М. Ю. ВАСИЛЬЧИК

О СЛЕДАХ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА W_p^1, ОПРЕДЕЛЕННЫХ В ОБЛАСТЯХ С НЕЛИПШИЦЕВОЙ ГРАНИЦЕЙ

Посвящается
Юрию Григорьевичу Решетняку
в связи с его шестидесятилетием

Если граница области $G\subset\mathbf{R}^n$ липшицева, то, как показал Гальярдо [1], следы функций из $W_p^1(G)$ на границе ∂G описываются в терминах пространств Бесова. Если граница не липшицева, то результаты Гальярдо в общем случае неверны. В [2, 3] охарактеризованы следы функций из пространств Соболева в случаях, когда область определения имеет пик на границе. В работе [2] изучен случай плоской области, в [3] исследованы следы функций из W_2^1 в случае области из $\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 3$, имеющей на границе внутренний или внешний пик.

В настоящей работе рассматриваются следы функций из пространств W_p^1, $1<p<\infty$, когда на границе области определения нарушается локальная липшицевость. Точнее, рассматриваются области, имеющие внешний или внутренний пик на границе, области, заключенные между двумя касающимися в точке гиперповерхностями, и два частных случая гребня.

Автор благодарит В. М. Гольдштейна за внимание к данной работе.

§ 1. Обозначения и предварительные сведения

Всюду в статье приняты следующие обозначения.

Выражение $\alpha\sim\beta$ означает, что отношение α/β ограничено сверху и отделено от нуля положительными постоянными, причем если величины α и β зависят от некоторых функций, то постоянные от этих функций не зависят;

C, C_1, C_2 и т. д.— постоянные, зависящие только от размерности пространства n или показателя суммируемости p;

$\mathbf{R}^m$, $m<n$,— m-мерное пространство или подпространство $\mathbf{R}^n$: $\{x=(x_1,\ \ldots,\ x_m,\ x_{m+1},\ \ldots,\ x_n)\in\mathbf{R}^n\colon\ x_{m+1}=\ldots=x_n=0\}$; $\mathbf{R}_+^m=\{x=(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbf{R}^m\colon\ x_m>0\}$;

e_i — орт оси Ox_i пространства $\mathbf{R}^{n-1}$ (такое же обозначение используется для точки из $\mathbf{R}^{n-1}$ с теми же координатами, что и у e_i);

B_ρ^m — открытый шар в $\mathbf{R}^m$ с центром в начале координат и радиусом ρ;

S_ρ^{m-1}— граница шара B_ρ^m, $S^{m-1}=S_1^{m-1}$, $S_\rho=S_\rho^{n-1}$, $S=S_1^{n-1}$, ω_{m-1} — площадь S^{m-1};

$B_\rho=B_\rho^{n-1}$, $\quad B=B_1^{n-1}$;

$B_\rho^{m,+}=\{x=(x_1,\ \ldots,\ x_m)\in B_\rho^m\colon\ x_m>0\}$, $\quad B_\rho^+=B_\rho^{n-1,+}$, $\quad B^+=B_1^+$;

$D_m=\{x=(x_1,\ \ldots,\ x_{m-1},\ x_m)\in\mathbf{R}^m\colon\ x_1^2+\ldots+x_{m-1}^2<1,\ 0<x_m<\infty\}$, $\partial_0 D_m$ — боковая поверхность цилиндра D_m, т. е. $\partial_0 D_m=\{x=(x_1,\ \ldots,\ x_{m-1},\ x_m)\in\mathbf{R}^m\colon\ x_1^2+\ldots+x_{m-1}^2=1,\ 0<x_m<\infty\}$, $D=D_n$, $\partial_0 D=\partial_0 D_n$;

$d\Sigma(\Gamma)-(m-1)$-мерная мера Хаусдорфа на $(m-1)$-мерной поверхности $\Gamma\subset\mathbf{R}^m$ (для $\Gamma=S^{m-1}$ пишем dS^{m-1});

$d\Sigma_x$ — элемент площади в точке x (для сферы S^{m-1} пишем dS_x^{m-1} и dS_x при $m=n$);

$\nabla f=(D_1f, \ldots, D_nf)$ — градиент функции f, определенной в некоторой области $U\subset \mathbf{R}^n$ и имеющей в U первые обобщенные производные $\partial f/\partial x_j = D_jf$, $\nabla' f=(D_1f, \ldots, D_{n-1}f)$, $\nabla'' f=(D_1f, \ldots, D_{n-2}f)$;

χ — характеристическая функция отрезка $[0; 1]$;

K_m — функция из $C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ такая, что $\operatorname{supp} K_m\subset B^m$ и $\int\limits_{\mathbf{R}^m} K_m(z)\,dz=1$.

Точку $x=(x_1, \ldots, x_n)\in \mathbf{R}^n$ будем записывать иногда в виде $x=(x', x_n)$, или $x=(x'', x_{n-1}, x_n)$, или $x=(x''', x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$, где $x'\in \mathbf{R}^{n-1}$, $x''\in \mathbf{R}^{n-2}$, $x'''\in \mathbf{R}^{n-3}$.

Если G — некоторая область в $\mathbf{R}^n$ с границей ∂G, то норма в линейном пространстве $TW_p^1(G)$ следов на ∂G функций из $W_p^1(G)$ определяется следующим образом:

$$\|\mu\|_{TW_p^1(G)}=\inf\left\{\|f\|_{W_p^1(G)}:\ f\in W_p^1(G),\ \mu=f\big|_{\partial G}\right\}.$$

Введем некоторые обозначения для поверхностных интегралов. Пусть Γ — $(n-1)$-мерная поверхность и $\xi\colon\ \Gamma\to\mathbf{R}$, $\zeta\colon\ \Gamma\times\Gamma\to\mathbf{R}$ — неотрицательные функции. Для функции μ, определенной на Γ, полагаем

$$\|\mu\|_{\Gamma,\xi}=\left\{\int\limits_\Gamma |\mu(x)|^p\,\xi(x)\,d\Sigma_x\right\}^{1/p},$$

$$\{\mu\}_{\Gamma,\zeta}=\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma \frac{|\mu(x)-\mu(y)|^p}{r^{n+p-2}}\,\zeta(x, y)\,d\Sigma_x\,d\Sigma_y,$$

$$|||\mu|||_{\Gamma,\xi,\zeta}=\|\mu\|^p_{\Gamma,\xi}+\{\mu\}_{\Gamma,\zeta},$$

где $r=|x-y|$.

Через φ далее обозначается определенная на отрезке $[0; 1]$ неубывающая функция, удовлетворяющая условиям

$$|\varphi(\tau)-\varphi(\sigma)|\leqslant c_\varphi|\tau-\sigma|,\quad \tau, \sigma\in[0; 1],\quad 0<c_\varphi<1, \tag{1.1}$$

$$\lim_{\tau\to+0}\varphi(\tau)/\tau=0. \tag{1.2}$$

Полагаем

$$e(\tau, \sigma)=\min\{\varphi(\tau), \varphi(\sigma)\},\quad E(\tau, \sigma)=\max\{\varphi(\tau), \varphi(\sigma)\}.$$

Пусть ψ — неотрицательная функция, определенная на $(0; \infty)$, $r>0$, $\alpha>0$ — некоторые числа, $1<p<\infty$. Тогда справедливы неравенства

$$\int\limits_0^\alpha\left(\int\limits_0^s\psi(\tau)\,d\tau\right)^p\frac{ds}{s^{r+1}}\leqslant\left(\frac{p}{r}\right)^p\int\limits_0^\alpha\psi^p(s)\frac{ds}{s^{r+1-p}}, \tag{1.3}$$

$$\int\limits_\alpha^\infty\left(\int\limits_s^\infty\psi(\tau)\,d\tau\right)^p\frac{ds}{s^{1-r}}\leqslant\left(\frac{p}{r}\right)^p\int\limits_\alpha^\infty\psi^p(s)\frac{ds}{s^{1-r-p}}. \tag{1.4}$$

Пусть ψ — неотрицательная функция, определенная на интервале $(\alpha; \beta+\delta)$, где $\alpha<\beta$, $\delta>0$ и $1\leqslant p<\infty$. Тогда справедливо неравенство

$$\int\limits_\alpha^\beta\left(\frac{1}{\delta}\int\limits_s^{s+\delta}\psi(\tau)\,d\tau\right)^p ds\leqslant\int\limits_\alpha^{\beta+\delta}\psi^p(s)\,ds. \tag{1.5}$$

Неравенство (1.5) несложно выводится, неравенства (1.3), (1.4) — это известные неравенства Харди [4].

§ 2. Вспомогательные утверждения

Рассмотрим функцию

$$H(s',\,t',\,\tau)=[|s'-t'|^2+\tau^2]^{-(n+p-2)/2},$$

где $s',\,t'\in S$, $\tau\in(0;\,1)$. Справедлива

Лемма 2.1. *Выполняются неравенства*

$$\frac{C_1}{|s'-t'|^{n+p-3}}\leqslant\int\limits_0^1 H(s',\,t',\,\tau)\,d\tau\leqslant\frac{C_2}{|s'-t'|^{n+p-3}},\tag{2.1}$$

$$\frac{C_3}{\tau^p}\leqslant\int\limits_S H(s',\,t',\,\tau)\,dS_s\leqslant\frac{C_4}{\tau^p}.\tag{2.2}$$

Доказательство. Из легко проверяемого соотношения

$$\int\limits_0^1 H(s',\,t',\,\tau)\,d\tau\sim\frac{1}{|s'-t'|^{n+p-3}}\int\limits_0^{1/|s'-t'|}\frac{d\sigma}{(1+\sigma^2)^{(n+p-2)/2}}$$

вытекает (2.1). Положим $\Sigma_{n-1}=\{s'\in S\colon\ |s'-e_{n-1}|<1\}$ и представим интеграл из (2.2) в виде

$$\int\limits_S H dS_{s'}=\int\limits_{\Sigma_{n-1}} H\,dS_{s'}+\int\limits_{S\setminus\Sigma_{n-1}} H\,dS_{s'}.$$

Для интегралов в правой части имеем оценки

$$\frac{\omega_{n-3}}{\tau^p}\int\limits_0^{\sqrt{6}/2}\frac{\sigma^{n-3}}{(1+\sigma^2)^{(n+p-2)/2}}\,d\sigma\leqslant\int\limits_{\Sigma_{n-1}} H(s',\,t',\,\tau)\,dS_{s'}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\omega_{n-3}}{\tau^p}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sigma^{n-3}}{(1+\sigma^2)^{(n+p-2)/2}}\,d\sigma,$$

$$\int\limits_{S\setminus\Sigma_{n-1}} H(s',\,t',\,\tau)\,dS_{s'}\leqslant\frac{\omega_{n-2}}{\tau^p},$$

из которых следует (2.2). Лемма доказана.

Пусть функция $\nu\colon\ (s',\,s_n)\to\nu(s',\,s_n)$ определена $\partial_0 D$ и равна нулю при $0<s_n<d$, где $d>0$ — некоторое число. Положим

$$\langle\nu\rangle_{\partial_0 D,\xi}=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^1\int\limits_S\int\limits_S\xi(s_n)\,\frac{|\nu(s',\,s_n+\tau)-\nu(t',\,s_n)|^p}{[|s'-t'|^2+\tau^2]^{(n+p-2)/2}}\,dS\,dS\,d\tau\,ds_n,\tag{2.3}$$

где ξ — некоторая функция, монотонно убывающая к нулю при $s_n\to\infty$ и такая, что $\xi(s_n)\leqslant C\xi(s_n+d)$ для всех $s_n\in(0;\,\infty)$.

Лемма 2.2. *Справедливо соотношение*

$$\langle\nu\rangle_{\partial_0 D,\xi}\sim I_1^{(d)}+I_{n-2},$$

где

$$I_1^{(d)}=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^d\int\limits_S\frac{|\nu(s',\,s_n+\tau)-\nu(s',\,s_n)|^p}{\tau^p}\,\xi(s_n)\,dS\,d\tau\,ds_n,$$

$$I_{n-2}=\int\limits_0^\infty\int\limits_S\int\limits_S\frac{|\nu(s',\,s_n)-\nu(t',\,s_n)|^p}{|s'-t'|^{n+p-3}}\,\xi(s_n)\,dS\,dS\,ds_n.$$

Доказательство. Оценка $\langle\nu\rangle_{\partial_0 D,\xi}\leqslant C[I_1^{(d)}+I_{n-2}]$ следует из леммы 2.1. Выведем обратную оценку. Пусть $\delta>0$ — некоторое достаточно малое число. Из (2.2) и неравенства

$$|\nu(s', s_n)-\nu(t', s_n)|^p\leqslant C[|\nu(s', s_n+\delta\tau)-\nu(s', s_n)|^p+ + |\nu(s', s_n+\delta\tau)-\nu(s', s_n)|^p]$$

получаем

$$I_{n-2}\leqslant C\int\limits_S\int\limits_S\int\limits_0^\infty\int\limits_0^d \frac{|\nu(s', s_n+\delta\tau)-\nu(t', s_n)|^p}{[|s'-t'|^2+\tau^2]^{(n+p-2)/2}}\,\xi(s_n)\,d\tau\, ds_n\, dS\, dS+$$

$$+C\int\limits_S\int\limits_S\int\limits_0^\infty\int\limits_0^1 \frac{|\nu(s', s_n+\delta\tau)-\nu(s', s_n)|^p}{[|s'-t'|^2+\tau^2]^{(n+p-2)/2}}\,\xi(s_n)\,d\tau\, ds_n\, dS\, dS. \tag{2.4}$$

В первом интеграле в правой части (2.4) сделаем замену $\delta\tau=\sigma$. Тогда этот интеграл оценится сверху величиной $C\delta^{-1}\langle\nu\rangle_{\partial_0 D,\xi}$. Во втором интеграле оценим сначала интеграл по переменной t' с помощью правого неравенства из (2.1), а затем сделаем замену переменной $\delta\tau=\sigma$. Убеждаемся, что второй интеграл в правой части (2.4) не превосходит величины $C\delta^{p-1}I_1^{(d)}$. Итак,

$$I_{n-2}\leqslant C\left[\frac{1}{\delta}\langle\nu\rangle_{\partial_0 D,\xi}+\delta^{p-1}I_1^{(d)}\right]. \tag{2.5}$$

Положим $\omega'=s'+\delta(t'-s')$, $z'=\omega'/|\omega'|$, где δ — то же число, что и в (2.5), $s', t'\in S$. Используя неравенства (2.1), получим

$$I_1^{(d)}\leqslant C\left[\int\limits_S\int\limits_S\int\limits_0^\infty\int\limits_0^d \frac{|\nu(z', s_n+\tau)-\nu(s', s_n)|^p}{[|s'-t'|^2+\tau^2]^{(n+p-2)/2}}\,\xi(s_n)\,d\tau\, ds_n\, dS\, dS+\right.$$

$$\left.+\int\limits_S\int\limits_S\int\limits_0^\infty\int\limits_0^d \frac{|\nu(z', s_n+\tau)-\nu(s', s_n+\tau)|^p}{[|s'-t'|^2+\tau^2]^{(n+p-2)/2}}\,\xi(s_n)\,d\tau\, ds_n\, dS\, dS.\right] \tag{2.6}$$

Отображение $t'\to z'$ гомеоморфно на каждой из полусфер $S(s')=\{t'\in S\colon |t'-s'|<\sqrt{2}\}$ и $S\backslash S(s')$. Можно показать, что

$$d\Sigma_{t'}(S)\leqslant C\delta^{2-n}\,d\Sigma_{z'}(S). \tag{2.7}$$

Простые вычисления дают оценки

$$\frac{\sqrt{2}\,\delta}{\sqrt{1+2\delta}}|s'-t'|\leqslant|z'-s'|\leqslant\frac{2\delta}{\sqrt{1-2\delta}}|s'-t'|. \tag{2.8}$$

Из (2.7) и (2.8) следует, что после замены переменных $t'\to z'$ первый интеграл в правой части (2.6) не превосходит $C\delta^{2-n}\langle\nu\rangle_{\partial_0 D,\xi}$.

Для оценки второго интеграла в правой части (2.6) сделаем сначала замену переменной $s_n+\tau=z_n$ $(s_n\to z_n)$. Затем переходим к интегрированию по z', используя вначале правое неравенство из (2.1) и эквивалентность $\xi(s_n)\sim\xi(z_n)$. Применяя далее (2.7), (2.8), в результате получаем оценку сверху второго интеграла в (2.6) величиной $C\delta^{p-1}I_{n-2}$. Таким образом,

$$I_1^{(d)}\leqslant C\left[\frac{1}{\delta^{n-2}}\langle\nu\rangle_{\partial_0 D,\xi}+\delta^{p-1}I_{n-2}\right]. \tag{2.9}$$

Из (2.5) и (2.9) следует

$$(I_1^{(d)}+I_{n-2})(1-\delta^{p-1}C)\leqslant C\delta^{2-n}\langle\nu\rangle_{\partial_0 D,\xi}.$$

Фиксируя $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $1-\delta^{p-1}C>0$, получаем утверждение леммы 2.2.

Рассмотрим в $\mathbf{R}^n$ пик

$$P=\{x=(x',\ x_n)\in\mathbf{R}^n:\ |x'|<\varphi(x_n),\quad 0<x_n<1\},\tag{2.10}$$

где функция φ удовлетворяет условиям (1.1), (1.2). Через $\partial_0 P$ обозначим часть границы ∂P вида

$$\partial_0 P=\{x=(x',\ x_n)\in\partial P:\ |x'|=\varphi(x_n),\quad 0<x_n<1\}.$$

Отображение

$$\Phi:\ (x',\ x_n)\to(s',\ s_n),\quad s'=\frac{x'}{\varphi(x_n)},\quad s_n=\int\limits_{x_n}^{1}\frac{d\sigma}{\varphi(\sigma)},\tag{2.11}$$

гомеоморфно отображает P на цилиндр D и $\partial_0 P$ — на боковую поверхность цилиндра $\partial_0 D$. Обратным к Φ будет отображение Φ^{-1}: $(s',\ s_n)\to$ $\to(x',\ x_n)$, $x'=s'\varphi(\varkappa(s_n))$, $x_n=\varkappa(s_n)$, где $\varkappa(s_n)$ находится из равенства

$$s_n=\int\limits_{\varkappa}^{1}\frac{d\sigma}{\varphi(\sigma)}.\tag{2.12}$$

Положим $\psi(s_n)=\varphi(\varkappa(s_n))$. В силу определения Φ и условий (1.1), (1.2) на φ

$$d\Sigma(\partial_0 P)\sim\psi^{n-1}(s_n)\,d\Sigma(\partial_0 D)=\psi^{n-1}(s_n)\,dS\,ds_n.$$

Пусть μ — функция, определенная на $\partial_0 P$ и $\nu=\mu\circ\Phi^{-1}$. Тогда

$$\|\mu\|_{\partial_0 P,\varphi}\sim\left\{\int\limits_{\partial_0 D}|\nu(s)|^p\,\psi^n(s_n)\,d\Sigma_s\right\}^{1/p},$$

$$\{\mu\}_{\partial_0 P,\sigma}\sim\iint\limits_{\{s,t\in\partial_0 D\}}\psi^{n-1}(s_n)\,\psi^{n-1}(t_n)\frac{|\nu(s)-\nu(t)|^p\,\sigma(\Phi^{-1}(s),\ \Phi^{-1}(t))}{|\Phi^{-1}(s)-\Phi^{-1}(t)|^{n+p-2}}\,d\Sigma_s\,d\Sigma_t,\tag{2.13}$$

где $\sigma(x,\ y)=\chi(|x_n-y_n|/E(x_n,\ y_n))$. Так как $\psi(s_n)\sim\psi(t_n)$ при $\sigma(\Phi^{-1}(s),$ $\Phi^{-1}(t))\neq 0$, то из (2.12) имеем

$$\delta_1 E(s_n,\ t_n)r\leqslant|\Phi^{-1}(s)-\Phi^{-1}(t)|\leqslant\delta_2 E(s_n,\ t_n)r,\tag{2.14}$$

где $r=|s-t|$, $E(s_n,\ t_n)=\max\{\psi(s_n),\ \psi(t_n)\}$, и постоянные δ_1, δ_2 зависят только от постоянной c_φ из (1.1). Отметим, что из (1.1) следует $1/2<\delta_1<\delta_2<3/2$. Обозначим

$$\sigma_d(s_n,\ t_n)=\chi(|s_n-t_n|/d).$$

Из (2.14) вытекают неравенства

$$\sigma_{\delta_2}(s_n,\ t_n)\leqslant\sigma\left(\Phi^{-1}(s),\ \Phi^{-1}(t)\right)\leqslant\sigma_{\delta_1}(s_n,\ t_n),$$

из которых в силу (2.14) заключаем, что интеграл в правой части (2.13) не меньше

$$C_1\int\limits_{\partial_0 D}\int\limits_{\partial_0 D}\frac{|\nu(s)-\nu(t)|^p}{r^{n+p-2}}\sigma_{\delta_2}(s_n,\ t_n)\,[\psi(s_n)\,\psi(t_n)]^{(n-p)/2}\,d\Sigma_s\,d\Sigma_t$$

и не больше

$$C_2\int\limits_{\partial_0 D}\int\limits_{\partial_0 D}\frac{|\nu(s)-\nu(t)|^p}{r^{n+p-2}}\,\sigma_{\delta_1}(s_n,\ t_n)\,[\psi(s_n)\,\psi(t_n)]^{(n-p)/2}\,d\Sigma_s\,d\Sigma_t.$$

Ввиду эквивалентности $\psi(s_n)\sim\psi(t_n)$

$$\int\limits_{\partial_0 D}\int\limits_{\partial_0 D}\frac{|\nu(s)-\nu(t)|^p}{r^{n+p-2}}[\psi(s_n)\psi(t_n)]^{(n-p)/2}\sigma_d(s_n,t_n)\,d\Sigma_s\,d\Sigma_t\sim\langle\nu\rangle^{(d)}_{\partial_0 D,\psi^{n-p}}=$$

$$=\int\limits_S\int\limits_S\int\limits_0^\infty\int\limits_0^d\frac{|\nu(s',s_n+\tau)-\nu(t',s_n)|^p}{[|s'-t'|^2+\tau^2]^{(n+p-2)/2}}\psi^{n-p}(s_n)\,d\tau\,ds_n\,dS\,dS.$$

Из леммы 2.1 имеем

$$\langle\nu\rangle^{(d)}_{\partial_0 D,\psi^{n-p}}\sim I_1^{(d)}+I_{n-2}.$$

Из эквивалентности $\psi(s_n)\sim\psi(s_n+d)$ при $d\in(1/2;\ 3/2)$ простыми вычислениями получаем эквивалентность $I_1^{(d)}\sim I_1^{(1)}$. Будем $I_1^{(1)}$ обозначать через I_1. Таким образом,

$$\{\mu\}_{\partial_0 P,\sigma}\sim\langle\nu\rangle_{\partial_0 D,\sigma_1}\sim I_1+I_{n-2},\tag{2.15}$$

где $\sigma_1=\chi(|s_n-t_n|)$.

Отображая цилиндр на пик с помощью отображения Φ^{-1} и используя оценки (2.14), получаем

$$I_1\sim I_{\mu,1}=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_S\sigma(x_n,y_n)\varphi^{n-2}(x_n)\times$$

$$\times\frac{|\mu(\varphi(x_n)s',x_n)-\mu(\varphi(y_n)s',y_n)|^p}{|x_n-y_n|^p}\,dS\,dx_n\,dy_n,\tag{2.16}$$

$$I_{n-2}\sim I_{\mu,n-2}=\int\limits_0^1\int\limits_{S_{x_n}}\int\limits_{S_{x_n}}\frac{|\mu(x',x_n)-\mu(y',x_n)|^p}{|x'-y'|^{n+p-3}}\,dS_x\,dS_y\,dx_n,\tag{2.17}$$

где обозначено $S_{x_n}=\{x'\in\mathbf{R}^{n-1}\colon |x'|=\varphi(x_n)\}$. Из (2.15)—(2.17) следует

$$\{\mu\}_{\partial_0 P,\sigma}\sim I_{\mu,1}+I_{\mu,n-2}.\tag{2.18}$$

Для функции μ, определенной на $\partial_0 P$, положим

$$[\mu]_{\partial_0 P,\sigma}=\int\limits_{\partial_0 P}\int\limits_{\partial_0 P}[1-\sigma(x_n,y_n)]\,[\varphi(x_n)\varphi(y_n)]^{2-n}\frac{|\mu(x)-\mu(y)|^p}{r^{p-n+2}}\,d\Sigma_x\,d\Sigma_y,$$

$$\mathcal{J}_1=\int\limits_0^1\int\limits_{S_{x_n}}\int\limits_{S_{x_n}}\frac{|\mu(x',x_n)-\mu(y',x_n)|^p}{\varphi^{n+p-3}(x_n)}\,d\Sigma_x\,d\Sigma_y\,dx_n,$$

$$\mathcal{J}_2=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_S\frac{|\mu(s'\varphi(x_n),x_n)-\mu(s'\varphi(y_n),y_n)|^p}{|x_n-y_n|^{p-n+2}}[1-\sigma(x_n,y_n)]\,dS\,dx_n\,dy_n.$$

Лемма 2.3. *Справедливо соотношение*

$$\{\mu\}_{\partial_0 P,\sigma}+[\mu]_{\partial_0 P,\sigma}\sim I_{\mu,1}+I_{\mu,n-2}+\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2.$$

Доказательство. Соотношение $\{\mu\}_{\partial_0 P,\sigma}\sim I_{\mu,1}+I_{\mu,n-2}$ следует из (2.18). Обозначим $\tilde\mu(s',x_n)=\mu(s'\varphi(x_n),x_n)$. Тогда интеграл $\mathcal{J}_1$ запишется в виде

$$\mathcal{J}_1=\int\limits_0^1\int\limits_S\int\limits_S|\tilde\mu(s',x_n)-\tilde\mu(t',x_n)|^p\varphi^{n-p-1}(x_n)\,dS\,dS\,dx_n.$$

Отсюда получаем оценку

$$\mathcal{J}_1 \leqslant C \int_0^1 \int_S \int_S \frac{|\widetilde{\mu}(s', x_n) - \widetilde{\mu}(t', x_n)|^p}{|s' - t'|^{n+p-3}} \varphi^{n-p-1}(x_n)\, dS\, dS\, dx_n \leqslant C I_{\mu, n-2}.$$

Так как $r = |x - y| \sim |x_n - y_n|$ при $|x_n - y_n| > E(x_n, y_n)$, то

$$\int_S \frac{dS_t}{|x_n - y_n|^{p-n+2}} \sim \int_S \frac{dS_t}{r^{p-n+2}}, \qquad \int_0^{x_n - \varphi(x_n)} \frac{dy_n}{r^{p-n+2}} \sim \varphi^{n-p-1}(x_n).$$

Поэтому

$$\mathcal{J}_2 \leqslant C \Bigg[\int_S \int_S \int_0^1 \int_0^1 \frac{|\widetilde{\mu}(s', x_n) - \widetilde{\mu}(t', y_n)|^p}{r^{p-n+2}} [1 - \sigma(x_n, y_n)]\, dy_n\, dx_n\, dS\, dS +$$

$$+ \int_0^1 \int_S \int_S \int_0^1 \frac{1 - \sigma(x_n, y_n)}{r^{p-n+2}} |\widetilde{\mu}(t', y_n) - \widetilde{\mu}(s', y_n)|^p\, dx_n\, dS\, dS\, dy_n \Bigg] \leqslant$$

$$\leqslant C\left([\mu]_{\partial_0 P, \sigma} + \mathcal{J}_1\right).$$

Для завершения доказательства достаточно получить оценку $[\mu]_{\partial_0 P, \sigma} \leqslant C(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2)$. Но ее легко вывести, используя определение $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$. Лемма 2.3 доказана.

Ниже мы будем использовать конформное отображение, преобразующее полупространство $\mathbf{R}^{n-1}_+$ в единичный шар B, а граничную плоскость $\mathbf{R}^{n-2} = \{x' = (x'', x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}\colon x_{n-1} = 0\}$ — на сферу S. Это отображение $\theta\colon \overline{\mathbf{R}^{n-1}} \to \overline{\mathbf{R}^{n-1}}$ определяется следующим образом:

$$x' = \theta(u') = \frac{u' + (1/2)\, e_{n-1}}{\left|u' + \frac{1}{2} e_{n-1}\right|^2} - e_{n-1}. \tag{2.19}$$

Обратным к θ будет отображение

$$u' = \theta^{-1}(x) = \frac{x' + e_{n-1}}{|x' + e_{n-1}|^2} - \frac{1}{2} e_{n-1}.$$

Из явного вида θ следует

$$B^+ = \theta(B^+_{1/2}). \tag{2.20}$$

Обозначим

$$\alpha_{n-2}(u) = \left|u'' + \frac{1}{2} e_{n-1}\right|, \quad \alpha_{n-1}(u) = \left|u' + \frac{1}{2} e_{n-1}\right|, \tag{2.21}$$

где $u' = (u'', u_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}$, $u'' \in \mathbf{R}^{n-2}$. Пусть $s' \in S$, $y' \in B$, $u' = \theta^{-1}(y')$, $v'' = \theta^{-1}(s')$. Тогда из (2.19) имеем

$$|s' - y'| = |u' - v''|\, [\alpha_{n-1}(u)\, \alpha_{n-2}(v)]^{-1}. \tag{2.22}$$

Обозначим через θ' производную отображения θ. Как несложно проверить,

$$\theta'(u') = L(u')\, \alpha_{n-1}^{-2}(u), \tag{2.23}$$

где L — ортогональное отображение. Из (2.23) получаем

$$\det \theta'(u') = \alpha_{n-1}^{-2(n-1)}(u).$$

Отсюда вытекает, что если $g \in W_p^1(B)$ и $h = g \circ \theta$, то

$$\int_B |g(y')|^p\, dy' = \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} |h(u')|^p \frac{du'}{\alpha_{n-1}^{2(n-1)}(u)}, \tag{2.24}$$

$$\int_B |\nabla g(y')|^p\, dy' = \int_{\mathbf{R}_+^{n-1}} |\nabla h(u')|^p \frac{du'}{\alpha_{n-1}^{2(p-n-1)}(u)}. \tag{2.25}$$

В силу конформности θ гомеоморфно отображает $\mathbf{R}^{n-2}$ на S. Из (2.23) следует

$$dS \sim \alpha_{n-2}^{-2(n-2)}(u)\, du''. \tag{2.26}$$

Если $\nu \in L_1(S)$ и $\eta = \nu \circ \theta$, то

$$\int_S \nu(s')\, dS \sim \int_{\mathbf{R}^{n-2}} \eta(u'')\, \alpha_{n-2}^{-2(n-2)}(u)\, du'', \tag{2.27}$$

$$\int_S \int_S \frac{|\nu(s') - \nu(t')|^p}{|s' - t'|^{n+p-3}}\, dS\, dS \sim \int_{\mathbf{R}^{n-2}} \int_{\mathbf{R}^{n-2}} \frac{|\eta(u'') - \eta(v'')|^p\, du''\, dv''}{|u'' - v''|^{n+p-3}\, [\alpha_{n-2}(u)\, \alpha_{n-2}(v)]^{n-p-1}}. \tag{2.28}$$

Отображение θ позволит нам переходить от функций, определенных в шаре или на сфере, к функциям, определенным в полупространстве или на плоскости. При этом проще получаются оценки некоторых интегралов.

Лемма 2.4. *Пусть* $\rho \in (0;\ 1)$, $\varepsilon = 0$ *при* $p \geqslant (n-1)/(n-2)$, $\varepsilon = (n-1)/p - (n-2)$ *при* $p < (n-1)/(n-2)$ *и* η — *некоторая функция, определенная на* $\mathbf{R}^{n-2}$. *Тогда*

$$\int_0^1 \int_{B_\rho^{n-2}} \left[\int_{\mathbf{R}^{n-2}} \frac{|\eta(u'') - \eta(v'')|\, dv''}{[|u'' - v''|^2 + \tau^2]^{(n-1)/2}\, [\alpha_{n-2}(v)]^{n-3}} \right]^p \tau^{-\varepsilon p}\, du''\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{\mathbf{R}^{n-2}} \int_{\mathbf{R}^{n-2}} \frac{|\eta(u'') - \eta(v'')|^p}{|u'' - v''|^{n+p-3}} [\alpha_{n-2}(u)\, \alpha_{n-2}(v)]^{p-n+1}\, du''\, dv''. \tag{2.29}$$

Доказательство. Обозначим интеграл в левой части через I. Необходимость различать случаи $p \geqslant (n-1)/(n-2)$ и $p < (n-1)/(n-2)$ возникает оттого, что при $p \geqslant (n-1)/(n-2)$ неравенство

$$[\alpha_{n-2}(v)]^{3-n} \leqslant C\, [\alpha_{n-2}(v)]^{(p-n+1)/p} \tag{2.30}$$

выполняется для всех $v'' \in \mathbf{R}^{n-2}$, а при $p < (n-1)/(n-2)$ оно не верно при больших $|v''|$. Мы дадим доказательство (2.29) для $p < (n-1)/(n-2)$. В случае $p \geqslant (n-1)/(n-2)$, использовав (2.30), следует повторить рассуждение с $\varepsilon = 0$.

Из того, что $[|u'' - v''|^2 + \tau^2]^{\varepsilon/2} [\alpha_{n-2}(v)]^{n-3} \geqslant C\, [\alpha_{n-2}(v)]^{(n-p-1)/p}$ и $\alpha_{n-2}(u) \sim 1$ при $u'' \in B_\rho^{n-2}$, получаем

$$I \leqslant C \int_0^1 \int_{B_\rho^{n-2}} \left[\int_{\mathbf{R}^{n-2}} dv'' \frac{|\eta(u'') - \eta(v'')|}{[|u'' - v''|^2 + \tau^2]^{(n-1-\varepsilon)/2}} \times \right.$$

$$\left. \times\ [\alpha_{n-2}(u)\, \alpha_{n-2}(v)]^{(n-p-1)/p} \right]^p \tau^{-\varepsilon p}\, du''\, d\tau.$$

Увеличим интеграл справа, распространяя интегрирование по u'' на $\mathbf{R}^{n-2}$ и по τ на $(0;\ \infty)$, затем сделаем замену переменных $v'' = u'' +$

$+z''\ (v'' \to z'')$ и применим обобщенное неравенство Минковского. В итоге

$$I \leqslant C\int\limits_0^\infty \left[\int\limits_{\mathbf{R}^{n-2}} \left\{\int\limits_{\mathbf{R}^{n-2}} \frac{|\eta(u''+z'')-\eta(u'')|^p\,du''}{|z''|^{n+p-3}\,[\alpha_{n-2}(u+z)\,\alpha_{n-2}(u)]^{n-p-1}}\right\}^{1/p} \times\right.$$

$$\left.\times \frac{|z''|^{1+(n-3)/p}\,dz''}{[|z''|^2+\tau^2]^{(n-1-\varepsilon)/2}}\right]^p \frac{d\tau}{\tau^{\varepsilon p}}. \tag{2.31}$$

Перейдем по z'' к полярным координатам, $z''=\rho\omega''$ и положим

$$M(\rho)=\int\limits_{S^{n-3}}\left\{\int\limits_{\mathbf{R}^{n-2}} \frac{|\eta(u''+\rho\omega'')-\eta(u'')|^p}{\rho^{n+p-3}\,[\alpha_{n-2}(u)\,\alpha_{n-2}(u+\rho\omega'')]^{n-p-1}}\right\}^{1/p} dS^{n-3}.$$

Тогда из (2.31) вытекает

$$I\leqslant C\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_0^\infty M(\rho)\frac{\rho^{n-2+(n-3)/p}}{(\rho^2+\tau^2)^{(n-1-\varepsilon)/2}}\,d\rho\right]^p\frac{d\tau}{\tau^{\varepsilon p}}\leqslant$$

$$\leqslant C\left\{\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_0^\tau M(\rho)\,\rho^{n-2+(n-3)/p}\,d\rho\right]^p\frac{d\tau}{\tau^{np-p}}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_\tau^\infty M(\rho)\,\rho^{\frac{n-3}{p}-1+\varepsilon}\,d\rho\right]^p \tau^{(1-\varepsilon p)-1}\,d\tau\right\}. \tag{2.32}$$

Мы использовали оценку $(\rho^2+\tau^2)^{-1/2}\leqslant\tau^{-1}$ для случая $0<\rho<\tau$ и оценку $(\rho^2+\tau^2)^{-1/2}\leqslant\rho^{-1}$ для случая $\tau<\rho<\infty$. Учитывая, что $0<\varepsilon p<1$ при $p<(n-1)/(n-2)$, в силу неравенства Харди, из (2.32) получаем

$$I\leqslant C\int\limits_0^\infty M^p(\tau)\,\tau^{n-3}\,d\tau. \tag{2.33}$$

Из (2.33) и неравенства Гельдера выводим оценку

$$I\leqslant C\int\limits_{\mathbf{R}^{n-2}}\int\limits_0^\infty\int\limits_{S^{n-3}}\frac{|\eta(u''+\tau\omega'')-\eta(u'')|^p}{\tau^{n+p-3}\,[\alpha_{n-2}(u)\,\alpha_{n-2}(u''+\tau\omega'')]^{n-p-1}}\,\tau^{n-3}dS^{n-3}\,d\tau\,du''=$$

$$=C\int\limits_{\mathbf{R}^{n-2}}\int\limits_{\mathbf{R}^{n-2}}\frac{|\eta(v'')-\eta(u'')|^p\,du''\,dv''}{|u''-v''|^{n+p-3}\,[\alpha_{n-2}(u)\,\alpha_{n-2}(v)]^{n-p-1}}.$$

Лемма 2.4 доказана.

§ 3. Область с внешним пиком на границе

Определим пик, направленный во внешность области.

Пусть G — область в $\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 3$. Будем говорить, что *область G имеет пик на границе с вершиной в точке $O\in\partial G$, направленный во внешность области*, если пересечение некоторой окрестности O с областью G можно движением отобразить на множество

$$\mathscr{P}=\left\{x=(x',x_n)\in\mathbf{R}^n\colon\ \frac{x'}{\varphi(x_n)}\in\Omega',\quad 0<x_n<a\right\}, \tag{3.1}$$

где $\Omega'\subset\mathbf{R}^{n-1}$ — область, являющаяся билипшицевым образом шара B, $a\in(0;\ \infty)$ — некоторое число, и монотонно возрастающая функция φ удовлетворяет условиям (1.1), (1.2) на отрезке $[0;\ a]$. Мы полагаем далее, что $a=1$. Будем считать, что вершина пика находится в начале координат и U — такая окрестность начала координат, что $U\cap G$ имеет вид (3.1).

Теорема 3.1. *Пусть граница ∂G ограниченной области G липшицева в окрестности каждой точки ∂G за исключением начала координат, являющегося вершиной внешнего пика, $\partial_1 G=\partial G\setminus(U\cap\partial G)$, $p\in(1;\ \infty)$. Тогда справедливо соотношение*

$$\|\mu\|^p_{TW^1_p(G)}\sim|||\mu|||_{V\cap\partial G,\varphi,\sigma}+|||\mu|||_{\partial_1 G,1,1},\tag{3.2}$$

где $\sigma=\chi(|x_n-y_n|/E(x_n,\ y_n))$.

Сделаем некоторые замечания, прежде чем приступим к доказательству теоремы.

Замечание 3.1. Несложно показать, используя результаты [1], что можно ограничиться случаем $G=\mathscr{P}$, причем рассматривать функции из $W^1_p(\mathscr{P})$ и их следы на $\partial\mathscr{P}$, обращающиеся в нуль при $0<\varepsilon<x_n<1$, где ε — некоторое фиксированное число. При этом достаточно установить эквивалентность

$$\|\mu\|_{TW^1_p(\mathscr{P})}\sim|||\mu|||^{1/p}_{\partial_0\mathscr{P},\varphi,\sigma},\tag{3.3}$$

где $\partial_0\mathscr{P}=\{x=(x',\ x_n)\in\partial\mathscr{P}\colon\ 0<x_n<1\}$.

Замечание 3.2. Пусть $\lambda\colon\ \overline{B}\to\mathbf{R}^{n-1}$ — билипшицево отображение, переводящее $\overline{B}$ в $\overline{\Omega}'$. Тогда отображение $\Lambda\colon\ (y',\ y_n)\to(\varphi(y_n)\lambda(y'),\ y_n)$ также билипшицево и отображает пик вида (2.10) на пик $\mathscr{P}$. Поэтому пространства $W^1_p(\mathscr{P})$ и $W^1_p(P)$ изоморфны [5], следовательно,

$$\|f\|_{W^1_p(\mathscr{P})}\sim\|f\circ\Lambda\|_{W^1_p(P)}.$$

Если ξ — неотрицательная функция, определенная на $\partial_0\mathscr{P}$, то в силу билипшицевости Λ [6]

$$\int\limits_{\partial_0\mathscr{P}}\xi(x)\,d\Sigma(\partial\mathscr{P})\sim\int\limits_{\partial_0 P}\xi\circ\Lambda(s)\,d\Sigma(\partial P).$$

Отсюда следует

$$|||\mu|||_{\partial\mathscr{P},\varphi,\sigma}\sim|||\mu\circ\Lambda^{-1}|||_{\partial P,\varphi,\sigma}.$$

Таким образом, достаточно доказать соотношение

$$|||\mu|||_{\partial P,\varphi,\sigma}\sim\|\mu\|^p_{TW^1_p(P)}.\tag{3.4}$$

Доказательство теоремы 3.1. Рассмотрим отображение (2.11). Если $f\in W^1_p(P)$, то функция $g=f\circ\Phi^{-1}$ определена в цилиндре D и

$$\|g\|_{W^1_{p,\psi}(D)}=\left\{\int\limits_D|g(s)|^p\psi^n(s_n)\,ds\right\}^{1/p}+$$
$$+\left\{\int\limits_D|\nabla g(s)|^p\psi^{n-p}(s_n)\,ds\right\}^{1/p}\sim\|f\|_{W^1_p(P)}.\tag{3.5}$$

Здесь $\psi(s_n)=\varphi(\varkappa(s_n))$ и $\varkappa(s_n)$ определяется из равенства (2.12).

Так как для функции μ, определенной на $\partial_0 P$,

$$\|\mu\|_{\partial_0 P,\varphi}\sim\|\nu\|_{\partial_0 D,\psi^n}=\left\{\int\limits_{\partial_0 D}|\nu(s)|^p\psi^n(s_n)\,d\Sigma_s\right\}^{1/p},$$

то в силу (2.15)

$$|||\mu|||_{\partial_0 P,\varphi,\sigma} \sim \|\nu\|^p_{\partial_0 D,\psi^n} + I_1 + I_{n-2}, \tag{3.6}$$

где

$$I_1 = \int\limits_S \int\limits_0^\infty \int\limits_0^1 \frac{|\nu(s', s_n+\tau) - \nu(s', s_n)|^p}{\tau^p} \psi^{n-p}(s_n)\, d\tau\, ds_n\, dS,$$

$$I_{n-2} = \int\limits_0^\infty \int\limits_S \int\limits_S \psi^{n-p}(s_n) \frac{|\nu(s', s_n) - \nu(t', s_n)|^p}{|s'-t'|^{n+p-3}}\, dS\, dS\, ds_n.$$

Из (3.4)—(3.6) вытекает, что справедливость теоремы будет следовать из соотношения

$$\|\nu\|^p_{TW^1_{p,\psi}(D)} \sim \|\nu\|^p_{\partial_0 D,\psi^n} + I_1 + I_{n-2}. \tag{3.7}$$

Пусть $g \in W^1_{p,\psi}(D)$, $\nu = g|_{\partial D}$ и $g(s', s_n) = 0$ при $0 < s_n < 1$ (см. замечание 3.1). Оценим правую часть (3.7) через норму g. Начнем с оценки интеграла I_{n-2}. Положим

$$\mathcal{R} = \int\limits_S \int\limits_S \frac{|\nu(s', s_n) - \nu(t', s_n)|^p}{|s'-t'|^{n+p-3}}\, dS\, dS. \tag{3.8}$$

Обозначим для $z' \in S$

$$\Sigma(z') = \{s' \in S\colon |z'-s'| < 1\}, \quad S(z') = \{s' \in S\colon |s'-z'| < \sqrt{2}\}.$$

Полагаем

$$\Sigma_i = \Sigma(e_i), \quad \Sigma_{n+i-1} = \Sigma(-e_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{3.9}$$

$$S_i = S(e_i), \quad S_{n+i-1} = S(-e_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3.10}$$

Система множеств $\{\Sigma_i\}_{i=1}^{2(n-1)}$ образует покрытие S. Справедлива оценка

$$\mathcal{R} \leqslant C \sum_{i=1}^{2(n-1)} \int\limits_{\Sigma_i} \int\limits_{S_i} |\nu(s', s_n) - \nu(t', s_n)|^p |s'-t'|^{-(n+p-3)}\, dS\, dS. \tag{3.11}$$

Все интегралы в правой части (3.11) оцениваются единообразно. Оценим один из них, именно

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{n-1} = \int\limits_{\Sigma_{n-1}} \int\limits_{S_{n-1}} \frac{|\nu(s', s_n) - \nu(t', s_n)|^p}{|s'-t'|^{n+p-3}}\, dS_s\, dS_t.$$

Пусть θ — отображение (2.19), $\eta(u'') = \nu(\theta(u'', 0), s_n)$, $U = \theta^{-1}(\Sigma_{n-1})$, $V = \theta^{-1}(S_{n-1})$. Из (2.28) следует

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{n-1} \sim \mathcal{R}_{n-1} = \int\limits_U \int\limits_V \frac{|\eta(u'') - \eta(v'')|^p\, du''\, dv''}{|u''-v''|^{n+p-3} [\alpha_{n-2}(u)\, \alpha_{n-2}(v)]^{p-n+1}}.$$

Обозначим $h(u') = g(\theta(u'), s_n)$, тогда $h|_{u_{n-1}=0} = \eta$. Для $\mathcal{R}_{n-1}$ имеем оценку

$$\mathcal{R}^{1/p}_{n-1} \leqslant \left\{ \int\limits_U \int\limits_V \left(\frac{1}{|u''-v''|} \int\limits_0^{|u''-v''|} |D_{n-1} h(u'', \tau)|\, d\tau \right)^p |u''-v''|^{3-n}\, du''\, dv'' \right\}^{1/p} +$$

$$+ \left\{ \int\limits_U \int\limits_V \left(\frac{1}{|u''-v''|} \int\limits_0^{|u''-v''|} |D_{n-1} h(v'', \tau)|\, d\tau \right)^p |u''-v''|^{3-n}\, du''\, dv'' \right\}^{1/p} +$$

$$+ \left\{ \int\limits_U \int\limits_V \left(\int\limits_0^1 |\nabla'' h(u'' + \tau(v''-u''), |u''-v''|)|\, d\tau \right)^p \times \right.$$

$$\left. \times |u''-v''|^{-(n-3)}\, du''\, dv'' \right\}^{1/p} = r_1 + r_2 + r_3. \tag{3.12}$$

В интеграле r_1 перейдем к полярным координатам в $\mathbf{R}^{n-2}$, $v''=u''+\rho\omega''$, $\omega''\in S^{n-3}$. Из определения отображения θ и множеств U, V вытекает, что

$$U\subset B^{n-2}_{1/2\sqrt{3}},\quad U\subset V\subset B^{n-2}_{1/2}. \tag{3.13}$$

Поэтому $\rho=|u''-v''|<(\sqrt{3}+1)/2\sqrt{3}<1$ при $u''\in U$, $v''\in V$. Используя неравенство (1.3), получаем

$$r_1^p\leqslant C\int_U\int_0^1|D_{n-1}h(u'',\tau)|^p\,d\tau\,du''. \tag{3.14}$$

В интеграле r_2 перейдем к полярным координатам по переменной u'', $u''=v''+\rho\omega''$. Из (3.13) и (1.3) следует

$$r_2^p\leqslant C\int_V\int_0^1|D_{n-1}h(v'',\tau)|^p\,d\tau\,dv''. \tag{3.15}$$

Для оценки r_3 сначала используем обобщенное неравенство Минковского, затем перейдем к полярным координатам по v'', $v''=u''+\rho\omega''$. Тогда

$$r_3^p\leqslant\int_0^1\left\{\int_U\int_{S^{n-3}}\int_0^1|\nabla''h(u''+\tau\rho\omega'',\rho)|^p\,d\rho\,dS^{n-3}\,du''\right\}^{1/p}d\tau.$$

Делая замену переменных $u''+\tau\rho\omega''=z''$ и учитывая (3.13), имеем

$$r_3^p\leqslant C\left\{\int_{B^{n-2}}\int_0^1|\nabla''h(z'',\rho)|^p\,d\rho\,dz''\right\}^{1/p}. \tag{3.16}$$

Из $[\alpha_{n-2}(u)\alpha_{n-2}(v)]\sim 1$ при $u''\in U$, $v''\in V$ и из (3.14)—(3.16) следует

$$\mathcal{R}_{n-1}\leqslant C\int_{B^{n-2}}\int_0^1|\nabla'h(u'',u_{n-1})|^p\frac{du_{n-1}du''}{\alpha_{n-1}^{2(n-p-1)}(u)}.$$

Поэтому

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{n-1}\leqslant C\int_B|\nabla'g(s',s_n)|^p\,ds'.$$

Таким образом,

$$I_{n-2}=\int_0^\infty\widetilde{\mathcal{R}}_{n-1}\psi^{n-p}(s_n)\,ds_n\leqslant C\int_D|\nabla g(s)|^p\psi^{n-p}(s_n)\,ds. \tag{3.17}$$

Переходим к оценке интеграла I_1. Используя обозначения (3.9), имеем

$$I_1^{1/p}\leqslant\sum_{i=1}^{2(n-1)}\left\{\int_0^\infty\int_0^1\int_{\Sigma_i}\frac{|\nu(s',s_n+\tau)-\nu(s',s_n)|^p}{\tau^p}\psi^{n-p}(s_n)\,dS\,d\tau\,ds_n\right\}^{1/p}. \tag{3.18}$$

Оценка всех интегралов в сумме проводится по одной схеме. Оценим один из них, а именно:

$$\int_0^\infty\int_0^1\int_{\Sigma_{n-1}}\frac{|\nu(s',s_n+\tau)-\nu(s',s_n)|^p}{\tau^p}\psi^{n-p}(s_n)\,dS\,d\tau\,ds_n. \tag{3.19}$$

Сделаем замену переменных $s'=\theta(u'',0)$, где θ — отображение (2.19). Положим $U=\theta^{-1}(\Sigma_{n-1})$, $\eta(u'',s_n)=\nu(\theta(u'',0),s_n)$, $h(u',s_n)=$

$= g(\theta(u'), s_n)$; ясно, что $h|_{n_{n-1}=0} = \eta$. Учитывая, что $\alpha_{n-2}(u) = |u'' + e_{n-1}/2| \sim 1$ при $u'' \in U$, мы получаем интеграл

$$A = \int_0^\infty \int_0^1 \int_U \frac{|\eta(u'', s_n+\tau) - \eta(u'', s_n)|^p}{\tau^p} \psi^{n-p}(s_n)\, du''\, d\tau\, ds_n,$$

эквивалентный интегралу (3.19). Для A имеем

$$A^{1/p} \leqslant \left\{ \int_0^\infty \int_0^1 \int_U \left(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau |D_{n-1}h(u'', \sigma, s_n)|\, d\sigma \right)^p \psi^{n-p}(s_n)\, du''\, d\tau\, ds_n \right\}^{1/p} +$$

$$+ \left\{ \int_0^\infty \int_0^1 \int_U \left(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau |D_{n-1}h(u'', \sigma, s_n+\tau)|\, d\tau \right)^p \psi^{n-p}(s_n)\, du''\, d\tau\, ds_n \right\}^{1/p} +$$

$$+ \left\{ \int_0^\infty \int_0^1 \int_U \left(\frac{1}{\tau} \int_{s_n}^{s_n+\tau} |D_n h(u'', \tau, \sigma)|\, d\sigma \right)^p \psi^{n-p}(s_n)\, du''\, d\tau\, ds_n \right\}^{1/p} = a_1 + a_2 + a_3. \tag{3.20}$$

Оценка a_1 следует из (1.3):

$$a_1^p \leqslant C \int_0^\infty \int_0^1 \int_U |D_{n-1}h(u'', \tau, s_n)|^p \psi^{n-p}(s_n)\, du''\, d\tau\, ds_n. \tag{3.21}$$

Прежде чем приступить к оценке a_2, напомним, что из условия (1.1) на функцию φ и определения функции ψ следует эквивалентность $\psi(\rho-\tau) \sim \psi(\rho)$, $\rho \in (1; \infty)$, $\tau \in (0; 1)$. Сделаем в интеграле a_2 замену переменной $\rho = s_n + \tau$ $(s_n \to \rho)$. Тогда в силу неравенства Харди

$$a_2^p \leqslant C \int_0^\infty \int_0^1 \int_U |D_{n-1}h(u'', \tau, \rho)|^p \psi^{n-p}(\rho)\, du''\, d\tau\, d\rho. \tag{3.22}$$

Для оценки a_3 сделаем сначала замену $t = s_n - \tau$, далее применим неравенство Гельдера. Получим

$$a_3^p \leqslant C \int_U \int_0^\infty \int_0^1 \left[\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} |D_n h(u'', \tau, \sigma)|^p\, d\sigma \right] \psi^{n-p}(t)\, d\tau\, dt\, du'' = C \int_U \tilde{a}_3(u'')\, du'',$$

где

$$\tilde{a}_3(u'') = \int_0^\infty \int_0^1 \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} |D_n h(u'', \tau, \sigma)|^p\, d\sigma\, \psi^{n-p}(t)\, d\tau\, dt.$$

В интеграле $\tilde{a}_3(u'')$ изменим порядок интегрирования по σ и t. Тогда

$$\tilde{a}_3(n'') = \int_0^1 \int_0^\tau \frac{1}{\tau} |D_n h(u'', \tau, \sigma)|^p \left[\int_0^\sigma \psi^{n-p}(t)\, dt \right] d\sigma\, d\tau +$$

$$+ \int_0^1 \int_\tau^\infty \left[\int_{\sigma-\tau}^\sigma \psi^{n-p}(t)\, dt \right] \frac{1}{\tau} |D_n h(u'', \tau, \sigma)|^p\, d\sigma\, d\tau.$$

Так как $\psi(t) \sim \psi(\sigma)$ для $t \in (0; \sigma)$ при $\sigma \in (0; \tau) \subset (0; 1)$ и для $t \in (\sigma-\tau; \sigma)$ при $\sigma \in (\tau; \infty)$, то

$$\tilde{a}_3 \leqslant C \int_0^1 \int_0^\infty |D_n h(u'', \tau, \sigma)|^p \psi^{n-p}(\sigma)\, d\sigma\, d\tau.$$

Таким образом,

$$a_3^p \leqslant C \int\limits_U \int\limits_0^\infty \int\limits_0^1 |D_n h(u'', \tau, \sigma)|^p \psi^{n-p}(\sigma)\, d\tau\, d\sigma\, du''. \qquad (3.23)$$

Из (3.20) — (3.23) вытекает оценка

$$I_1 \leqslant C \int\limits_D |\nabla g(s)|^p \psi^{n-p}(s_n)\, ds. \qquad (3.24)$$

Оценим норму $\|\nu\|_{\partial_0 D, \psi^n}$. Имеем

$$\|\nu\|_{\partial_0 D, \psi^n} \leqslant \sum_{k=1}^{2(n-1)} \left\{ \int\limits_{\Sigma_k} \int\limits_0^\infty |\nu(s', s_n)|^p \psi^n(s_n)\, ds_n\, dS \right\}^{1/p}. \qquad (3.25)$$

Достаточно оценить какой-либо из интегралов в сумме. Остальные оцениваются точно так же. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{\Sigma_{n-1}} |\nu(s', s_n)|^p \psi^n(s_n)\, dS\, ds_n.$$

Используя отображение (2.19) и те же обозначения, что и выше, приходим к эквивалентному интегралу

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_U |\eta(u'', s_n)|^p \psi^n(s_n)\, du''\, ds_n.$$

Для почти всех $u_{n-1} \in (0; 1)$ выполняется неравенство

$$|\eta(u'', s_n)|^p \leqslant C \left[|h(u'', u_{n-1}, s_n)|^p + \int\limits_0^1 |D_{n-1} h(u'', \sigma, s_n)|^p\, d\sigma \right].$$

Учитывая монотонное убывание ψ, получаем

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_U |\eta(u'', s_n)|^p \psi^n(s_n)\, du''\, ds_n \leqslant$$

$$\leqslant C \left[\int\limits_0^\infty \int\limits_U \int\limits_0^1 |h(u'', u_{n-1}, s_n)|^p \psi^n(s_n)\, du_{n-1}\, du''\, ds_n + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^\infty \int\limits_0^1 \int\limits_U |D_{n-1} h(u'', \sigma, s_n)|^p \psi^{n-p}(s_n)\, du''\, d\sigma\, ds_n \right].$$

Отсюда, в силу того, что $\alpha_{n-1}(u) \sim 1$ при $u'' \in U$, $u_{n-1} \in (0; 1)$, из (3.25), (2.25), (2.27) получаем оценку

$$\|\nu\|_{\partial_0 D, \psi^n} \leqslant C \|g\|_{W^1_{p,\psi}(D)}. \qquad (3.26)$$

Из (3.17), (3.24), (3.26) следует

$$\left\{ \|\nu\|^p_{\partial_0 D, \psi^n} + I_1 + I_{n-2} \right\}^{1/p} \leqslant C \|\nu\|_{TW^1_{p,\psi}(D)}. \qquad (3.27)$$

Пусть теперь функция ν определена на $\partial_0 D$, $\nu(s', s_n) = 0$ при $0 < s_n < 1$ и

$$|||\nu|||_{\partial_0 D} = \|\nu\|^p_{\partial_0 D, \psi^n} + I_1 + I_{n-2} < \infty.$$

Построим продолжение функции ν внутрь цилиндра. В основе нашего построения лежит гармоническое продолжение на шар функции, заданной на сфере. Сделаем в связи с этим некоторые замечания. Пусть

$\gamma \in B_p^{1-1/p}(S)$, т. е. для функции γ конечна норма

$$\|\gamma\|_{B_p^{1-1/p}(S)} = \|\gamma\|_{L_p(S)} + \left\{ \int\limits_S \int\limits_S \frac{|\gamma(s') - \gamma(\omega')|^p}{|s' - \omega'|^{n+p-3}} dS\, dS \right\}^{1/p}.$$

Решение задачи Дирихле

$$\Delta w = 0 \text{ в } B,\ w|_s = \gamma,$$

дается, как известно [7], формулой Пуассона

$$w(y') = \int\limits_S p(y', s')\gamma(s')\, dS_{s'},$$

где

$$p(y', s') = \frac{1}{\omega_{n-2}} \frac{1 - |y'|^2}{|y' - s'|^{n-1}}$$

— ядро Пуассона. Справедливы следующие оценки:

$$\|w\|_{L_p(B)} \leqslant C \|\gamma\|_{B_p^{1-1/p}(S)}, \tag{3.28}$$

$$\|\nabla w\|_{L_p(B)} \leqslant C \left\{ \int\limits_S \int\limits_S \frac{|\gamma(s') - \gamma(\omega')|^p}{|s' - \omega'|^{n+p-3}} dS\, dS \right\}^{1/p}. \tag{3.29}$$

Пусть $g(y', s_n)$ — гармоническое продолжение в шар B функции $s' \to \nu(s', s_n)$ при фиксированном s_n. Продолжение ν на D определяется так:

$$q(y', s_n) = \int\limits_{\mathbf{R}} K_1(\tau)\, g\left(y', s_n + \frac{1}{8}(1 - |y'|^2)\tau\right) d\tau. \tag{3.30}$$

Оценку интегралов, входящих в $\|q\|_{W^1_{p,\psi}(D)}$, проведем по $B^+ \times (0; \infty)$. Оценка по второй половине цилиндра получается аналогично. Положим $h(u', s_n) = q(\theta(u'), s_n)$, $\eta(u'', s_n) = \nu(\theta(u'', 0), s_n)$, где θ — отображение (2.19). Ясно, что $h|_{u_{n-1}=0} = \eta$. После замены переменных $u' = \theta^{-1}(y')$, $v'' = \theta^{-1}(s')$ ядро Пуассона $p(y', s')$ принимает вид

$$\frac{2u_{n-1}\alpha_{n-1}^{n-3}(u)\, \alpha_{n-2}^{n-1}(v)}{\omega_{n-2}|u' - v''|^{n-1}}.$$

Положим

$$\Theta(u', v'') = \frac{2u_{n-1}}{\omega_{n-2}|u' - v''|^{n-1}} \left[\frac{\alpha_{n-1}(u)}{\alpha_{n-2}(v)} \right]^{n-3}. \tag{3.31}$$

Из определения Θ следует, что $\Theta \geqslant 0$ при $u' \in \mathbf{R}_+^{n-1}$ и

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{n-2}} \Theta(u', v'')\, dv'' = 1, \quad u' \in \mathbf{R}_+^{n-1}.$$

Отсюда

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{n-2}} \frac{\partial}{\partial u_j} \Theta(u', v'')\, dv'' = 0, \quad u' \in \mathbf{R}_+^{n-1}. \tag{3.32}$$

Для производных функции Θ справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial}{\partial u_j} \Theta(u', v'') \right| \leqslant \frac{C}{|u' - v''|^{n-1}} \left[\frac{\alpha_{n-1}(u)}{\alpha_{n-2}(v)} \right]^{n-3} \tag{3.33}$$

при $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $u' \in \mathbf{R}_+^{n-1}$, $v'' \in \mathbf{R}^{n-2}$.

Положим $\beta = \beta(u') = u_{n-1}/4\alpha_{n-1}^2(u)$. Для функции h из (3.30) после замены переменных имеем представление

$$h(u', s_n) = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}^{n-2}} \Theta(u', v'')\, \eta(v'', s_n + \beta\tau)\, K_1(\tau)\, dv''\, d\tau. \tag{3.34}$$

Перепишем интеграл (3.34) в следующем виде:

$$h(u', s_n) = \int_{\mathbf{R}} K_1(\tau)\, \eta(u'', s_n + \beta\tau)\, d\tau + \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}^{n-2}} \Theta(u', v'')\, [\eta(v'', s_n + \beta\tau) - \eta(u'', s_n + \beta\tau)] \times K_1(\tau)\, dv''\, d\tau = h_1(u', s_n) + h_2(u', s_n).$$

Из этого представления вытекает оценка

$$\left\{\int_0^\infty \int_{B_{1/2}^+} |h(u', s_n)|^p\, \psi^n(s_n) \frac{du'\, ds_n}{\alpha_{n-1}^{2(n-1)}(u)}\right\}^{1/p} \leqslant \sum_{i=1}^{2} \left\{\int_0^\infty \int_{B_{1/2}^+} |h_i(u', s_n)|^p\, \psi^n(s_n) \frac{du'\, ds_n}{\alpha_{n-1}^{2(n-1)}(u)}\right\}^{1/p} = E_1 + E_2.$$

Оценка интеграла E_1 следует из обобщенного неравенства Минковского

$$E_1 \leqslant \left\{\int_{\mathbf{R}^{n-2}} \int_0^\infty |\eta(u'', t_n)|^p\, \psi^n(t_n) \frac{dt_n\, du''}{\alpha_{n-2}^{2(n-2)}(u)}\right\}^{1/p}. \tag{3.35}$$

В интеграле E_2 сделаем сначала замену переменных $v'' = u'' + z''$, затем применим обобщенное неравенство Минковского и после этого сделаем замену переменной $s_n = t_n - \beta\tau$ ($\psi(s_n) \sim \psi(t_n)$). Получим

$$E_2 \leqslant \left\{\int_0^{1/2} \left[\int_{\mathbf{R}^{n-2}} \left\{\int_{B_{1/2}^{n-2}} \int_0^\infty \psi^n(t_n) \frac{\alpha_{n-1}^{(n-1)(p-2)}(u)}{\alpha_{n-2}^{(n-3)p}(u+z)} \times \frac{|\eta(u'' + z'', t_n) - \eta(u'', t_n)|^p}{|z''|^{n+p-3}}\, dt_n\, du''\right\}^{1/p} \frac{|z''|^{1+(n-3)/p}}{[|z''|^2 + u_{n-1}^2]^{(n-1)/2}}\right]^p du_{n-1}\right\}^{1/p}.$$

Дальше оценка проводится так же, как в лемме 2.4. В итоге

$$E_2 \leqslant C \left\{\int_0^\infty \int_{\mathbf{R}^{n-2}} \int_{\mathbf{R}^{n-2}} \frac{|\eta(u'', s_n) - \eta(v'', s_n)|^p}{|u'' - v''|^{n+p-3}} \times \frac{\psi^{n-p}(s_n)}{[\alpha_{n-2}(u)\, \alpha_{n-2}(v)]^{n-p-1}}\, du''\, dv''\, ds_n\right\}^{1/p}. \tag{3.36}$$

Из (3.35) и (3.36) следует неравенство

$$\left\{\int_0^\infty \int_{B^+} |q(s', s_n)|^p\, \psi^n(s_n)\, ds'\, ds_n\right\}^{1/p} \leqslant C\, |||v|||_{\theta_0 D}.$$

Оценим $\|\nabla q\|_{L_{p,\psi^n}(B)}$. Как и выше, мы получим оценки для интегралов по $B^+ \times (0; \infty)$. Далее необходимы следующие оценки для функции $\beta = \dfrac{u_{n-1}}{4\alpha_{n-1}^2(u)}$:

$$0 \leqslant \beta \leqslant u_{n-1}, \quad |D_j\beta| \leqslant C, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1. \tag{3.37}$$

Пусть $h(u', s_n) = q(\theta(u'), s_n)$. Вычисляя производные $D_j h$, $j = 1, 2, \ldots, n$, учитывая (3.32), (3.33) и (3.37), получаем оценку для производных

$$|D_j h| \leqslant C_1 \int\limits_{\mathbf{R}^{n-2}} \int\limits_0^1 \frac{|\eta(u'', s_n + \tau\beta) - \eta(v'', s_n + \tau\beta)|}{[|u'' - v''|^2 + u_{n-1}^2]^{(n-1)/2}} \left[\frac{\alpha_{n-1}(u)}{\alpha_{n-2}(v)}\right]^{n-3} d\tau\, dv'' +$$

$$+ C_2 \frac{1}{u_{n-1}} \int\limits_0^{u_{n-1}} \frac{\eta(u'', s_n + \sigma) - \eta(u'', s_n)|}{\sigma} d\sigma = C_1 H_1(u', s_n) + C_2 H_2(u', s_n). \tag{3.38}$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского и оценку (2.29) леммы 2.4, получаем оценку для интеграла от H_1:

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{B_{1/2}^+} |H_1(u', s_n)|^p \psi^{n-p}(s_n) \frac{du'\, ds_n}{\alpha_{n-1}^{2(n-p-1)}(u)} \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbf{R}^{n-2}} \int\limits_{\mathbf{R}^{n-2}} \frac{|\eta(v'', s_n) - \eta(u'', s_n)|^p}{|u'' - v''|^{n+p-3}} \frac{\psi^{n-p}(s_n)\, du''\, dv''\, ds_n}{[\alpha_{n-2}(u)\, \alpha_{n-2}(v)]^{n-p-1}} \sim I_{n-2}. \tag{3.39}$$

Для интеграла

$$j = \int\limits_0^\infty \int\limits_{B_{1/2}^+} |H_2(u', s_n)|^p \psi^{n-p}(s_n) \frac{du'\, ds_n}{\alpha_{n-1}^{2(n-p-1)}(u)},$$

используя неравенство (1.3) и то, что $\alpha_{n-1}(u) \sim 1$ при $u' \in B_{1/2}^+$, получаем

$$j \leqslant \int\limits_0^\infty \psi^{n-p}(s_n) \int\limits_{B_{1/2}^{n-2}} \int\limits_0^{1/2} [\alpha_{n-2}(u)]^{2(2-n)} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{u_{n-1}} \int\limits_0^{u_{n-1}} \frac{|\eta(u'', s_n + \sigma) - \eta(u'', s_n)|}{\sigma} d\sigma\right)^p du_{n-1}\, du''\, ds_n \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_0^\infty \psi^{n-p}(s_n) \int\limits_{\mathbf{R}^{n-2}} \int\limits_0^1 [\alpha_{n-2}(u)]^{2(2-n)} \times$$

$$\times \frac{|\eta(u'', s_n + \tau) - \eta(u'', s_n)|^p}{\tau^p} d\tau\, du''\, ds_n \sim I_1. \tag{3.40}$$

Из (3.39) и (3.40) следует оценка $\|\nabla h\|_{L_{p,\psi^{n-p}}(B^+ \times (0;\infty))}$. В силу (2.25) отсюда следует и оценка $\|\nabla q\|_{L_{p,\psi}(B^+ \times (0;\infty))}$. Вместе с оценкой $\|q\|_{L_{p,\psi^n}(B)}$ это дает нам неравенство

$$\|q\|_{W_{p,\psi}^1(D)} \leqslant C \|\|v\|\|_{\partial_0 D}. \tag{3.41}$$

Из (3.27) и (3.41) следует (3.7). Теорема 3.1 доказана.

§ 4. Область с внутренним пиком на границе

Определим пик, направленный внутрь области.

Пусть $G \subset \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 3$,— ограниченная область, точка O лежит на границе ∂G и $\partial G \setminus \{O\}$ — локально липшицева поверхность. Будем говорить, что точка O является *вершиной пика, направленного внутрь области* G, если для некоторой окрестности U точки O множество $U\setminus\overline{G}$ можно движением отобразить на множество $\mathscr{P}$ (см. (3.1)). Положим $\partial_1 G = \partial G\setminus(U\cap\partial G)$. Считаем в (3.1) $a=1$.

Теорема 4.1. *Пусть ограниченная область G имеет на границе пик, направленный внутрь области.*

I. *Если $p>n-1$ и функция φ удовлетворяет условиям* (1.1), (1.2), *то справедливо соотношение*

$$\|\mu\|^p_{TW^1_p(G)} \sim |||\mu|||_{\partial G\cap U,\varphi^{2-n},\sigma} + [\mu]_{\partial G\cap U,\sigma} + |||\mu|||_{\partial_1 G,1,1}, \tag{4.1}$$

где $\sigma(x_n, y_n)=\chi(|x_n-y_n|/E(x_n, y_n))$.

II. *Если $p\leqslant n-1$ и функция φ удовлетворяет условиям* (1.1), (1.2) *и дополнительному условию*

$$\varphi(\tau)\sim\varphi(2\tau),\quad \tau\in(0;\ 1), \tag{4.2}$$

то

$$\|\mu\|_{TW^1_p(G)} \sim |||\mu|||^{1/p}_{\partial G,\zeta,\gamma}, \tag{4.3}$$

где при $x\in\partial_1 G$ $\zeta(x)=1$, при $x\in U\cap\partial G$

$$\zeta(x)=\begin{cases}\varphi^{1-p}(x_n), & p<n-1,\\ [\varphi(x_n)\log(2+x_n/\varphi(x_n))]^{2-n}, & p=n-1,\end{cases}$$

$\gamma(x, y)=1$ *для всех $x, y\in\partial G$ при $p<n-1$ и при $p=n-1$*

$$\gamma(x, y)=\begin{cases}1, & x, y\in\partial_1 G,\\ \left[\log\left(2+\dfrac{r}{e(x_n, y_n)}\right)\right]^{1-n}, & x, y\in U\cap\partial G,\end{cases}$$

где $r=|x-y|$.

Доказательство. Достаточно доказать теорему 4.1 для случая, когда окрестность U точки O имеет вид $U=\{x=(x', x_n): |x'|<1, |x_n|<1\}$, область $G=U\setminus\overline{P}$ (см. (2.10)) и рассматривать при этом функции из $W^1_p(G)$ и их следы на ∂G, обращающиеся в нуль при $|x'|>1/2$ и при $|x_n|>1/4$ (см. замечания 1 и 2 из § 3). Обозначим $Q=\{x=(x', x_n)\in\mathbf{R}^n: \varphi(x_n)<|x'|<1, 0<x_n<1\}$.

I. Случай $p>n-1$. Пусть $f\in W^1_p(G)$ и $\mu=f|_{\partial_0 P}$. Для $s'\in S$ и $x_n\in(0;\ 1)$, $(\varphi(x_n)s', x_n)\in\partial_0 P$. Обозначим $\tilde\mu(s', x_n)=\mu(\varphi(x_n)s', x_n)$. Пусть ρ, s' — полярные координаты в $\mathbf{R}^{n-1}$. Тогда

$$|\tilde\mu(s', x_n)|^p\leqslant C\int\limits_{\varphi(x_n)}^{1}|\nabla' f(\rho s', x_n)|^p\rho^{n-2}\,d\rho.$$

Отсюда следует

$$\int\limits_{\partial_0 P}\frac{|\mu(x)|^p}{\varphi^{n-2}(x_n)}\,d\Sigma_x\leqslant C\int\limits_Q|\nabla' f(x)|^p\,dx. \tag{4.4}$$

Оценка $\{\mu\}_{\partial_0 P,\sigma}$ через $\|f\|_{W^1_p(Q)}$ может быть получена в точности так, как и для области с внешним пиком. Из леммы 2.3 вытекает, что для получения оценки

$$|||\mu|||_{\partial_0 P,\varphi^{2-n},\sigma}+[\mu]_{\partial_0 P,\sigma}\leqslant C\|f\|^p_{W^1_p(G)} \tag{4.5}$$

нам осталось оценить интеграл

$$\mathscr{I}_2=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_S[1-\sigma(x_n, y_n)]\frac{|\tilde\mu(s', x_n)-\tilde\mu(s', y_n)|^p}{|x_n-y_n|^{p-n+2}}\,dS\,dx_n\,dy_n.$$

Так как

$$\mathcal{J}_2 \leqslant 2\int\limits_S\int\limits_0^1\int\limits_0^{x_n-\varphi(x_n)} \frac{|\widetilde{\mu}(s',x_n)-\widetilde{\mu}(s',y_n)|^p}{(x_n-y_n)^{p-n+2}}\,dy_n\,dx_n\,dS$$

и

$$|\widetilde{\mu}(s',x_n)-\widetilde{\mu}(s',y_n)| \leqslant \int\limits_{y_n}^{x_n}|D_nf((x_n-y_n)s',\tau)|\,d\tau +$$

$$+\int\limits_{\varphi(x_n)}^{x_n-y_n}|\nabla' f(\rho s',x_n)|\,dp+\int\limits_{\varphi(y_n)}^{x_n-y_n}|\nabla' f(\rho s',y_n)|\,d\rho,$$

то достаточно получить оценки для интегралов

$$\mathcal{A}_1=\int\limits_S\int\limits_0^1\int\limits_{\varphi(x_n)}^{x_n}\left(\int\limits_{x_n-\sigma}^{x_n}|D_nf(\sigma s',\tau)|\,d\tau\right)^p\sigma^{n-p-2}\,d\sigma\,dx_n\,dS,$$

$$\mathcal{A}_2=\int\limits_S\int\limits_0^1\int\limits_0^{x_n-\varphi(x_n)}\left(\int\limits_{\varphi(x_n)}^{x_n-y_n}|\nabla' f(\rho s',x_n)|\,d\rho\right)^p(x_n-y_n)^{n-p-2}\,dy_n\,dx_n\,dS,$$

$$\mathcal{A}_3=\int\limits_S\int\limits_0^1\int\limits_0^{x_n-\varphi(x_n)}\left(\int\limits_{\varphi(y_n)}^{x_n-y_n}|\nabla' f(\rho s',y_n)|\,d\rho\right)^p(x_n-y_n)^{n-p-2}\,dy_n\,dx_n\,dS.$$

При выводе оценок для $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ мы считаем функции $|\nabla' f(\rho s',x_n)|$, $|\nabla' f(\rho s',y_n)|$ и $|D_nf(\rho s',\tau)|$ определенными при $0<\rho<1$ и равными нулю при $0<\rho<\varphi(x_n)$ для первой и третьей функций и при $0<\rho<\varphi(y_n)$ для второй.

Для оценки $\mathcal{A}_1$ увеличим сначала промежуток интегрирования по σ до $(0;\,x_n)$, затем переменим порядок интегрирования по x_n и σ и сделаем замену переменной $x_n-\sigma=t$ $(x_n\to t)$. Далее воспользуемся неравенством (1.5). В итоге имеем

$$\mathcal{A}_1\leqslant C\int\limits_S\int\limits_0^1\int\limits_0^1\sigma^{n-2}|D_nf(\sigma s',t)|^p\,dt\,d\sigma\,dS=C\int\limits_Q|D_nf(x)|^p\,dx.$$

Интегралы $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ оцениваются по одной схеме. Оценим $\mathcal{A}_2$. Увеличивая промежуток интегрирования по y_n до $(0;\,x_n)$, по ρ до $(0;\,x_n-y_n)$, делая затем замену переменной $x_n-y_n=\sigma$ $(y_n\to\sigma)$ и применяя неравенство (1.3), получаем

$$\mathcal{A}_2\leqslant C\int\limits_S\int\limits_0^1\int\limits_0^1|\nabla' f(\sigma s',x_n)|^p\sigma^{n-2}\,d\sigma\,dx_n\,dS=C\int\limits_Q|\nabla' f(x)|^p\,dx.$$

Из оценок для $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ следует оценка для $\mathcal{J}_2$ через $\|\nabla f\|_{L_p(Q)}$, а вместе с тем и оценка (4.5).

Пусть μ определена на $\partial_0 P$, $|||\mu|||_{\partial_0 P,\varphi^{2-n},\sigma}+[\mu]_{\partial_0 P,\sigma}<\infty$. Определим продолжение μ на внешность пика. В этом параграфе через $p(x',s')$ обозначим ядро Пуассона для решения задачи Дирихле для внешности сферы $S_{x_n}=\{x'\in\mathbf{R}^{n-1}\colon |x'|=\varphi(x_n)\}$:

$$p(x',s')=\frac{1}{\omega_{n-2}\varphi(x_n)}\,\frac{|x'|^2-\varphi^2(x_n)}{|x'-s'|^{n-1}},$$

где $|x'|>\varphi(x_n)$ и $s'\in S_{x_n}$. Продолжение μ в область $Q=\{x=(x', x_n)\in\mathbf{R}^n\colon |x'|>\varphi(x_n),\ 0<x_n<1\}$ дается функцией

$$f(x', x_n)=\int\limits_{\mathbf{R}} K_1(\tau)\int\limits_{S_{x_n}} p(x', z')\,\mu\left(\frac{\varphi(x_n+\tau b)}{\varphi(x_n)}z',\ x_n+\tau b\right)dS_{z'}\,d\tau,$$

где $b=b(x', x_n)=|x'|-\varphi(x_n)$. Функция f совпадает с μ на $\partial_0 P$, определена в Q и обращается в нуль в окрестности $\{x=(x', x_n)\in\mathbf{R}^n\colon |x'|=1,\ 0<x_n<1\}$.

Рассмотрим отображение

$$\Psi\colon (x', x_n)\to(y', y_n),\quad y'=\frac{x'}{\varphi(x_n)},\quad y_n=x_n.$$

Отображение Ψ отображает Q в $\mathbf{R}^n\backslash D$ и $\partial_0 P$ на часть $\partial_0 D$. Положим $h(y', y_n)=f(y'\varphi(y_n), y_n)$. Тогда

$$h(y', y_n)=\frac{1}{\omega_{n-2}}\int\limits_{\mathbf{R}} K_1(\tau)\int\limits_{S}\frac{|y'|^2-1}{|y'-s'|^{n-1}}\tilde{\mu}(s', y_n+\tau d)\,dS_{s'}\,d\tau, \tag{4.6}$$

где $d=d(y', y_n)=\varphi(y_n)(|y'|-1)$. При $|y'|>1+(1-y_n)/\varphi(y_n)$ функция h обращается в нуль. Из определения отображения Ψ следует

$$\|f\|_{W_p^1(Q)}\leqslant\left\{\int\limits_{\mathbf{R}^n\backslash D}|h(y)|^p\varphi^{n-1}(y_n)\,dy\right\}^{1/p}+$$

$$+\left\{\int\limits_{\mathbf{R}^n\backslash D}[|\nabla' h(y)|^2\varphi^{-2}(y_n)+|D_n h(y)|^2]^{p/2}\varphi^{n-1}(y_n)\,dy\right\}^{1/p}=\|h\|_{W^1_{p,\varphi}}(\mathbf{R}^n/D).$$

Положим $\beta=(1-y_n)/\varphi(y_n)$. Функция d в области $\{y=(y', y_n)\in\mathbf{R}^n\colon 1<|y'|<1+\beta,\ 0<y_n<1\}$ ограничена и для ее производных в этой области выполняются неравенства

$$|D_j d|\leqslant\varphi(y_n),\quad 1\leqslant j\leqslant n-1,\quad |D_n d|\leqslant\frac{c_\varphi d}{\varphi(y_n)}. \tag{4.7}$$

Пусть ρ, ω' — полярные координаты в $\mathbf{R}^{n-1}$. Тогда при $\rho=|y'|\in(1;1+\beta)$ выполняется $|y'-s'|=|\rho\omega'-s'|\sim[(\rho-1)^2+|\omega'-s'|^2]^{1/2}$. Из (4.6), используя свойства ядер p и K_1, получаем

$$|h(\rho\omega', y_n)|\leqslant C\Bigg[|\tilde{\mu}(\omega', y_n)|+$$

$$+\int\limits_{1/2}^{1}\int\limits_{S}\frac{|\tilde{\mu}(s', y_n+\tau d)-\tilde{\mu}(\omega', y_n)|}{[(\rho-1)^2+|s'-\omega'|^2]^{(n-2)/2}}\,dS\,d\tau\Bigg]. \tag{4.8}$$

Производную $D_j h$, $j=1, 2, \ldots, n-1$, запишем в виде

$$D_j h=\int\limits_{\mathbf{R}}\left[-\frac{D_j d}{d}\frac{d}{d\tau}(\tau K_1(\tau))\right]p(y', s')[\tilde{\mu}(s', y_n+\tau d)-\tilde{\mu}(\omega', y_n+\tau d)]\,dS\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{\mathbf{R}}\left[-D_j d\frac{d}{d\tau}(\tau K_1(\tau))\right]\frac{\tilde{\mu}(\omega', y_n+\tau d)-\tilde{\mu}(\omega', y_n)}{d}\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{\mathbf{R}}K_1(\tau)\int\limits_{S}\frac{\partial}{\partial y_j}p(y', s')[\tilde{\mu}(s', y_n+\tau d)-\tilde{\mu}(\omega', y_n+\tau d)]\,dS\,d\tau. \tag{4.9}$$

Производную $D_n h$ запишем в виде

$$D_n h = \int\limits_{\mathbf{R}} \left[-\frac{D_n d}{d} \frac{d}{d\tau} (\tau K_1(\tau)) \right] \int\limits_S p(y', s') [\tilde{\mu}(s', y_n + \tau d) - \tilde{\mu}(\omega', y_n] \, dS \, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\mathbf{R}} \left[-\frac{1}{d} \frac{d}{d\tau} K_1(\tau) \right] \int\limits_S p(y', s') [\tilde{\mu}(s', y_n + \tau d) - \tilde{\mu}(\omega', y_n + \tau d)] \, dS \, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\mathbf{R}} \left[-\frac{d}{d\tau} K_1(\tau) \right] \frac{\tilde{\mu}(\omega', y_n + \tau d) - \tilde{\mu}(\omega', y_n)}{d} \, d\tau. \qquad (4.10)$$

Из (4.8)—(4.10) с учетом (4.7) следует, что для оценки $\|h\|_{W^1_{p,\varphi}(\mathbf{R}^n \setminus D)}$ нам надо оценить интегралы

$$\mathscr{K}_1 = \int\limits_0^1 \int\limits_S \int\limits_1^{1+\beta} \varphi^{n-1}(y_n) |\tilde{\mu}(\omega', y_n)|^p \rho^{n-2} \, d\rho \, dS \, dy_n,$$

$$\mathscr{K}_2 = \int\limits_0^1 \int\limits_S \int\limits_1^{1+\beta} \left[\int\limits_{1/2}^1 \frac{|\tilde{\mu}(\omega', y_n + \tau d) - \tilde{\mu}(\omega', y_n)|}{d} \, d\tau \right]^p \varphi^{n-1}(y_n) \rho^{n-2} \, d\rho \, dS \, dy_n,$$

$$\mathscr{K}_3 = \int\limits_0^1 \int\limits_S \int\limits_1^{1+\beta} \left[\int\limits_{1/2}^1 \int\limits_S \rho^{n-2} \varphi^{n-p-1}(y_n) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{|\tilde{\mu}(s', y_n + \tau d) - \tilde{\mu}(\omega', y_n + \tau d)|}{[(\rho - 1)^2 + |s' - \omega'|^2]^{(n-1)/2}} \, dS \, d\tau \right]^p d\rho \, dS \, dy_n,$$

$$\mathscr{K}_4 = \int\limits_0^1 \int\limits_S \int\limits_1^{1+\beta} \rho^{n-2} \varphi^{n-p-1}(y_n) \times$$

$$\times \left[\int\limits_{1/2}^1 \int\limits_S \frac{|\tilde{\mu}(s', y_n + \tau d) - \tilde{\mu}(\omega', y_n)|}{[(\rho - 1)^2 + |s' - \omega'|^2]^{(n-2)/2}} \, dS \, d\tau \right]^p d\rho \, dS \, dy_n.$$

Легко получается оценка для $\mathscr{K}_1$:

$$\mathscr{K}_1 \leqslant C \int\limits_{\partial_0 P} \frac{|\mu(y)|^p}{\varphi^{n-2}(y_n)} \, d\Sigma_y.$$

Сделав замену переменной $y_n + \tau\varphi(y_n)(\rho - 1) = x_n$, получаем оценку для $\mathscr{K}_2$:

$$\mathscr{K}_2 \leqslant C \left[\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x_n - \varphi(x_n)} \int\limits_S [x_n - y_n + \varphi(y_n)]^{n-2} \frac{|\tilde{\mu}(\omega', x_n) - \tilde{\mu}(\omega', y_n)|^p}{(x_n - y_n)^p} \, dS dy_n dx_n + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^1 \int\limits_{x_n - \varphi(x_n)}^{x_n} \int\limits_S [x_n - y_n + \varphi(y_n)]^{n-2} \frac{|\tilde{\mu}(\omega', x_n) - \tilde{\mu}(\omega', y_n)|^p}{(x_n - y_n)^p} \, dS \, dy_n \, dx_n \right] \leqslant$$

$$\leqslant C(\mathscr{J}_2 + I_{\mu,1}).$$

Для оценки $\mathscr{K}_3$ сначала используем неравенство Гельдера для интеграла по τ, затем сделаем замену переменной $y_n + \tau\varphi(y_n)(\rho - 1) = x_n$ $(\rho \to x_n)$. Получаем

$$\mathscr{K}_3 \leqslant C \left[\int\limits_S \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x_n - \varphi(x_n)} \mathscr{E}(\omega', x_n, y_n) \, dy_n \, dx_n \, dx_n \, dS + \right.$$

$$\left. + \int\limits_S \int\limits_0^1 \int\limits_{x_n - \varphi(x_n)}^{x_n} \mathscr{E}(\omega', x_n, y_n) \, dy_n \, dx_n \, dS \right] = C[\mathscr{K}_3^{(1)} + \mathscr{K}_3^{(2)}],$$

где

$$\mathscr{E}=\frac{[x_n-y_n+\varphi(y_n)]^{n-2}}{\varphi^p(y_n)}\left[\int\limits_S \frac{|\widetilde{\mu}(s',x_n)-\widetilde{\mu}(\omega',x_n)|\,dS}{\left[\left(\frac{x_n-y_n}{\varphi(y_n)}\right)^2+|s'-\omega'|^2\right]^{(n-1)/2}}\right]^p.$$

При $x_n-y_n>\varphi(x_n)$ справедливо соотношение

$$\left[\left(\frac{x_n-y_n}{\varphi(y_n)}\right)^2+|s'-\omega'|^2\right]^{1/2}\sim\frac{x_n-y_n}{\varphi(y_n)}.$$

Отсюда, используя неравенство Гельдера, имеем

$$\mathscr{K}_3^{(1)}\leqslant C\int\limits_S\int\limits_S\int\limits_0^1|\widetilde{\mu}(s',x_n)-\widetilde{\mu}(\omega',x_n)|^p\int\limits_0^{x_n-\varphi(x_n)}(x_n-y_n)^{n-p-2}dy_n dx_n dS dS\leqslant C\mathscr{I}_1.$$

Если $x_n-y_n<\varphi(x_n)$, то $\varphi(x_n)\sim\varphi(y_n)$. Сделаем замену переменной $(x_n-y_n)/\varphi(x_n)=t$ $(y_n\to t)$. Тогда

$$\mathscr{K}_3^{(2)}\leqslant C\int\limits_0^1\varphi^{n-p-1}(x_n)\,\Gamma(x_n)\,dx_n, \tag{4.11}$$

где

$$\Gamma(x_n)=\int\limits_S\int\limits_0^1\left[\int\limits_S\frac{|\widetilde{\mu}(s',x_n)-\widetilde{\mu}(\omega',x_n)|}{[|\omega'-s'|^2+t^2]^{(n-1)/2}}\,dS_s\right]^p dt\,dS_\omega.$$

Рассмотрим интеграл $\Gamma(x_n)$. Внешний интеграл по сфере разобьем на сумму интегралов по S_{n-1} и $S_{2(n-1)}$ (см. (3.10)). Оба интеграла оцениваются одинаково, поэтому оценим интеграл по S_{n-1}. Используя отображение (2.19), получаем оценку

$$\Gamma(x_n)\leqslant C\int\limits_0^1\int\limits_{B^{n-2}}\left[\int\limits_{\mathbf{R}^{n-2}}\frac{|\nu(u'')-\nu(v'')|}{[|u''-v''|^2+t^2]^{(n-1)/2}}\times\right.$$
$$\left.\times[\alpha_{n-2}(v)]^{(n-p-1)/p}dv''\right]^p du''\,dt,$$

где $\nu(u'')=\widetilde{\mu}(\theta(u'',0),x_n)$. Из леммы 2.4 и (2.28) следует оценка

$$\Gamma(x_n)\leqslant C\int\limits_S\int\limits_S\frac{|\widetilde{\mu}(s',x_n)-\widetilde{\mu}(\omega',x_n)|^p}{|s'-\omega'|^{n+p-3}}\,dS\,dS,$$

из которой, в силу (4.11), получаем $\mathscr{K}_3^{(2)}\leqslant CI_{\mu,2}$. Таким образом,

$$\mathscr{K}_3\leqslant C[\mathscr{I}_1+I_{\mu,2}].$$

При оценке $\mathscr{K}_4$ применим сначала неравенство Гельдера к интегралу по τ, затем сделаем замену переменной $y_n+\tau\varphi(y_n)(\rho-1)=x_n$. После этого применим неравенство Гельдера к внутреннему интегралу по S, представив предварительно знаменатель в виде произведения

$$[m(x_n,\ y_n,\ s',\ \omega')]^{1+(n-2)/p}[m(x_n,\ y_n,\ s',\ \omega')]^{n-3-(n-2)/p},$$

где

$$m(x_n,y_n,s',\omega')=\left[\left(\frac{x_n-y_n}{\varphi(y_n)}\right)^2+|s'-\omega'|^2\right]^{1/2}.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_S\frac{dS_{s'}}{[m(x_n,y_n,s',\omega')]^{[(n-3)p-(n-2)]/(p-1)}}\leqslant C,$$

и полагая

$$\mathscr{L}=\frac{[x_n-y_n+\varphi(y_n)]^{n-2}}{\varphi^p(y_n)}\frac{|\widetilde{\mu}(s',x_n)-\widetilde{\mu}(\omega',y_n)|^p}{[m(x_n,y_n,s',\omega')]^{n+p-2}},$$

получим

$$\mathscr{K}_4\leqslant C\left[\int\limits_S\int\limits_S\int\limits_0^1\int\limits_0^{x_n-\varphi(x_n)}\mathscr{L}dy_n\,dx_n\,dS\,dS+\right.$$

$$\left.+\int\limits_S\int\limits_S\int\limits_0^1\int\limits_{x_n-\varphi(x_n)}^{x_n}\mathscr{L}dy_n\,dx_n\,dS\,dS\right]. \tag{4.12}$$

Для оценки первого интеграла используем соотношения $x_n-y_n+\varphi(y_n)\sim$ $\sim x_n-y_n$ и $r=|x-y|\sim x_n-y_n$, справедливые при $x_n-y_n>\varphi(x_n)$. Тогда первый интеграл в правой части (4.12) не превосходит

$$C\int\limits_S\int\limits_S\int\limits_0^1\int\limits_0^{x_n-\varphi(x_n)}\frac{|\widetilde{\mu}(s',x_n)-\widetilde{\mu}(\omega',y_n)|^p}{r^p}\varphi^{n-2}(y_n)\,dy_n\,dx_n\,dS\,dS\leqslant C\,[\mu]_{\partial_0P,\sigma}.$$

Во втором интеграле в (4.12) $\varphi(x_n)\sim\varphi(y_n)$, из чего следует, что он не превосходит $C\{\mu\}_{\partial_0P,\sigma}$. Из оценок для интегралов $\mathscr{K}_i$, $i=1,\,2,\,3,\,4$, вытекает, что норма h, а следовательно, и $\|f\|_{W_p^1(Q)}$ не превосходит

$$|||\mu|||_{\partial_0P,\varphi^{2-n},\sigma}+[\mu]_{\partial_0P,\sigma}.$$

Из условия на μ следует, что $\{\mu\}_{\partial_0P,\sigma}<\infty]$. По теореме 3.1 существует функция f_1, определенная внутри пика P, совпадающая с μ на ∂_0P и такая, что

$$\|f_1\|_{W_p^1(P)}\leqslant C\,|||\mu|||^{1/p}_{\partial_0P,\varphi,\sigma}.$$

Следовательно, в области $\widetilde{Q}=Q\cup P\cup\partial_0P$ определена функция g, совпадающая с f в Q, с f_1 в P и с μ на ∂_0P такая, что $\|g\|^p_{W_p^1(\widetilde{Q})}\leqslant$ $\leqslant C\left[|||\mu|||_{\partial_0P,\varphi^{2-n},\sigma}+[\mu]_{\partial_0P,\sigma}\right]$. Продолжая g четно на $G\backslash Q$, получаем искомое продолжение функции μ. Теорема 4.1 в случае $p>n-1$ доказана.

II. Случай $p\leqslant n-1$. Рассмотрение этого случая в значительной степени следует работе [3], поэтому мы только наметим доказательство.

Следующие две леммы доказываются так же, как соответствующие утверждения в [3] (см. лемму 11 и доказательство теоремы 8).

Лемма 4.1. *Пусть* $f\in W_p^1(Q)$, $p\leqslant n-1$, $f=0$ *при* $x_n=1$ *и при* $|x'|=1$. *Тогда*

$$\int\limits_Q\frac{|f(x)|^p}{|x|^p}dx+\int\limits_Q|\nabla f(x)|^p\,dx\sim\|f\|^p_{W_p^1(Q)}. \tag{4.13}$$

Замечание. Из леммы следует, что при доказательстве теоремы 4.1 в случае $p\leqslant n-1$ можно ограничиться функциями, обращающимися в нуль при $x\in Q\backslash K$, где K — конус $\{x=(x',\,x_n)\in Q\colon\,|x'|<x_n\}$.

Лемма 4.2. *При* $p\leqslant n-1$ *справедливо соотношение*

$$|||\mu|||_{\partial_0P,\zeta,\gamma}\sim\int\limits_{\partial_0P}\frac{|\mu(x)|^p}{\varphi^{p-1}(x_n)}\zeta(x_n)\,d\Sigma_x+\iint\limits_{\{x,y\in\partial_0P:\,y_n/2<x_n<2y_n\}}|\mu(x)-\mu(y)|^p\times$$

$$\times\gamma(x,y)\,r^{2-n-p}\,d\Sigma_x\,d\Sigma_y. \tag{4.14}$$

Пусть $z_i=3^{-i}$, $i=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,X_i=(3^{-i-1};\,3^{-i+1})$, и пусть $\delta_i\in$

$\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ — такие функции, что $0 \leqslant \delta_i \leqslant 1$, $\operatorname{supp} \delta_0 \subset (1/3;\ 1)$, $\operatorname{supp} \delta_i \subset X_i$, $i = 1, 2, \ldots,$

$$\left|\frac{d}{d\tau}\delta_i\right| \leqslant C3^i \tag{4.15}$$

и $\sum \delta_i(\tau) = 1$ для всех $\tau \in (0;\ 1)$. Из (4.2) следует, что $\varphi(x_n) \sim \varphi(3^{-i})$ при $x_n \in X_i$.

Пусть $f \in W_p^1(Q)$ и $f = 0$ в $Q \backslash K$. Положим $f_i = \delta_i f$. Тогда из леммы 4.1 и (4.15) следует

$$\|f\|^p_{W_p^1(Q)} \sim \sum_{i=0}^{\infty} \|f_i\|^p_{W_p^1(Q)}. \tag{4.16}$$

Если функция μ определена на $\partial_0 P$ и $\mu = 0$ при $x_n > 1/4$, то, положив $\mu_i = \delta_i \mu$, из леммы 4.2 и (4.15) имеем

$$|||\mu|||_{\partial_0 P, \zeta, \gamma} \sim \sum_{i=0}^{\infty} |||\mu_i|||_{\partial_0 P, \zeta, \gamma}. \tag{4.17}$$

Далее мы специально не оговариваем, что $\mu = 0$ при $x_n > 1/4$ и $f \in W_p^1(Q)$ обращается в нуль при $|x'| > x_n$ и $x_n > 1/4$.

Рассмотрим отображения

$$F_i\colon (x', x_n) \to (y', y_n), \quad y' = \frac{x'}{\varphi(x_n)}, \quad y_n = \frac{x_n}{\varphi(3^{-i})}. \tag{4.18}$$

Преобразование F_i отображает Q во внешность цилиндра D и $\partial_0 P$ на часть $\partial_0 D$.

Пусть $f \in W_p^1(G)$, $f_i = \delta_i f$, $h_i = f_i \circ F^{-1}$. Тогда

$$\|f_i\|^p_{W_p^1(Q)} \sim \varphi^{n-p}(3^{-i}) \left[\int_{\mathbf{R}^n \setminus D} |h_i(y)|^p\, dy + \right.$$
$$\left. + \int_{\mathbf{R}^n \setminus D} |\nabla h(y)|^p\, dy\right] = \varphi^{n-p}(3^{-i}) \|h_i\|^p_{W_p^1(\mathbf{R}^n \setminus D)}.$$

Пусть $\mu_i = f|_{\partial_0 P}$, $\nu_i = \mu_i \circ F_i^{-1}|_{\partial_0 D}$. Из (4.18) следует

$$|||\mu_i|||_{\partial_0 P, \zeta, \gamma} \sim \varphi^{n-p}(3^{-i})\, |||\nu_i|||_{\partial_0 D, \tilde{\gamma}} = \int_{\partial_0 D} |\nu_i(s)|^p\, d\Sigma_s +$$
$$+ \int_{\partial_0 D} \int_{\partial_0 D} \frac{|\nu_i(s) - \nu_i(t)|^p}{r^{n+p-2}}\, \tilde{\gamma}(s, t)\, d\Sigma_s\, d\Sigma_t, \tag{4.19}$$

где $r = |s - t|$, $\tilde{\gamma}(s,\ t) = [\log(2 + r)]^{1-n}$ при $p = n - 1$ и $\tilde{\gamma}(s,\ t) = 1$ при $p < n - 1$. Из [1] имеем

$$|||\nu_i|||^{1/p}_{\partial_0 G, \tilde{\gamma}} \leqslant C \|h_i\|_{W_p^1(\mathbf{R}^n \setminus D)}. \tag{4.20}$$

Из (4.16) — (4.20) вытекает оценка

$$|||\mu|||^{1/p}_{d_0 P, \zeta, \gamma} \leqslant C \|\mu\|_{TW_p^1(G)}. \tag{4.21}$$

Пусть μ — функция, определенная на $\partial_0 P$, такая, что $|||\mu|||_{{}_0 P, \zeta, \gamma} < \infty$. Рассмотрим систему шаров $\{B_j\}_{j=1}^N$ в $\mathbf{R}^{n-1}$ с центрами в точках $z_j' \in S$ такую, что множества $Z_j = B_j \cap S$ образуют покрытие S. Обозначим через σ_j функции из $C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$ такие, что $\operatorname{supp} \sigma_j \subset B_j$ и $\sum_{j=1}^{N} \sigma_j(x) = 1$ в некоторой окрестности S. Пусть δ_i и F_i — функции, определенные выше.

Полагаем $\mu_{ij}=\sigma_j\mu_i$, $\nu_{ij}=\mu_{ij}\circ F_i^{-1}$. Тогда $\operatorname{supp}\nu_{ij}\subset Z_j\times Y_i$, где

$$Y_i=\left(\frac{1}{3}\,\frac{3^{-i}}{\varphi(3^{-i})};\ 3\,\frac{3^{-i}}{\varphi(3^{-i})}\right).$$

Справедливо соотношение

$$|||\nu_i|||_{\partial_0 D,\widetilde{\gamma}}\sim\sum_{j=1}^{N}|||\nu_{ij}|||_{\partial_0 D,\widetilde{\gamma}}. \tag{4.22}$$

Пусть T_{ij} — диффеоморфизм, определенный в некоторой окрестности U множества $B_j\times Y_i$, отображающий $U\cap\partial_0 D$ на часть плоскости $\mathbf{R}^{n-1}=\{u=(u_1,\ldots,u_n)\in\mathbf{R}^n\colon u_1=0\}$ и $U\cap(\mathbf{R}^n\setminus D)$ в полупространство $\mathbf{R}^n_+=\{u=(u_1,\ldots,u_n)\in\mathbf{R}^n\colon u_1>0\}$: причем, если $s=(s',s_n)\in Z_j\times Y_i$ и $s=T_{ij}^{-1}(u)$, $u=(u_1,u'',u_n)$, где $u''=(0,u_2,\ldots,u_{n-1},0)$, то $|u''|<1$ и $u_n\in Y_i$. Положим $\eta(u')=\nu_{ij}\circ T_{ij}^{-1}(u')$, где $u'=(0,u_2,\ldots,u_n)$. Определяем продолжение η в полупространство $\mathbf{R}^n_+$ следующим образом:

$$H_{ij}(u)=v(u_1)\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\eta(u'+u_1z')K_{n-1}(z')\,dz',\quad p<n-1,$$

$$H_{ij}(u)=v(u_1)\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\eta(u'+u_1z')K_{n-1}(z')\frac{\log 2dz'}{\log(2+u_1)},\quad p=n-1,$$

где $v\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ — некоторая функция, такая, что $\operatorname{supp}v\subset[-1/2;\,1/2]$ и $v(0)=1$. Оценка нормы $\|H_{ij}\|_{W_p^1(\mathbf{R}^n_+)}$ через

$$|||\eta|||_{\mathbf{R}^{n-1},\widetilde{\gamma}}=\left\{\int_{\mathbf{R}^{n-1}}|\eta(u')|^p\,du'+\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\frac{|\eta(u')-\eta(v')|^p}{|u'-v'|^{n+p-2}}\widetilde{\gamma}(u',v')\,du'\,dv'\right\}^{1/p},$$

где $\widetilde{\gamma}(u',v')=1$ при $p<n-1$ и $\widetilde{\gamma}(u',v')=[\log(2+|u'-v'|)]^{1-n}$ при $p=n-1$, получается хорошо известными стандартными рассуждениями (см., например, [8]), причем практически одинаковыми для обоих случаев $p<n-1$ и $p=n-1$.

Положим $h_{ij}=H_{ij}\circ T_{ij}$. Тогда $h_{ij}|_{\partial_0 D}=\nu_{ij}$.

Полагаем $h_i=\sum_{j=1}^{N}h_{ij}$. Имеем $h_i|_{\partial_0 D}=\nu_i$ и оценку

$$\|h_i\|^p_{W_p^1(\mathbf{R}^n\setminus D)}\leqslant C\,|||\nu_i|||_{\partial_0 D,\widetilde{\gamma}}.$$

Если теперь положить $f_i=h_i\circ F_i$, то $f_i|_{\partial_0 P}=\mu_i$, и из последней оценки следует

$$\|f_i\|^p_{W_p^1(Q)}\leqslant C\,|||\mu_i|||_{\partial_0 P,\zeta,\gamma}. \tag{4.23}$$

Функция $f=\sum f_i$ совпадает с μ на $\partial_0 P$ и в силу (4.16), (4.17) из (4.23) получаем

$$\|f\|^p_{W_p^1(Q)}\leqslant C\,|||\mu|||_{\partial_0 D,\zeta,\gamma}.$$

Функция, определенная в G, строится так же, как и в случае $p>n-1$. Таким образом, имеем функцию $f\in W_p^1(G)$, для которой справедливо неравенство

$$\|f\|^p_{W_p^1(G)}\leqslant C\,|||\mu|||_{\partial_0 P,\zeta,\gamma},$$

что вместе с (4.21) дает утверждение II в теореме 4.1. Теорема 4.1 доказана полностью.

§ 5. Область, заключенная между гиперповерхностями, касающимися в точке

Рассмотрим область $G=\{x=(x', x_n)\in\mathbf{R}^n: |x'|<1, \quad 0<x_n<<\varphi(|x'|)\}$, где функция φ удовлетворяет условиям (1.1), (1.2). Для упрощения рассуждений считаем, что φ дифференцируема на $(0; 1)$, $\varphi'(\tau)$ возрастает и $\varphi'(1)=\lim\limits_{\tau\to 1-0}\varphi'(\tau)<1$. Используя результаты Гальярдо [1], можно, не теряя общности, рассматривать вопрос о следах функций из $W_p^1(G)$, обращающихся в нуль в окрестности части ∂G, соответствующей $|x'|=1$. Ниже мы, специально не оговаривая, считаем, что рассматриваемые функции из $W_p^1(G)$, и функции, определенные на ∂G, обращаются в нуль в окрестности $\{x=(x', x_n)\in\partial G: |x'|=1\}$.

Положим $S_0=\{x=(x', x_n)\in\mathbf{R}^n: |x'|<1, x_n=0\}$, $S_1=\{x=(x', x_n)\in\in\mathbf{R}^n: |x'|<1, x_n=\varphi(|x'|)\}$. Обозначим

$$\varkappa(x)=\begin{cases}(x', \varphi(|x'|)), & \text{если} \quad x=(x', 0)\in S_0,\\ (x', 0), & \text{если} \quad x=(x', x_n)\in S_1.\end{cases}$$

Через $\sigma(x, y)$ в этом параграфе обозначена функция $\chi(|x-y|/e(x', y'))$, где $e(x', y')=\min\{\varphi(|x'|), \varphi(|y'|)\}$. Полагаем

$$\langle\mu\rangle_{\partial G}=\left\{\int\limits_{\partial G}|\mu(x)|^p\varphi(|x'|)\,d\Sigma_x+\int\limits_{\partial G}\int\limits_{\partial G}\frac{|\mu(x)-\mu(y)|^p}{r^{n+p-2}}\sigma(x, y)\,d\Sigma_x\,d\Sigma_y+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{\partial G}\frac{|\mu(x)-\mu(\varkappa(x))|^p}{\varphi^{p-1}(|x'|)}d\Sigma_x\right\}^{1/p}, \tag{5.1}$$

где $r=|x-y|$.

Теорема 5.1. *Справедливо соотношение* $\|\mu\|_{TW_p^1(G)}\sim\langle\mu\rangle_{\partial G}$.

Доказательство. Пусть $f\in W_p^1(G)$ и $\mu=f|_{\partial G}$. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\partial G}|\mu(x)|^p\varphi(|x'|)\,d\Sigma_x=\int\limits_{S_0}|\mu(x)|^p\varphi(|x'|)\,d\Sigma_x+\int\limits_{S_1}|\mu(x)|^p\varphi(|x'|)\,d\Sigma_x.$$

Для $\mu(x', 0)=\mu|_{S_0}$ оценка

$$\int\limits_B|\mu(x', 0)|^p\varphi(|x'|)\,dx'\leqslant C\left[\int\limits_G|f(x)|^p\,dx+\int\limits_G|D_nf(x)|^p\,dx\right] \tag{5.2}$$

следует из неравенства

$$|\mu(x', 0)|^p\leqslant C\left[|f(x', x_n)|^p+\left(\int\limits_0^{x_n}|D_nf(x', s)|\,ds\right)^p\right]$$

и неравенства Гельдера. Для оценки интеграла по S_1 рассмотрим отображение

$$\Lambda:\ (x', x_n)\to(y', y_n),\ y'=x',\ y_n=\varphi(|x'|)-x_n, \tag{5.3}$$

которое отображает гомеоморфно G на себя, S_1 на S_0 и S_0 на S_1. Положим $g=f\circ\Lambda^{-1}$, $\nu=\mu\circ\Lambda^{-1}$. Тогда

$$\|g\|_{W_p^1(G)}\sim\|f\|_{W_p^1(G)},$$
$$\int\limits_B|\nu(y', 0)|^p\varphi(|y'|\,dy'\leqslant C\|g\|^p_{W_p^1(G)}. \tag{5.4}$$

Так как
$$\int_B |\nu(y',0)|^p \varphi(|y'|)\,dy' \sim \int_{S_1} |\mu(x)|^p \varphi(|x'|)\,d\Sigma_x,$$
то из (5.4) и (5.2) следует оценка
$$\left\{\int_{\partial G} |\mu(x)|^p \varphi(|x'|\,d\Sigma_x\right\}^{1/p} \leqslant C\|f\|_{W_p^1(G)}.$$

Третий интеграл в правой части (5.1) представим в виде суммы интегралов по S_0 и S_1. Интеграл по S_1 можно, используя преобразование (5.3), рассмотреть так же, как интеграл по S_0. Для $x \in S_0$ имеем
$$\mu(x) - \mu(\varkappa(x)) = \int_0^{\varphi(|x'|)} D_n f(x', s)ds.$$

Отсюда, используя неравенство Гельдера, получаем
$$\int_{S_0} \frac{|\mu(x)-\mu(\varkappa(x))|^p}{\varphi^{p-1}(|x'|)}\,d\Sigma_x \leqslant \int_G |D_n f(x)|^p\,dx.$$

Оценим второй интеграл в правой части (5.1). Из определения $\sigma(x, y)$ следует, что он равен сумме
$$\int_{S_0}\int_{S_0} \frac{|\mu(x)-\mu(y)|^p}{r^{n+p-2}}\sigma(x,y)\,d\Sigma_x\,d\Sigma_y + \int_{S_1}\int_{S_1} \frac{|\mu(x)-\mu(y)|^p}{r^{n+p-2}}\sigma(x,y)\,d\Sigma_x\,d\Sigma_y.$$

Второй интеграл, используя отображение (5.3), можно свести к первому. Обозначим $\delta = 1 - \varphi'(1)$. Тогда, если $z_s' = y' + s(x'-y')$, $s \in (0, 1)$, то при $|x'-y'| < e(x', y')$
$$e(x', y') \leqslant \frac{1}{\delta}\, e(x', z_s'). \tag{5.5}$$

Из очевидного неравенства
$$|\mu(x', 0) - \mu(y', 0)| \leqslant \int_0^{\delta|x'-y'|} |D_n f(x', s)|\,ds +$$
$$+ \int_0^{\delta|x'-y'|} |D_n f(y', s)|\,ds + \int_0^1 |\nabla' f(z_s', \delta|x'-y'|)|ds\cdot|x'-y'|$$
вытекает
$$\int_{S_0}\int_{S_0} \frac{|\mu(x)-\mu(y)|^p}{r^{n+p-2}}\sigma(x,y)\,d\Sigma_x\,d\Sigma_y \leqslant$$
$$\leqslant C\left[\int_B\int_B \left(\frac{1}{|x'-y'|}\int_0^{|x'-y'|} |D_n f(x', s)|\,ds\right)^p \frac{\sigma(x', y')\,dx'\,dy'}{|x'-y'|^{n-2}} +\right.$$
$$+ \int_B\int_B \left(\frac{1}{|x'-y'|}\int_0^{|x'-y'|} |D_n f(y', s)|\,ds\right)^p \frac{\sigma(x', y')\,dx'\,dy'}{|x'-y'|^{n-2}} +$$
$$\left.+ \int_B\int_B \left(\int_0^1 |\nabla' f(z_s', \delta|x'-y'|)|\,ds\right)^p \frac{\sigma(x', y')\,dx'\,dy'}{|x'-y'|^{n-2}}\right] = C\,[\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3].$$

Интеграл $\mathscr{E}_2$ оценивается так же, как и $\mathscr{E}_1$. Оценим $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_3$. Переходя к полярным координатам по переменной y', $y' = x' + \rho\omega'$ и используя

(1.3), получаем

$$\mathscr{E}_1 \leqslant \int\limits_B \int\limits_{S^{n-2}} \int\limits_0^{(|x'|)} |D_n f(x', \rho)|^p \, d\rho \, dS^{n-2} \, dx' \leqslant \omega_{n-2} \int\limits_G |D_n f(x)|^p \, dx.$$

Для оценки интеграла $\mathscr{E}_3$ применим сначала обобщенное неравенство Минковского, затем сделаем замену переменных $z' = y' + s(x' - y')$ $(y' \to z')$. Используя (5.5), получаем неравенство

$$\mathscr{E}_3 \leqslant C \left[\int\limits_0^1 \left\{ \int\limits_B \int\limits_{Q(z')} \left| \nabla' f\left(z', \frac{\delta |x' - z'|}{1 - s}\right)\right|^p |x' - z'|^{2-n} \frac{dx' \, dz'}{1 - s} \right\}^{1/p} ds \right]^p,$$

где $Q(z') = \{x' \colon |x' - z'| < \delta^{-1}(1 - s)\varphi(|z'|)\}$. Переходя к полярным координатам $x' = z' + \rho\omega'$ и делая замену переменной $\rho = (1 - s)\sigma$, имеем

$$\mathscr{E}_3 \leqslant C \int\limits_B \int\limits_0^{\varphi(|z'|)} |\nabla' f(z', \sigma)|^p \, d\sigma \, dz' \leqslant C \int\limits_G |\nabla f(x)|^p \, dx.$$

Из оценок для интегралов в правой части (5.1) вытекает оценка

$$\langle \mu \rangle_{\partial G} \leqslant C \|\mu\|_{TW_p^1(G)}. \tag{5.6}$$

Пусть теперь задана функция μ, определенная на ∂G и такая, что $\langle \mu \rangle_{\partial G} < \infty$. Будем строить продолжение μ на G. Построим вначале продолжение $\mu|_{S_0}$ на G. Для краткости будем писать $\mu(x')$ вместо $\mu(x', 0) = \mu|_{S_0}(x)$.

Пусть $a(\rho)$ — решение уравнения $a(\rho) = \varphi(\rho - a(\rho))$, $0 < \rho < 1$. Тогда, если $y' \in B$ и $|x' - y'| < \delta\varphi(|x'|)$, то

$$|y' - x'| \leqslant a(|x'|) \leqslant e(x', y'). \tag{5.7}$$

Полагаем

$$f_0(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} \mu(x' + \delta x_n z') K_{n-1}(z') \, dz'. \tag{5.8}$$

Функция $f_0(x)$ определена в G. Оценим норму $\|f_0\|_{W_p^1(G)}$. Вычисляя $D_j f_0$, $1 \leqslant j \leqslant n$, видим, что для оценки $\|\nabla f_0\|_{L_p(G)}$ достаточно оценить интеграл

$$\mathscr{D} = \left\{ \int\limits_B \int\limits_0^{\varphi(|x'|)} \left[\int\limits_B \frac{|\mu(x' + \delta x_n z') - \mu(x')|}{\delta x_n} \, dz' \right]^p dx_n \, dx' \right\}^{1/p}.$$

Проводя стандартные оценки (см., например, [8]), приходим к неравенству

$$\mathscr{D} \leqslant C \left\{ \int\limits_B \int\limits_{B_\delta(x)} \frac{|\mu(y') - \mu(x')|^p}{|x' - y'|^{n+p-2}} \, dy' \, dx' \right\}^{1/p},$$

где $B_\delta(x) = \{y' \in \mathbf{R}^{n-1} \colon |y' - x'| < \delta\}$. Отсюда и из (5.7) следует

$$\mathscr{D} \leqslant C \left\{ \int\limits_B \int\limits_B \frac{|\mu(x') - \mu(y')|^p}{|x' - y'|^{n+p-2}} \sigma(x', y') \, dy' \, dx' \right\}^{1/p}.$$

Из этого неравенства вытекает

$$\|\nabla f_0\|_{L_p(G)} \leqslant C \langle \mu \rangle_{\partial G}. \tag{5.9}$$

Запишем f_0 в виде

$$f_0(x) = \mu(x') + \delta x_n \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\mu(x' + \delta x_n z') - \mu(x')}{\delta x_n} K_{n-1}(z')\, dz'.$$

Отсюда (см. оценку для интеграла $\mathscr{D}$)

$$\|f_0\|_{L_p(G)} \leqslant C \langle\mu\rangle_{\partial G}.$$

Из (5.9) и последнего неравенства следует оценка $\|f_0\|_{W_p^1(G)}$ через $\langle\mu\rangle_{\partial G}$.

Рассмотрим $\mu|_{S_1} = \mu(x', \varphi(|x'|))$, $x' \in B$. Полагаем

$$f_1(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \mu(x' + \delta(\varphi(|x'|) - x_n) z', \quad \varphi(|x' + \delta(\varphi(|x'|) - x_n) z'|)) K_{n-1}(z')\, dz'. \tag{5.10}$$

Функция f_1 определена в G и $f|_{S_1} = \mu$. Пусть $g = f_1 \circ \Lambda^{-1}$, $\nu = \mu \circ \Lambda^{-1}$, где Λ — отображение (5.3). Тогда

$$\int\limits_{S_1} |\mu(x)|^p \varphi(|x'|)\, d\Sigma_x \sim \int\limits_{S_0} |\nu(y)| \varphi(|y'|)\, d\Sigma_y,$$

$$\int\limits_{\partial G} \frac{|\mu(x) - \mu(\varkappa(x))|^p}{\varphi^{p-1}(|x'|)} d\Sigma_x \sim \int\limits_{\partial G} \frac{|\nu(y) - \nu(\varkappa(y))|^p}{\varphi^{p-1}(|y'|)} d\Sigma_y,$$

$$\int\limits_{S_0}\int\limits_{S_0} \frac{|\nu(x) - \nu(y)|^p}{|x' - y'|^{n+p-2}} \chi\left(\frac{\delta_1 |x' - y'|}{e(x', y')}\right) d\Sigma_x\, d\Sigma_y \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{S_1}\int\limits_{S_1} \frac{|\mu(x) - \mu(y)|^p}{r^{n+p-2}} \sigma(x', y')\, d\Sigma_x\, d\Sigma_y,$$

где $\delta_1 = \sqrt{1 + [\varphi'(1)]^2}$. Последнее неравенство следует из того, что $\chi(\delta_1 |x' - y'|/e(x', y')) \leqslant \sigma(x', y')$. Имеем

$$f_1 \circ \Lambda(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \nu(y' + \delta y_n z') K_{n-1}(z')\, dz'.$$

Далее оценка $\|\nabla(f_1 \circ \Lambda)\|_{W_p^1(G)}$ через

$$\int\limits_{S_0} |\nu(y)|^p \varphi(|y'|)\, d\Sigma_y + \int\limits_{\partial G} \frac{|\nu(y - \nu(\varkappa(y))|^p}{\varphi^{p-1}(|y'|)} d\Sigma_y +$$

$$+ \int\limits_{S_0}\int\limits_{S_0} \frac{|\nu(x) - \nu(y)|^p}{r^{n+p-2}} \chi\left(\frac{\delta_1 |x' - y'|}{e(x', y')}\right) d\Sigma_x\, d\Sigma_y$$

получается так же, как и оценка $\|\nabla f_0\|_{W_p^1(G)}$ через $\langle\mu\rangle_{\partial G}$. Оценку нормы f_1 в $L_p(G)$ можно получить, используя отображение (5.3) так же, как и оценку нормы f_0 в $L_p(G)$. Таким образом, имеем две функции из $W_p^1(G)$ — f_0 и f_1; $f_0|_{S_0} = \mu$, $f_1|_{S_1} = \mu$. Функцию, совпадающую с μ на ∂G, определяем следующим образом:

$$f(x) = \frac{x_n}{\varphi(|x'|)} f_1(x) + \left[1 - \frac{x_n}{\varphi(|x'|)}\right] f_0(x).$$

Ясно, что

$$\|f\|_{L_p(G)} \leqslant \|f_0\|_{L_p(G)} + \|f_1\|_{L_p(G)}.$$

Из (5.8) и (5.10) следует, что для оценки $D_j f$, $1 \leqslant j \leqslant n$, достаточно иметь оценку нормы в $L_p(G)$ для функции $|f_1(x) - f_0(x)|/\varphi(|x'|)$. Пусть $\mu|_{S_0}(x) = \mu(x', 0)$, $\mu|_{S_1}(x) = \mu(x', \varphi(|x'|))$. Рассмотрим разность $f_1(x) - f_0(x)$ в точке $x = (x', x_n) \in G$. Из (5.8), (5.10) вытекает, что необходимо оценить два интеграла

$$\mathscr{B}_1 = \int\limits_B \left\{ \int\limits_B \int\limits_0^{\varphi(|x'|)} \frac{|\mu(w', \varphi(|w'|)) - \mu(w', 0)|^p}{\varphi^p(|x'|)} dx_n\, dx' \right\}^{1/p} dz',$$

$$\mathscr{B}_2 = \int\limits_B \left\{ \int\limits_B \int\limits_0^{\varphi(|x'|)} \frac{|\mu(w', 0) - \mu(x' - \delta x_n z', 0)|^p}{\varphi^p(|x'|)} dx_n\, dx' \right\}^{1/p} dz',$$

где обозначено $w' = x' + \delta(\varphi(|x'|) - x_n) z'$.

В интеграле $\mathscr{B}_1$ сделаем замену переменной $y_n = \varphi(|x'|) - x_n$. После этого поменяем порядок интегрирования по y_n и x' и сделаем замену переменных $y' = x' + \delta y_n z'$ $(y' \to z')$. Получаем

$$\mathscr{B}_1 = \int\limits_B \left\{ \int\limits_0^{\varphi(1)} \int\limits_{\{\varphi^{-1}(y_n) < |y' - \delta y_n z'| < 1\}} \varphi^{-p}(|y' - \delta y_n z'|) \times \right.$$
$$\left. \times |\mu(y', \varphi(|y'|)) - \mu(y', 0)|^p dy'\, dy_n \right\}^{1/p} dz'.$$

Так как $2\delta\varphi'(1) < 1$, то $\varphi^{-1}(y_n/2) < \varphi^{-1}(y_n) - \delta y_n$. Поскольку $\mu(y', 0) = 0$, $\mu(y', \varphi(|y'|)) = 0$ в окрестности $\{|y'| = 1\}$, то из последнего равенства имеем

$$\mathscr{B}_1 \leqslant \int\limits_B \left\{ \int\limits_0^{\varphi(1)} \int\limits_{\{\varphi^{-1}(y_n/2) < |y'| < 1\}} \varphi^{-p}(|y' - \delta y_n z'|) \times \right.$$
$$\left. \times |\mu(y', \varphi(|y'|)) - \mu(y', 0)|^p dy'\, dy_n \right\}^{1/p} dz'.$$

В силу $\varphi(|y' - y_n z'| \geqslant \varphi(|y'|)/2$, после замены переменной $y_n = 2t_n$ получаем

$$\mathscr{B}_1 \leqslant C \int\limits_B \left\{ \int\limits_B \int\limits_0^{\varphi(|y'|)} |\mu(y', \varphi(|y'|)) - \mu(y', 0)|^p \varphi^{-p}(|y'|)\, dt_n\, dy' \right\}^{1/p} dz' \leqslant$$
$$\leqslant C \left\{ \int\limits_{\partial G} \frac{|\mu(\varkappa(y)) - \mu(y)|^p}{\varphi^{p-1}(|y'|)} d\Sigma_y \right\}^{1/p}.$$

Для $\mathscr{B}_2$ имеем очевидное неравенство

$$\mathscr{B}_2 \leqslant C \left[\int\limits_B \left\{ \int\limits_B \int\limits_0^{\varphi(|x'|)} |\mu(x' + \delta(\varphi(|x'|) - x_n) z', 0) - \right.\right.$$
$$\left. - \mu(x', 0)|^p \varphi^{-p}(|x'|)\, dx_n\, dx' \right\}^{1/p} dz' +$$
$$\left. + \int\limits_B \left\{ \int\limits_B \int\limits_0^{\varphi(|x'|)} |\mu(x' - \delta x_n z', \ 0) - \mu(x', \ 0)^p \varphi^{-p}(|x'|)\, dx_n\, dx' \right\}^{1/p} dz' \right].$$

В первом интеграле делаем замену $y_n = \varphi(|x'|) - x_n$, во втором $y' = -z'$. Затем, переобозначив $y_n \to x_n$ и $y' \to z'$, получаем

$$\mathscr{B}_2 \leqslant C \int\limits_B \left\{ \int\limits_B \int\limits_0^{\varphi(|x'|)} |\mu(x' + \delta x_n z', 0) - \mu(x', 0)|^p \varphi^{-p}(|x'|)\, dx_n\, dx' \right\}^{1/p}.$$

Производя замену $y_n=\delta x_n$, затем замену $y'=x'+x_nz'$ $(z'\to y')$, применяя неравенство Гельдера и полагая $B_{\delta\varphi}(x)=\{y'\colon |y'-x'|<\delta\varphi(|x'|)\}$, имеем

$$\mathscr{B}_2\leqslant C\left\{\int\limits_B\int\limits_0^{\delta\varphi(|x'|)}\int\limits_{B_{\delta\varphi}(x)}\frac{|\mu(y')-\mu(x')|^p}{\varphi(|x'|)}|y'-x'|^{-(n+p-2)}dy'\,dx_n\,dx'\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant C\left\{\int\limits_B\int\limits_{B_{\delta\varphi}(x)}\frac{|\mu(y')-\mu(x')|^p}{|x'-y'|^{n+p-2}}\,dy'\,dx'\right\}^{1/p}\leqslant C\langle\mu\rangle_{\partial G}.$$

Из оценок $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ следует оценка

$$\|f\|_{W_p^1(G)}\leqslant C\langle\mu\rangle_{\partial G}.$$

Отсюда и из (5.6) вытекает утверждение теоремы 5.1.

§ 6. Два случая гребня

В этом параграфе мы рассмотрим гребень, образованный двумя $(n-1)$-мерными поверхностями в $\mathbf{R}^n$, касающимися по отрезку, и гребень — декартово произведение $(n-1)$-мерного пика на отрезок. Определим эти области. В первом случае это будет область $G_1=\{x=(x'',\ x_{n-1},\ x_n)\in\mathbf{R}^n\colon |x''|<1,\ 0<x_{n-1}<\varphi(|x''|),\ 0<x_n<1\}$, во втором — $G_2=\{x=(x'',x_{n-1},\ x_n)\in\mathbf{R}^n\colon |x''|<\varphi(x_{n-1}),\ 0<x_{n-1}<1, 0<x_n<1\}$. Функция φ удовлетворяет условиям (1.1), (1.2), и для упрощения рассуждений мы предположим еще, что φ дифференцируема на $(0;\ 1)$, $\varphi'(\tau)$ возрастает и $\varphi'(1)=\lim\limits_{\tau\to1-0}\varphi'(\tau)<1$.

Границу области G_1 представим в виде объединения $\partial G_1=S_0\cup S_1\cup\Gamma_0\cup\Gamma_1$, где для $i=0,\ 1$

$$S_i=\{x\in\mathbf{R}^n\colon |x''|<1,\ x_{n-1}=i\varphi(|x''|),\ 0<x_n<1\},$$

$$\Gamma_i=\{x\in\mathbf{R}^n\colon x''|<1,\ 0<x_{n-1}<\varphi(|x''|),\ x_n=i\}.$$

Через $\varkappa$ обозначим отображение

$$\varkappa(x)=\begin{cases}(x'',\ \varphi(|x''|),\ x_n), & \text{если}\quad x=(x'',\ 0,\ x_n)\in S_0,\\ (x'',\ 0,\ x_n), & \text{если}\quad x=(x'',\ \varphi(|x''|),\ x_n)\in S_1.\end{cases}$$

Для функции μ, определенной на ∂G_1, полагаем

$$\langle\mu\rangle_{\partial G_1}=\|\mu\|_{\partial G_1,\xi}+\{\mu\}_{\partial G_1,\sigma}^{1/p}+\left\{\int\limits_{S_0\cup S_1}\frac{|\mu\circ\varkappa(x)-\mu(x)|^p}{\varphi^{p-1}(|x''|)}\,d\Sigma_x\right\}^{1/p},\tag{6.1}$$

где $\xi(x)=\varphi(|x''|)$ при $x=(x'',\ x_{n-1},\ x_n)\in S_0\cup S_1$ и $\xi(x)=1$ при $x\in\Gamma_0\cup\Gamma_1$, $\sigma(x,\ y)=\chi(|x-y|/e(x'',\ y''))$.

Теорема 6.1. *Справедливо соотношение* $\|\mu\|_{TW_p^1(G_1)}\sim\langle\mu\rangle_{\partial G_1}$.

Область G_2 при $n=3$ есть гребень, рассматриваемый в теореме 6.1. Поэтому при изучении следов функций из пространств Соболева в случае области G_2 можно считать, что $n\geqslant4$.

Теорема 6.2. *Пусть $n\geqslant4$. Тогда справедливо соотношение*

$$\|\mu\|_{TW_p^1(G_2)}\sim\langle\mu\rangle_{\partial G_2}=\left\{\int\limits_{\partial G_2}|\mu(x)|^p\,\varphi(x_{n-1})\,d\Sigma_x+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\partial G_2}\int\limits_{\partial G_2}\frac{|\mu(x)-\mu(y)|^p}{r^{n+p-2}}\,\sigma_1(x,\ y)\,d\Sigma_x\,d\Sigma_y\right\}^{1/p},$$

где $r=|x-y|$, $\sigma_1(x,\ y)=\chi(|x_{n-1}-y_{n-1}|/E(x_{n-1},\ y_{n-1}))$.

Замечание. Положим $\partial_0 G_2 = \{x = (x'', x_{n-1}, x_n) \in \partial G_2 \colon 0 < x_n < 1\}$. Доказательство соотношения $\|\mu\|_{TW_p^1(G_2)} \sim \langle\mu\rangle_{\partial_0 G_2}$ не содержит принципиально новых моментов по сравнению с доказательством теоремы 3.1. Характеристика следов на всей границе ∂G_2, включающей части $\{x = (x'', x_{n-1}, x_n) \in \partial G_2 \colon |x''| < \varphi(x_{n-1}),\ 0 < x_{n-1} < 1,\ x_n = i\}$, $i = 0, 1$, получается рассуждениями, аналогичными проведенным ниже при доказательстве теоремы 6.1. Поэтому мы ограничиваемся доказательством теоремы 6.1.

Доказательство теоремы 6.1. Используя результаты [1], можно показать, что в теореме 6.1 достаточно получить характеристику следов функций, обращающихся в нуль при $\varepsilon < |x''| < 1$, где $\varepsilon \in (0;\ 1)$ — некоторое фиксированное число. Далее мы считаем это условие выполненным и специально не оговариваем.

Пусть $f \in W_p^1(G_1)$ и $\mu = f|_{\partial G_1}$. Оценим интегралы в (6.1) через норму f.

Оценка интегралов

$$\int\limits_{S_i} |\mu(x)|^p \varphi(|x''|)\, d\Sigma_x, \qquad i = 0, 1,$$

получается так же, как в § 5, оценка первого интеграла в правой части (5.1). Оценка интеграла от $|\mu(x)|^p$ по Γ_0, Γ_1 следует из неравенства

$$|\mu(x'', x_{n-1}, i)|^p \leqslant C \left[\int\limits_0^1 |f(x)|^p\, dx_n + \int\limits_0^1 |D_n f)x)|^p\, dx_n \right],$$

где $i = 0$ при $x \in \Gamma_0$ и $i = 1$ при $x \in \Gamma_1$. Таким образом, имеем оценку первого интеграла в (6.1).

Оценка третьего интеграла в (6.1) выводится так же, как и оценка третьего интеграла в (5.1). Нам осталось получить оценку для $\{\mu\}_{\partial G_1, \sigma}$.

Из определения G_1 и σ следует, что $\{\mu\}_{\partial G_1, \sigma}$ мажорируется суммой интегралов по $\Gamma_0 \times \Gamma_0$, $S_0 \times S_0$, $\Gamma_0 \times S_0^-$, $\Gamma_0 \times S_1^-$, $S_1 \times S_1$, $\Gamma_1 \times S_0^+$, $\Gamma_1 \times S_1^+$, $\Gamma_1 \times \Gamma_1$, где для $i = 0, 1$

$$S_i^- = \{x \in S_i \colon 0 < x_n < \varphi(|x''|)\}, \quad S_i^+ = \{x \in S_i \colon 1 - \varphi(|x''|) < x_n < 1\}.$$

Величина $\{\mu\}_{S_0 \cup S_1, \sigma}$ оценивается по той же схеме, что и второй интеграл в (5.1). Мы выведем оценку для интегралов по $\Gamma_0 \times \Gamma_0$ и $\Gamma_0 \times S_0^-$. Для интегралов по $\Gamma_1 \times \Gamma_1$, $\Gamma_0 \times S_1^-$, $\Gamma_1 \times S_0^+$, $\Gamma_1 \times S_1^+$ оценка получается либо точно так же, либо вывод оценок сводится к рассматриваемому случаю с помощью отображения

$$(x'', x_{n-1}, x_n) \to (y'', y_{n-1}, y_n),\ y'' = x'',\ y_{n-1} = \varphi(|x''|) - x_{n-1},\ y_n = x_n.$$

Рассмотрим отдельно случай $n = 3$. Область G_1 в этом случае имеет вид $\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \colon |x_1| < 1,\ 0 < x_2 < \varphi(|x_1|),\ 0 < x_n \leqslant 1\}$. Положим

$$\Gamma_\varphi = \{x \in \mathbf{R}^3 \colon |x_1| < 1,\ 0 < x_2 < \varphi(|x_1|),\ x_3 = \varphi(|x_1|)\}.$$

Объединение $\Gamma_0 \cup S_0^- \cup S_1^- \cup \Gamma_\varphi$ есть часть границы области, являющейся объединением двух пиков. Пусть $\mathscr{P}_+$ — пик, соответствующий $x_1 > 0$, а $\mathscr{P}_- - x_1 < 0$. Очевидно, что пики $\mathscr{P}_\pm$ билипшицево эквивалентны пику вида (2.10). Из теоремы 3.1 вытекает оценка для интегралов по $\Gamma_0 \times \Gamma_0$, $\Gamma_0 \times S_0^-$, $\Gamma_0 \times S_1^-$. Необходимость рассматривать раздельно случаи $n = 3$ и $n > 3$ возникает оттого, что появляющийся в доказательстве интеграл

$$\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{d\sigma}{(1+\sigma^2)^{(n-2)/2}}$$

при $n=3$ расходится. Считаем далее $n \geqslant 4$.

Пусть $x=(x'', x_{n-1}, 0)$, $y=(y'', y_{n-1}, 0) \in \Gamma_0$. Тогда

$$|\mu(x)-\mu(y)|^p \leqslant C\left[\left(\int\limits_0^{|x''-y''|} |D_n f(x'', x_{n-1}, \tau)|\, d\tau\right)^p + \right.$$

$$+\left(\int\limits_0^{|x''-y''|} |D_n f(x'', x_{n-1}, \tau)|\, d\tau\right)^p +$$

$$+\left\{\left(\int\limits_0^1 |\nabla'' f(y''+\tau(x''-y''), x_{n-1}, |x''-y''|)|\, d\tau\right)^p + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_0^1 |\nabla'' f(x''+\tau(y''-x''), y_{n-1}, |x''-y''|)|\, d\tau\right)^p\right\} |x''-y''| +$$

$$+\left(\int\limits_{[x_{n-1}; y_{n-1}]} |D_{n-1} f(x'', \tau, |x''-y''|)|\, d\tau\right)^p +$$

$$\left. +\left(\int\limits_{[x_{n-1}; y_{n-1}]} |D_{n-1} f(y'', \tau, |x''-y''|)|\, d\tau\right)^p\right]. \tag{6.2}$$

Достаточно получить оценки для интегралов

$$A_1 = \int\limits_{B^{n-2}} \int\limits_{B^{n-2}} \int\limits_0^{\varphi(|x''|)} \int\limits_0^{\varphi(|x''|)} \left(\frac{1}{|x''-y''|} \int\limits_0^{|x''-y''|} |D_n f(x', \tau)|\, d\tau\right)^p \times$$

$$\times \sigma(x, y)\, |x-y|^{2-n}\, dy_{n-1}\, dx_{n-1}\, dy''\, dx'',$$

$$A_2 = \int\limits_{\Gamma_0} \int\limits_{\Gamma_0} \left(\int\limits_0^1 |\nabla'' f(y''+\tau(x''-y''), x_{n-1}, |x''-y''|)|\, d\tau\right)^p \times$$

$$\times \sigma(x, y)\, |x'-y'|^{2-n}\, dx'\, dy',$$

$$A_3 = \int\limits_{\Gamma_0} \int\limits_{\Gamma_0} \left(\frac{1}{|x_{n-1}-y_{n-1}|} \int\limits_{[x_{n-1}; y_{n-1}]} |x'-y'|^{2-n} |D_{n-1} f(x'', \tau, |x''-y''|)|\, d\tau\right)^p dx'\, dy'.$$

Оценки для остальных интегралов, получающихся из (6.2), выводятся аналогично.

Оценим A_1. Положим $Q(x)=\{y'' \in B^{n-2}\colon\ |x''-y''| < \varphi(|x''|)\}$. В силу того, что

$$\sigma(x, y) \leqslant \chi(|x''-y''|/e(x'', y'')), \tag{6.3}$$

$$\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{dy_n}{[(y_{n-1}-x_{n-1})^2+|x''-y''|^2]^{(n-2)/2}} \leqslant \frac{C}{|x''-y''|^{n-3}}, \tag{6.4}$$

имеем

$$A_1 \leqslant C \int\limits_{B^{n-2}} \int\limits_{Q(x)} \int\limits_0^{\varphi(|x''|)} |x''-y''|^{3-n} \left(\frac{1}{|x''-y''|} \int\limits_0^{|x''-y''|} |D_n f(x', \tau)|\, d\tau\right)^p \times$$

$$\times dx_n dx_{n-1} dx'' \leqslant C \int\limits_{B^{n-2}} \int\limits_0^{\varphi(|x''|)} \int\limits_0^1 |D_n f(x)|^p\, dx_n\, dx_{n-1}\, dx''. \tag{6.5}$$

При выводе (6.5) мы перешли сначала к полярным координатам по y'', $y''=x''+\rho\omega''$, а затем применили неравенство (1.3).

Получим оценку A_2. Будем считать, что $|\nabla'' f(z'', \tau, \sigma)|^p = 0$ при $\tau > \varphi(|z''|)$. Применяя обобщенное неравенство Минковского и учитывая (6.3), (6.4), имеем ($Z = \{x'', y'' \in B^{n-2}: |x''-y''| < e(x'', y'')\}$)

$$A_2^{1/p} \leqslant C \int_0^1 \left\{ \int\int_Z \int_0^{\varphi(|x''|)} |x''-y''|^{3-n} |\nabla'' f(y''(1-\tau)+\tau x'', x_{n-1}, |x''-y''|)|^p dy''\, dx'' \right\}^{1/p} d\tau.$$

Сделаем замену переменных $y''(1-\tau)+\tau x'' = z''$ ($y'' \to z''$). Из (1.1) и неравенства $|x''-y''| < e(x'', y'')$ следует

$$e(x'', y'') \leqslant \delta^{-1} e(x'', z'').$$

Положим $Q_\tau(z) = \{x'' \in B^{n-2}: |x''-z''| \leqslant (1-\tau)\varphi(|z''|)\delta\}$. Тогда

$$A_2^{1/p} \leqslant C \int_0^1 \left\{ \int_{B^{n-2}} \int_0^{\varphi(|z''|)} \int_{Q_\tau(z)} |z''-x''|^{3-n} \times \right.$$
$$\left. \times \left| \nabla'' f\left(z'', x_{n-1}, \frac{|z''-x''|}{1-\tau}\right)\right|^p \frac{dx''}{1-\tau} \right\}^{1/p} d\tau.$$

Переходя к полярным координатам $x'' = z'' + \rho\omega''$ и делая затем замену $\rho = \delta(1-\tau)^{-1} s$ ($\rho \to s$), из последнего неравенства получаем

$$A_2^{1/p} \leqslant C \left\{ \int_{B^{n-2}} \int_0^{\varphi(|z''|)} \int_0^1 |\nabla'' f(z'', x_{n-1}, s)|^p \, ds\, dx_{n-1}\, dz'' \right\}^{1/p}.$$

При выводе оценки для A_3 считаем, что $|D_{n-1} f(x'', \tau, |x''-y''|)| = 0$ при $\tau > \varphi(|x''|)$. Ниже для краткости обозначено $\eta(\tau) = |D_{n-1} f(x'', \tau, x''-y''|)|$. Интеграл по y_{n-1} в A_3 разобьем на сумму интегралов — по интервалам $(0; x_{n-1})$ и $(x_{n-1}; \varphi(|x''|))$, а в интеграле по y'' увеличим область интегрирования до $\Omega(x) = \{y'' \in \mathbf{R}^{n-2}: |y''-x''| < \varphi(|x''|)\}$. Тогда

$$A_3^{1/p} \leqslant a_3^{(1)} + a_3^{(2)},$$

где

$$a_3^{(1)} = \left\{ \int_{B^{n-2}} \int_{\Omega(x)} \int_0^{\varphi(|x''|)} \int_0^{x_{n-1}} |x'-y'|^{2-n} \left(\frac{1}{x_{n-1}-y_{n-1}} \int_{y_{n-1}}^{x_{n-1}} \eta(\tau)\, d\tau \right)^p dy_{n-1} \right\}^{1/p},$$

$$a_3^{(2)} = \left\{ \int_{B^{n-2}} \int_{\Omega(x)} \int_0^{\varphi(|x''|)} \int_{x_{n-1}}^{\varphi(|x''|)} |x'-y'|^{2-n} \left(\frac{1}{y_{n-1}-x_{n-1}} \int_{x_{n-1}}^{y_{n-1}} \eta(\tau)\, d\tau \right)^p dy_{n-1} \right\}^{1/p}.$$

В $a_3^{(1)}$ сделаем замену переменных $x_{n-1} - y_{n-1} = s$ и $y'' = x'' + \rho\omega''$, где ρ, ω'' — полярные координаты в $\mathbf{R}^{n-2}$. После этого поменяем порядок интегрирования по s и x_{n-1} и сделаем замену переменной $x_{n-1} = s+t$ ($x_{n-1} \to t$). В итоге получим

$$a_3^{(1)} = \left\{ \int_{B^{n-2}} \int_{S^{n-3}} \int_0^{\varphi(|x''|)} \int_0^{\varphi(|x''|)} \rho^{n-3} \left[\int_0^{\varphi(|x''|)} \left(\frac{1}{s} \int_t^{t+s} \eta(\tau)\, d\tau \right)^p dt \right] \frac{ds}{(\rho^2+s^2)^{(n-2)/2}} \right\}.$$

Применяя (1.5), имеем

$$a_3^{(1)} \leqslant C \left\{ \int_{G_1} |D_{n-1} f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}.$$

В $a_3^{(2)}$ переходим к полярным координатам $y''=x''+\rho\omega''$ и делаем замену переменной $y_{n-1}-x_{n-1}=s$ $(y_{n-1}\to s)$. Меняя затем порядок интегрирования по s и x_{n-1} и применяя (1.5), получаем, как и выше,

$$a_3^{(2)}\leqslant C\,\|D_{n-1}f\|_{L_p(G_1)}.$$

Из оценок для $a_3^{(1)}$, $a_3^{(2)}$ следует оценка A_3.

Перейдем к оценке интеграла по $\Gamma_0\times S_0^-$. Представим его в виде суммы L_1+L_2, где

$$L_1=\int\limits_{\Gamma_0}\ \int\limits_{\{y\in S_0^-:\,|y''|<|x''|\}}\frac{|\mu(x)-\mu(y)|^p\,\sigma(x,y)}{r^{n+p-2}}\,d\Sigma_x\,d\Sigma_y,$$

$$L_2=\int\limits_{\Gamma_0}\ \int\limits_{\{y\in S_0^-:\,|y''|>|x''|\}}\frac{|\mu(x)-\mu(y)|^p\,\sigma(x,y)}{r^{n+p-2}}\,d\Sigma_x\,d\Sigma_y.$$

Разбиение приходится делать вследствие невыпуклости G_1.

Рассмотрим L_1. Для интеграла L_2 рассуждения аналогичны. Пусть $x=(x'',x_{n-1},0)\in\Gamma_0$, $y=(y'',0,y_n)\in S_0^-$ и $|y''|<|x''|$. Тогда для $y_{n-1}\in\in(0;\varphi(|y''|))$ имеем

$$|\mu(x)-\mu(y)|^p\leqslant C\left[\left(\int\limits_0^{y_{n-1}}|D_{n-1}f(y'',\tau,y_n)|\,d\tau\right)^p+\right.$$
$$+|x''-y''|^p\left(\int\limits_0^1|\nabla''f(x''+\tau(y''-x''),y_{n-1},y_n)|\,d\tau\right]^p+$$
$$\left.+\left(\int\limits_{[y_{n-1};x_{n-1}]}|D_{n-1}f(x'',\tau,y_n)|\,d\tau\right)^p+\left(\int\limits_0^{y_n}|D_nf(x'',x_{n-1},\tau)|\,d\tau\right)^p\right].$$

Мы видим, что вывод оценки L_1 не отличается от вывода оценки интеграла по $\Gamma_0\times\Gamma_0$. Таким образом, справедлива оценка

$$\langle\mu\rangle_{\partial G_1}\leqslant C\,\|f\|_{W_p^1(G_1)}.$$

Пусть μ определена на ∂G_1 и $\langle\mu\rangle_{\partial G_\perp}<\infty$. Построим продолжение μ на G_1. Строить будем поэтапно. Сначала, рассуждая так же, как и в § 5, строим такие функции f_0, $f_1\in W_p^1(G_1)$, что $f_0|_{S_0}=\mu$, $f_1|_{S_1}=\mu$, и функция

$$F(x)=\left[1-\frac{x_{n-1}}{\varphi(|x''|)}\right]f_0(x)+\frac{x_{n-1}}{\varphi(|x''|)}f_1(x)$$

принадлежит $W_p^1(G_1)$ и $F|_{S_0\cup S_1}=\mu$.

Построим функцию из $W_p^1(G_1)$, совпадающую с μ на $S_0\cup\Gamma_0\cup S_1$. Сначала мы строим функцию $g\in W_p^1(G_1)$, совпадающую с μ на $\Gamma_0\cup S_0^-\cup\cup S_1^-$. Не вдаваясь в детали, укажем, как можно построить такую функцию. Положим $\Gamma_\varphi=\{x\in G_1:\ x_n=\varphi(|x''|),\ |x''|<1\}$. Существует билипшицево отображение Ψ, преобразующее область $U_\varepsilon=\{x\in G:\ 0<<x_n<(1+\varepsilon)\varphi(|x''|)\}$ в полупространство $\mathbf{R}_+^n=\{y\in\mathbf{R}^n:\ y_n>0\}$ и тождественное на Γ_0. При этом $(\Gamma_0\cup S_0\cup S_1)\cap\overline{U}_\varepsilon$ отображается на часть плоскости $\mathbf{R}^{n-1}=\{y\in\mathbf{R}^n:\ |y''|<1,\ \ -(1+\varepsilon)\varphi(|y''|)<y_{n-1}<2(1++\varepsilon)\varphi(|y''|),\ y_n=0\}$. Функцию $\nu=\mu_0\Psi^{-1}$ можно продолжить с плоскости в $\mathbf{R}_+^n$, например, следующим образом:

$$h(y)=\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}}\nu(y'+\delta y_nz')\,K_{n-1}(z')\,dz'.$$

Далее оценка выводится так же, как оценка нормы функции (5.8). Для функции $g = h \circ \Psi^{-1}$ имеем $g|_{\Gamma_0 \cup S_0^- \cup S_1^-} = \mu$ и

$$\|g\|^p_{W^1_p(U_0)} \leqslant C\langle\mu\rangle_{\partial G_1},$$

где $U_0 = U_\varepsilon|_{\varepsilon=0}$.

Пусть $x = (x'', x_{n-1}, 0)$, $\tilde{x} = (x'', x_{n-1}, \varphi(|x''|))$, $\mu(\tilde{x}) = F|_{\Gamma_\varphi}(\tilde{x})$. Покажем, что интеграл

$$\int\limits_{B^{n-2}} \int\limits_0^{\varphi(|x''|)} \frac{|\mu(x) - \mu(\tilde{x})|^p}{\varphi^{p-1}(|x''|)}\, dx_{n-1}\, dx'' \tag{6.6}$$

конечен. Обозначим

$$Y(x) = \{y \in S_1 : |x-y| < \delta\varphi(|x''|),\ |y - \tilde{x}| < \delta\varphi(|x''|)\},$$

где $\delta = 1 - \varphi'(1)$, $x \in \Gamma_0$, через $|Y(x)|$ обозначим площадь $Y(x)$. Несложно заметить, что $|x-y|$, $|\tilde{x} - y| \sim \varphi(|x''|)$, если $x_{n-1} > \varphi(|x''|)/2$ и $|Y(x)| \sim \varphi^{n-1}(|x''|)$. Поэтому, интегрируя неравенство

$$\frac{|\mu(x) - \mu(\tilde{x})|^p}{\varphi^{p-1}(|x''|)} \leqslant C\left[\frac{|\mu(x)\,\mu(y)|^p}{\varphi^{p-1}(|x''|)} + \frac{|\mu(y) - \mu(\tilde{x})|^p}{\varphi^{p-1}(|x''|)}\right]$$

сначала по $y \in Y(x)$, затем по

$$\{x' = (x'', x_{n-1}) : |x''| < 1,\ \varphi(|x''|)/2 < x_{n-1} < \varphi(|x''|)\},$$

получаем

$$\int\limits_{B^{n-2}} \int\limits_{\varphi(|x''|)/2}^{\varphi(|x''|)} \frac{|\mu(x) - \mu(\tilde{x})|^p}{\varphi^{p-1}(|x''|)}\, dx_{n-1}\, dx'' \leqslant$$

$$\leqslant C\left[\int\limits_{B^{n-2}} \int\limits_{\varphi(|x''|)/2}^{\varphi(|x''|)} \int\limits_{Y(x)} \frac{|\mu(x) - \mu(y)|^p}{|x-y|^{n+p-2}}\, d\Sigma_y\, dx_{n-1}\, dx'' + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{B^{n-2}} \int\limits_{\varphi(|x''|)/2}^{\varphi(|x''|)} \int\limits_{Y(x)} \frac{|\mu(\tilde{x}) - \mu(y)|^p}{|\tilde{x} - y|^{n+p-2}}\, d\Sigma_y\, dx_{n-1}\, dx''\right].$$

Отсюда, так как из $|y-x| < \delta\varphi(|x''|)$, следует $|y-x| < e(x'', y'')$, имеем

$$\int\limits_{\Gamma_0^+} \frac{|\mu(x) - \mu(y)|^p}{\varphi^{p-1}(|x''|)}\, d\Sigma_x \leqslant C\left[\int\limits_{\Gamma_0} \int\limits_{S_0^-} \frac{|\mu(x) - \mu(y)|^p}{|x-y|^{n+p-2}}\, \sigma(x, y)\, d\Sigma_y\, d\Sigma_x + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Gamma_\varphi} \int\limits_{S_0^-} \frac{|\mu(\tilde{x}) - \mu(y)|^p}{|\tilde{x} - y|^{n+p-2}}\, \sigma(\tilde{x}, y)\, d\Sigma_y\, d\Sigma_{\tilde{x}}\right], \tag{6.7}$$

где $\Gamma_0^+ = \{x \in \Gamma_0\colon\ \varphi(|x''|)/2 < x_{n-1} < \varphi(|x''|)\}$. Аналогичное неравенство справедливо и для интеграла по $\Gamma_0^- = \{x \in \Gamma_0\colon\ x_{n-1} < \varphi(|x''|)/2\}$. Таким образом, интеграл (6.7) конечен.

Функция

$$\frac{x_n}{\varphi(|x''|)}\, F(x) + \left[1 - \frac{x_n}{\varphi(|x''|)}\right] g(x)$$

совпадает с μ на $\Gamma_0 \cup S_0 \cup S_1$ и (см. § 5) принадлежит $W_p^1(G_1)$. Повторяя приведенные выше рассуждения, строим функцию $f \in W_p^1(G_1)$, совпадающую с μ на ∂G_1 и такую, что

$$\|f\|_{W_p^1(G_1)} \leqslant C < \langle \mu \rangle_{\partial G_1}.$$

Этим завершается доказательство теоремы 6.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gadliardo E.** Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in variabili // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova.— 1957.— V. 27.— P. 284—305.
2. **Яковлев Г. Н.** Задача Дирихле для областей и нелипшицевой границей // Дифференц. уравн.— 1965.— Т. 1, № 8.— С. 1085—1098.
3. **Мазья В. Г.** О функциях с конечным интегралом Дирихле в области с вершиной пика на границе // Зап. науч. семинаров ЛОМИ/Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. Ленингр. отд-ние.— 1983.— Т. 126.— С. 117—137.
4. **Харди Г. Г., Литтельвуд Д. Е., Полиа Г.** Неравенства.— М.: Изд-во иностр. лит., 1948.— 456 с.
5. **Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.** Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. – М.: Наука, 1983.— 284 с.
6. **Федерер Г.** Геометрическая теория меры.— М.: Наука, 1987.— 760 с.
7. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М.: Мир, 1974.— 336 с.
8. **Избранные** главы анализа и высшей алгебры/Фаддеев Д. К., Вулих Б. З., Уральцева Н. Н. и др.; Под ред. М. З. Соломяка.— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.— 200 с.

С. К. ВОДОПЬЯНОВ

L_p-ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА И КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НА ОДНОРОДНЫХ ГРУППАХ

Посвящается Ю. Г. Решетняку

Применимость идей и методов теории потенциала зависит от свойств потенциалов $U_K\mu(x) = \int\limits_\Omega K(x, y)\, d\mu(y)$ [1, 2] или их нелинейных аналогов [3—6], которые возможно сохранить в более общей теории. Традиционно изучаются ядра Ньютона — Рисса $K(x, y) = |x - y|^{l-n}$, определенные на евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$, областью интегрирования является также $\mathbf{R}^n$, $|\cdot|$ — евклидова метрика. В настоящей работе L_p-теория потенциала развивается на произвольной однородной группе G относительно ядер, являющихся функцией однородной нормы. В линейном случае ($p = 2$) обобщаются классические результаты теории потенциала: обобщенный принцип максимума, теоремы Эванса — Василеско, Фростмана. В нелинейном случае ($p \neq 2$) обобщаются результаты Ю. Г. Решетняка, В. Г. Мазьи и В. П. Хавина, Н. Мейерса и Д. Адамса, Л. Хедберга и Т. Вольфа и др.

Результаты статьи по нелинейной теории потенциала (§ 1—4) частично сформулированы в заметках [7, 8]. В § 6 рассматриваются специфические аспекты емкости в функциональных пространствах, определенных на произвольной однородной группе. Основной результат § 6 — равносильность понятий уточненности и квазинепрерывности для функций из анизотропных пространств Бесова, а также риссовых и бесселевых потенциалов. Для перечисленных пространств доказывается также аналог теоремы Фростмана о средних значениях потенциалов. В работах автора [9—13] методы и результаты нелинейной теории потенциала на однородных группах применяются для решения ряда задач теории функциональных пространств и дифференциальных уравнений.