и, обозначив $y=-\theta_1 a$ или $y=\theta_2 b$, $0<\theta_1\leqslant\alpha$, $0<\theta_2\leqslant\beta$, мы вновь можем применить к правой части (41) изложенную выше схему асимптотического анализа. При этом коэффициенты полученных разложений будут функциями от θ_1 или θ_2.

В заключение заметим, что асимптотические представления производящих функций (6), (7) представляют самостоятельный интерес и могут использоваться в других задачах. Так, при $z=z_0=1$ мы получаем из них распределение величины первого перескока через границу интервала $(-a,\ b)$ с точностью до экспоненциально малого остатка, что, в свою очередь, может быть использовано, например, для нахождения с помощью тождества Вальда асимптотических разложений величины $\mathbf{E}N$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боровков А. А.** О факторизационных тождествах и свойствах распределения супремума последовательных сумм // Теория вероятностей и ее применения.— 1970.— Т. 15, № 3.— С. 377—418.
2. **Боровков А. А.** Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // Сиб. мат. журн.— 1962.— Т. 3, № 5.— С. 645—694.
3. **Рогозин Б. А.** Распределение максимума процесса с независимыми приращениями // Там же.— 1969.— Т. 10, № 6.— С. 1334—1363.
4. **Пресман Э. Л.** Методы факторизации и граничная задача для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова // Изв. АН СССР. Сер. матем.— 1969.— Т. 33, № 4.— С. 861—900.
5. **Miller H. D.** A convexity property in the theory of random variables, defined on a finite Markov chain // Ann. Math. Statist.— 1961.— V. 32, N 4.— P. 1261—1270.
6. **Miller H. D.** A matrix factorization problem in the theory of random variables, defined on a finite Markov chain // Proc. Cambridge philos. Soc.— 1962.— V. 58, N 2.— P. 268—285.
7. **Арндт К.** Асимптотические свойства распределения супремума случайного блуждания на цепи Маркова // Теория вероятностей и ее применения.— 1980.— Т. 25, № 2.— С. 313—328.
8. **Арндт К.** Об отыскании в явном виде распределения супремума случайного блуждания на цепи Маркова // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1982.— Т. 1.— С. 139—146.
9. **Лотов В. И.** Асимптотический анализ распределений в двуграничных задачах. I—II // Теория вероятностей и ее применения.— 1979.— Т. 29, № 3.— С. 475—485; № 4.— С. 873—879.
10. **Лотов В. И.** Об асимптотике распределений, связанных с выходом недискретного случайного блуждания из интервала // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1982.— Т. 1.— С. 18—25.
11. **Kemperman J. H. B.** A Wiener-Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary // Ann. Math. Statist.— 1963.— V. 34, N 4.— P. 1168—1193.
12. **Küchler I., Semjonov A.** Die Waldsche Fundamentalidentität und ein Sequentieller Quotiententest für eine zufällige Irrfahrt über einer homogenen irreduziblen Markovschen Kette mit endlichem Zustandsraum // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Statistics.— 1979.— V. 10, N 2.— S. 319—331.
13. **Лотов В. И.** Асимптотические разложения в двуграничных задачах для случайных блужданий: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— М., 1977.— 105 с.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О МАКСИМУМЕ ДЛИН СЕРИЙ «УСПЕХОВ» В МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ С ДВУМЯ СОСТОЯНИЯМИ

С. Ю. НОВАК

Рассмотрим однородную марковскую цепь $\{\xi_i,\ i\geqslant 0\}$ с состояниями $\{1;\ 0\}$, переходными вероятностными $p_{11}=\alpha$, $p_{00}=\beta$, $0<\alpha<1$, $\beta<1$, и начальным распределением $\mathbf{P}(\xi_0=1)=p$. Положим

$$\eta_n=\max\left\{k\leqslant n:\ \max_{0\leqslant i\leqslant n-k} \mathbf{1}\{\xi_{i+1}=\ldots=\xi_{i+k}=1\}=1\right\}. \quad (0)$$

По своему смыслу η_n есть максимум длин серий «успехов» (единиц) в испытаниях $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Задача о распределении случайной величины η_n имеет приложения в теории надежности. Чтобы проиллюстрировать сказанное, рассмотрим систему S, которая эксплуатируется в одном из двух режимов, помеченных цифрами 1 и 0. Причем система полностью восстанавливает способность работать в режиме 1, если хотя бы в течение одного такта побудет в режиме 0, но выходит из строя, если находится в режиме 1 k тактов подряд. Если предположить теперь, что эволюция системы S описывается введенной выше цепью Маркова, то вероятность бесперебойной работы в течение n тактов есть $\mathbf{P}(\eta_n < k)$.

Асимптотику распределения случайной величины η_n в случае схемы Бернулли с параметром α изучал В. Л. Гончаров [1]. Им было установлено, что для всякого целого j при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}(\eta_n - [\log n] < j) = \exp(-(1-\alpha)\alpha^{j-\{\log n\}}) + o(1) \qquad (*)$$

(здесь и ниже логарифмы log берутся по основанию $1/\alpha$; $[x]$ и $\{x\}$ суть целая и дробная части x).

Предельные законы для максимума длин серий «успехов» в более общих постановках задачи изучались в [2—7]; были получены также утверждения типа закона повторного логарифма [4, 5, 8—13]. Впервые изучать распределение случайной величины η_n предложил, по-видимому, еще А. Муавр [14, Problem LXXIV].

В настоящей работе будут получены асимптотические разложения для функции распределения максимума длин серий «успехов». В частности, будут уточнены результат В. Л. Гончарова $(*)$, а также один из результатов работы [15].

§ 1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Положим $\gamma = (1-\alpha)(1-\beta)/\alpha(2-\alpha-\beta)$, и пусть

$$Y_i(k, \varphi) = \varphi^i \sum_{j=0}^{i} \sum_{d=0}^{j} T_{j-d} \sum_{\mu=0}^{d} Q_{\mu,d} \sum_{\nu=0}^{i-j} h(\nu, i-j)(\nu!)^{-1} \sum_{\lambda=0}^{\nu} C_\nu^\lambda (-1)^{d+\mu+\lambda} \varphi^{\mu+\lambda} \times$$
$$\times ((j+\mu)^{(\nu-\lambda)} - (d+\mu)(j+\mu-1)^{(\nu-\lambda)}\varphi^{-1}) \quad (i \geqslant 0), \tag{1.1}$$

где использованы обозначения:

$$\begin{aligned} &i^{(d)} = i(i-1)\ldots(i-d+1) \quad &&\text{при } d \geqslant 1, \\ &i^{(0)} = 1, \ i^{(-d)} = 0 &&\text{при } d \geqslant 1; \end{aligned} \tag{1.2}$$

функции T, Q, h определены ниже формулами (2.7), (2.16), (2.12).

Отметим что $Y_i(k, \varphi)$ — полином степени i, по первому аргументу и степени $2i$ по второму.

Теорема 1. *Для всякого $m \geqslant 1$ найдется постоянная $C \equiv C(m, \alpha, \beta, p)$ такая, что при $n > C$ справедлива оценка*

$$\sup_{-\infty<j<+\infty} \left| \mathbf{P}(\eta_n - [\log n] < j) - e^{-\varphi_{nj}} \sum_{i=0}^{m-1} n^{-i} Y_i(k_{nj}, \varphi_{nj}) \right| \leqslant C(n^{-1}\ln n)^m, \tag{1.3}$$

где $k_{nj} = j + [\log n]$, $\varphi_{nj} = \gamma\alpha^{j-\{\log n\}}$.

Следствие. *При $n \to \infty$*

$$\sup_{-\infty<j<+\infty} \left| \mathbf{P}(\eta_n - [\log n] < j) - e^{-\varphi_{nj}}(1 + \varphi_{nj}(1-\varphi_{nj})\, n^{-1} \log n) \right| = O(n^{-1}). \tag{1.4}$$

Отметим: из (1.4) следует, что не только первый, но и второй члены асимптотического разложения для функции распределения случайной величины η_n не зависят от начального распределения цепи.

Дальнейшая структура работы такова: во втором параграфе будут получены некоторые вспомогательные результаты; доказательству основного результата посвящен § 3.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Буквами C, c (с индексами и без) ниже будут обозначаться (различные) постоянные, зависящие только от m и параметров цепи. Символ ■ помечает конец доказательства.

Теорема 2. *Существуют постоянные* $q<1$, $C<\infty$ *такие, что*

$$\sup_{k>C}\left|\mathbf{P}(\eta_n<k)-A(t_0)\,t_0^{-n-1}\right|\leqslant Cq^n, \tag{2.1}$$

где

$$A(t)=-V(t)/U'(t),$$
$$V(t)\equiv V(t,\ k)=1-(\alpha+\beta-1)t-$$
$$-(p\alpha+(1-p)(1-\beta))\alpha^{k-1}t^k+p(\alpha+\beta-1)\alpha^k t^{k+1},$$
$$U(t)\equiv U(t,\ k)=W(t)+(1-\alpha)(1-\beta)\alpha^{k-1}t^{k+1},$$
$$W(t)=(1-t)(1-(\alpha+\beta-1)t),$$

$t_0\equiv t_0(k)$ — *минимальный по модулю корень функции* $U(t,\ k)$.

З а м е ч а н и е. В случае схемы Бернулли с параметром α оценка (2.1) справедлива при $q=\alpha$, $C=(2+\alpha(1-\alpha))/(1-\alpha)(1-\alpha^2)$.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 2, покажем, что имеет место следующая

Лемма 1. *При* $k\geqslant 1$ *справедливо равенство*

$$F(k,\ t)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(\eta_n<k)\,t^n=V(t)/U(t), \tag{2.2}$$

где $\eta_0\equiv 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $F_1\equiv F_1(k,\ t)$ функцию $F(k,\ t)$, соответствующую $p=1$, через $F_0\equiv F_0(k,\ t)$ функцию $F(k,\ t)$, соответствующую $p=0$. Кроме того, положим $u_n=\mathbf{P}(\eta_n<k\,|\,\xi_0=1)$, $v_n=\mathbf{P}(\eta_n<k\,|\,\xi_0=0)$, $\bar{u}_n=(u_n,\ v_n)$, $\bar{F}=(F_1,\ F_0)$. Буквой Π ниже обозначена матрица переходных вероятностей цепи, а буквой $\Pi^*=\|\pi_{ij}\|$ — матрица с элементами $\pi_{11}=\pi_{21}=0$, $\pi_{12}=\alpha$, $\pi_{22}=1-\beta$.

Нетрудно убедиться, что имеют место следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\bar{u}_n=\Pi\bar{u}_{n-1}-(1-\alpha)\alpha^{k-1}\Pi^*\bar{v}_{n-k-1}\ \text{при}\ n>k,\\ \bar{u}_k=\Pi\bar{u}_{k-1}-\alpha^{k-1}\Pi^*\bar{1},\\ \bar{u}_n=\Pi\bar{u}_{n-1}\ \text{при}\ 0<n<k,\ \bar{u}_0=\bar{1},\end{gathered} \tag{2.3}$$

где $\bar{1}=(1,1)$. Из (2.3) немедленно вытекает равенство

$$\bar{F}=\bar{1}+t\Pi\bar{F}-\alpha^{k-1}t^k\Pi^*\bar{1}-(1-\alpha)\alpha^{k-1}t^{k+1}\Pi^*\bar{F}_0. \tag{2.4}$$

Решая (2.4) относительно F_1, F_0 и учитывая, что $F(k,\ t)=pF_1+(1-p)F_0$, получим (2.2). ■

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Сначала приведем схему дальнейших рассуждений. Мы покажем, что при достаточно больших k корни $\{t_i\equiv t_i(k),\ 1\leqslant i\leqslant k\}$ функции $U(t,\ k)$: (а) отделены по модулю от минимального корня t_0, (б) равномерно ограничены, (в) просты; после чего воспользуемся разложением функции $F(k,\ t)$ на простые дроби.

Выберем числа r и q так, чтобы выполнялись условия

(0) $0<r<\alpha<q<1$;
(1) если $\alpha=|1-\alpha-\beta|$, то $q<2\alpha/(\alpha+\beta)$;
(2) если $\alpha>|1-\alpha-\beta|$, то $r>|1-\alpha-\beta|$;
(3) если $\alpha<|1-\alpha-\beta|$, то $\alpha/q<|1-\alpha-\beta|<q$.

Поскольку $q > \max(\alpha,\ |1-\alpha-\beta|)$, функция $W(t)$ имеет единственный корень в области $B = \{t\colon\ |t| < 1/q\}$, и при всех k, больших некоторого $k(q)$, выполняется $\inf\limits_{t\in\partial B} |W(t)| > \sup\limits_{t\in\partial B} |U(t,k) - W(t)|$. Поэтому по теореме Руше [16, с. 142] функция $U(t)$ имеет в области B единственный корень t_0 (взяв вместо B окрестности точки $t=1$, получим $t_0(k)\to 1$ при $k\to\infty$). Следовательно, $|t_i| > 1/q$, $1\leqslant i\leqslant k$, если $k\geqslant k(q)$.

Из равенства $U(t_i,\ k)=0$ вытекает: $(1-\alpha)(1-\beta)|\alpha t_i|^{k+1}\leqslant 4|\alpha t_i|^2$ при $k\geqslant k(q)$, $i\geqslant 1$. Поэтому $|t_i|\leqslant 1/r$ при всех k, больших некоторого k_1.

Если $U(\tau)=U'(\tau)=0$ для некоторого $\tau\equiv\tau(k)$, то в точке τ обратится в нуль и остаток при делении $U(t)$ на $tU'(t)$. Этот последний есть полином степени два, корни которого не зануляют $U'(t)$ при всех k, больших некоторого k^*. Следовательно, корни функции $U(t)$ при больших k просты.

Разложение функции $F(k,\ t)$ на простые дроби дает

$$\mathbf{P}(\eta_n < k) = \sum_{i=0}^{k} A(t_i)\, t_i^{-n-1}.$$

Для завершения доказательства теоремы 2 необходимо проверить существование константы C такой, что $\inf\limits_{1\leqslant i\leqslant k,\, k>C} |U'(t_i)| > 0$.

Случай 1: $\alpha = |1-\alpha-\beta|$. Заметим, что $t_i(k)\in B_1 \equiv \{t\colon\ 1/q < |t| < 1/r\}$, $1\leqslant i\leqslant k$, $k\geqslant k(q)$. Если $\inf\limits_{k\geqslant k(q)} \min\limits_{1\leqslant i\leqslant k} |U'(t_i,k)| = 0$, то для некоторой последовательности $\{\tau_j\}$ и некоторого $\tau\in B_1\cup\partial B_1$ выполняется $U(\tau_j,\ j)=0$; $\tau_j\to\tau$, $U'(\tau_j,\ j)\to 0$ при $j\to\infty$. Последнее означает, что $j(1-\alpha)(1-\beta)\alpha^{-1}(\alpha\tau_j)^j\to -W'(\tau)\neq 0$ ($W'(t)$ не имеет корней в B_1), откуда $\tau=1/\alpha$. Но, с другой стороны,

$$-tU'(t,\ k) = kW(t) + (1-\alpha-\beta)t^2 + 1 \tag{2.5}$$

как только $U(t,\ k)=0$. Из (2.5) следует $|U'(\tau_j,\ j)|\to\infty$ при $j\to\infty$, а это противоречит предположению.

Случай 2: $\alpha > |1-\alpha-\beta|$. Снова $t_i(k)\in B_1$, $1\leqslant i\leqslant k$. Заметим, что функция $W(t)$ не имеет корней в области B_1. Поэтому $\inf\limits_{t\in B_1} |W(t)| > 0$, и ввиду (2.5) $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant k} |U'(t_i(k),\ k)|\to\infty$.

Случай 3: $\alpha < |1-\alpha-\beta|$. Положим $B_2 = \{t\colon\ 1/q < |t| < q/\alpha\}$. С помощью теоремы Руше убеждаемся, что функция $U(t,\ k)$ имеет при больших k в области B_2 единственный корень $t_1(k)$. Применяя теорему Руше к окрестностям точки $t = 1/(\alpha+\beta-1)$, получим $t_1(k) = 1/(\alpha+\beta-1) + o(1)$ при $k\to\infty$. Но $W'(1/(\alpha+\beta-1))\neq 0$. Поэтому и $\varliminf\limits_{k\to\infty} |U'(t_1(k), k)| > 0$. В области $B_3 = \{t\colon\ q/\alpha\leqslant |t| < 1/r\}$ функция $W(t)$ не имеет корней. Поэтому из (2.5) следует $\inf\limits_{2\leqslant i\leqslant k} |U'(t_i(k),\ (k)|\to\infty$ при $k\to\infty$. ■

Введем обозначения: $\varkappa = (\alpha+\beta-1)/(2-\alpha-\beta)$, $\delta = 1 - p/\gamma - (1-p)/(1-\alpha)$, $\rho = (\alpha+\beta-1)/(1-\alpha)(1-\beta)$. Функции H_i определим по правилу: $H_i = 0$ при $i<0$,

$$H_i\equiv H_i(k) = 2^{-i}\sum_{j=0}^{[i/2]} C_{i+1}^{i-2j}(k+2\varkappa)^{i-2j}\left((k+2\varkappa)^2 - 4(k-1)\varkappa\right)^j \text{ при } i\geqslant 0. \tag{2.6}$$

Кроме того, положим

$$T_i\equiv T_i(k) = \sum_{j=0}^{3} q_j H_{i-j}, \tag{2.7}$$

где $q_0 = 1$, $q_1 = \delta - \varkappa$, $q_2 = \rho\alpha p - \varkappa\delta$, $q_3 = -\varkappa\rho\alpha p$.

Лемма 2. *При всех достаточно больших k имеет место равенство*

$$A(1+u)=\sum_{i=0}^{\infty} T_i u^i, \tag{2.8}$$

где $u\equiv u(k)=t_0(k)-1$.

Доказательство. Как уже отмечалось, $u(k)\to 0$ при $k\to\infty$. Соотношение $U(1+u)=0$ позволяет записать

$$(2-\alpha-\beta)^{-1}(1+u)V(1+u)=\sum_{i=0}^{3} q_i u^i,$$

$$-(2-\alpha-\rho)^{-1}(1+u)U'(1+u)=(1-(x+y)u)(1-(x-y)u),$$

где $x\equiv x(k)=(k+2\varkappa)/2$, $y\equiv y(k)=((k+2\varkappa)^2-4(k-1)\varkappa)^{1/2}/2$. Раскладывая дробь $V(1+u)/U'(1+u)$ в ряд по степеням u, получим (2.3). ■

Отметим, что

$$|H_i(k)|\leqslant(k+2|\varkappa|)^i, \qquad |T_i(k)|\leqslant Ck^i. \tag{2.9}$$

Прежде чем перейти к следующему утверждению, введем последовательность полиномов $\{P_i\equiv P_i(\cdot),\ i\geqslant 0\}$, определяемых рекуррентными соотношениями

$P_0=1,$

$$P_m\equiv P_m(k)=\sum_{j=1}^{m} G_j(k)\,b_{m-j,j}(k) \text{ при } k\geqslant m\geqslant 1,$$

где $G_j(k)=\sum\limits_{i=0}^{j} C_{k+1}^{i}\varkappa^{j-i}$, $b_{l,j}\equiv b_{l,j}(k)=\sum\limits_{i_1+\ldots+i_j=l} P_{i_1}\ldots P_{i_j}$ при $l\geqslant 0$, $j\geqslant 1$, (**)

Положим $v\equiv v(k)=\gamma\alpha^k$.

Лемма 3. *Для всякого $m\geqslant 1$ найдутся постоянные C_m, k_m такие, что при $k\geqslant k_m$*

$$\left|u/v-\sum_{i=0}^{m-1} P_i v^i\right|\leqslant C_m (kv)^m. \tag{2.10}$$

Доказательство. Равенство $U(1+u)=0$ запишем в виде

$$u/v=(1+u)^{k+1}(1-\varkappa u)^{-1}=\sum_{j=0}^{k+1} G_j u^j+\varkappa u((1+\varkappa)u)^{k+1}(1-\varkappa u)^{-1}.$$

Нетрудно видеть, что при $m=1$ (2.10) выполнено.

Пусть (2.10) справедливо для некоторого $m\geqslant 1$. Осуществим индукционный переход.

Обозначим $\tilde P_i=P_i \quad (0\leqslant i\leqslant m)$, $\tilde P_m v^m=u/v-\sum\limits_{i=0}^{m-1} Pv^i$, $b_{l,j,m}=$ $=\sum\tilde P_{i_1}\tilde P_{i_2}\ldots\tilde P_{i_j}$, где суммирование ведется по наборам $(i_1,\ldots,i_j)$ неотрицательных целых чисел, для которых $i_1+\ldots+i_j=l$, $\max i_r\leqslant m$.

Имеем

$$u/v+O\left((kv)^{m+1}\right)=\sum_{j=0}^{m} G_j u^j=\sum_{j=0}^{m} G_j v^j\left(\sum_{i=0}^{m}\tilde P_i v^i\right)^j=$$

$$=1+\sum_{j=1}^{m} G_j v^j\sum_{l=0}^{mj} v^l b_{l,j}.$$

Делая замену переменных $i=j+l$ и замечая, что $b_{l,j,m}=b_{l,j}$ при $l<m$, получим

$$u/v = 1 + \sum_{i=1}^{m} v^i \sum_{j=1}^{i} b_{i-j,j} G_j + O\left((kv)^{m+1}\right),$$

что и требовалось доказать. ■

Отметим, что величины $b_{l,j}$ допускают представление

$$b_{l,j} = \sum_{\nu=1}^{l} j^{(\nu)} h(\nu,\, l)/\nu! \text{ при } l \geqslant 1,\ j \geqslant 1, \tag{2.11}$$

где $h(\nu,\, l) \equiv h(\nu,\, l,\, k)$ — полиномы степени l (по k), определяемые соотношениями $h(0,\, 0)=1$, $h(0,\, l)=0$ $(l\geqslant 1)$,

$$h(\nu,\, l) \equiv h(\nu,\, l,\, k) = \sum_{1\leqslant M\leqslant \nu'} \sum_{(y,z)\in A(\nu,l,M)} (\nu!/z!) \left(P_{y_1}(k)\right)^{z_1} \ldots$$

$$\ldots \left(P_{y_M}(k)\right)^{z_M} \text{ при } l \geqslant \nu \geqslant 1. \tag{2.12}$$

Здесь использованы обозначения $\nu' = \min(\nu;\ \sqrt{2l})$; $y=(y_1,\, \ldots,\, y_M)$; $z=(z_1,\, \ldots,\, z_M)$; $z! = z_1! \ldots z_M!$; $A(\nu,\, l,\, M) = \Big\{(y,\, z)\colon\ 1 \leqslant y_1 < \ldots < y_M;$ $\min\limits_i z_i \geqslant 1;\ \sum z^i = \nu;\ \sum y_i z_i = l\Big\}$, а также (1.2).

Чтобы убедиться в справедливости (2.11), достаточно наборы $(i_1,\, \ldots$ $\ldots,\, i_j)$ неотрицательных целых чисел, участвующих в определении величин $b_{l,j}$, разбить на группы, для которых число ненулевых элементов равно ν, число различных ненулевых элементов равно M, имеется ровно z_1 элементов, равных по величине $y_1,\, \ldots,$ ровно z_M элементов равны по величине y_M. Аналогично

$$b_{l,j,m} = \sum_{l/m\leqslant \nu\leqslant l} j^{(\nu)} h_m(\nu,\, l)/\nu!, \tag{2.13}$$

где $h_m(0,\, 0)=1$, определение величин $h_m(\nu,\, l)$ отличается от определения величин $h(\nu,\, l)$ заменой полиномов $P_i(\cdot)$ на полиномы $\tilde{P}_i(\cdot)$ и множества $A(\nu,\, l,\, M)$ на $A(\nu,\, l,\, M,\, m) = \Big\{(y,\, z) \in A(\nu,\, l,\, M)\colon \max\limits_{1\leqslant i\leqslant M} y_i \leqslant m\Big\}$.

Отметим, что $h_m(\nu,\, l) = h(\nu,\, l)$ при $l<m$ и, как несложно убедиться,

$$|h_m(\nu,\, l,\, k)| \leqslant 2^m m^\nu (c_m k)^l, \tag{2.14}$$

$$|b_{l,j,m}(k)| \leqslant 2^m (m+1)^j (c_m k)^l. \tag{2.15}$$

В заключение этого раздела приведем несколько утверждений комбинаторного характера. В справедливости этих утверждений нетрудно убедиться с помощью метода математической индукции.

Лемма 4. *Пусть* $S_d(i) = \sum\limits_{l=0}^{i} l^{(d)}$. *Тогда при* $d \geqslant 0$

$$S_d(i) = (i+1)^{(d+1)}/(d+1) = i^{(d)} + i^{(d+1)}/(d+1).$$

Следствие. *Справедливы соотношения*

$$S_d(i) = d \sum_{j=1}^{j} S_{d-1}(j-1) \text{ при } d \geqslant 1,$$

$$(i+1) S_d(i-1) = (d+2)(d+1)^{-1} S_{d+1}(i) \text{ при } i \geqslant 1,$$

$$S_d(i+1) = S_d(i) + d S_{d-1}(i) \text{ при } d \geqslant 1.$$

Лемма 5. *Пусть* $r_j(i)$ — *коэффициент при* n^{i-j} *в полиноме*

$$(n+1)\cdot \ldots \cdot (n+i) \equiv \sum_{j=0}^{i} r_j(i)\, n^{i-j};$$

$$\tilde{Q}_{0,d} = 1, \quad \tilde{Q}_{j,d} = \sum_{1<l_1<l_1+1<l_2<\ldots<l_j<d+j} (l_1 l_2 \ldots l_j)^{-1} \text{ при } 1 \leqslant j < d.$$

Тогда при $d \geqslant 1$ имеет место соотношение

$$r_d(i) = \sum_{j=0}^{d-1} \tilde{Q}_{j,d} S_{j+d}(i).$$

Объединяя утверждения лемм 4, 5 получим

$$r_d(i) = \sum_{j=0}^{d} Q_{j,d}(i+1)^{(j+d)} \quad (d \geqslant 0), \tag{2.16}$$

где $Q_{0,0} = 1$, $Q_{0,d} = 0$ при $d \geqslant 1$, $Q_{j,d} = (j+d)^{-1}\tilde{Q}_{j-1,d}$ при $1 \leqslant j \leqslant d$.

Лемма 6. *Пусть a, $\nu \in \mathbf{Z}$; $\nu \geqslant 0$. Тогда*

$$i^{(\nu)} = \sum_{\lambda=0}^{\nu} C_\nu^\lambda a^{(\nu-\lambda)}(i-a)^{(\lambda)}. \tag{2.17}$$

Докажем, к примеру, лемму 5. Заметим, что

$$r_j(i) = \sum_{l=j}^{i} l r_{j-1}(l-1) \qquad \text{при } i \geqslant j \geqslant 1. \tag{2.18}$$

Действительно, при $j = 1$ (2.18) очевидно $(r_0(i) \equiv 1)$, а при $j \geqslant 2$

$$r_j(i) = \sum_{1 \leqslant l_1 < \ldots < l_j \leqslant i} l_1 \ldots l_j = \sum_{l_j=j}^{i} l_j \sum_{1 \leqslant l_1 < \ldots < l_{j-1} \leqslant l_j - 1} l_1 \ldots l_{j-1} =$$

$$= \sum_{l=j}^{i} l r_{j-1}(l-1).$$

Доказательство леммы 5 проведем по индукции. При $d = 1$ имеем $r_1(i) = i(i+1)/2 = S_1(i)$. Предположим, что утверждение леммы справедливо при некотором d, $1 \leqslant d < i$. Тогда в силу (2.18)

$$r_{d+1}(i) = \sum_{j=0}^{d-1} \tilde{Q}_{j,d} \sum_{l=d+1}^{i} (l+1-1) S_{d+j}(l-1). \tag{2.19}$$

Воспользуемся теперь следствием леммы 4. Имеем

$$(l+1)S_{d+j}(l-1) = (d+j+2)(d+j+1)^{-1}S_{d+j+l}(l),$$

$$\sum_{l=d+1}^{i} S_{d+j}(l-1) = \sum_{l=1}^{i} S_{d+j}(l-1) = (d+j+1)^{-1} S_{d+j+1}(i),$$

$$(d+j+2) \sum_{l=d+1} S_{d+j+1}(l) = S_{d+j+2}(i) + (d+j+2) S_{d+j+1}(i).$$

Из (2.19) выводим

$$r_{d+1}(i) = \sum_{j=0}^{d-1} \tilde{Q}_{j,d}\left((d+j+1)^{-1} S_{d+j+2}(i) + S_{d+j+1}(i)\right) =$$

$$= S_{d+1}(i) + \sum_{j=1}^{d-1} \left(\tilde{Q}_{j,d} + (d+j)^{-1}\tilde{Q}_{j-1,d}\right) S_{d+j+1}(i) +$$

$$+ (2d)^{-1}\tilde{Q}_{d-1,d} S_{2d+1}(i) = \sum_{j=0}^{d} \tilde{Q}_{j,d+1} S_{d+j+1}(i),$$

так как $(2d)^{-1}\tilde{Q}_{d-1,d} = \tilde{Q}_{d,d+1}$ и при $1 \leqslant j < d$

$$\tilde{Q}_{j,d} + (d+j)^{-1} Q_{j-1,d} = Q_{j,d+1}. \quad \blacksquare$$

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Определим полиномы $Y_{i,m} \equiv Y_{i,m}(k, \varphi)$, используя в формуле (1.1) величины $h_m(\nu, l)$ вместо $h(\nu, l)$. Всюду ниже $\varphi \equiv nv$; символ log по-прежнему используется для обозначения логарифмов по основанию $1/\alpha$.

Лемма 7. *При всех достаточно больших* k

$$A(t_0)\,t_0^{-n-1}=\sum_{i=0}^{\infty} n^{-i}Y_{i,m}e^{-\varphi}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Положим $w=nu$,

$$R_{j,d}=(u/v)^{j-d}\sum_{i=d}^{\infty} r_d(i)\,(-w)^i/i!$$

(коэффициенты $r_d(i)$ введены в лемме 5). Тогда

$$t_0^{-n-1}\equiv(1+u)^{-n-1}=\sum_{i=0}^{\infty} C_{n+i}^{i}(-u)^i=\sum_{j=0}^{\infty} n^{-j}\sum_{i=j}^{\infty} r_j(i)\,(-w)^i/i!$$

и из леммы 2 вытекает, что

$$A(t_0)\,t_0^{-n-1}=\sum_{j=0}^{\infty} n^{-j}\sum_{d=0}^{j} T_{j-d}\varphi^{j-d}R_{j,d}. \tag{3.2}$$

В обозначениях леммы 3 $(u/v)^i=\sum_{a=0}^{im} v^a b_{a,i,m}$. Поэтому

$$R_{j,d}=\sum_{a=0}^{\infty} n^{-a}\varphi^a\sum_{i\geqslant\max(d,d-j+a/m)}(-\varphi)^i\,r_d(i)\,b_{a,i+j-d,m}/i!. \tag{3.3}$$

Из (3.2), (3.3), делая замену переменных $t=j+a$, получим

$$A(t_0)\,t_0^{-n-1}=\sum_{t=0}^{\infty} n^{-t}X_{t,m},$$

где

$$X_{t,m}\equiv X_{t,m}(k,\varphi)=\sum_{j=0}^{t}\sum_{d=0}^{j} T_{j-d}\varphi^{t-d}\sum_{i\geqslant\max(d,d-j+(t-j)/m)} r_d(i)b_{t-j,i+j-d,m}(-\varphi)^i/i!. \tag{3.4}$$

Замена переменных и смена порядка суммирования законны, поскольку при больших k ряд (3.4) сходится абсолютно. В этом нетрудно убедиться, воспользовавшись оценками (2.9), (2.15), а также следующей:

$$r_d(i)=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_d\leqslant i} i_1i_2\ldots i_d\leqslant i^{(d)}C_i^d\leqslant i^{(d)}\,2^i \quad\text{при } d\geqslant 1.$$

Преобразуя (3.4) с помощью формул (2.11) и (2.16), получим

$$X_{t,m}=\sum_{j=0}^{t}\sum_{d=0}^{j} T_{j-d}\varphi^{t-d}\sum_{\mu=0}^{d} Q_{\mu,d}\sum_{(t-j)/m\leqslant\nu\leqslant t-j} h_m(\nu,t-j)\,(\nu!)^{-1}\times$$
$$\times\sum_{i\geqslant d}(i+1)^{(\mu+d)}(i+j-d)^{(\nu)}(-\varphi)^i/i!. \tag{3.5}$$

Область суммирования по i в (3.5) мы должны были бы, вообще говоря, указать в виде $i\geqslant\max(d;\,x)$, $x=d-j+(t-j)/m$. Заметим, однако, что если $\max(d;\,x)=x$ и $i<x$, то $i+j-d<\nu$. Но $(i+j-d)^{(\nu)}=0$ при $i+j-d<\nu$. Тем самым запись (3.5) корректна.

Сумму по i в (3.5) можно свернуть с помощью леммы 6. Используя равенство $(i+1)^{(r)}=i^{(r)}+ri^{(r-1)}$, из (2.17) выводим

$$e^{\varphi}\sum_{i\geqslant d}(i+1)^{(\mu+d)}(i+j-d)^{(\nu)}(-\varphi)^i/i!=$$
$$=\sum_{\lambda=0}^{\nu}(-\varphi)^{d+\mu+\lambda}C_\nu^\lambda\left((j+\mu)^{(\nu-\lambda)}-\varphi^{-1}(\mu+d)(j+\mu-1)^{(\nu-\lambda)}\right).$$

Таким образом, $X_{t,m}e^{\varphi}\equiv Y_{t,m}$. ■

Лемма 8. *Пусть* $\psi=\max(1;\,\varphi)$. *Тогда*

$$|Y_{i,m}|\leqslant(C\psi^2\ln n)^i. \tag{3.6}$$

Доказательство. Из определения величин $Q_{j,d}$ вытекает, что

$$Q_{j,d} \leqslant C_{j+d}^{d}/(2j)!! \leqslant 2^d/j!. \tag{3.7}$$

Употребляя оценки (2.14), (2.9), (3.7), заключаем

$$|Y_{i,m}| \leqslant (c_1\varphi\psi k)^i \sum_{j=0}^{i} \sum_{d=0}^{j} \sum_{\mu=0}^{d} \sum_{\nu=0}^{i-j} 2^d m^\nu (j+\mu+1)^\nu/\nu!\mu! \leqslant (c_2 k\varphi\psi)^i.$$

Заметим, что $k \leqslant \log n - \log\varphi + 1$. Поэтому

$$k\varphi \leqslant \begin{cases} \varphi \log n/\alpha & \text{при} \quad \varphi \geqslant 1, \\ \log n + 1 + \mathrm{e}^{-1}\log \mathrm{e} & \text{при} \quad \varphi < 1. \end{cases}$$

Оценка (3.6) очевидна. ■

Положим $k(n) = \log n - \log \ln n^m$.

Лемма 9. *Пусть* $m \geqslant 1$. *При всех достаточно больших* n *выполняется* ($q<1$):

$$\sup_{k\in\mathbf{Z}} \left| \mathbf{P}(\eta_n < k) - \sum_{i=0}^{m-1} n^{-i} Y_i \mathrm{e}^{-\varphi} \right| \leqslant Cq^n + $$
$$+ 2 \sup_{k\leqslant k(n)} \sum_{i=0}^{m-1} n^{-i} |Y_i| \mathrm{e}^{-\varphi} + \sup_{k\geqslant k(n)} \sum_{i=m}^{\infty} n^{-i} |Y_{i,m}| \mathrm{e}^{-\varphi}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Обозначим $\Delta(n,k) = \left| \mathbf{P}(\eta_n < k) - \sum_{i=0}^{m-1} n^{-i} Y_i \mathrm{e}^{-\varphi} \right|$. Заметим, что $Y_{i,m} = Y_i$ при $i<m$. Из (2.1), (3.1) следует, что

$$\sup_{k\geqslant k(n)} \Delta(n,k) \leqslant Cq^n + \sup_{k\geqslant k(n)} \sum_{i=m}^{\infty} n^{-i} |Y_{i,m}| \mathrm{e}^{-\varphi}. \tag{3.9}$$

Далее,

$$\sup_{k\leqslant k(n)} \Delta(n,k) \leqslant \mathbf{P}(\eta_n < k(n)) + \sup_{k\leqslant k(n)} \sum_{i=0}^{m-1} n^{-i} |Y_i| \mathrm{e}^{-\varphi} \leqslant Cq^n +$$
$$+ 2 \sup_{k\leqslant k(n)} \sum_{i=0}^{m-1} n^{-i} |Y_i| \mathrm{e}^{-\varphi} + \sup_{k\geqslant k(n)} \sum_{i=m}^{\infty} n^{-i} |Y_{i,m}| e^{-\varphi}. \tag{3.10}$$

Из (3.9), (3.10) следует (3.8). ■

Мы можем теперь завершить доказательство теоремы 1. При $k \leqslant k(n)$ имеет место неравенство $\varphi \equiv nv(k) \geqslant m(\ln n)/\alpha$. Поэтому

$$\sup_{k\leqslant k(n)} \varphi^{2i}\mathrm{e}^{-\varphi} \leqslant \varphi^{2i}\mathrm{e}^{-\varphi}|_{\varphi=m(\ln n)/\alpha} = (m(\ln n)/\alpha)^{2i} n^{-m/\alpha},$$

и из (3.6) следует:

$$\sup_{k\leqslant k(n)} \sum_{i=0}^{m-1} n^{-i} |Y_i| \mathrm{e}^{-\varphi} \leqslant c_1 (\ln n)^{3m-3} n^{-m/\alpha}. \tag{3.11}$$

Далее, поскольку $\sup\limits_{\varphi\geqslant 0} \varphi^r \mathrm{e}^{-\varphi} \leqslant r!$, имеем

$$\sup_{k\geqslant 0} |Y_{m,m}| \mathrm{e}^{-\varphi} \leqslant c_2 (\ln n)^m. \tag{3.12}$$

Наконец, так как $\varphi \leqslant m(\ln n)/\alpha$ при $k \geqslant k(n)$,

$$\sup_{k\geqslant k(n)} \sum_{i=m+1} n^{-i} |Y_{i,m}| \mathrm{e}^{-\varphi} \leqslant c_3 (n^{-1}(\ln n)^3)^{m+1}. \tag{3.13}$$

Объединяя оценки (3.8), (3.11)—(3.13) и учитывая, что левая часть (3.8) есть $\sup\limits_{j\in\mathbf{Z}} \Delta(n, j+[\log n])$, получим (1.3). ■

Максимум длин серий «успехов» мы могли бы ввести и несколько иначе. Например, так: $\tilde{\eta}_n = \max\left\{k \leqslant n: \max_{0<i\leqslant n-k} \mathbf{1}\{\xi_i = \ldots = \xi_{i+k-1} = 1\} = 1\right\}$.

Просматривая выкладки, нетрудно убедиться, что соотношение (1.3) останется верным и для $\tilde{\eta}_n$, если в определении величин Y_i вместо функций T_i употребить $\tilde{T}_i = \sum_{0\leqslant j\leqslant 2} \tilde{q}_j H_{i-j}$, где $\tilde{q}_0 = 1$, $q_1 = 1 - \varkappa + \rho - \rho/(1-\alpha)(1-\beta)$, $\tilde{q}_2 = (1-\varkappa)_\rho - \varkappa + \varkappa\rho/(1-\alpha)(1-\beta)$, $\tilde{q}_3 = -\varkappa p$, $\rho = \alpha(p+\beta-1)/(1-\alpha)(1-\beta)$.

§ 4. ЗАМЕЧАНИЕ О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ

В этом разделе предлагается простой подход, позволяющий получать оценки скорости сходимости в несколько более общей постановке задачи.

Пусть $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ — марковская цепь с множеством состояний $S = \{0, 1, \ldots, m\}$, матрицей переходных вероятностей $\|p_{ij}\|$ и вектором начальных вероятностей $\bar{p}$. Положим $A = \{1, \ldots, m\}$ (тот факт, что $\mathrm{card}(S\backslash A) = 1$, существен для дальнейших рассуждений), и пусть η_n — случайная величина, заданная соотношением (0), где считается $\xi_i = \mathbf{1}\{X_i \in A\}$. По своему смыслу η_n есть максимум длин серий «успехов» в испытаниях $X_1, \ldots, X_n$, где под «успехом» понимается попадание цепи в подмножество A.

Обозначим также $\mathbf{U} = \|p_{ij}\|_{ij\in A}$, λ — максимальные собственное число матрицы $\mathbf{U}$, ζ — с. в. с распределением $\mathbf{P}(\zeta = 1) = p_{00}$, $\mathbf{P}(\zeta = i) = \bar{p}_{0A}\mathbf{U}^{i-2}\bar{p}_{A0}$ $(i \geqslant 2)$, где $\bar{p}_{0A} = \|p_{0j}\|_{j\in A}$, $\bar{p}_{A0} = \|p_{i0}\|_{i\in A}$. В дальнейшем будем считать, что цепь имеет лишь один класс существенных состояний, не содержащий циклических подклассов; пересечение A с множеством существенных состояний цепи не пусто (в частности, $p_{00} < 1$); $0 < \lambda < 1$; правый собственный вектор $\bar{z}$ матрицы $\mathbf{U}$, отвечающий собственному числу λ, положителен: $z_j > 0$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha(k) = \mathbf{P}(\zeta > k)$,

$$\Delta(n,\ k) = |\mathbf{P}(\eta_n < k) - \exp(-n\alpha(k)/\mathbf{M}\zeta)|. \tag{4.1}$$

Тогда $\sup_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta(k, n) = O(n^{-1}(\ln n)^3)$ *при* $n \to \infty$.

Ниже будет предложен «скетч» доказательства теоремы 3. Буквами c (с индексами и без) будем обозначать различные постоянные.

Положим $k(n) = [\log_{1/\lambda} n - \log_{1/\lambda} \ln n^c]$. Пользуясь двусторонними оценками для вероятностей $\mathbf{P}(\eta_n < k)$, установленными в теореме 2.1 работы [5], нетрудно получить, что если c достаточно велико, то $\sup_{1\leqslant k\leqslant k(n)} \mathbf{P}(\eta_n < k) = \mathbf{P}(\eta_n < k(n)) = o(n^{-1})$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что теорема 3 будет доказана, если мы покажем, что $\sup_{k\geqslant k(n)} \Delta(n, k) = O(n^{-1}(\ln n)^3)$.

Обозначим через τ_i номер i-го по счету нуля в последовательности $\{X_i,\ i \geqslant 1\}$. Тогда, как нетрудно видеть, случайные величины $\zeta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i \geqslant 2$, независимы и одинаково распределены с ζ. Отметим, что $\zeta_i - 1$ есть длина i-й по счету серии «успехов» в последовательности $\{X_i,\ i \geqslant 1\}$. Поэтому

$$\eta_n = \max\{\eta_n^*;\ \zeta_1 - 1;\ n - \tau_{\nu(n)}\}, \tag{4.2}$$

где $\eta_n^* = \max_{2\leqslant i\leqslant \nu(n)} \zeta_i - 1$, $\nu(n) = \max\{i:\ \tau_i \leqslant n\}$.

Лемма 10. *Пусть* $\tilde{\eta}_n = \max_{1\leqslant i\leqslant \nu(n)+1} \zeta_i - 1$. *Тогда*

$$\sup_{k\geqslant k(n)} |\mathbf{P}(\eta_n < k) - \mathbf{P}(\tilde{\eta}_n < k)| = O(n^{-1}(\ln n)^2). \tag{4.3}$$

При доказательстве леммы 10 воспользуемся тем фактом, что $\mathbf{P}(\zeta_1 = i) \leqslant c\lambda^i$. Аналогичные неравенства справедливы и для величин «недоскока» $n - \tau_{\nu(n)}$ и «перескока» $\tau_{\nu(n)+1} - n$ (нужно воспользоваться локальной теоремой восстановления и представлением для совместного распределения величин «недоскока» и «перескока» [18, с. 224]).

Распишем теперь более подробно вероятность $\mathbf{P}(\tilde{\eta}_n < k)$. Имеем

$$\mathbf{P}(\tilde{\eta}_n < k) = \mathbf{P}\left(\max_{2 \leqslant i \leqslant \nu(n)+1} \zeta_i \leqslant k\right) = \sum_{r=0}^{n} \mathbf{P}\left(\max_{2 \leqslant i \leqslant r+1} \zeta_i \leqslant k, \sum_{j=1}^{r} \zeta_j \leqslant n < \sum_{j=1}^{r+1} \zeta_j\right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \mathbf{P}\left(\max_{2 \leqslant i \leqslant r+1} \zeta_i \leqslant k\right) \mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{r} \zeta_j^{(k)} \leqslant n < \sum_{j=1}^{r+1} \zeta_j^{(k)}\right) = \mathbf{M}(1 - \alpha(k))^{\nu(k,n)}, \qquad (4.4)$$

где $\nu(k, n) = \max\left\{r\colon \sum_{j=1}^{r} \zeta_j^{(k)} \leqslant n\right\}$, случайные величины $\zeta_j^{(k)}$ независимы и имеют распределение $\mathbf{P}(\zeta_j^{(k)} = i) = \mathbf{P}(\zeta_j = i \mid \zeta_j \leqslant k)$.

Лемма 11. *Пусть* $t \equiv t(k) = 1 - \alpha(k)$. *Тогда*

$$\sup_{k \geqslant k(n)} \left| \mathbf{M} t^{\nu(k,n)} - t^{\mathbf{M}\nu(k,n) + \mathbf{D}\nu(k,n)(\ln t)/2} \right| = o(n^{-1}). \qquad (4.5)$$

По поводу второго слагаемого под знаком модуля в (4.5) отметим, что если Y — стандартная нормальная случайная величина, то $\mathbf{M} t^{Y\sqrt{\mathbf{D}\nu(k,n)}} = \exp\left(\frac{1}{2} \mathbf{D}\nu(k, n)(\ln t)^2\right)$. При доказательстве леммы 11 используется разложение функций $f_n(u) = (1-u)^{Y_n \sqrt{\mathbf{D}\nu(k,n)}}$ и $f(u) = (1-u)^{Y\sqrt{\mathbf{D}\nu(k,n)}}$ в ряд Тейлора до третьих производных (здесь $Y_n \equiv Y_n(k) = (\nu(k, n) - \mathbf{M}\nu(k, n))/\sqrt{\mathbf{D}\nu(k, n)}$, $u = \alpha(k)$). Предварительно непосредственно проверяется, что $\mathbf{M}(Y_n)^4 \leqslant c < \infty$ при $k \geqslant k(n)$, $n \geqslant 1$. Отсюда и из равномерной по $k \geqslant k(n)$ слабой сходимости при $n \to \infty$ величин Y_n к стандартному нормальному закону следует (см. [19, с. 34]) равномерная по $k \geqslant k(n)$ сходимость $\mathbf{M}|Y_n|^i \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{M}|Y|^i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Таким образом, величины $\mathbf{M}|Y_n|^i$ равномерно по $k \geqslant k(n)$, $n \geqslant 1$, ограничены. Окончательно получим, что левая часть (4.5) не превосходит $c_1 n^{3/2} \alpha^3(k(n)) \leqslant c_2 n^{-3/2} (\ln n)^3$.

Непосредственно проверяется, что $\sup_{k \geqslant k(n)} |\exp(\mathbf{D}\nu(k, n)(\ln t)^2/2) - 1| = O(n^{-1}(\ln n)^2)$. Для завершения доказательства теоремы 3 необходимо оценить

$$\sup_{k \geqslant k(n)} |(1 - \alpha(k))^{\mathbf{M}\nu(k,n)} - \exp(-n\alpha(k)/\mathbf{M}\zeta)|. \qquad (4.6)$$

Но поскольку $\mathbf{M}\zeta^{(k)} = \mathbf{M}\zeta(1 + O(k\lambda^k))$, имеем $\mathbf{M}\nu(k, n) = n/\mathbf{M}\zeta^{(k)} + O(1) = n/\mathbf{M}\zeta(1 + O(n^{-1} + k\lambda^k))$. Оценка скорости сходимости, сформулированная в теореме 3, становится теперь очевидной. ■

Отметим, что теорема 1 в случае $S = \{0; 1\}$ дает оценку скорости сходимости вида $O(n^{-1} \ln n)$. Вопрос о том, останется ли эта оценка справедливой и в ситуации, рассмотренной в настоящем параграфе, остается пока открытым.

Свойства процессов восстановления использовали В. В. Анисимов и А. И. Черняк [7], установившие в случае марковской цепи с конечным числом состояний предельный закон для максимума длин серий «успехов». В основе их метода лежит использование при выводе слабой сходимости закона больших чисел для соответствующих процессов восстановления. Независимо от них эту же идею автору в частной беседе высказал А. А. Боровков. Однако долгое время автор считал более эффективным другой подход, реализованный при доказательстве теоремы 1. Интерес автора к идее использования свойств процессов восстановления был вновь привлечен беседами с С. А. Утевым.

Автор признателен А. А. Боровкову за внимание к работе, а также А. М. Зубкову за полезные замечания. Автор хотел бы выразить свою искреннюю благодарность С. А. Утеву за моральную поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гончаров В. Л.** Из области комбинаторики // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1944.— Т. 8, № 1.— С. 3—48.
2. **Földes A.** The limit distribution of the length of the longest head-run // Trans. 8-th Prague Conf. on Inform. Theory, Statist. Desis. Func., Rand. Processes.— Prague, 1979.— P. 95—104.
3. **Kusolitsch N.** Runs in Markov chains // Probab. & Statist. Inference.— 1982.— P. 223—230.
4. **Новак С. Ю.** О длине наибольшей серии успехов в марковских цепях // 4-я Междунар. Вильнюс. конф. по теор. вероятн. и мат. статист.— Вильнюс, 1985.— Т. 11.— С. 267—268.
5. **Новак С. Ю.** Об отрезках времени постоянного пребывания однородной марковской цепи в фиксированном подмножестве состояний // Сиб. мат. журн.— 1988.— Т. 29, № 1.— С. 129—140.
6. **Mory G., Szekely G.** Asymptotic independence of "pure head" stopping times // Statist. & Probab. letters.— 1984.— V. 2, N 1.— P. 5—8.
7. **Анисимов В. В., Черняк А. И.** Предельные теоремы для некоторых редких функционалов на марковских цепях и полумарковских процессах // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1982.— Т. 26.— С. 1—6.
8. **Erdös P., Révész P.** On the length of the longest head-run // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. Topics in Inform. Theory.— 1975.— V. 16.— P. 219—228.
9. **Самарова С. С.** О количестве отрезков времени постоянного пребывания эргодической марковской цепи в фиксированном состоянии // Докл. АН СССР.— 1981.— Т. 260, № 1.— С. 35—40.
10. **Варякойис Л.** О максимуме длин серий «успехов» в счетной марковской цепи // Литовск. мат. сб.— 1986.— Т. 26, № 4.— С. 616—625.
11. **Guibas L. J., Odlyzko A. M.** Long Repetitive Patterns in Random Sequences // Z. Wahr. Gebiet.— 1980.— V. 53.— P. 241—262.
12. **Novak S. Yu.** On the length of the longest increasing run // 1st Congr. Bernoully Soc. on Math. Statist. & Probab.— 1986.— V. 11.— P. 766.
13. **Grill K.** Erdös-Révész Type Bounds for the Length of the longest run from a Stationary Mixing Sequence // Probab. Th. Rel. Fields.— 1987.— V. 75, N 3.— P. 77—85.
14. **Moivre A.** Doctrine of Chances.— L., 1738.
15. **Новак С. Ю.** О времени пребывания однородной марковской цепи в конечном подмножестве состояний // Теория вероятностей и применения.— 1986.— Т. 31, № 2.— С. 412—413.
16. **Бицадзе А. В.** Основы теории аналитических функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1984.— 320 с.
17. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения.— М.: Мир, 1984.— Т. 1.
18. **Боровков А. А.** Теория вероятностей.— М.: Наука, 1986.
19. **Боровков А. А.** Математическая статистика.— М.: Наука, 1984.

О ВЕРОЯТНОСТЯХ МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

А. А. БОРОВКОВ, А. А. МОГУЛЬСКИЙ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс с траекториями из пространства $D(0, 1)$ функций без разрыва второго рода на отрезке $[0, 1]$. Обозначим через Q распределение процесса ξ в $D(0, 1)$ (с σ-алгеброй $\mathscr{B}$, порожденной цилиндрическими множествами, или, что то же самое, борелевскими множествами относительно метрики Скорохода). Явный вид $Q(A)$ даже для «простых» множеств A и «простых» процессов ξ найти, за редким исключением, невозможно. Однако асимптотическое поведение $Q(xA)$ ($f + xA$ означает множество функций $\{f + xg,\ g \in A\}$, $x \in \mathbf{R}^1$) при $x \to \infty$ или $x \to 0$ в целом ряде случаев поддается изучению.