *Пусть* $-a<x_1<0<x_2<b$ *и выполнено* (39). *Тогда при любом целом* $q\geqslant 1$

1) *если x_1 и x_2 не зависят от n, то*

$$\mathbf{P}(S_n \in [x_1, x_2],\ N \leqslant n,\ \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j) =$$

$$= z_0^{-n} \sum_{l=0}^{q-1} n^{-l-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} n^{-i/2} \left(P_{il}(1, 1, 0, 0, f_{j,k}^{(1)}) + P'_{il}(1, 1, 0, 0, f_{j,k}^{(2)})\right) +$$

$$+ O\left(n^{-q-\frac{1}{2}} z_0^{-n}\right),$$

$$f_{j,k}^{(1)}(z) = \frac{e^{\mu_+(z)x_2} - e^{\mu_+(z)x_1}}{\mu_+(z)(\mu_-(z) - \mu_+(z))} \widetilde{K}_{jk}(z),\quad f_{j,k}^{(2)}(z) = \frac{e^{\mu_-(z)x_2} - e^{\mu_-(z)x_1}}{\mu_-(z)(\mu_-(z) - \mu_+(z))} K_{jk}(z),$$

$$P_{00}(1, 1, 0, 0, f_{j,k}^{(1)}) + P'_{00}(1, 1, 0, 0, f_{j,k}^{(2)}) =$$

$$= \frac{\left(e^{v_0 x_2} - e^{v_0 x_1}\right) \widetilde{K}_{jk}(z_0)}{2\sqrt{\pi}\, v_0 \psi_1 z_0^{1/2}} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\exp\{-\psi_1^2 z_0 [a_1(s+1) + b_1 s]^2\} +\right.$$

$$\left. + \exp\{-\psi_1^2 z_0 [a_1 s + b_1(s+1)]^2\} - 2\exp\{-\psi_1^2 z_0 [a_1(s+1) + b_1(s+1)]^2\}\right);$$

2) *если $|x_1| = \alpha a$, $x_2 = \beta b$, где α и β — постоянные величины, и $v_0 \neq 0$, то при любом целом $q \geqslant 1$*

$$\mathbf{P}(S_n \in [x_1, x_2],\ N \leqslant n,\ \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j) =$$

$$= z_0^{-n} e^{v_0 x_2} \left[\sum_{l=0}^{q-1} n^{-l-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} n^{-i/2} (P_{il}(1, 1, \beta, 0, F_{jk}^{(1)}) +\right.$$

$$\left. + P'_{il}(1, 1-\beta, 0, 0, F_{jk}^{(2)})) + O\left(n^{-q-\frac{1}{2}}\right)\right] - z_0^{-n} e^{v_0 x_1} \left[\sum_{l=0}^{q-1} n^{-l-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} n^{-i/2} \times\right.$$

$$\left. \times (P_{il}(1-\alpha, 1, 0, 0, F_{jk}^{(1)}) + P'_{il}(1, 1, 0, \alpha, F_{jk}^{(2)})) + O\left(n^{-q-\frac{1}{2}}\right)\right],$$

$$F_{jk}^{(1)}(z) = \frac{\widetilde{K}_{jk}(z)}{\mu_+(z)(\mu_-(z) - \mu_+(z))},\quad F_{jk}^{(2)}(z) = \frac{K_{jk}(z)}{\mu_-(z)(\mu_-(z) - \mu_+(z))},$$

коэффициенты P_{il} определены в (40), при этом $q_0^{1,0}(s) = q_0^{2,0}(s) = = \frac{K_{jk}(z_0)}{2\sqrt{\pi}\, v_0 \psi_1 z_0^{1/2}}$, P'_{00} отличается от P_{00} тем, что a_1 и b_1 меняются местами.

Если $v_0 = 0$ и $-x_1 = \alpha a$, $x_2 = \beta b$, $0 < \alpha$, $\beta < 1$, то подход, примененный в п. 2) теоремы 5 неприменим, так как в этом случае функции $a_r(t)$ имеют простой полюс в нуле. В этой ситуации, однако, применима другая модификация метода перевала, разработанная А. А. Боровковым в [2] как раз для того случая, когда функция $a_r(t)$ имеет простой полюс вблизи точки перевала. Эта модификация приспособлена для использования в двуграничной задаче в [13], где при $m = 1$ с ее помощью найдены полные асимптотические разложения вероятностей вида $\mathbf{P}(S_N \in A, N \leqslant n)$.

Другая возможность здесь — перейти к локальным характеристикам распределения $\mathbf{P}(S_n \in A,\ N \leqslant n,\ \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j)$. Как следует из (8), для него справедливо представление

$$\mathbf{P}(S_n \in A,\ N \leqslant n,\ \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j) = P_{1,n}(A) + P_{2,n}(A),$$

где мера $P_{1,n}(A)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, а мера $P_{2,n}(A)$ имеет известную экспоненциальную оценку и соответствует остаточному члену в (8). (Для краткости в обозначениях $P_{z,n}(A)$ мы опускаем зависимость от j, k, a и b.) Пусть $p_{1,n}(y)$ — плотность, соответствующая $P_{1,n}(A)$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{1,n}(y) = \left(\frac{\mu^a(z)\left(1 - \mu^b(z) h_2(z)\right)}{1 - \mu^{a+b}(z) h(z)} \widetilde{K}_{jk}(z) e^{\mu_+(z)y} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu^b(z)\left(1 - \mu^a(z) h_1(z)\right)}{1 - \mu^{a+b}(z) h(z)} K_{jk}(z) e^{\mu_-(z)y}\right) (\mu_-(z) - \mu_+(z))^{-1} \tag{41}$$

и, обозначив $y = -\theta_1 a$ или $y = \theta_2 b$, $0 < \theta_1 \leqslant \alpha$, $0 < \theta_2 \leqslant \beta$, мы вновь можем применить к правой части (41) изложенную выше схему асимптотического анализа. При этом коэффициенты полученных разложений будут функциями от θ_1 или θ_2.

В заключение заметим, что асимптотические представления производящих функций (6), (7) представляют самостоятельный интерес и могут использоваться в других задачах. Так, при $z = z_0 = 1$ мы получаем из них распределение величины первого перескока через границу интервала $(-a, b)$ с точностью до экспоненциально малого остатка, что, в свою очередь, может быть использовано, например, для нахождения с помощью тождества Вальда асимптотических разложений величины $\mathbf{E}N$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боровков А. А.** О факторизационных тождествах и свойствах распределения супремума последовательных сумм // Теория вероятностей и ее применения.— 1970.— Т. 15, № 3.— С. 377—418.
2. **Боровков А. А.** Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // Сиб. мат. журн.— 1962.— Т. 3, № 5.— С. 645—694.
3. **Рогозин Б. А.** Распределение максимума процесса с независимыми приращениями // Там же.— 1969.— Т. 10, № 6.— С. 1334—1363.
4. **Пресман Э. Л.** Методы факторизации и граничная задача для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова // Изв. АН СССР. Сер. матем.— 1969.— Т. 33, № 4.— С. 861—900.
5. **Miller H. D.** A convexity property in the theory of random variables, defined on a finite Markov chain // Ann. Math. Statist.— 1961.— V. 32, N 4.— P. 1261—1270.
6. **Miller H. D.** A matrix factorization problem in the theory of random variables, defined on a finite Markov chain // Proc. Cambridge philos. Soc.— 1962.— V. 58, N 2.— P. 268—285.
7. **Арндт К.** Асимптотические свойства распределения супремума случайного блуждания на цепи Маркова // Теория вероятностей и ее применения— 1980.— Т. 25, № 2.— С. 313—328.
8. **Арндт К.** Об отыскании в явном виде распределения супремума случайного блуждания на цепи Маркова // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1982.— Т. 1.— С. 139—146.
9. **Лотов В. И.** Асимптотический анализ распределений в двуграничных задачах. I—II // Теория вероятностей и ее применения.— 1979.— Т. 29, № 3.— С. 475—485; № 4.— С. 873—879.
10. **Лотов В. И.** Об асимптотике распределений, связанных с выходом недискретного случайного блуждания из интервала // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1982.— Т. 1.— С. 18—25.
11. **Kemperman J. H. B.** A Wiener-Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary // Ann. Math. Statist.— 1963.— V. 34, N 4.— P. 1168—1193.
12. **Küchler I., Semjonov A.** Die Waldsche Fundamentalidentität und ein Sequentieller Quotiententest für eine zufällige Irrfahrt über einer homogenen irreduziblen Markovschen Kette mit endlichem Zustandsraum // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Statistics.— 1979.— V. 10, N 2.— S. 319—331.
13. **Лотов В. И.** Асимптотические разложения в двуграничных задачах для случайных блужданий: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— М., 1977.— 105 с.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О МАКСИМУМЕ ДЛИН СЕРИЙ «УСПЕХОВ» В МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ

С. Ю. НОВАК

Рассмотрим однородную марковскую цепь $\{\xi_i,\ i \geqslant 0\}$ с состояниями $\{1;\ 0\}$, переходными вероятностными $p_{11} = \alpha$, $p_{00} = \beta$, $0 < \alpha < 1$, $\beta < 1$, и начальным распределением $\mathbf{P}(\xi_0 = 1) = p$. Положим

$$\eta_n = \max\left\{k \leqslant n:\ \max_{0 \leqslant i \leqslant n-k} \mathbf{1}\{\xi_{i+1} = \ldots = \xi_{i+k} = 1\} = 1\right\}. \quad (0)$$