АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ ПОГРЕШНОСТИ УСРЕДНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

А. В. ПОЖИДАЕВ

Усреднению параболических операторов при различных предположениях о строении коэффициентов посвящено большое число работ. Отметим среди них фундаментальный обзор [1], где приведена значительная часть результатов такого рода, а также статьи [2—4], посвященные родственным вопросам.

В этих работах получены результаты типа закона больших чисел, т. е. показана сходимость в определенном смысле операторов со случайными коэффициентами к оператору того же вида с постоянными коэффициентами. Отметим, что в [3] установлена и оценка скорости сходимости.

Основная цель настоящей работы состоит в установлении асимптотической нормальности решений параболических краевых задач вида

$$\partial u/\partial t - a^{\varepsilon}_{ij}\partial^2 u/\partial x_i\,\partial x_j - b^{\varepsilon}_i\,\partial u/\partial x_i - b^{\varepsilon}_0 u = f(x, t),$$
$$x \in V,\ t \in [0, T],\ T < \infty,$$
$$u(x, 0) = g(x),\ u(x, t)|_{\partial V} = p(x, t),$$

где коэффициенты — m-зависимые случайные поля.

Отметим, что для эллиптических краевых задач со случайными младшими коэффициентами при произвольной размерности пространства вопрос об асимптотической нормальности решения исследован в [5, 6]. Если размерность пространства не превышает трех и случаен только коэффициент при решении, то аналогичные результаты получены также в [7, 8]. В работе [9] установлена асимптотическая нормальность решения волнового уравнения со случайными коэффициентами. В [10] этот результат был распространен на одномерные уравнения параболического типа.

В § 1 данной работы приведены некоторые сведения из теории дифференциальных уравнений и введены необходимые обозначения. Ограничения на коэффициенты и формулировки основных результатов даны в § 2. Выделение асимптотически нормальных составляющих решений приведено в § 3. Основные результаты доказаны в § 4. Там же разобран пример, показывающий неулучшаемость по порядку ε оценки скорости сходимости в теореме 2.3.

§ 1. ОБОЗНАЧЕНИЯ. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Нам удобно воспользоваться обозначениями работы [6]. Применительно к целочисленному вектору $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ $0 \leqslant \lambda \leqslant n$ означает, что все $\lambda_i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Символом $\pi(k)$ обозначаем набор всевозможных целочисленных векторов $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ таких, что $0 \leqslant \lambda \leqslant n$. Для записи производной $\partial u(x, t)/\partial x_i$ применяются символы

$$D_i u,\ u_{\cdot i},\ u_{\cdot 0} \equiv u;\ \partial^k u/\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k} \equiv u_{\cdot i_1 i_2 \ldots i_k},\ D^{\alpha} u = \partial^{|\alpha|} u/\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — целочисленный мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Для любой функции $K(x, t, y, \tau)$ обозначения аналогичны: $K_{\cdot i}(x, t, y, \tau) = \partial K(x, t, y, \tau)/\partial x_i$, $K_0(x, t, y, \tau) = K(x, t, y, \tau)$.

Пусть $V \subset R^n$ — ограниченная область. Тогда $W_2^k(V)$ (k — нецелое положительное число) есть пополнение множества $C_0^\infty(V)$ в норме (ср. с [11])

$$|u|^2_{W_2^k(V)} = \int\limits_V \sum_{|\alpha|<k} |D^\alpha u|^2 dx + \sum_{|\alpha|=[k]} \int\limits_{V^2} |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2 \times$$
$$\times |x-y|^{-n-2(k-[k])} \cdot dx\, dy,$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа.

Пусть $W_2^{-k}(V)$ — пространство, сопряженное к $W_2^k(V)$, $|u|_m \equiv \equiv |u|_{W_2^m(V)}$, $W_2^0(V) \equiv L_2(V)$. Символом $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ обозначаем двойственность между $W_2^k(V)$ и $W_2^{-k}(V)$, одной буквой C различные неслучайные, не зависящие от ε постоянные.

Ниже приняты следующие обозначения: $V \subset R^n$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей ∂V, Δ — оператор Лапласа, $\mathbf{M}$ — символ математического ожидания, $\mu(y, \omega)$ — однородное в узком смысле, m-зависимое случайное поле, $\bar{b}(x, t, \omega) = \{b_0(x, t, \omega), b_1(x, t, \omega), \ldots \ldots, b_n(x, t, \omega)\}$ — векторнозначное m-зависимое по пространственным переменным случайное поле, т. е. для любых $k \in N$, $t_1, \ldots, t_k$ и набора $x_1, \ldots, x_k$ таких, что $|x_i - x_j| > m$ случайные векторы $\bar{b}(x_1, t_1, \omega), \ldots \ldots, \bar{b}(x_k, t_k, \omega)$ независимы в совокупности. Кроме того, через $l(x, t, \omega) = = \|l^{ij}(x, t, \omega)\|$ обозначаем матричнозначное m-зависимое по времени случайное поле, т. е. матрицы $l(x, t, \omega)$, $l(y, \tau, \omega)$ со случайными коэффициентами независимы при $|t-\tau| > m$ как бы ни были выбраны пространственные переменные x, y. В дальнейшем, не ограничивая общности, полагаем $m = 1$.

В данной работе $k(x, t)$, $p(x, t)$, $g(x)$, $a_{ij}(x, t) = a_{ji}(x, t)$ — неслучайные достаточно гладкие функции. Функции Грина краевых задач

$$\begin{gathered} \partial u/\partial t - a_{ij} u_{\cdot ij} = k(x, t), \\ x \in V, \quad t \in [0, T], \quad T < \infty, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, t)|_{\partial V} = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

и

$$\begin{gathered} \partial u/\partial t - (\mathbf{M}\mu^{-1})^{-1} \Delta u = k(x, t), \\ x \in V, \quad t \in [0, T], \quad T < \infty, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, t)|_{\partial V} = 0 \end{gathered} \tag{2}$$

обозначаем $G(x, t, y, \tau)$ и $\Gamma(x, t, y, \tau)$ соответственно.

В (1) и ниже повторяющиеся индексы означают суммирование. Во всей работе $\delta > 0$ — произвольное сколь угодно малое фиксированное число, $r = 2 - n/2 - \delta$. Числа β_1, β удовлетворяют условию $0 < \beta < \beta_1 < \delta$, $s = 2 - n/2 - \beta_1$, $T(\tau) = (t-\tau)^{\beta/2-1}$, а $F_1(x, y)$ — функция Грина краевой задачи $\Delta u = h(x)$, $x \in V$, $u|_{\partial V} = 0$. Функция $F_k(x, y)$ при $k \geqslant 2$ определяется равенством

$$F_k(x, y) = \int\limits_V F_{k-1}(x, z) F_1(z, y)\, dz.$$

Из результатов работы [12, теорема 8.3] следует, что если $h(x) \in \in W_2^{-k}(V)$, то существуют не зависящие от $h(x)$ положительные постоянные C_1, C_2 такие, что

$$C_1 |h|_{-k} \leqslant \left| \int\limits_V F_m(x, y) h(y)\, dy \right|_{2m-k} \leqslant C_2 |h|_{-k}. \tag{3}$$

Пусть

$$\begin{aligned} &F(x, t, y, \tau) = G(x, t, y, \tau) && \text{при } n = 2, 3; \\ &F(x, t, y, \tau) = \int\limits_V F_m(x, z) G(z, t, y, \tau)\, dz && \text{при } n > 3, \end{aligned} \tag{4}$$

где натуральное число m выбрано из условия

$$0 < s + 2m < 2. \tag{5}$$

Тогда для $F(x, t, y, \tau)$, а также функций Грина $G(x, t, y, \tau)$, $\Gamma(x, t, y, \tau)$ в силу [13, с. 170] справедливы оценки

$$|G(x, t, y, \tau)| + |\Gamma(x, t, y, \tau)| \leqslant CT(\tau)|x-y|^{2-\beta-n}, \tag{6}$$

$$\max_{s\leqslant n, k\leqslant n} (|G_{\cdot k}(x, t, y, \tau)| + |\Gamma_{\cdot s}(x, t, y, \tau)|) \leqslant CT(\tau)|x-y|^{1-\beta-n}, \tag{7}$$

$$|F_{\cdot i}(x, t, y, \tau)| \leqslant CT(\tau)|x-y|^{2m+2-\beta-n-j}, \tag{8}$$

где $j=0$ при $i=0$, $j=1$ при $i\neq 0$.

Для произвольной функции $S(x, t, y, \tau)$ и индекса $\alpha=(i_1, \ldots, i_k)\in$ $\in \pi(k)$

$$S^{\alpha}f(x; \{x_1, \ldots, x_k\}) \equiv \int_V \int_0^t S(x, t, x_1, t_1)\, b_{i_1}(x_1/\varepsilon, t_1, \omega) \times$$
$$\times \int_V \int_0^{t_1} G_{\cdot i_1}(x_1, t_1, x_2, t_2)\, b_{i_2}(x_2/\varepsilon, t_2, \omega)\cdot \ldots \cdot \int_V \int_0^{t_k} G_{\cdot i_{k-1}}(x_{k-1}, t_{k-1}, x_k, t_k) \times$$
$$\times b_{i_k}(x_k/\varepsilon, t_k, \omega)\, f_{\cdot i_k}(x_k, t_k)\, dt_k\, dx_k \ldots dt_1\, dx_1. \tag{9}$$

Здесь в фигурных скобках выделены пространственные переменные интегрирования.

По функции Грина $\Gamma(x, t, y, \tau)$ и случайному полю

$$\beta(x/\varepsilon, \omega) \equiv (\mathrm{M}\mu^{-1}(x/\varepsilon, \omega))^{-1}(\mathrm{M}\mu^{-1}(x/\varepsilon, \omega) - \mu^{-1}(x/\varepsilon, \omega)) \tag{10}$$

определим операторы $(\Gamma\beta)^k$ равенствами

$$\Gamma\beta f(x, t) = \int_V \int_0^t \Gamma(x, t, y, \tau)\, \beta(y/\varepsilon, \omega)\, f(y, \tau)\, d\tau\, dy, \tag{11}$$

$$(\Gamma\beta)^k f = (\Gamma\beta)^{k-1}\Gamma\beta f, \quad k\geqslant 2.$$

Иногда важное значение будут иметь временные переменные интегрирования. В этом случае для функции $S(x, t, y, \tau)$

$$S(t_1, t_2) * f \equiv \int_V \int_{t_1}^{t_2} S(x, t, y, \tau)\, f(y, \tau)\, d\tau\, dy. \tag{12}$$

Для интеграла I запись $I\{A\}$ означает, что область изменения временных переменных сужена до A.

В данной работе мы будем рассматривать три краевые задачи параболического типа со случайными коэффициентами:

$$\partial w/\partial t - a_{ij}(x, t)\, w_{\cdot ij} - b_i(x/\varepsilon, t, \omega)\, w_{\cdot i} - b_0(x/\varepsilon, t, \omega)\, w = k(x, t),$$
$$w(x, 0) = g(x), \quad w(x, t)|_{\partial V} = p(x, t); \tag{13}$$

$$\partial w_1/\partial t - \mu(x/\varepsilon, \omega)\Delta w_1 = k(x, t),$$
$$w_1(x, 0) = g(x), \quad w_1(x, t)|_{\partial V} = p(x, t); \tag{14}$$

$$\partial w_2/\partial t - (a_{ij}(x, t) + l^{ij}(x, t/\varepsilon, \omega))\, w_{2\cdot ij} = f(x, t/\varepsilon, \omega),$$
$$w_2(x, 0) = g(x), \quad w_2(x, t)|_{\partial V} = p(x, t). \tag{15}$$

В задачах (13)—(15), если не оговорено противное, $t\in[0, T]$, $T<\infty$, $x\in V$. Решения задач (13), (15) рассматриваются при любом фиксированном $t\neq 0$.

§ 2. ОГРАНИЧЕНИЯ НА КОЭФФИЦИЕНТЫ И ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Предельное поведение решений задач (13)—(15) рассматривается в работе при следующих предположениях.

Для данных задач выполнены условия равномерной параболичности, т. е. существуют положительные постоянные C_1, C_2 такие, что для любого вещественного вектора $\gamma=\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ с вероятностью 1 выполняются неравенства

$$C_1|\gamma|^2 \leqslant a_{ij}(x, t)\gamma_i\gamma_j \leqslant C_2|\gamma|^2,$$
$$C_1|\gamma|^2 \leqslant (a_{ij}(x, t)+l^{ij}(x, t/\varepsilon, \omega))\gamma_i\gamma_j \leqslant C_2|\gamma|^2,$$
$$C_1 \leqslant \mu(x/\varepsilon, \omega) \leqslant C_2.$$

Почти все реализации случайных полей $l^{ij}(x, t, \omega)$, $f(x, t, \omega)$, $b_i(x, t, \omega)$, $\mu(x, \omega)$ — гладкие функции (случайные поля $l^{ij}(x, t, \omega)$ принадлежат по пространственным переменным классу $C_0^2(V_1)$, $V_1 \subset V$), причем для $a_{ij}(x, t)$, $l^{ij}(x, t/\varepsilon, \omega)$, $f(x, t/\varepsilon, \omega)$, $g(x)$, $p(x, t)$ существует достаточное число производных по пространственным переменным, ограниченных одной неслучайной постоянной.

Случайные коэффициенты $b_i(x/\varepsilon, t, \omega)$, $i=0, 1, \ldots, n$, предполагаются ограниченными не зависящей от случая постоянной с вероятностью 1 при всех $x \in V$, $t \in [0, T]$.

При этих условиях краевые задачи (13)—(15) с вероятностью 1 имеют классические решения.

Под случайным решением задачи (13) ((14), (15)) понимается случайное поле, почти все реализации которого удовлетворяют (13) ((14), (15)).

Ниже предполагается, что случайные поля $l^{ij}(x, t, \omega)$, $f(x, t, \omega)$, $b_i(x, t, \omega)$ центрированы

$$\mathbf{M}l^{ij} = \mathbf{M}f = \mathbf{M}\bar{b} = 0.$$

Кроме того, для любой непрерывной векторнозначной неслучайной функции $\bar{f}(x, t, \tau)=\{f_0(x, t, \tau), f_1(x, t, \tau), \ldots, f_n(x, t, \tau)\}$ существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-n}\mathbf{M}\left(\int_V \int_0^t f_i(y, t, \tau)\, b_i(y/\varepsilon, \tau, \omega)\, d\tau\, dy\right)^2 = \sigma^2(\bar{f}) > 0. \tag{16}$$

Условие (16) выполнено, если, например, $\bar{b}(x, t, \omega)$ однородное, m-зависимое поле, причем

$$\sigma^2(\bar{f}) = \int_0^t \int_0^t \int_{|u|\leqslant m} R_{ij}(u, s, \tau)\, du \int_V f_i(y, t, \tau) f_j(y, t, s)\, dy\, d\tau\, ds,$$

где $R_{ij}(u, s, \tau)=\mathbf{M}b_i(y, \tau, \omega)\, b_j(y+u, s, \omega)$.

Отметим, что для случайного поля $\beta(x/\varepsilon, \omega)$ имеет место соотношение типа (16). Именно для любой непрерывной неслучайной функции $f(x)$ существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-n}\, \mathbf{M}\left(\int_V f(y)\, \beta(y/\varepsilon, \omega)\, dy\right)^2 = \sigma_1^2(f), \tag{17}$$

где $\sigma_1^2(f) = \int\limits_{|u|\leqslant m} R(u)\, du \int\limits_V f^2(y)\, dy$, а $R(u)=\mathbf{M}\beta(y, \omega)\beta(y+u, \omega)$.

Пусть U, U_1, U_2 — решения следующих краевых задач:

$$\partial U/\partial t - a_{ij}U_{\cdot ij} = k(x, t),$$
$$U(x, 0)=g(x), \quad U(x, t)|_{\partial V} = p(x, t); \tag{18}$$

$$\partial U_1/\partial t-(\mathrm{M}\mu^{-1})^{-1}\Delta U_1=k(x,t),$$
$$U_1(x,0)=g(x),\quad U_1(x,t)|_{\partial V}=p(x,t); \tag{19}$$
$$\partial U_2/\partial t-a_{ij}U_{2\cdot ij}=0,$$
$$U_2(x,0)=g(x),\quad U_2(x,t)|_{\partial V}=p(x,t). \tag{20}$$

При наложенных ограничениях справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.1. *При* $\varepsilon\to 0$ *решение* w *задачи* (13) *асимптотически нормально в том смысле, что распределение, порожденное в пространстве* $W_2^r(V)$ *обобщенных функций случайным полем*

$$v=\varepsilon^{-n/2}\left(w-U-\sum_{k=2}^{n+1}\sum_{\alpha\in\pi(k)}\mathrm{M}G^{\alpha}U(x;\{x_1,\ldots,x_k\})\right),$$

слабо сходится к центрированному гауссовскому распределению в $W_2^r(V)$ *с характеристическим функционалом* $\tilde{\varphi}(\Phi)=\exp\{-\sigma^2(\bar f)/2\}$, *где* $(y,t,\tau)=\int\limits_V\Phi(x)G_{\cdot i}(x,t,y,\tau)\,dx\cdot U_{\cdot i}(y,\tau)$, *а* $\sigma^2(\bar f)$ *определена в* (16).

Теорема 2.1 является распространением теоремы 1.1 работы [6], доказанной для эллиптических уравнений со случайными коэффициентами, на параболические уравнения. Отметим, что в [14] получен результат, аналогичный теореме 2.1 при $n=1$.

Теорема 2.2. *Для любой функции* $\varphi(t)\in C_0^\infty(0,T)$ *распределение, порожденное в пространстве* $W_2^r(V)$ *случайным полем*

$$v_1=\varepsilon^{-n/2}\left(\int\limits_0^T\varphi(t)\,(w_1(x,t)-U_1(x,t)-\sum_{s=2}^{n+1}\mathrm{M}\partial^{s-1}(\Gamma\beta)^sF(x,t)/\partial t^{s-1})\,dt\right),$$

слабо сходится при $\varepsilon\to 0$ *к центрированному гауссовскому распределению в* $W_2^r(V)$ *с характеристическим функционалом* $\varphi_1(\Phi)=$ $=\exp\{-\sigma_1^2(f)/2\}$, *где* $f(y)=\int\limits_V\int\limits_0^T\int\limits_0^t\Phi(x)\,\varphi(t)\,\Gamma(x,\ t,\ y,\ \tau)\,F(y,\tau)\,d\tau\,dt\,dx$, $\sigma_1^2(f)$ *определена в* (17), *а*

$$F(x,t)=\partial U_1(x,t)/\partial t-k(x,t). \tag{21}$$

Теорема 2.3 усиливает результат работы [15], где для задачи Коши *скорости сходимости*

$$\mathrm{M}\,|\,w_2-U_2\,|_0^2\leqslant C\varepsilon.$$

Теорема 2.3 усиливает результат работы [15], где для задачи Коши со случайными коэффициентами была получена оценка скорости сходимости порядка $\varepsilon^{1/2-\delta}$.

Условие 2.1. Дополнительно предположим, что для любой функции $l(x)\in L_2(V)$ случайная величина

$$\varepsilon^{-1/2}\int\limits_V\int\limits_V\int\limits_0^t l(x)\,G(x,t,y,\tau)\left(l^{ij}(y,\tau/\varepsilon)\,U_{2\cdot ij}+f(y,\tau/\varepsilon)\right)d\tau\,dy\,dx$$

асимптотически нормальна с параметрами $\left(0,\sigma_2^2(l,G,U_2)\right)$.

Тогда справедлив следующий результат.

Теорема 2.4. *Распределение, порожденное в пространстве* W^- *случайным полем*

$$v_2=\varepsilon^{-1/2}(w_2-U_2),$$

слабо сходится при $\varepsilon\to 0$ *к центрированному гауссовскому распределению в* $W_2^-(V)$ *с характеристическим функционалом* $\varphi_2(l)=\exp\{-\sigma_2^2(l,G,U_2)/2\}$.

Теорема 2.4 усиливает теорему 1.1 из [15], где слабая сходимость была установлена в $W_2^{-3}(V)$.

Отметим также, что, как показано в [15], условие 2.1 выполнено, если, например, $l^{ij}(x, t, \omega)$, $f(x, t, \omega)$ — однородные, m-зависимые по временным переменным поля.

§ 3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном пункте доказаны леммы, позволяющие выделить асимптотически нормальные составляющие решений задач (13)—(15).

Лемма 3.1. *Пусть* $0<\eta<1$, $k=2+2m-\beta$, *где* m *удовлетворяет* (5). *Тогда для функции* $F(x, t, y, \tau)$, *определенной равенством* (4), *имеет место оценка*

$$A\equiv|F_{\cdot i}(x, t, z, \tau)-F_{\cdot i}(y, t, z, \tau)|\leqslant CT(\tau)\times$$
$$\times|x-y|^{\eta}(|x-z|^{k-n-\eta-j}+|y-z|^{k-n-\eta-j}),$$

где $j=0$ *при* $i=0$, $j=1$ *при* $i\neq 0$.

Доказательство. При $|x-z|\leqslant 2|x-y|$ достаточно воспользоваться неравенством (8). В этом случае

$$A\leqslant CT(\tau)(|x-z|^{k-n-j}+|y-z|^{k-n-j})\leqslant$$
$$\leqslant CT(\tau)|x-y|^{\eta}(|x-z|^{k-n-\eta-j}+|y-z|^{k-n-\eta-j}).$$

При $|x-z|>2|x-y|$ для любой точки $\theta=\theta(x, y)\in[x, y]$ из неравенства треугольника получаем

$$2|\theta-z|\geqslant|z-y|+|z-x|-|\theta-y|-|\theta-x|=$$
$$=|z-y|+|z-x|-|x-y|\geqslant|x-z|.$$

Отсюда, по теореме о среднем

$$A\leqslant CT(\tau)|x-y||\theta-z|^{k-n-j-1}\leqslant CT(\tau)|x-y|^{\eta}\cdot|x-z|^{k-n-\eta-j}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Если* $|\nu|<s+2m$, *то*

$$B\equiv\left|\int\limits_V D^{\nu}F(x, t, y, \tau)D^{\nu}F(x, t, y_1, s)\,dx\right|\leqslant CT(\tau)T(s).$$

Доказательство. Пусть $|\nu|=j$, где $j=0, 1$. Тогда $k-j\equiv\equiv 2+2m-\beta-j>2+2m-\beta_1-j>n/2$. Отсюда в силу (8) получаем

$$B\leqslant CT(\tau)T(s)\int\limits_V(|x-y||x-y_1|)^{k-n-j}\,dx\leqslant CT(\tau)T(s).$$

Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть* $|\nu|=[\tilde\beta]$, $\tilde\beta=s+2m$. *Тогда*

$$D\equiv\left|\int\limits_{V^2}D^{\nu}(F(x, t, z, \tau)-F(y, t, z, \tau))D^{\nu}(F(x, t, u, s)-\right.$$
$$\left.-F(y, t, u, s))|x-y|^{2([\tilde\beta]-\tilde\beta)-n}\,dx\,dy\right|\leqslant CT(\tau)T(s).$$

Доказательство. Пусть $|\nu|=j$, $j=0, 1$, а γ удовлетворяет условиям: $\beta_1-\beta>3\gamma$, $0<\tilde\beta-[\tilde\beta]+\gamma\equiv\alpha<1$. Тогда $l\equiv k-\alpha-j\equiv 2+2m-\beta-\tilde\beta+[\tilde\beta]-\gamma-j>2+2m-\tilde\beta+2\gamma-\beta_1>n/2$.

Отсюда в силу леммы 3.1

$$D\leqslant CT(\tau)T(s)\int\limits_{V^2}|x-y|^{2\gamma-n}(|x-z|^{l-n}+$$
$$+|y-z|^{l-n})(|x-u|^{l-n}+|y-u|^{l-n})\,dx\,dy\leqslant CT(\tau)T(s).$$

Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Если* $\Phi(x) \in W_2^{-s}(V)$, *то случайные величины* $\varepsilon^{-n/2}\left\langle \Phi, \sum_{\alpha\in\pi(1)} G^\alpha U \right\rangle_{-s}$, $\varepsilon^{-n/2}\left\langle \Phi, \int_0^T \varphi(t)\,\Gamma\beta F(x, t)\,dt \right\rangle_{-s}$ *асимптотически нормальны с параметрами* $(0, \sigma^2(\bar{f}))$, $(0, \sigma_1^2(f))$, *где* $\varphi(t)$, $\bar{f}(x, t, \tau)$, $f(x)$ *определены в формулировках теорем* 2.1, 2.2.

Лемма 3.4 есть частный случай доказанной в [16] теоремы.

Лемма 3.5. *Имеют место оценки*

$$\varepsilon^{-n}\mathbf{M}\left|\sum_{\alpha\in\pi(1)} G^\alpha U(x; \{x_1\})\right|_s^2 < C,$$

$$\left|\sum_{\alpha\in\pi(k)} \mathbf{M}G^\alpha U(x; \{x_1, \ldots, x_k\})\right|_s^2 \leqslant C\varepsilon^{2(1-\beta)[k+1/2]},$$

где $G^\alpha U(x; \{x_1, \ldots, x_k\})$ *определено равенством* (9).

Лемма 3.6. *Справедливо неравенство*

$$L \equiv \mathbf{M}\left|\sum_{\alpha\in\pi(k)} G^\alpha U(x; \{x_1, \ldots, x_k\}) - \mathbf{M}G^\alpha U(x; \{x_1, \ldots, x_k\})\right|_s^2 \leqslant C\varepsilon^{n+1-\beta}.$$

Лемма 3.7. *Имеет место оценка*

$$\mathbf{M}\left|\sum_{\alpha\in\pi(n+1)} G^\alpha w(x; \{x_1, \ldots, x_{n+1}\})\right|_s^2 \leqslant C\varepsilon^{n+1-\beta}.$$

Леммы 3.1—3.3 и неравенства (3) позволяют провести доказательства лемм 3.5—3.7 так же, как и лемм 4.2—4.4 в [5]. Докажем, например, лемму 3.6.

Из неравенств (3) имеем

$$\mathbf{M}\left|G^\alpha U(x; \{x_1, \ldots, x_k\}) - \mathbf{M}G^\alpha U(x; \{x_1, \ldots, x_k\})\right|_s^2 \leqslant$$
$$\leqslant C\mathbf{M}\left|F^\alpha U(x; \{y_1, \ldots, y_k\}) - \mathbf{M}F^\alpha U(x; \{y_1, \ldots, y_k\})\right|_{s+2m}^2,$$

где функция $F(x, t, y, \tau)$ определена равенством (4).

Используя определение нормы в пространстве $W_2^{s+2}(V)$, получаем

$$L \leqslant C\mathbf{M}\Bigg(\int_V \sum_{|\nu|<s+2m} D^\nu\left(F^\alpha U(x; \{y_1, \ldots, y_k\}) - \mathbf{M}F^\alpha U(x; \{y_1, \ldots, y_k\})\right)\Bigg) \times$$
$$\times D^\nu\left(F^\alpha U(x; \{z_1, \ldots, z_k\}) - \mathbf{M}F^\alpha U(x; \{z_1, \ldots, z_k\})\right)dx +$$
$$+ \sum_{|\nu|=[s+2m]} \int_{V^2} \left(D^\nu\left(F^\alpha U(x; \{y_1, \ldots, y_k\}) - \mathbf{M}F^\alpha U(x; \{y_1, \ldots, y_k\})\right) -\right.$$
$$- D^\nu\left(F^\alpha U(y; \{y_1, \ldots, y_k\}) - \mathbf{M}F^\alpha U(y; \{y_1, \ldots, y_k\})\right)\big) \times$$
$$\times \left(D^\nu\left(F^\alpha U(x; \{z_1, \ldots, z_k\}) - \mathbf{M}F^\alpha U(x; \{z_1, \ldots, z_k\})\right) -\right.$$
$$- D^\nu\left(F^\alpha U(y; \{z_1, \ldots, z_k\}) - \mathbf{M}F^\alpha U(y; \{z_1, \ldots, z_k\})\right)\big) \times$$
$$\times |x-y|^{-n-2(s+2m-[s+2m])}\,dx\,dy. \tag{22}$$

Пусть $m(\bar{y}, \bar{z}) = \mathbf{M}b_{i_1}(y_1/\varepsilon, t_1, \omega)\cdot\ldots\cdot b_{i_k}(y_k/\varepsilon, t_k, \omega)\, b_{i_1}(z_1/\varepsilon, \tau_1, \omega)\cdot\ldots\cdot b_{i_k}(z_k/\varepsilon, \tau_k, \omega)$,

$$m(\bar{y}) = \mathbf{M}b_{i_1}(y_1/\varepsilon, t_1, \omega)\cdot\ldots\cdot b_{i_k}(y_k/\varepsilon, t_k, \omega),$$
$$m(\bar{z}) = \mathbf{M}b_{i_1}(z_1/\varepsilon, \tau_1, \omega)\cdot\ldots\cdot b_{i_k}(z_k/\varepsilon, \tau_k, \omega).$$

В условиях теоремы 2.1 $m(\bar{y}, \bar{z}) = 0$, если найдется такое i, что для всех j $|x_i - x_j| > \varepsilon$, где $x_i = y_i$ при $i \leqslant k$, $x_i = z_s$ при $i = s + k$.

Введем области

$$K_1 = \{(\bar{y}, \bar{z}) \in V^{2k} : m(\bar{y}, \bar{z}) \neq 0,\quad \exists(i, j) : |y_i - z_j| < \varepsilon\},$$
$$K_2 = \{(\bar{y}, \bar{z}) \in V^{2k} : m(\bar{y}, \bar{z}) \neq 0,\quad \overline{\exists}(i, j) : |y_i - z_j| < \varepsilon\}.$$

Заметим, что в области K_2 $m(\bar{y}, \bar{z}) = m(\bar{y})m(\bar{z})$, а область K_1 можно покрыть конечным числом областей вида

$$G(i, j, k, t) = \{\bar{y} \in V^k, \bar{z} \in V^k: |y_i - z_j| < \varepsilon, |y_k - y_t| < \varepsilon\}$$

и

$$\tilde{G}(i, j, k, t) = \{\bar{y} \in V^k, \bar{z} \in V^k: |y_i - z_j| < \varepsilon, |y_k - z_t| < \varepsilon\}.$$

Отсюда, из (22) в силу лемм 3.1—3.3 и оценок (6), (7), после интегрирования по всем переменным, кроме y_i, y_k, y_t, z_j, z_t, получаем

$$L \leqslant C \iint\limits_{|y_i - z_j| < \varepsilon} \iint\limits_{|y_k - y_t| < \varepsilon} (|y_i - y_k||y_k - y_t|)^{1-\beta-n} dy_i\, dy_k\, dy_t\, dz_j +$$

$$+ C \iint\limits_{|y_i - z_j| < \varepsilon} \iint\limits_{|y_k - z_t| < \varepsilon} (|y_i - y_k||z_j - z_t|)^{1-\beta-n} dy_i\, dy_k\, dz_j\, dz_t \leqslant C\varepsilon^{n+1-\beta}.$$

Лемма доказана.

Замечание 3.1. Очевидно, что леммы 3.5—3.7 остаются справедливыми, если в формулировках этих лемм $G^\alpha U$ заменить на $(\Gamma\beta)^k F$.

Лемма 3.8. *Пусть* $q(x, t)$ — *гладкая функция и* $q(x, 0) = 0$. *Тогда, если* $h(x, t)$ — *решение краевой задачи*

$$\partial h/\partial t - C\Delta h = \partial q/\partial t, \quad h(x, 0) = 0, \quad h(x, t)|_{\partial V} = 0,$$

то $s(x, t) = \int\limits_0^t h(x, \tau)\, d\tau$ *является решением следующей краевой задачи*:

$$\partial s/\partial t - C\Delta s = q, \quad s(x, 0) = 0, \quad s(x, t)|_{\partial V} = 0. \tag{23}$$

Доказательство. Имеем

$$\Delta s(x, t) = \int\limits_0^t \Delta h(x, \tau)\, d\tau = \int\limits_0^t (C^{-1}(\partial h(x, \tau)/\partial \tau - \partial q(x, \tau)/\partial \tau))\, d\tau =$$

$$= C^{-1}(h(x, t) - h(x, 0) - q(x, t) + q(x, 0)) =$$

$$= C^{-1}(h(x, t) - q(x, t)) = C^{-1}(\partial s(x, t)/\partial t - q(x, t)).$$

Отсюда $\partial s(x, t)/\partial t - C\Delta s(x, t) = q(x, t)$. Последние два равенства в (23) очевидны. Лемма доказана.

Лемма 3.8 показывает, что при сформулированных ограничениях в интеграле $\int\limits_0^t \int\limits_V \Gamma(x, t, y, \tau)\, \partial q(y, \tau)/\partial \tau\, dy\, d\tau$ производную по времени можно выносить за знак интеграла. Этот результат следует также из того, что функция Грина $\Gamma(x, t, y, \tau)$ по временным переменным зависит только от разности $t - \tau$.

При сформулированных в п. 2 ограничениях на коэффициенты задачи (15) из работы [17, с. 22—31] следует, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.9. *Существует не зависящая от случая постоянная* C *такая, что с вероятностью* 1 *при всех* $x \in V$, $t \in [0, T]$

$$\max_{|\alpha| \leqslant 4} |D^\alpha w_2(x, t)| < C.$$

Лемма 3.10. *Справедливо неравенство*

$$\mathrm{M}\, |G(0, t) * l^{ij}(G(0, t_1) * l^{ks} w_{2 \cdot ks})_{\cdot ij}|_0^2 \leqslant C\varepsilon^{1,5-\beta},$$

где w_2 — *решение задачи* (15), *а оператор* $G(0, t)$ *определен равенством* (12).

Доказательство. Запишем выражение, стоящее под знаком нормы в виде

$$G(0,\ t)*l^{ij}(G(0,\ t_1)*l^{hs}w_{2\cdot hs})_{\cdot ij}=G(0,\ t)*l^{ij}(G(0,\ t_1-5\varepsilon)* \\ *\, l^{hs}w_{2\cdot hs})_{\cdot ij}+G(0,\ t)*l^{ij}(G(t_1-5\varepsilon,\ t_1)*l^{hs}w_{2\cdot hs})_{\cdot ij}. \qquad (24)$$

В силу представления вторых производных фундаментального решения (см. [15, п. 5]) и финитности поля l^{ij} существует функция $L(x,\ t,\ y,\ \tau)$ такая, что

$$|L(x,\ t,\ y,\ \tau)|\leqslant C(t-\tau)^{-n/2}\exp\{-C|x-y|^2/(t-\tau)\} \qquad (25)$$

и имеет место равенство

$$G(0,\ t)*l^{ij}(G(t_1-5\varepsilon,\ t_1)*l^{hs}w_{2\cdot hs})_{\cdot ij}=G(0,\ t)*l^{ij}L(t_1-5\varepsilon,\ t_1)*l^{hs}_{\cdot ij}w_{2\cdot hs}+ \\ +G(0,\ t)*l^{ij}L(t_1-5\varepsilon,\ t_1)*l^{hs}_{\cdot j}w_{2\cdot hsi}+G(0,\ t)*l^{ij}L(t_1-5\varepsilon,\ t_1)*l^{hs}_{\cdot i}w_{2\cdot hsj}+ \\ +G(0,\ t)*l^{ij}L(t_1-5\varepsilon,\ t_1)*l^{hs}w_{2\cdot hsij}. \qquad (26)$$

Из (25), леммы 3.9 и ограниченности $l^{hs}_{\cdot i}$, $l^{hs}_{\cdot ij}$ следует, что все слагаемые в правой части (26) имеют одинаковую особенность. Кроме того, в силу леммы 3.9, (25) и [11, с. 406] справедливо неравенство

$$\left|\int_V L(x,\ t,\ y,\ \tau)\, l^{hs}w_{2\cdot hsij}(y,\ \tau)\,dy\right|<C.$$

Отсюда

$$|G(0,\ t)*l^{ij}(G(t_1-5\varepsilon,\ t_1)*l^{hs}w_{2\cdot hs})_{\cdot ij}|_0^2\leqslant \\ \leqslant C\,|G(0,\ t)*l^{ij}L(t_1-5\varepsilon,\ t_1)*l^{hs}w_{2\cdot hsij}|_0^2\leqslant C\varepsilon^2.$$

Теперь оценим первое слагаемое в правой части (24). Аналогично предыдущему, в силу [15, п. 5] и финитности поля $l^{ij}(x,\ t,\ \omega)$ существуют функции $R(x,\ t,\ y,\ \tau)$, $K(x,\ t,\ y,\ \tau)$ такие, что $|G(0,t)*l^{ij}(G(0,t_1-5\varepsilon)*l^{hs}w_{2\cdot hs})_{\cdot ij}|_0^2$ оценивается конечной суммой интегралов вида

$$J\equiv|G(0,t)*lR(0,t_1-5\varepsilon)*lK(0,t_2)*lw_{2\cdot hsij}|_0^2, \qquad (27)$$

причем для функций $R(x,\ t,\ y,\ \tau)$, $K(x,\ t,\ y,\ \tau)$ имеет место оценка

$$|R(x,\ t,\ y,\ \tau)|+|K(x,\ t,\ y,\ \tau)|\leqslant C(t-\tau)^{1/2-\beta}\cdot|x-y|^{\beta-n}. \qquad (28)$$

Отметим, что в (27) в качестве $l(x,\ t/\varepsilon,\ \omega)$ может быть любая из функций $l^{ij}(x,\ t/\varepsilon,\ \omega)$ либо их производные по пространственным переменным до второго порядка включительно.

Итак,

$$\mathbf{M}\,|G(0,t)*l^{ij}(G(0,t_1-5\varepsilon)*l^{hs}w_{2\cdot hs})_{\cdot ij}|_0^2\leqslant C\mathbf{M}J.$$

Введем функцию

$$r(x,t_1,t_2,t_3)=\int_V\int_V\int_V G(x,t,x_1,t_1)\,l(x_1,t_1/\varepsilon,\omega)\,R(x_1,t_1,x_2,t_2)\times \\ \times\, l(x_2,t_2/\varepsilon,\omega)\,K(x_2,t_2,x_3,t_3)\,l(x_3,t_3/\varepsilon,\omega)\,w_{2\cdot hsij}(x_3,t_3)\,dx_3\,dx_2\,dx_1.$$

Тогда

$$J=\int_V\int_0^t\int_0^{t_1-5\varepsilon}\int_0^{t_2} r(x,t_1,t_2,t_3)\,dt_3\,dt_2\,dt_1\times \\ \times\int_0^t\int_0^{\tau_1-5\varepsilon}\int_0^{\tau_2} r(x,\tau_1,\tau_2,\tau_3)\,d\tau_2\,d\tau_2\,d\tau_1\,dx.$$

Заметим, что в силу m-зависимости поля $l(x,\ t,\ \omega)$ и условия центрирования $\mathbf{M}J\{t_1>\tau_1-\varepsilon\}=\mathbf{M}J\{\tau_1>t_1-\varepsilon\}=0$. А из неравенства (28) получаем

$$\mathbf{M}J\{|t_1-\tau_1|\leqslant\varepsilon\cap|t_2-\tau_2|\leqslant\varepsilon\}\leqslant C\iint\limits_{|t_1-\tau_1|\leqslant\varepsilon}\iint\limits_{|t_2-\tau_2|\leqslant\varepsilon}((t_1-t_2)(\tau_1-\tau_2))^{-1/2-\beta}d\tau_2\,d\tau_1\,dt_2\,dt_1\leqslant C\varepsilon^{3/2-\beta}.$$

Кроме того,

$$\mathbf{M}J\{|t_1-\tau_1|\leqslant\varepsilon\cap t_2-\tau_2>\varepsilon\}\leqslant$$

$$\leqslant C\iint\limits_{|t_1-\tau_1|\leqslant\varepsilon}\int\limits_0^{t_1-5\varepsilon}(t_1-t_2)^{-1/2-\beta}\int\limits_{t_2-\varepsilon}^{t_2}(t_2-t_3)^{-1/2-\beta}dt_3\,dt_2\,dt_1\,d\tau_1\leqslant C\varepsilon^{3/2-\beta}.$$

Аналогично

$$\mathbf{M}J\{|t_1-\tau_1|\leqslant\varepsilon\cap\tau_2-t_2>\varepsilon\}\leqslant C\varepsilon^{3/2-\beta}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.11. *Справедливо неравенство*

$$H\equiv\mathbf{M}\,|\,G(0,t)*l^{ij}(G(0,t_1)*l^{ks}U_{2\cdot ks})_{\cdot ij}|_0^2\leqslant C\varepsilon^2.$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 3.10, используя финитность поля $l^{ij}(x, t, \omega)$ и представление вторых производных фундаментального решения [15, п. 5], легко убедиться, что H оценивается конечным числом интегралов вида $?\,|\,G(0,t)*lL(0,t_1)*lU_{2\cdot ijks}|_0^2$, где функции $l(x, t, \omega)$, $L(x, t, y, \tau)$ те же, что и в лемме 3.10.

Так как $L(x, t, y, \tau)$ и фундаментальное решение задачи (20) имеют одинаковый порядок особенности, то требуемая оценка следует из ограниченности функции $U_{2\cdot ijks}$ и леммы 3.2 (см. [15, с. 175]).

Лемма доказана.

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $u=w-U$, где w и U решения задач (13) и (18). Тогда

$$\partial u/\partial t-a_{ij}u_{\cdot ij}=b_iu_{\cdot i}+b_iU_{\cdot i},$$
$$u(x,0)=0,\quad u(x,t)\,|_{\partial V}=0.$$

Используя функцию Грина $G(x, t, y, \tau)$, имеем

$$u=Gb_iu_{\cdot i}+Gb_iU_{\cdot i},\tag{29}$$

где оператор G определен по функции $G(x, t, y, \tau)$ равенством

$$Gf=\int\limits_V\int\limits_0^t G(x,t,y,\tau)\,f(y,\tau)\,d\tau\,dy.$$

Из (29) получаем

$$u=\sum_{\alpha\in\pi(n+1)}G^\alpha u+\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{\alpha\in\pi(k)}G^\alpha U.$$

Из неравенства Чебышева и лемм 3.4—3.7 имеем

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}(|v|_s>t)\leqslant\lim_{t\to\infty}\mathbf{M}\,|v|_s^2\cdot t^{-2}\leqslant\lim_{t\to\infty}Ct^{-2}.$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}(|v|_s>t)=0.\tag{30}$$

Пространство $W_2^s(V)$ компактно вкладывается в $W_2^r(V)$, так как $s>r$. Поэтому из (30) и [18, с. 516] следует, что семейство распределений, порожденных в пространстве $W_2^r(V)$ случайным полем v, слабо компактно.

Для всякой непрерывной функции $\Phi(x)$ в силу лемм 3.4—3.7 случайная величина $\langle \Phi, v\rangle_{-r}$ асимптотически нормальна при $\varepsilon \to 0$ с параметрами $(0, \sigma^2(\bar{f}))$, где

$$f_i(y,t,\tau) = \int_V \Phi(x) G_{\cdot i}(x,t,y,\tau)\, dx\, U_{\cdot i}(y,\tau),$$

а $\sigma^2(\bar{f})$ определена (16). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.2. Пусть $u_1 = w_1 - U_1$, где w_1 и U_1 решения задач (14) и (19).

Тогда

$$\begin{gathered} \partial u_1/\partial t - (\mathbf{M}\mu^{-1})^{-1}\Delta u_1 = \beta \partial u_1/\partial t + \beta F, \\ u_1(x, 0) = 0, \quad u_1(x, t)\,|_{\partial V} = 0, \end{gathered} \tag{31}$$

где $\beta(x/\varepsilon, \omega)$ и $F(x, t)$ определены равенствами (10) и (21).

Сведем задачу (31) к интегральному уравнению, используя функцию Грина $\Gamma(x, t, y, \tau)$ задачи (2). Имеем

$$u_1 = \Gamma\beta \partial u_1/\partial \tau + \Gamma\beta F, \tag{32}$$

где оператор $\Gamma\beta$ определен (11).

Из (32) и леммы 3.8 следует, что u_1 можно представить в виде

$$u_1 = \partial^{n+1}(\Gamma\beta)^{n+1} u_1/\partial t^{n+1} + \sum_{s=2}^{n+1} \partial^{s-1}(\Gamma\beta)^s F/\partial t^{s-1} + \Gamma\beta F.$$

Далее, как и при доказательстве теоремы 2.1, используя неравенство Чебышева и замечание 3.1, легко получить, что семейство распределений, порожденных в пространстве $W_2^r(V)$ случайным полем v_1, слабо компактно, и для любой непрерывной функции $\Phi(x)$ случайная величина $\langle \Phi, v_1\rangle_{-r}$ асимптотически нормальна при $\varepsilon \to 0$ с параметрами $(0, \sigma_1^2(f))$, где

$$f(y) = \int_V \int_0^T \int_0^t \Phi(x)\varphi(t)\Gamma(x,t,y,\tau) F(y,\tau)\, d\tau\, dt\, dx,$$

$\sigma_1^2(f)$ определена (17). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.3. Для разности $u_2 = w_2 - U_2$, где w_2 и U_2 — решения задач (15) и (20), имеем

$$\begin{gathered} \partial u_2/\partial t - a_{ij} u_{2\cdot ij} = l^{ij} u_{2\cdot ij} + l^{ij} U_{2\cdot ij} + f, \\ u_2(x, 0) = 0, \quad u_2(x, t)\,|_{\partial V} = 0. \end{gathered} \tag{33}$$

Сведем (33) к интегральному уравнению, используя функцию Грина $G(x, t, y, \tau)$. Получаем

$$u_2 = G(0, t) * l^{ij} u_{2\cdot ij} + G(0, t) * l^{ij} U_{2\cdot ij} + G(0, t) * f.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} u_2 = G(0, t) * l^{ij}(G(0, t_1) * l^{ks} u_{2\cdot ks})_{\cdot ij} + G(0, t) * \\ * l^{ij}(G(0, t_1) * l^{ks} U_{2\cdot ks})_{\cdot ij} + G(0, t) * l^{ij}(G(0, t_1) * f)_{\cdot ij} + \\ + G(0, t) * l^{ij} U_{2\cdot ij} + G(0, t) * f. \end{gathered} \tag{34}$$

Отсюда и из лемм 3.10, 3.11, [15, с. 173] имеем

$$\mathbf{M}\,|u_2|_0^2 \leqslant C\varepsilon^{3/2-\beta} + C\varepsilon^2 + C\varepsilon^2 + C\varepsilon + C\varepsilon \leqslant C\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.4. Как и при доказательстве теоремы 2.1, из теоремы 2.3, неравенства Чебышева, компактности вложения $L_2(V)$ в $W_2^{-\delta}(V)$ и условия 2.1 получаем, что семейство распределений, порожденных в пространстве $W_2^{-\delta}(V)$ случайным полем v_2, слабо компактно. А из представления (34), лемм 3.10, 3.11 и условия 2.1 следует, что для всякой функции $l(x) \in L_2(V)$ случайная величина $\langle l, v_2 \rangle_\delta$ асимптотически нормальна при $\varepsilon \to 0$ с параметрами $\left(0, \sigma_2^2(l, G, U_2)\right)$. Теорема доказана.

Замечание 4.1. Отметим, что теоремы 2.1—2.4 остаются справедливыми для второй и третьей краевых задач, а также задачи Коши. Это следует из одинаковых особенностей функций Грина для этих задач, фундаментального решения задачи Коши и функций $G(x, t, y, \tau)$, $\Gamma(x, t, y, \tau)$.

Рассмотрим пример, показывающий, что оценку скорости сходимости в теореме 2.3 нельзя улучшить по ε.

Пусть u решение задачи Коши

$$\begin{gathered} \partial u/\partial t - \Delta u = f(t/\varepsilon, \omega), \ t \in [0, T], \\ u(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \end{gathered} \tag{35}$$

где $f(t, \omega)$ — стационарный в широком смысле процесс с единичным радиусом зависимости; $\mathbf{M}f = 0$, $|f(t, \omega)| < C$. Тогда решение усредненной задачи $U \equiv 0$. Из (35) легко получить, что

$$u = \int_0^t f(\tau/\varepsilon, \omega)\, d\tau.$$

Отсюда при любом фиксированном $t \neq 0$

$$\mathbf{M}u^2 = \int_0^t \int_0^t \mathbf{M}f\left(\frac{\tau_1}{\varepsilon}, \omega\right) f\left(\frac{\tau_2}{\varepsilon}, \omega\right) d\tau_1\, d\tau_2 = \iint\limits_{|\tau_1 - \tau_2| \leqslant \varepsilon} B\left(\frac{(\tau_1 - \tau_2)}{\varepsilon}\right) d\tau_1\, d\tau_2 =$$

$$= \varepsilon \int_0^t \int_{|s| \leqslant 1} B(s)\, ds\, d\tau_1 \geqslant C\varepsilon,$$

где $B(s) = \mathbf{M}f(\tau, \omega) f(\tau + s, \omega)$ — ковариационная функция $f(\tau, \omega)$.

В заключение автор выражает глубокую признательность В. В. Юринскому за постоянные консультации по данной тематике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.** О G-сходимости параболических операторов // Успехи мат. наук.— 1981.— Т. 36, № 1.— С. 11—58.
2. **Жиков В. В., Сиражудинов М. М.** Усреднение недивергентных эллиптических и параболических операторов второго порядка и стабилизация решения задачи Коши // Мат. сб.— 1981.— Т. 116, № 2.— С. 166—186.
3. **Юринский В. В.** Об усреднении диффузии в случайной среде // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 5.— С. 75—85.
4. **Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.** Усреднение параболических операторов // Тр. ММО.— 1982.— Т. 45.— С. 182—236.
5. **Пожидаев А. В.** Об асимптотической нормальности решений краевых задач со случайными коэффициентами // Сиб. мат. журн.— 1982.— Т. 23, № 4.— С. 142—153.
6. **Пожидаев А. В.** Предельное поведение решений краевых задач со случайными коэффициентами // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 5.— С. 86—96.
7. **Жауров Ю. В.** Флуктуации в схеме усреднения и суммирование независимых случайных величин // Теория случайных процессов.— Киев, 1984.— Вып. 12.— С. 21—27.
8. **Figari R., Orlandi E., Papanicolaou G.** Mean field and gaussian approximation for partial differential equations with random coefficients // SIAM J. Appl. math.— 1982.— V. 42, № 5.— P. 1069—1077.
9. **Юринский В. В.** О распространении волн в одномерной случайной среде.— Новосибирск, 1982.— 26 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 9).

10. **Аканбаев Н.** Об оценке остаточного члена в теореме осреднения для случайных параболических уравнений // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат.— 1985.— № 5.— С. 11—15.
11. **Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М.: Наука, 1967.— 736 с.
12. **Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.** Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М.: Мир, 1971.— 371 с.
13. **Фридман А.** Уравнения с частными производными параболического типа.— М.: Мир, 1968.— 427 с.
14. **Жауров Ю. В.** Флуктуации в схеме усреднения для параболических краевых задач // Теория случайных процессов.— Киев, 1986.— Вып. 14.— С. 15—21.
15. **Пожидаев А. В.** Асимптотическая нормальность решений параболических уравнений со случайными коэффициентами // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1984.— Т. 5.— С. 170—181.
16. **Леоненко Н. Н.** О центральной предельной теореме для m-зависимых случайных полей в схеме, родственной схеме серий // Укр. мат. журн.— 1975.— Т. 27, № 5.— С. 674—677.
17. **Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.** Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук.— 1962.— Т. 17, № 3.— С. 3—146.
18. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Введение в теорию случайных процессов.— М.: Наука, 1977.— 567 с.