ЮРИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ РЕШЕТНЯК

(к шестидесятилетию со дня рождения)

26 сентября 1989 года исполняется шестьдесят лет выдающемуся советскому математику академику Ю. Г. Решетняку.

Научные интересы Ю. Г. Решетняка охватывают чрезвычайно широкий круг вопросов геометрии и анализа. Его творчество характеризуется исключительной глубиной проникновения в существо тех математических вопросов, которые он изучает. Свидетельством последнего служит то примечательное обстоятельство, что во все разрабатываемые проблемы Юрий Григорьевич всегда вносит новые неожиданные идеи и методы.

Ю. Г. Решетняку принадлежат фундаментальные результаты в теории поверхностей, в теории функций, в области классического вариационного исчисления и в ряде других разделов. Он является основоположником новых направлений в математике, занимающих пограничное место между анализом и геометрией. Одно из них получило название теории нелинейной емкости, центральное понятие которой — (l, p)-емкость — было введено Ю. Г. Решетняком. В рамках этого направления достигнуты существенные продвижения в теории функций с обобщенными производными. Другое направление, созданное Ю. Г. Решетняком,— теория пространственных отображений с ограниченным искажением. Эти отображения представляют собой глубокое и далеко идущее обобщение пространственных квазиконформных отображений. Результаты Ю. Г. Решетняка по изучению нелинейной емкости и в области пространственных отображений с ограниченным искажением являются основой исследований созданной им школы, насчитывающей несколько десятков докторов и кандидатов наук.

Авторитет сибирской школы анализа и геометрии у советской и мировой научной общественности в значительной мере связан с личными достижениями Юрия Григорьевича, многие из которых по праву стали классическими. Здесь, прежде всего, следует назвать знаменитую теорему Ю. Г. Решетняка об изотермических координатах на двумерных многообразиях ограниченной кривизны, введенных А. Д. Александровым. Мировую известность приобрело полученное Ю. Г. Решетняком окончательное решение проблемы М. А. Лаврентьева об устойчивости конформных отображений. Теоремы Ю. Г. Решетняка о дифференцируемости почти всюду функций с обобщенными в смысле С. Л. Соболева производными впечатляют монументальной законченностью формы.

Ю. Г. Решетняка отличает высокая требовательность к себе. Он чрезвычайно много и интенсивно работает. Им написаны четыре монографии, около двадцати учебных пособий и более ста научных статей.

Следует особо подчеркнуть широту диапазона творческих интересов Ю. Г. Решетняка. Помимо крупных достижений, относящихся к его первым и основным специальностям — геометрии и теории функций вещественной переменной, ему принадлежат важные результаты в математической физике, вычислительной математике, в функциональном анализе и теоретической механике и в ряде других пограничных с анализом и геометрией областях науки.

Трудно переоценить вклад Ю. Г. Решетняка в подготовку и воспитание научной смены. Он постоянно с высокой загруженностью работает в Новосибирском государственном университете с момента его основания. Многолетняя деятельность Юрия Григорьевича, связанная с постановкой и совершенствованием современного курса математического анализа, которую с полным основанием можно квалифицировать как самоотверженную, в большой мере способствовала формированию концепции обучения в молодом университете, быстро завоевавшем прочную репутацию высококлассного центра подготовки математиков. Лекции Ю. Г. Решетняка, его многочисленные учебные пособия по современным разделам анализа и по трудным главам основного курса уже более четверти века пользуются заслуженной популярностью у студентов и преподавателей как в НГУ, так и в других ведущих университетах страны. Следует подчеркнуть характерную для Ю. Г. Решетняка научную щедрость. Многие его творческие замыслы были положены в основу работ и диссертаций учеников Юрия Григорьевича, сыграли для них определяющие роли.

Ю. Г. Решетняк вложил много сил в создание, становление и формирование научного облика «Сибирского математического журнала», в котором он активно работает с первых дней организации. В том, что СМЖ является одним из наиболее популярных математических журналов — большая личная заслуга Юрия Григорьевича.

Научная и педагогическая деятельность Ю. Г. Решетняка получила высокую оценку. В 1980 г. ему присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки РСФСР», в 1981 г. его избирают членом-корреспондентом АН СССР по Отделению математики, а в 1987 г.— действительным членом по тому же Отделению. Ю. Г. Решетняк награжден орденом «Знак почета» и медалями.

Юрия Григорьевича отличают редкая скромность, чуткость и внимание к людям, такт и сдержанность в общении, эрудиция и мягкий юмор. Стиль, характерный для ленинградской математической школы, реализуемый Ю. Г. Решетняком в каждодневной деятельности, не в малой мере способствует формированию у научной молодежи Сибири правильных представлений о принципах служения Родине и об этических нормах достойного человека.

Ю. Г. Решетняк родился в г. Лениграде. В 1947 г. после окончания средней школы он поступил на математико-механический факультет Ленинградского университета. Закончил обучение в четыре года и был оставлен в аспирантуре ЛГУ. Научным руководителем Ю. Г. Решетняка стал академик А. Д. Александров. В годы аспирантуры был заложен фундамент плодотворного научного сотрудничества А. Д. Александрова и Ю. Г. Решетняка, продолжающегося уже почти сорок лет. В 1954 г. Ю. Г. Решетняк защитил кандидатскую диссертацию «О длине и повороте кривой и о площади поверхности» и был направлен на работу в Ленинградское отделение Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР.

В 1957 г. ЦК КПСС и СМ СССР приняли решение о создании нового научного центра на востоке страны — Сибирского отделения АН СССР. Ю. Г. Решетняк в числе первых молодых ученых откликнулся на призыв организаторов СО АН СССР — академиков М. А. Лаврентьева, С. Л. Соболева и С. А. Христиановича — и уже в конце 1957 г. с семьей переехал в Новосибирск, где стал работать в новом Институте математики СО АН СССР. В Новосибирске Ю. Г. Решетняк создает все свои основные научные труды, проходит путь от молодого ученого до маститого академика. Именно в Сибири окончательно формируется оригинальный стиль исследований на границе между анализом и геометрией, характерный для Юрия Григорьевича, создается и оттачивается его виртуозная и очень своеобразная математическая техника. В Новосибирске в 1960 г. на Объединенном ученом совете СО АН СССР Ю. Г. Решетняк защитил докторскую диссертацию на тему «Изотермические координаты в двумерных многообразиях ограниченной кривизны».

В Институте математики СО АН СССР Юрий Григорьевич создает научное подразделение, ставшее вскоре крупным отделом анализа и геометрии. Научный авторитет Ю. Г. Решетняка столь велик, что уже в 1966 году его по предложению академика А. И. Мальцева избирают заведующим кафедрой математического анализа НГУ, которую до этого возглавляли академик М. А. Лаврентьев и член-корреспондент АН СССР А. А. Ляпунов.

Юрию Григорьевичу принадлежат первоклассные достижения в области геометрии. Остановимся, прежде всего, на развитых им аналитических методах в теории общих двумерных поверхностей. Как известно, наиболее принципиальным шагом в развитии теории поверхностей после классических работ Гаусса стало построение внутренней геометрии широкого класса нерегулярных метрических многообразий — так называемых многообразий ограниченной кривизны, введенных А. Д. Александровым. Речь идет о наиболее общих двумерных многообразиях с внутренней метрикой, на которых можно определить вполне аддитивную функцию множеств, связанную с метрикой так же, как связана с ней интегральная гауссова кривизна на регулярной поверхности. Эта функция называется кривизной множества. Многообразиями ограниченной кривизны являются, в частности, регулярные поверхности (в этом случае кривизна множества имеет непрерывную плотность, совпадающую с гауссовой кривизной) и особые — многогранники (вся кривизна сосредоточена в вершинах). Линза, склеенная из двух одинаковых сферических шапочек, меньших полусферы, дает пример многообразия ограниченной кривизны, в котором на замкнутой кривой (на ребре) сосредоточена положительная кривизна. Уже сказанное дает известное представление о широте и естественности класса многообразий ограниченной кривизны, а также об их особенностях, изучение которых обогатило геометрию целым рядом качественно новых фактов.

Ю. Г. Решетняку принадлежит фундаментальный вклад в теорию многообразий ограниченной кривизны. Дело в том, что до его работ обсуждаемая теория развивалась исключительно геометрическими средствами, использующими два эквивалентных определения исходного объекта теории. Первое — аксиоматическое — состояло в том, что многообразие ограниченной кривизны характеризуется наличием верхней границы для сумм «избытков» неперекрывающихся геодезических треугольников в компактной области (избыток определяется как величина $\alpha + \beta + \gamma - \pi$, где α, β, γ — естественным образом вводимые «верхние углы» треугольника). Второе определение носило конструктивный характер и гласило, что многообразие ограниченной кривизны локально приближаемо многогранниками с ограниченными в совокупности абсолютными кривизны.

Ю. Г. Решетняк доказал глубокую теорему об изотермических координатах. Эта теорема утверждает, что двумерное метрическое многообразие обладает ограниченной кривизной в том и только том случае, если элемент соответствующей метрики задается в виде $ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$, где функция $\ln \lambda(x, y)$ представляет собой разность двух субгармонических функций. Установленный факт исчерпывающим образом выявил связь центрального объекта современной теории двумерных поверхностей с теорией функций. Изотермические координаты Ю. Г. Решетняка позволили заменить обычные синтетические методы геометрии «в целом» чисто аналитическим аппаратом квазиконформных отображений и квазилинейных уравнений эллиптического типа. Убедительным свидетельством силы открытых Юрием Григорьевичем методов стал его тонкий результат о гладкости кратчайших на поверхности класса $C^{1,\alpha}$ при $\alpha > 0$.

Отметим здесь же принадлежащую Юрию Григорьевичу теорему об экстремальном свойстве конуса, существенно дополняющую метод разрезывания и склеивания в теории многообразий ограниченной кривизны, изобретенный А. Д. Александровым. Метод А. Д. Александрова состоит в последовательном преобразовании поверхности, на каждом шаге которого из поверхности вырезается некоторый кусок и на его место вклеивается другой. Теорема Ю. Г. Решетняка устанавливает возможность осуществить эти преобразования так, чтобы поверхность, получаемая в результате, удовлетворяла целому ряду условий. Поскольку этих условий много, то формулировка теоремы оказывается несколько громоздкой. Тем не менее она бесспорно является одним из красивейших результатов теории двумерных многообразий ограниченной кривизны. Из теоремы Ю. Г. Решетняка вытекает решение большого числа экстремальных задач теории поверхностей.

Двумерные многообразия ограниченной кривизны, разумеется, не исчерпывают всей сферы «геометрических» интересов Юрия Григорьевича. Специалисты высоко ценят его результаты об ограниченности поворота кратчайшей, о смешении отрезков и др. В последние годы совместно с А. Д. Александровым им завершено в общих чертах построение теории нерегулярных кривых в конечномерных пространствах. Эти результаты вошли в их совместную монографию «Основы теории нерегулярных кривых».

Принципиальный замысел теории нерегулярных кривых принадлежит А. Д. Александрову, который сформулировал его в 1946 г. Вместо кривизны и кручения как функций точки кривой рассматриваются интегральная кривизна и интегральное кручение. Эти понятия А. Д. Александровым определяются сначала для ломаных, т. е. кривых, составленных из конечного числа отрезков, для которых они имеют простой геометрический смысл. Затем осуществляется подходящий предельный переход. Реализация программы исследований, намеченной А. Д. Александровым, натолкнулась на некоторые трудности. Метод, позволивший их преодолеть, был изобретен Ю. Г. Решетняком и состоит в использовании специальных интегрально геометрических соотношений. В результате построенная теория кривых приняла несколько необычный вид, сочетая в себе соображения, относящиеся к элементарной геометрии, с методами теории функций вещественной переменной. В связи с обсуждаемой теорией отметим работы Ю. Г. Решетняка о параллельном переносе вдоль нерегулярных кривых относительно связности в расслоенном многообразии. Эти работы представляют собой своего рода заготовку теории нерегулярных кривых в самой общей ситуации, которая только возможна в рамках понятий дифференциальной геометрии.

Значительное число работ Ю. Г. Решетняка посвящено теории функций многих вещественных переменных и ее приложениям к геометрии, функциональному анализу, дифференциальным уравнениям и т. п.

Как уже отмечалось, Юрию Григорьевичу принадлежит наиболее полное решение проблем М. А. Лаврентьева об устойчивости в теореме Лиувилля о конформных отображениях пространства. Решение этой проблемы потребовало разработки принципиально новых подходов. Исследования Ю. Г. Решетняка по теории квазиконформных отображений привело его к созданию новой области анализа — теории отображений с ограниченным искажением и построению метода нелинейной емкости в теории потенциала.

С качественной стороны, отображение с ограниченным искажением, введенное Ю. Г. Решетняком, представляет собой функцию, локально сохраняющую ориентацию и преобразующую всякий бесконечно малый шар в бесконечно малый эллипсоид с предписанным ограничением сверху на отношения наибольшей полуоси к наименьшей. Таким образом, отображения с ограниченным искажением по Ю. Г. Решетняку возникают как естественное расширение класса квазиконформных отображений, введенных М. А. Лаврентьевым и Г. Грёчем. (В определении квазиконформного отображения требование постоянства ориентации заменяется существенно более жестким требованием гомеоморфности.) Ю. Г. Решетняком выяснены основные топологические и аналитические свойства отображений с ограниченным искажением. Получены оценки модуля непрерывности и указаны условия компактности семейств таких отображений, доказано, что всякое такое отображение представляет собой локальный гомеоморфизм, за исключением множества нулевой меры. Попутно Ю. Г. Решетняк рассмотрел широкий круг вопросов, возникающих при изучении пространственных отображений, имеющих обобщенные в смысле С. Л. Соболева производные, и получил в этом направлении целый ряд фундаментальных результатов.

В связи с исследованиями по проблеме устойчивости в теореме Лиувилля о конформных отображениях Ю. Г. Решетняком была разработана некоторая методика построения интегральных представлений функций через значения дифференциальных операторов. В качестве приложения своей методики Юрий Григорьевич получил оценки векторфункции через соответствующий ей тензор деформации (аналогичные оценки в механике называются неравенствами Корна), а также через тензор конформной деформации. Результаты Ю. Г. Решетняка относительно тензора деформации независимо несколько позже были получены П. П. Мосоловым и В. П. Мясниковым, его результаты по тензору квазиконформной деформации частично были переоткрыты Л. Альфорсом.

До появления работ Ю. Г. Решетняка единственным методом исследования геометрических свойств многомерных отображений был восходящий к Л. Альфорсу и А. Бёрлингу метод экстремальных длин (конформных модулей). Применение модулей при изучении неоднолистных квазиконформных отображений наталкивалось на непреодолимые трудности. Метод Юрия Григорьевича основан на найденном им представлении отображений с ограниченным искажением как экстремалей. Вариационный принцип Ю. Г. Решетняка в общей форме утверждает, что экстремали некоторых интегралов типа Дирихле выдерживают композицию с отображениями с ограниченным искажением. С помощью развитого метода Ю. Г. Решетняк получил серию глубоких результатов об отображениях с ограниченным искажением — о гельдеровости, о локальном поведении, о множествах точек ветвления, о поведении в целом и т. п.

Следует отметить также тонкие результаты Юрия Григорьевича (полученные им совместно с Л. Г. Гуровым) о функциях с ограниченным средним колебанием, введенных Ф. Джоном и Л. Ниренбергом. В последние годы исследование таких отображений выросло в самостоятельное перспективное направление современной теории функций. В рамках этого направления Ю. Г. Решетняком установлены различные качественные свойства решений квазилинейных уравнений эллиптического типа.

Построенная Ю. Г. Решетняком при изучении отображений с ограниченным искажением теория нелинейной емкости представляет значительный самостоятельный интерес. Высокую оценку получили найденные им оригинальные средства описания множеств разрывов функций классов С. Л. Соболева и изучения поведения таких функций вблизи разрывов. Юрий Григорьевич показал, что построенная им с помощью бесселевых потенциалов нелинейная емкость играет для соболевских классов роль чрезвычайно близкую к роли меры Лебега, сохраняя в отличие от последней информацию о дифференциальных свойствах функций. В каждом классе эквивалентности функций пространства W_p^l существует представитель, определенный всюду, за исключением множества нулевой емкости. Эти наблюдения Ю. Г. Решетняка позволили ему указать весьма тонкие характеристики поведения функций с обобщенными производными. В частности, для уточненных относительно своей емкости функций Юрий Григорьевич доказал теоремы типа Егорова и Лузина, в которых роль меры играет емкость. Им же установлены нетривиальные связи между емкостью и мерой Хаусдорфа, позволяющие получить геометрические характеристики множеств малой емкости.

Исследования в области теории нелинейной емкости интенсивно ведутся теперь во всем мире. Становится все более ясной перспективность предложенной Ю. Г. Решетняком теории в приложениях к изучению функциональных классов дифференцируемых в смысле С. Л. Соболева функций, в вопросах граничного поведения функций многих комплексных переменных и решений квазилинейных эллиптических уравнений и в ряде других направлений анализа.

Свое шестидесятилетие Юрий Григорьевич встречает в расцвете творческого дарования, полный сил и устремленных в будущее планов. От всей души желаем ему их осуществления!

А. Д. Александров, С. Л. Крушкаль, С. С. Кутателадзе