совпадает с μ на $\Gamma_0 \cup S_0 \cup S_1$ и (см. § 5) принадлежит $W_p^1(G_1)$. Повторяя приведенные выше рассуждения, строим функцию $f \in W_p^1(G_1)$, совпадающую с μ на ∂G_1 и такую, что

$$\|f\|_{W_p^1(G_1)} \leqslant C < \langle \mu \rangle_{\partial G_1}.$$

Этим завершается доказательство теоремы 6.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gadliardo E.** Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in variabili // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova.— 1957.— V. 27.— P. 284—305.
2. **Яковлев Г. Н.** Задача Дирихле для областей и нелипшицевой границей // Дифференц. уравн.— 1965.— Т. 1, № 8.— С. 1085—1098.
3. **Мазья В. Г.** О функциях с конечным интегралом Дирихле в области с вершиной пика на границе // Зап. науч. семинаров ЛОМИ/Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. Ленингр. отд-ние.— 1983.— Т. 126.— С. 117—137.
4. **Харди Г. Г., Литтельвуд Д. Е., Полиа Г.** Неравенства.— М.: Изд-во иностр. лит., 1948.— 456 с.
5. **Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.** Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. — М.: Наука, 1983.— 284 с.
6. **Федерер Г.** Геометрическая теория меры.— М.: Наука, 1987.— 760 с.
7. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М.: Мир, 1974.— 336 с.
8. **Избранные** главы анализа и высшей алгебры/Фаддеев Д. К., Вулих Б. З., Уральцева Н. Н. и др.; Под ред. М. З. Соломяка.— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.— 200 с.

С. К. ВОДОПЬЯНОВ

L_p-ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА И КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НА ОДНОРОДНЫХ ГРУППАХ

Посвящается Ю. Г. Решетняку

Применимость идей и методов теории потенциала зависит от свойств потенциалов $U_K\mu(x) = \int\limits_\Omega K(x, y)\, d\mu(y)$ [1, 2] или их нелинейных аналогов [3—6], которые возможно сохранить в более общей теории. Традиционно изучаются ядра Ньютона — Рисса $K(x, y) = |x-y|^{l-n}$, определенные на евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$, областью интегрирования является также $\mathbf{R}^n$, $|\cdot|$ — евклидова метрика. В настоящей работе L_p-теория потенциала развивается на произвольной однородной группе G относительно ядер, являющихся функцией однородной нормы. В линейном случае ($p = 2$) обобщаются классические результаты теории потенциала: обобщенный принцип максимума, теоремы Эванса — Василеско, Фростмана. В нелинейном случае ($p \neq 2$) обобщаются результаты Ю. Г. Решетняка, В. Г. Мазьи и В. П. Хавина, Н. Мейерса и Д. Адамса, Л. Хедберга и Т. Вольфа и др.

Результаты статьи по нелинейной теории потенциала (§ 1—4) частично сформулированы в заметках [7, 8]. В § 6 рассматриваются специфические аспекты емкости в функциональных пространствах, определенных на произвольной однородной группе. Основной результат § 6 — равносильность понятий уточненности и квазинепрерывности для функций из анизотропных пространств Бесова, а также риссовых и бесселевых потенциалов. Для перечисленных пространств доказывается также аналог теоремы Фростмана о средних значениях потенциалов. В работах автора [9—13] методы и результаты нелинейной теории потенциала на однородных группах применяются для решения ряда задач теории функциональных пространств и дифференциальных уравнений.

В § 5, 7 статьи реализуется программа, намеченная в [10, замечание 13]. Мы изучаем метрические свойства отображений, индуцирующих изоморфизмы упомянутых выше анизотропных пространств по правилу замены переменной. В отличие от работы [10] мы не накладываем на отображение никаких свойств топологического характера. В такой ослабленной постановке задача существенно усложняется. Ее решение требует привлечения новых идей и применения всей развитой в предыдущих параграфах теории. Доказывается, что соответствующие отображения квазиконформны в некотором обобщенном смысле. Устанавливается несколько специфических свойств таких отображений, иллюстрирующих их отличие от общеизвестной теории квазиконформных отображений. Исследуются также случаи, когда квазиконформные в обобщенном смысле отображения индуцируют изоморфизм пространств дифференцируемых функций. Точная постановка задач, формулировки результатов и библиография по данному вопросу приведены в § 5, 7.

§ 1. Однородные группы. Примеры

Однородной группой называется связная односвязная нильпотентная группа Ли $\mathbf{G}$, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ которой снабжена однопараметрической группой растяжений $\delta_t = \exp(A \ln t)$, $t > 0$, где A — диагонализируемый линейный оператор на $\mathfrak{g}$, собственные числа которого положительны. Если $\mathbf{G}$ — однородная группа, то отображения $\exp \circ \delta_t \circ \exp^{-1}$, $t > 0$, являются групповыми автоморфизмами; мы обозначаем их также через δ_t и называем *растяжениями на* $\mathbf{G}$.

Приведем несколько примеров однородных групп.

1. Абелевы группы. Евклидово n-мерное пространство есть однородная группа с растяжениями $\delta_t = \exp(A \ln t)$, $t > 0$. В этом случае в качестве A может быть любая действительная $n \times n$-матрица A с собственными числами λ_j, $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$, и $\operatorname{tr} A = \nu$. Если $A = E$, то группой растяжений является группа евклидовых гомотетий, сохраняющих ориентацию. Символ $|\cdot|$ обозначает евклидову метрику на $\mathbf{R}^n$.

2. Группы Гейзенберга. Если $n \in \mathbf{N}$, то группа Гейзенберга $\mathbf{H}_n$ есть группа, состоящая из точек множества $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}$, в котором умножение определяется по закону

$$(z_1, \ldots, z_n, y)(z_1', \ldots, z_n', y') = \left(z_1 + z_1', \ldots, z_n + z_n', y + y' + 2 \operatorname{Im} \sum_1^n z_j \bar{z}_j'\right).$$

Группой растяжений в $\mathbf{H}$ является

$$\delta_t(z_1, \ldots, z_n, y) = (tz_1, \ldots, tz_n, t_2 y).$$

Известно, что одноточечная компактификация группы $\mathbf{H}_n$ реализуется как единичная сфера в $\mathbf{C}^{n+1}$.

3. Группы верхнетреугольных матриц. Пусть $\mathbf{C}$ — группа действительных $n \times n$-матриц (a_{ij}), таких, что $a_{ii} = 1$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ и $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Группой растяжений в $\mathbf{G}$ является группа $\delta_t(a_{ij}) = (t^{j-i} a_{ij})$.

На однородных группах определяется однородная норма [14—17]. Это есть непрерывная функция r: $\mathbf{G} \to [0, \infty)$ класса C^∞ на $\mathbf{G} \setminus \{0\}$, обладающая свойствами

(a) $r(x) = r(x^{-1})$ и $r(\delta_t(x)) = tr(x)$.

(b) $r(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$,

c) существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех x, $y \in G$

$$r(x, y) \leqslant c(r(x) + r(y)).$$

Однородная норма определяет величину $r(x, y) = r(x^{-1} y)$, являющуюся обобщенной метрикой на $\mathbf{G}$: неравенство треугольника выполняется в следующем обобщенном смысле:

$$r(x,\ y)=r(x^{-1}y)=r(x^{-1}zz^{-1}y)\leqslant c(r(x^{-1}z)+r(z^{-1}y))=c(r(x,\ z)+r(z,\ y)).$$

Если $x\in\mathbf{G}$ и $\rho>0$, то *шаром* (*сферой*) *с центром в точке* x *и радиусом* ρ называется множество $B(x,\ \rho)=\{y\in\mathbf{G}\colon r(x,\ y)<\rho\}$ ($S(x,\ \rho)=\{y\in\mathbf{G}\colon r(x,\ y)=\rho\}$). Заметим, что $\delta_\rho(B(0,\ 1))=B(0,\ \rho)$ и $B(x,\rho)=L_x(B(0,\ \rho))$, где L_x — левый сдвиг на группе $\mathbf{G}$: $L_x(y)=xy$, $y\in\mathbf{G}$. Далее мы фиксируем нормированную меру Хаара на $\mathbf{G}$ так, чтобы мера $|B(0,\ 1)|$ шара $B(0,\ 1)$ была равна 1.

Число $\nu=\operatorname{tr}A$ называется *однородной размерностью группы* $\mathbf{G}$. Ясно, что $|\delta_t(E)|=t^\nu|E|$, $d(\delta_t(x))=t^\nu dx$. В частности, $|B(x,\ \rho)|=\rho^\nu$.

Если f и g — измеримые функции, то их свертка определяется по правилу

$$f*g(x)=\int f(y)\,g(y^{-1}x)\,dy=\int f(xy^{-1})\,g(y)\,dy,$$

при условии, что интегралы сходятся.

Мы используем в статье сферические координаты на группе $\mathbf{G}$.

Предложение 1.1 [14—17]. *Пусть* $S=\{x\in\mathbf{G}\colon r(x)=1\}$. *Существует единственная борелевская мера* σ, *сосредоточенная на* S, *такая, что для всех* $u\in L_1(\mathbf{G})$

$$\int\limits_{\mathbf{G}} u(x)\,dx=\int\limits_0^\infty\int\limits_S u(\delta_\rho y)\rho^{\nu-1}\,d\sigma(y)\,d\rho.$$

§ 2. Энергия и нелинейные потенциалы. Теорема типа Эванса — Василеско

2.1. Энергия и нелинейные потенциалы. Мы рассматриваем здесь произвольную однородную группу $\mathbf{G}$ с фиксированной на ней однородной нормой r. Термин «борелевская мера» (или просто «мера на $\mathbf{G}$») обозначает неотрицательную счетно-аддитивную функцию множества, заданную на борелевском σ-кольце группы $\mathbf{G}$, принимающую конечные значения на компактных подмножествах группы $\mathbf{G}$.

Потенциалом Рисса порядка γ, $\gamma\in(0,\ \nu)$, *борелевской меры* μ *на группе* $\mathbf{G}$ называется функция

$$\mu*I_\gamma(x)=\int\limits_{\mathbf{G}} r(y^{-1}x)^{\gamma-\nu}\,d\mu(y).$$

Если μ — борелевская мера на $\mathbf{G}$, то $(\gamma,\ p)$-*энергия меры* μ определяется следующим образом:

$$\mathcal{E}_{\gamma,p}(\mu)=\int\limits_{\mathbf{G}}[\mu*I_\gamma(x)]^q\,dx, \tag{2.1}$$

где $q=p/(p-1)$, $p\in(1,\ \infty)$, $\gamma p<\nu$. Если мы запишем $(\mu*I_\gamma)^q=(\mu*I_\gamma)^{q-1}$ то, поменяв порядок интегрирования в (2.1) получаем

$$\mathcal{E}_{\gamma,p}(\mu)=\int\limits_{\mathbf{G}} U_{\gamma,p}\mu(x)\,d\mu(x),$$

где величина

$$U_{\gamma,p}\mu(x)=(\mu*I_\gamma)^{q-1}*I_\gamma(x)$$

называется *нелинейным потенциалом меры* μ.

Теорема 2.1 [7, 9]. *Для потенциала* $U_{\gamma,p}\mu$ *меры* μ *выполняется обобщенный принцип максимума: для любой точки* $x\in\mathbf{G}$

$$U_{\gamma,p}\mu(x)\leqslant\mathfrak{M}\sup\{U_{\gamma,p}\mu(y)\colon\ y\in\operatorname{supp}\mu\},$$

где постоянная $\mathfrak{M}$ *не зависит от меры* μ.

Более точно, если x' обозначает точку множества $S=\operatorname{supp}\mu$, ближайшую к x, то при любом $x\in\mathbf{G}$

$$U_{\gamma,p}\mu(x)\leqslant\nu\gamma^{-1}(2c^2+c)^{\nu q}U_{\gamma,p}\mu(x'),$$

где c — постоянная в обобщенном неравенстве треугольника.

2.2. Теорема типа Эванса — Василеско. Пусть μ — мера на группе G. Сужение меры μ на замкнутый шар $\overline{B(x, \rho)}$ обозначим через $\mu_{x,\rho}$.

Лемма 2.2. *Если точка x группы* G *такова, что* $U_{\gamma,p}\mu(x) < \infty$, *то* $\lim\limits_{\rho\searrow 0} U_{\gamma,p}\mu_{x,\rho}(x) = 0$, $\lim\limits_{\rho\searrow 0} U_{\gamma,p}(\mu - \mu_{x,\rho})(x) = U_{\gamma,p}\mu(x)$.

Доказательство. Ясно, что $\mu(\{x\}) = 0$, так как в противном случае

$$U_{\gamma,p}\mu(x) \geqslant [\mu(\{x\})]^{q-1}\int\limits_{G} r(y^{-1}x)^{(\gamma-\nu)q}\,dy = +\infty.$$

Значит, $\lim\limits_{\rho\searrow 0}\int\limits_{G} d\mu_{x,\rho} = 0$ и $\lim\limits_{\rho\searrow 0}\int\limits_{G} r(z^{-1}y)^{\gamma-\nu}\,d\mu_{x,\rho}(z) =$ при любом $y \neq x$. Положим

$$F_\rho(y) = \left[\int\limits_{G} r(z^{-1}y)^{\gamma-\nu}\,d\mu_{x,\rho}(z)\right]^{q-1} r(y^{-1}x)^{\gamma-\nu} \quad (y \in G;\ y \neq x,\ \rho > 0).$$

Семейство функций $\{F_\rho\}$ $(p > 0)$ имеет суммируемую мажоранту F: $F(y) = \left[\int\limits_{G} r(z^{-1}y)^{\gamma-\nu}\,d\mu(z)\right]^{q-1} r(y^{-1}x)^{\gamma-\nu}$. Поэтому $\lim\limits_{\rho\searrow 0}\int\limits_{G} F_\rho(y)\,dy =$ $= \lim\limits_{\rho\searrow 0} U_{\gamma,p}\mu_{x,\rho}(x) = 0$. Второе утверждение доказывается аналогично. Доказательство закончено.

Лемма 2.3. *Пусть ν — мера на* G, $\mathcal{U}$ — *открытое подмножество группы* G. *Предположим, что* $U_{\gamma,p}\nu(x) < +\infty$ *при любом* $x \in \mathcal{U} \cap \operatorname{supp}\nu$ *и что* $\lim\limits_{\rho\searrow 0} U_{\gamma,p}\nu_{x,\rho}(x) = 0$ *равномерно на* $\mathcal{U} \cap \operatorname{supp}\nu$. *Тогда функция* $U_{\gamma,p}\nu$ *непрерывна на множестве* $\mathcal{U}$.

Доказательство. Положим $\varphi(y) = \left[\int r(z^{-1}y)^{\gamma-\nu}\,d\mu(z)\right]^{q-1}$. Из предположения о конечности $U_{\gamma,p}\nu(x)$ при некоторых x следует, что

$$\int \frac{\varphi(y)\,dy}{1 + r(y)^{\nu-\gamma}} < +\infty, \quad \int \frac{d\mu(z)}{1 + r(z)^{\nu-\gamma}} < +\infty.$$

Из этих неравенств легко вывести, что функция φ, а с ней и $U_{\gamma,p}$, непрерывна всюду вне $\operatorname{supp}\nu$.

Пусть $x_0 \in \operatorname{supp}\nu \cap \mathcal{U}$ и пусть $\{x_s\}$, $s \in \mathbf{N}$,— последовательность точек множества $\mathcal{U}$, стремящаяся к x_0, а η — положительное число. Обозначая через $\bar{x}_s$ точку множества $\operatorname{supp}\nu$, ближайшую к x_s, и предполагая, что $p \geqslant 2$, получим

$$\begin{aligned} U_{\gamma,p}\nu(x_s) &\leqslant U_{\gamma,p}\nu_{x_0,\eta}(x_s) + U_{\gamma,p}(\nu - \nu_{x_0,\eta})(x_s) \leqslant \\ &\leqslant \mathfrak{M}U_{\gamma,p}\nu_{x_0,\eta}(\bar{x}_s) + U_{\gamma,p}(\nu - \nu_{x_0,\eta})(x_s). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь $\mathfrak{M}$ — постоянная из принципа максимума (теорема 2.1). Точка x_0 не принадлежит носителю меры $\nu - \nu_{x_0,\eta}$. Поэтому последнее слагаемое стремится к $U_{\gamma,p}(\nu - \nu_{x_0,\eta})(x_0)$ при $s \to \infty$. Если $r(x_s^{-1}x_0) < c^{-1}\eta$, то $r(\bar{x}_s^{-1}x_0) \leqslant 2cr(x_s^{-1}x_0) < 2\eta$ и $B(x_0, \eta) \subset B(\bar{x}_s, 3c\eta)$. При достаточно малом η все точки $\bar{x}_s$ принадлежат $\mathcal{U}$. Имеем

$$\varlimsup_{s\to\infty} U_{\gamma,p}\nu(x_s) \leqslant \mathfrak{M}\varlimsup_{s\to\infty} U_{\gamma,p}\nu_{\bar{x}_s,3c\eta}(\bar{x}_s) + U_{\gamma,p}(\nu - \nu_{x_0,\eta})(x_0). \tag{2.3}$$

Из условия и из леммы 2.2 следует, что уменьшая η, можно сделать первое слагаемое в правой части неравенства (2.3) сколь угодно малым, а второе — сколь угодно близким к $U_{\gamma,p}\nu(x_0)$. Значит, $\varlimsup\limits_{s\to\infty} U_{\gamma,p}\nu(x_s) \leqslant$ $\leqslant U_{\gamma,p}\nu(x_0)$. Неравенство $\varliminf\limits_{s\to\infty} U_{\gamma,p}\nu(x_s) \geqslant U_{\gamma,p}\nu(x_0)$ следует из того, что функция $U_{\gamma,p}\nu$ полунепрерывна снизу. В случае $p \geqslant 2$ доказательство закончено. Если $p < 2$, то вместо (2.2) воспользуемся неравенством Йенсена

$$[U_{\gamma,p}\nu(x_s)]^{p-1} \leqslant [U_{\gamma,p}\nu_{x_0,\eta}(x_s)]^{p-1} + [U_{\gamma,p}(\nu - \nu_{x_0,\eta})(x_s)]^{p-1}.$$

В остальном рассуждения не меняются. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть μ — мера на $\mathbf{G}$; $U_{\gamma,p}\mu(x) < +\infty$ при любом $x \in \operatorname{supp}\mu$; ρ — положительное число. Тогда функция V_ρ: $x \to U_{\gamma,p}(\mu - \mu_{x,\rho})(x)$ полунепрерывна снизу в $\mathbf{G}$.*

Доказательство. Пусть φ_m: $\mathbf{R} \to [0, 1]$, $m \in \mathbf{N}$, — монотонно возрастающая последовательность неотрицательных функций с носителями, содержащимися в интервале $(0, +\infty)$, причем $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m(t) = 1$ при любом положительном t. Из теоремы Леви о предельном переходе под знаком интеграла следует, что при любом $x \in \mathbf{G}$ справедливо равенство $V_\rho(x) = \lim\limits_{m\to\infty} W_{\rho,m}(x)$, где $W_{\rho,m}(x) = \int r(y^{-1}x)^{\gamma-\nu}\,\Phi_m(x, y)\,dy$, а $\Phi_m(x, y) = \left[\int r(z^{-1}y)^{\gamma-\nu}\,\varphi_m(r(x^{-1}z) - \rho)\,d\mu(z)\right]^{q-1}$. Лемма будет доказана, если мы проверим, что все функции $W_{\rho,m}$ полунепрерывны снизу.

Пусть $\{x_j\}$, $j \in \mathbf{N}$, — последовательность точек пространства $\mathbf{G}$, стремящаяся к точке x_0. Проверим, что $W(x_0) \leqslant \varliminf\limits_{j\to\infty} W(x_j)$ (индексы ρ и m далее опускаются). Для этого докажем сначала, что при всех y (относительно меры Хаара)

$$\lim_{j\to\infty} \Phi(x_j, y) = \Phi(x_0, y). \tag{2.4}$$

Действительно, равенство $\lim\limits_{j\to\infty} \varphi\left(r\left(x_j^{-1}z\right) - \rho\right) r(z^{-1}y)^{\gamma-\nu} = r(z^{-1}y)^{\gamma-\nu} \times \varphi\left(r\left(x_0^{-1}z\right) - \rho\right)$ верно при всех $z \neq y$, т. е. при μ-почти всех z, так как мера μ не имеет точечных нагрузок. Функция $z \to r(z^{-1}y)^{\gamma-\nu}$ служит μ-суммируемой мажорантой для подынтегральных функций при почти всех y: из конечности интеграла $U_{\gamma,p}\mu(x)$ при некотором x следует, что $\int r(z^{-1}y)^{\gamma-\nu}\,d\mu(z) < +\infty$ при почти всех y. Равенство (2.4) следует теперь из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Последовательность мер $\{\nu_j\}$, $j \in \mathbf{N}$, с плотностями $\Phi_j(y) = \Phi(x_i, y)$ слабо сходится к мере ν_0 с плотностью $\Phi_0(y) = \Phi(x_0, y)$. Это следует из (2.4) и из того, что функция F, заданная в $\mathbf{G}$ равенством

$$F(y) = \left[\int r(z^{-1}y)^{\gamma-\nu}\,d\mu(z)\right]^{q-1},$$

служит суммируемой мажорантой для последовательности $\{\Phi_i\}$ на каждом шаре $B(x, \rho)$, $x \in \mathbf{G}$, $\rho > 0$. В самом деле, из неравенства $U_{\gamma,p}\mu(x) < +\infty$ следует, что при любом положительном ρ

$$\rho^{\gamma-\nu} \int\limits_{r(y^{-1}x)<\rho} F(y)\,dy \leqslant \int\limits_{r(y^{-1}x)<\rho} r(y^{-1}x)^{\gamma-\nu} F(y)\,dy \leqslant U_{\gamma,p}\mu(x) < +\infty.$$

По доказываемой ниже теореме 2.5 о потенциалах имеем теперь

$$\varliminf_{j\to\infty} \int r(y^{-1}x_j)^{\gamma-\nu}\,d\nu_j(y) \geqslant \int r(y^{-1}x_0)^{\gamma-\nu}\,d\nu_0(y),$$

а это и нужно было доказать. Лемма доказана.

Теорема 2.5. *Если меры μ_i сходятся слабо к мере μ на группе $\mathbf{G}$ и $x_n \to x_0$, $x_n \in G$, то $I_\gamma * \mu(x_0) \leqslant \varliminf\limits_{j\to\infty} I_\gamma * \mu_j(x_j)$.*

Доказательство. Предположим сначала, что меры μ_i, μ равномерно финитны. Введем срезанное ядро

$$r_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} r(y^{-1})^{\gamma-\nu} & \text{при} \quad r(y^{-1}x) > \varepsilon, \\ \varepsilon^{\gamma-\nu} & \text{при} \quad r(y^{-1}x) \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

и положим

$$[V\mu(x)]_\varepsilon = \int_G r_\varepsilon(x, y)\, d\mu(y).$$

Семейство функций $[V\mu_j(x)]_\varepsilon$ при фиксированном ε равностепенно непрерывно, причем $\lim\limits_{j\to\infty}[V\mu_j(x_0)]_\varepsilon = [V\mu(x_0)]\varepsilon$. Следовательно,

$$[V\mu(x_0)]_\varepsilon = \lim_{j\to\infty}[V\mu_j(x_j)]_\varepsilon \leqslant \varliminf_{j\to\infty}\int_G r(y^{-1}x_j)^{\gamma-\nu}\, d\mu_j$$

и при $\varepsilon\to 0$ получаем утверждение теоремы в этом случае.

В общем случае выберем последовательность положительных чисел N_k так, чтобы $N_k\to\infty$ и шары $\{x\in G\colon r(x) < N_k\}$ были нормальными для μ (т. е. $\mu(\{x\in G\colon r(x) = N_k\}=0)$. Если $\mu_j^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ — ограничения мер μ_j, μ в шаре $\{x\in G\colon r(x) < N_k\}$, то согласно [1, теорема 0.5′] $\mu_j^{(k)} \xrightarrow{\text{сл.}} \mu^{(k)}$ при $j\to\infty$. По доказанному

$$\int_G r(y^{-1}x_0)^{\gamma-\nu}\, d\mu^{(k)} \leqslant \varliminf_{j\to\infty}\int_G r(y^{-1}x_j)^{\gamma-\nu}\, d\mu_j^{(k)}.$$

Делая предельный переход при $k\to\infty$ сначала в правой, а затем в левой части этого неравенства, закончим доказательство теоремы.

Теорема 2.6. *Пусть μ — мера на G и пусть сужение $U_{\gamma,p}\mu$ на множество* $\operatorname{supp}\mu$ *— непрерывная функция. Тогда функция $U_{\gamma,p}\mu$ непрерывна в G.*

Доказательство. Зафиксируем положительное число R и установим непрерывность функции $U_{\gamma,p}\mu$ на шаре $B(R) = \{x\in G\colon r(x) < R\}$. По лемме 2.3 достаточно проверить, что $\lim\limits_{\rho\to 0} U_{\gamma,p}\mu_{x,\rho}(x) = 0$ равномерно относительно x из множества $\operatorname{supp}\mu \cap \overline{B(R)} = E$.

Функция V_ρ полунепрерывна снизу в G (см. лемму 2.4) и при $\rho \searrow 0$, монотонно возрастая, поточечно сходится на компактном множестве E к функции $U_{\gamma,\rho}\mu|_E$ (лемма 2.2), непрерывной на E. Рассуждая так же, как при доказательстве известной теоремы Дини о последовательностях непрерывных функций, мы получим равенство $\lim\limits_{\rho\to 0}\max\limits_{x\in E}(U_{\gamma,p}\mu(x) - V_\rho(x)) = 0$. Если $p\leqslant 2$, а x принадлежит E, то

$$U_{\gamma,p}\mu_{x,\rho}(x) = \int r(y^{-1}x)^{\gamma-\nu}\Big[\int r(z^{-1}y)^{\gamma-\nu}\, d\mu(z) -$$

$$- \int r(z^{-1}y)^{\gamma-\nu}\, d(\mu-\mu_{x,\rho})(z)\Big]^{q-1} dy \leqslant \int r(y^{-1}x)^{\gamma-\nu}\Big[\int r(z^{-1}y)^{\gamma-\nu}\, d\mu(z)\Big]^{q-1} -$$

$$- \int r(z^{-1}y)^{\gamma-\nu}\Big[\int r(z^{-1}y)^{\gamma-\nu}\, d(\mu-\mu_{x,\rho})(z)\Big]^{q-1} =$$

$$= U_{\gamma,p}\mu(x) - U_{\gamma,p}(\mu-\mu_{x,\rho})(x) \leqslant \max_{x\in E}[U_{\gamma,p}\mu(x) - V_\rho(x)]$$

(мы воспользовались неравенством $(a-b)^\lambda \leqslant a^\lambda - b^\lambda$, которое справедливо, если $0\leqslant b\leqslant a$ и $\lambda\geqslant 1$). Если же $p>2$, то $q-1 = (p-1)^{-1} < 1$ и $[U_{\gamma,p}\mu_{x,\rho}(x)]^{p-1} \leqslant [U_{\gamma,p}\mu(x)]^{p-1} - [U_{\gamma,p}(\mu - u_{x,\rho})(x)]^{p-1}$ (мы воспользовались неравенством $\left(\int(f-g)^\lambda\right)^{1/\lambda} \leqslant \left(\int f^\lambda\right)^{1/\lambda} - \left(\int g^\lambda\right)^{1/\lambda}$, справедливым, если $f\geqslant g\geqslant 0$ и $0<\lambda<1$). Остается заметить, что если $x\in E$, то

$$[U_{\gamma,p}\mu(x)]^{p-1} - [U_{\gamma,p}(\mu-\mu_{x,p})(x)]^{p-1} \leqslant$$

$$\leqslant (p-1)\max_{x\in E}[U_{\gamma,p}\mu(x)]^{p-2}\max_{x\in E}[U_{\gamma,p}\mu(x) - V_\rho(x)].$$

Лемма 2.7. *Пусть μ — конечная мера на группе* $\mathbf{G}$, *и пусть* $U_{\gamma,p}\mu(x) < +\infty$ *при μ-почти всех x. Тогда существует последовательность* $\{K_j\}$, $j \in \mathbf{N}$, *замкнутых подмножеств группы* $\mathbf{G}$ *такая, что*

(a) *потенциал* $U_{\gamma,p}\mu_j$ *сужения* μ_j *на множество* K_j *непрерывен в* $\mathbf{G}$ $(j = 1, 2, \ldots)$;

(b) $\lim\limits_{j\to\infty} \mu(\mathbf{G}\setminus K_j) = 0$.

Доказательство. Из леммы 2.2 следует, что при μ-почти всех x

$$\lim_{\rho\to 0} U_{\gamma,p}\mu_{x,\rho}(x) = 0. \tag{2.5}$$

Применяя теорему Егорова, построим возрастающую последовательность $\{K_j\}$, $j \in \mathbf{N}$, компактных множеств так, чтобы выполнялось (b) и предельное соотношение (2.5) осуществлялось равномерно на K_j $(j \in \mathbf{N})$. Тогда, очевидно, равномерно на K_j $(j \in \mathbf{N})$ выполняется равенство $\lim\limits_{\rho\to} U_{\gamma,p} \times \mu_{j:x,\rho}(x) = 0$. Из леммы 2.3 следует, что функция $U_{j,p}\mu_j$ непрерывна в $\mathbf{G}$.

Рассмотрим пространство риссовых потенциалов на группе $\mathbf{G}$:

$$I^\gamma(L_p) = \{f\colon f = g * r^{\gamma-\nu},\ g \in L_p(\mathbf{G})\},\ p \in (1, \infty),\ \gamma p < \nu.$$

Норма $\|f|I^\gamma(L_p)\|$ элемента $f = g * r^{\gamma-\nu}$ по определению равна $\|g|L_p\|$.

Лемма 2.8. *Пусть* $\{\mu_j\}$, $j \in \mathbf{N}$, *— последовательность борелевских мер на группе* $\mathbf{G}$, *сходящаяся к мере μ по энергетической норме* $\lim\limits_{j\to\infty} \mathscr{E}_{\gamma,p}(\mu_j - \mu) = 0$. *Тогда* $\lim\limits_{j\to\infty}\| U_{\gamma,p}\mu_j - U_{\gamma,p} \,|\, I^\gamma(L_p)\| = 0$.

Доказательство. Проверим, что для любых мер μ, ν на группе $\mathbf{G}$ с конечной (γ, p)-энергией справедливо неравенство

$$\| U_{\gamma,p}\mu - U_{\gamma,p}\nu \,|\, I^\gamma(L_p)\|^p \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \mathscr{E}_{\gamma,p}(\mu-\nu), & \text{если } p \geqslant 2, \\ \left(\dfrac{1}{p-1}\right)^p [\mathscr{E}_{\gamma,p}(\mu-\nu)]^{p-1}[\mathscr{E}_{\gamma,p}(\mu) + \mathscr{E}_{\gamma,p}(\nu)]^{2-p}, & \text{если } p \in (1, 2). \end{cases} \tag{2.6}$$

Для этого заметим, что $\| U_{\gamma,p}\mu - U_{\gamma,p}\nu \,|\, I^\gamma(L_p)\|^p = \int\limits_{\mathbf{G}} | A^{q-1} - B^{q-1}|^p\, dy$,

где $A = \mu * I_\gamma$, $B = \nu * I_\gamma$. Пусть $p \geqslant 2$. Тогда $|A^{q-1} - B^{q-1}| \leqslant |A - B|^{q-1}$ и $\| U_{\gamma,p}\mu - U_{\gamma,p}\nu \,|\, I^\gamma(L_p)\|^p \leqslant \int\limits_{\mathbf{G}} |A - B|^q\, dx = \int\limits_{\mathbf{G}} |(\mu-\nu) * I_\gamma|^q\, dx = \mathscr{E}_{\gamma,p}(\mu-\nu)$. Первое неравенство в (2.6) доказано.

Пусть $1 < p < 2$. Тогда $q - 1 > 1$ и поэтому

$$|A^{q-1} - B^{q-1}| \leqslant (q-1)\max(A^{q-2}, B^{q-2})\,|A - B|,$$

$$\| U_{\gamma,p}\mu - U_{\gamma,p}\nu \,|\, I^\gamma(L_p)\|^p \leqslant \left(\frac{1}{p-1}\right)^p \int\limits_{\mathbf{G}} \max(A^{q(2-p)}, B^{q(2-p)})\,|A - B|^p\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{p-1}\right)^p \left[\int\limits_{\mathbf{G}} \max(A^q, B^q)\, dy\right]^{2-p} \left(\int\limits_{\mathbf{G}} |A - B|^q\, dy\right)^{p-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{p-1}\right)^p [\mathscr{E}_{\gamma,p}(\mu) + \mathscr{E}_{\gamma,p}(\nu)]^{2-p}[\mathscr{E}_{\gamma,p}(\mu-\nu)]^{p-1}$$

(мы воспользовались неравенством Гёльдера с показателями $(p-1)^{-1}$, $(2-p)^{-1}$). Неравенство (2.6) доказано. Из него следует утверждение леммы.

Лемма 2.9. *Пусть μ — мера с конечной (γ, p)-энергией. Существует возрастающая последовательность мер* $\{\lambda_s\}$, $s \in \mathbf{N}$, *с компактными носителями и конечной (γ, p)-энергией такая, что* $\lim\limits_{s\to\infty} U_{\gamma,p}\lambda_s(x) = U_{\gamma,p}\mu(x)$ *при любом* $x \in \mathbf{G}$, $\lim\limits_{s\to\infty}\| U_{\gamma,p}\lambda_s - U_{\gamma,p}\mu \,|\, I^\gamma(L_p)\| = 0$ *и* $U_{\gamma,p}\lambda_s$ *— функция, непрерывная в* $\mathbf{G}$ $(s \in \mathbf{N})$.

Для доказательства нам понадобится следующее

Предложение 2.10. *Пусть μ_1 и μ_2 — меры с компактными носителями. Если функции $U_{\gamma,p}\mu_1$ и $U_{\gamma,p}\mu_2$ непрерывны в* $\mathbf{G}$, *то и функция $U_{\gamma,p}(\mu_1+\mu_2)$ непрерывна в* $\mathbf{G}$.

Доказательство. Так же как при доказательстве теоремы 2.6, мы проверим, что $\lim\limits_{\rho\to 0} U_{\gamma,p}\mu_{j;x,\rho}(x)=0$ равномерно на объединении носителей мер μ_1 и μ_2 ($j=1,2$), откуда следует, что $\lim\limits_{\rho\to 0} U_{\gamma,p}(\mu_1+\mu_2)_{x,\rho}(x)=0$ равномерно на носителе меры $\mu_1+\mu_2$. По лемме 2.3 функция $U_{\gamma,p}(\mu_1+\mu_2)$ непрерывна в $\mathbf{G}$.

Доказательство леммы 2.9. Представим меру μ в виде $\mu=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mu^{(k)}$, где $\mu^{(k)}$ — сужение меры μ на слой $\{x\colon x\in\mathbf{G},\ k-1\leqslant r(x)<k\}$. К каждой из мер $\mu^{(k)}$ применима лемма 2.7. Пусть $\{\mu_j^{(k)}\}$, $j\in\mathbf{N}$, — возрастающая последовательность мер с непрерывными потенциалами, существование которой утверждается в этой лемме. Положим $\lambda_s=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_s^{(k)}$. Последовательность λ_s требуемая. Действительно, в силу предложения 2.10 функция $U_{\gamma,p}\lambda_s$ непрерывна в $\mathbf{G}$; $\lambda_s\leqslant\lambda_{s+1}$ при любом $s\in\mathbf{N}$. По лемме 2.7 последовательность мер $\{\lambda_s\}$, $s\in\mathbf{N}$, слабо сходится к мере μ. Из теоремы 2.5 следует, что при любом $y\in\mathbf{G}$ последовательность $\{\lambda_s * I_\gamma(y)\}$, $s\in\mathbf{N}$, монотонно возрастая, стремится к $\mu * I_\gamma(y)$. Теперь из теоремы Леви о предельном переходе под знаком интеграла следует, что при любом $x\in\mathbf{G}$

$$\lim_{s\to\infty} U_{\gamma,p}\lambda_s(x)=\lim_{s\to\infty}\int\limits_{\mathbf{G}} r(y^{-1}x)^{\gamma-\nu}(\lambda_s * r^{\gamma-\nu}(y))^{q-1}\,dy=$$

$$=\int\limits_{\mathbf{G}} r(y^{-1}x)^{\gamma-\nu}(\mu * r^{\gamma-\nu}(y))^{q-1}\,dy=U_{\gamma,p}\mu(x).$$

Далее, $\mathscr{E}_{\gamma,p}(\lambda_s-\mu)=\int\limits_{\mathbf{G}}|\lambda_s * I_\gamma-\mu * I_\gamma|^q\,dx\to 0$, так как подынтегральное выражение всюду стремится к нулю при $s\to+\infty$ и имеет суммируемую мажоранту $[\mu * I_\gamma]^q$. Из леммы 2.8 следует, что $\lim\limits_{s\to\infty}\|U_{\gamma,p}\lambda_s-U_{\gamma,p}\mu\,|I^\gamma(L_p)\|=0$. Доказательство закончено.

Замечание 2.11. Результаты этого параграфа в случае $\mathbf{G}=\mathbf{R}^n$, $r=|\cdot|$ приведены в [1, 4]. Теорема 2.6 для $\mathbf{G}=\mathbf{R}^n$, $A=E$, сформулирована в [7].

§ 3. Сравнение метрических и емкостных характеристик множеств. Теоремы типа Фростмана

3.1. Оценки для нелинейных потенциалов. Для меры μ на однородной группе $\mathbf{G}$ и положительного числа ρ положим

$$\omega(\mu,\rho)=\sup_{x\in\mathbf{G}}\mu(B(x,\rho)).$$

Теорема 3.1. *Пусть $p\in(1,\infty)$, $\gamma>0$, $p\gamma<\nu$. Существует число C такое, что для любых меры μ на* $\mathbf{G}$ *и точки $x\in\mathbf{G}$ справедливо неравенство*

$$U_{\gamma,p}\mu(x)\leqslant C\int\limits_0^{\infty}\left[\frac{\omega(\mu,\rho)}{\rho^{\nu-\gamma p}}\right]^{q-1}\frac{d\rho}{\rho}.$$

Теорема 3.2. *Пусть $\gamma > 0$, $2-\gamma/\nu < p < \nu/\gamma$. Существует число C такое, что для любой меры μ на $\mathbf{G}$ справедливо поточечное неравенство*

$$U_{\gamma,p}\mu(x) \leqslant C\int\limits_0^\infty \left[\frac{\mu(B(x,\rho))}{\rho^{\nu-\gamma p}}\right]^{q-1}\frac{d\rho}{\rho}, \quad x\in \mathbf{G}.$$

Замечание 3.3. Теоремы 3.1 и 3.2 в случае $\mathbf{G}=\mathbf{R}^n$, $A=E$, $r=|\cdot|$ доказаны в [4]. В общем случае их доказательства могут быть получены по той же схеме (см. [13], где теорема 3.1 доказана для случая $\mathbf{G}=\mathbf{R}^n$, $A\neq E$). Постоянная C в теоремах 3.1—3.2 зависит от γ, p, ν и постоянной в обобщенном неравенстве треугольника.

3.2. В этом пункте в качестве однородной группы $\mathbf{G}$ мы рассмотрим евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ с однопараметрической группой растяжений t^A, определяемой матрицей $A=\operatorname{diag}\{l^*/l_i\}$, где $\mathbf{l}=(l_1, l_2, \ldots, l_n)\in R^n_+$, $l^{*-1}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n l_i^{-1}$. Наряду с однородной относительно группы t^A нормой r, гладкой вне 0, рассмотрим эквивалентную ей [16] непрерывную однородную норму $|x|_1=\max\{|x_i|^{l_i/l^*}, i=1, 2, \ldots, n\}$. Величины $|x-y|_1$, $|x-A|_1=\inf\{|x-y|_1\colon y\in A\}$, $|A-B|_1=\sup\{|x-y|_1\colon x\in A, y\in B\}$ и $d_1(Q)=\sup\{|x-y|_1\colon x, y\in Q\}$ называется соответственно $\mathbf{l}$-*расстоянием* между точками x и y, точкой x и множеством $A\subset\mathbf{R}^n$, между множествами $A\subset\mathbf{R}^n$, и $B\subset\mathbf{R}^n$, $\mathbf{l}$-*диаметром множества* Q.

Обобщенное неравенство треугольника $|x+y|_1\leqslant c_1(|x|_1+|y|_1)$ выполняется с постоянной $c_1=\max\{2^{l_i/l^*}l_i/l^*\colon i=1, 2, \ldots, n\}$.

Рассмотрим решетку $\mathbf{Z}^n\subset\mathbf{R}^n$. Эта решетка точек определяет сетку M_0 кубов с ребрами единичной длины, вершины которых находятся в точках упомянутой выше решетки. Так же как и в [16], каждый из кубов разобьем на $s_{11}\cdot\ldots\cdot s_{1n}$ параллелепипедов первого ранга, поделив i-е ребро куба на s_{1i} равных частей при $s_{1i}=\left[d^{l^*/l_i}\right]\leqslant d^{l^*/l_i}$, где $d>1$. Каждый из новых параллелепипедов разобьем на $s_{21}\cdot\ldots\cdot s_{2n}$ параллелепипедов второго ранга и т. д. Мы получаем, таким образом, параллелепипеды k-го ранга с длиной ребер $1/s_{1i}\cdot\ldots\cdot s_{ki}$, где $s_{ki}=\left[d^{kl^*/l_i}/s_{1i}\cdot\ldots\cdot s_{k-1,i}\right]$. Поскольку $d^{kl^*/l_i}/s_{1i}\cdot\ldots\cdot s_{ki}\geqslant 1$, то $s_{k+1,i}\geqslant\left[d^{l^*/l_i}\right]\geqslant 1$ и имеются сколь угодно большие k с $s_{ki}>1$, так что процесс деления определен.

Для длин ребер очевидны следующие оценки:

$$l_{ki}=1/s_{1i}\cdot\ldots\cdot s_{ki}\geqslant d^{-kl^*/l_i},$$

$$l_{ki}=\frac{1}{s_{1i}\cdot\ldots\cdot s_{k-1,i}(s_{ki}+1)}\frac{s_{ki}+1}{s_{ki}}\leqslant 2d^{-kl^*/l_i}.$$

Таким образом, отправляясь от сетки M_0, мы построим конечную цепь сеток $\{M_k\}_0^\infty$, причем M_k состоит из параллелепипедов k-го ранга, для длин i-го ребра которых справедлива оценка

$$d^{-kl^*/l_i}\leqslant l_{ki}\leqslant 2d^{-kl^*/l_i}, \quad (k\in\mathbf{N}).$$

Тогда из определения $d_1(Q)$, $Q\in M_k$, и из обобщенного неравенства треугольника получаем

$$d^{-k}\leqslant d_1(Q)\leqslant c_1 d^{-k}, \quad k>0.$$

Теперь построим сетки M_k для отрицательных k. Пусть M_{-m} $(m>0)$ состоит из таких параллелепипедов, длина i-го ребра которых определяется как $l_{mi} = s_{1i} \cdot \ldots \cdot s_{mi}$. Легко видеть с учетом предыдущих оценок, что

$$\frac{1}{2} d^{ml^*/l_i} \leqslant l_{mi} = s_{1i} \cdot \ldots \cdot s_{m-1,i} \cdot s_{mi} =$$
$$= s_{1i} \cdot \ldots \cdot s_{m-1,i} \left[\frac{d^{ml^*/l_i}}{s_{1i} \cdot \ldots \cdot s_{m-1,i}} \right] \leqslant d^{ml^*/l_i}.$$

Отсюда получаем, что если $Q \in M_{-m}$ $(m > 0)$, то $c_1^{-1} d^m \leqslant d_1(Q) \leqslant d^m$ $(m \in N)$. Таким образом, мы построили бесконечную цепь сеток в обе стороны, причем, если $Q \in M_k$ $(k \in \mathbf{Z})$, то $c_1^{-1} d^{-k} \leqslant d_1(Q) \leqslant c_1 d^{-k}$.

Для неубывающей и непрерывной функции h: $[0, \infty) \to [0, \infty)$, $h(0) = 0$, и компакта $e \subset G$ определим величину

$$\Lambda_h^{(\rho)}(e) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} h(t_i): \ e \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, t_i), \ t_i \leqslant \rho \right\},$$

где $0 < \rho \leqslant +\infty$ и нижняя грань берется по всем покрытиям множества e шарами $B(x_i, t_i)$ с радиусами $t_i \leqslant \rho$. Ясно, что $\Lambda_h^{(\rho_1)}(e) \leqslant \Lambda_h^{(\rho_2)}(e)$, если $\rho_2 \leqslant \rho_1$, поэтому существует предел

$$\lim_{\rho \to 0} \Lambda_h^{(\rho)}(e) = \Lambda_h(e) \leqslant +\infty.$$

Величина $\Lambda_h(e)$ называется *мерой Хаусдорфа множества e по отношению к калибровочной функции h*. Если $h(\rho) = \rho^\alpha$, мы будем писать просто $\Lambda_\alpha(e)$. Функцию множества $\Lambda_h^{(\infty)}(e)$ иногда называют *вместимостью* (или *емкостью*) *Хаусдорфа*. Легко доказать, что $\Lambda_h^{(\infty)}(e) = 0$ тогда и только тогда, когда $\Lambda_h(e) = 0$.

Введем вспомогательную функцию $m_h(e)$ компактного множества e. Пусть M_k, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$ — построенная выше цепь n-мерных параллелепипедов с диаметром $d_1(Q)$, где $c_1^{-1} d^{-k} \leqslant d_1(Q) \leqslant c_1 d^{-k}$, и $\mathcal{G}$ — совокупность всех параллелепипедов, принадлежащих какой-либо из сеток M_k. Покроем множество e параллелепипедами $\omega_\nu \in \mathcal{G}$, считая эти параллелепипеды замкнутыми, и положим $m_h(e) = \inf \Sigma h(\delta_\nu)$, где δ_ν — диаметр параллелепипеда ω_ν и $h(\rho)$ — введенная выше калибровочная функция.

Очевидно, существуют две положительные константы c_1 и c_2, зависящие только от размерности пространства и вектора $\mathbf{l}$, такие, что

$$c_1 \Lambda_h^{(\infty)}(e) \leqslant m_h(e) \leqslant c_2 \Lambda_h^{(\infty)}(e). \tag{3.1}$$

Следующее утверждение является обобщением известной теоремы Фростмана, см., например, [2].

Теорема 3.4. *Пусть μ — мера в $\mathbf{R}^n$, матрица A имеет вид $A = \operatorname{diag}\{l^*/l_i\}$, $\mathbf{l} \in (\mathbf{R}_+)^n$, и h: $[0, \infty) \to [0, \infty)$ — калибровочная функция. Если для любого $\mathbf{l}$-шара B радиуса ρ*

$$\mu(B) \leqslant h(\rho), \tag{3.2}$$

то $\mu(e) \leqslant \Lambda_h^{(\infty)}(e)$.

Обратно, существует константа a, зависящая только от размерности, вектора $\mathbf{l}$, такая, что для любого компактного множества e существует ненулевая мера μ с носителем в e, обладающая свойством (3.2) и удовлетворяющая неравенству: $\mu(e) \leqslant a \Lambda_h^{(\infty)}(e)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует доказательству теоремы Фростмана, приведенному в [2] при $A = E$, где вместо кубической решетки надо использовать построенную выше решетку параллелепипедов и соотношение (3.1).

Емкостью компактного множества $e \subset \mathbf{R}^n$ в пространстве $I^{\mathbf{r}}(L_p)$ называется величина $\operatorname{cap}(e; I^{\mathbf{r}}(L_p)) = \inf \|f|I^{\mathbf{r}}(L_p)\|^p$, где нижняя грань берется по всем непрерывным функциям $f \in I^{\mathbf{r}}(L_p)$ таким, что $f(x) \geqslant 1$ для всех точек $x \in e$.

Свойства емкости $\operatorname{cap}(\cdot;\ I^\gamma(L_p))$ в анизотропном случае см. в [9] и § 6 настоящей работы.

Теорема 3.5. *Пусть $e \subset \mathbf{R}^n$ — компактное множество, а $h(\rho)$ — неубывающая непрерывная функция, для которой $h(0)=0$. Предположим, что*

$$\int\limits_0^\infty \left[\frac{h(\rho)}{\rho^{\nu-\gamma p}}\right]^{q-1} \frac{d\rho}{\rho} < \infty. \tag{3.3}$$

Тогда существует такая постоянная $\tilde{A}$, зависящая от размерности и вектора $\mathbf{l}$, что $\Lambda_h^{(\infty)}(e) \leqslant \tilde{A}\operatorname{cap}(e;\ I^\gamma(L_p))$ и, таким образом, $\Lambda_h(e)=0$, если $\operatorname{cap}(e;\ I^\gamma(L_p))=0$.

Доказательство. По теореме 3.4 существует ненулевая мера μ, сосредоточенная на e и такая, что $\omega(\mu,\ \rho) \leqslant h(\rho)$ при любом положительном $\rho > 0$ и $\Lambda_h^{(\infty)}(e) \leqslant a\mu(e)$.

Из теоремы 3.1 и условия (3.3) следует, что потенциал $U_{\gamma,p}\mu$ меры μ ограничен постоянной C. Пусть функция $f = v * r^{\gamma-n}$ больше единицы на e. Тогда для меры μ имеем

$$\mu(e) \leqslant \int\limits_{\mathbf{R}^n} f\,d\mu = \int\limits_{\mathbf{R}^n} v(y) \int\limits_{\mathbf{R}^n} r(y^{-1}z)\,d\mu(z)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \|v \mid L_p\| \left\{ \int\limits_{\mathbf{R}^n} \left[\int\limits_{\mathbf{R}^n} r(z^{-1}y)\,d\mu(z) \right]^{q-1} \int\limits_{\mathbf{R}^n} r(y^{-1}x)\,d\mu(x)\,dy \right\}^{1/q} =$$

$$= \|v \mid L_p\| \left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} U_{\gamma,p}\mu(x)\,d\mu(x) \right)^{1/q} \leqslant C^{1/q} \|v \mid L_p\| [\mu(e)]^{1-1/p}.$$

Таким образом, отсюда получаем

$$\Lambda_h^{(\infty)}(e) \leqslant a\mu(e) \leqslant aC^{p/q}\operatorname{cap}(e;\ I^\gamma(L_p)),$$

что и требовалось доказать.

В следующей теореме мы рассматриваем произвольную однородную группу $\mathbf{G}$ размерности ν.

Теорема 3.6. *Пусть E — борелевское подмножество группы $\mathbf{G}$. Если хаусдорфова мера множества E размерности $\nu - \gamma p$ конечна, то* $\operatorname{cap}(E;\ I^\gamma(L_p))=0$.

Доказательство. Допустим, что $0 < \operatorname{cap}(E;\ I^\gamma(L_p)) < \infty$. Тогда существует [18] единственная мера μ_E на $\mathbf{G}$ (называемая *емкостной мерой*) такая, что $\operatorname{supp}\mu \subset \bar{E}$, $\mu_E(\bar{E}) = \operatorname{cap}(E;\ I^\gamma(L_p))$ и $U_{\gamma,p}\mu_E(x) \leqslant 1$ для всех $x \in \operatorname{supp}\mu_E$. Согласно обобщенному принципу максимума (теорема 2.1) существует число $\mathfrak{M}$ такое, что $U_{\gamma,p}\mu_E(x) \leqslant \mathfrak{M}$ для всех $x \in \mathbf{G}$. По лемме 2.7 найдется компактное множество $e \subset \mathbf{G}$ такое, что $\mu_E(e) > 0$, а потенциал сужения меры μ_E на множество e (это сужение мы обозначим через θ) непрерывен в $\mathbf{G}$. Ясно, что $U_{\gamma,p}\theta(x) \leqslant \mathfrak{M}$ при любом $x \in \mathbf{G}$. Пусть

$$f(y) = \left(\int\limits_{\mathbf{G}} r(y^{-1}z)^{\gamma-\nu}\,d\theta(z) \right)^{q-1}, \quad F_\rho(x) = \int\limits_{r(x^{-1}y)>\rho} r(x^{-1}y)^{\gamma-\nu} f(y)\,dy.$$

Проверим, что

$$\lim_{\rho\to 0} [U_{\gamma,\rho}\theta(x) - F_\rho(x)] = 0 \tag{3.4}$$

равномерно на $\mathbf{G}$. Для этого обозначим через ρ число, большее $\sup\{c^{-1}r(z):\ z \in e\}$, и заметим, что если $r(x) \geqslant 3c^2\rho$, а $\rho_1 < \rho$, то при любом $z \in e$ неравенство $r(x^{-1}y) \leqslant \rho_1$ влечет неравенство $r(y^{-1}z) \geqslant \rho$: $r(y^{-1}z) \geqslant$

$\geqslant c^{-1}r(x^{-1}z)-r(x^{-1}y)\geqslant c^{-1}r(x^{-1}z)\rho \geqslant c^{-1}(c^{-1}r(x)-r(z))-\rho\geqslant 3\rho-\rho-$ $-\rho=\rho$. Кроме того, имеем

$$f(y)\leqslant[\theta(e)]^{q-1}\rho^{(\gamma-\nu)(q-1)},$$

$$U_{\gamma,\rho}\theta(x)-F_{\rho_1}(x)=\int\limits_{r(x^{-1}y)<\rho_1} r(x^{-1}y)^{\gamma-\nu}f(y)\,dy\leqslant$$

$$\leqslant C_1\rho^{(\gamma-\nu)(q-1)}\int\limits_{r(x^{-1}y)<\rho_1} r(x^{-1}y)^{\gamma-\nu}\,dy=C_1\rho^{(\gamma-\nu)(q-1)}\rho_1^{\gamma},$$

где C_1 не зависит от выбора ρ и ρ_1.

Таким образом, сходимость (3.4) осуществляется равномерно на дополнении шара $B(0,\ 3c^2\rho)$. Для доказательства равномерной сходимости на шаре $\overline{B(0,\ 3c^2\rho)}$ заметим, что непрерывные функции F_{ρ_1} возрастают при убывании ρ_1 и при $\rho_1\to 0$ сходятся к непрерывной функции $U_{\gamma,p}\theta$. Из теоремы Дини следует теперь, что предельное соотношение (3.4) выполняется равномерно на шаре $\overline{B(0,\ 3c^2\rho)}$. Отсюда следует, что функциональный ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\varphi_m(x)$, где $\varphi_m(x)=\int\limits_{(m+1)^{-1}<r(x^{-1}y)<m^{-1}} f(y)\times$ $\times r(x^{-1}y)^{\gamma-\nu}\,dy$, сходится равномерно на $\mathbf{G}$, и сумма его не превосходит $\mathfrak{M}$. Подберем последовательность положительных чисел $\{k_m\}$, $m\in\mathbf{N}$, монотонно стремящуюся к нулю и такую, что ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}k_m^{-1}\varphi_m(x)$ по-прежнему сходится равномерно на $\mathbf{G}$, а сумма его всюду не превосходит $2\mathfrak{M}$. Пусть $k(\rho)=k_m$, если $\rho\in\left[\frac{1}{m+1},\ \frac{1}{m}\right)(m=1,\ 2,\ \ldots)$, $k(\rho)=1$, если $\rho\geqslant$ $\geqslant 1$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbf{G}} f(y)\,r(x^{-1}y)^{\gamma-\nu}k(r(x^{-1}y))\,dy\leqslant 3\mathfrak{M}\tag{3.5}$$

при любом $x\in\mathbf{G}$.

Пусть B — какой-нибудь шар в группе $\mathbf{G}$. Если $x\in B$, то

$$\int\limits_{\mathbf{G}} f(y)\,r(x^{-1}y)^{\gamma-\nu}k(r(x^{-1}y))\,dy\geqslant$$

$$\geqslant\int\limits_{B}\left[\int\limits_{B} r(y^{-1}z)^{\gamma-\nu}\,d\theta(z)\right]^{q-1} r(x^{-1}y)^{\gamma-\nu}k(r(x^{-1}y))\,dy\geqslant$$

$$\geqslant[\theta(B)]^{q-1}(\operatorname{diam}B)^{(\nu-\gamma p)(q-1)}/k(\operatorname{diam}B).$$

Принимая во внимание (3.5), мы получаем неравенство

$$\frac{\theta(B)}{[k(\operatorname{diam}B)]^{p-1}}\leqslant(3\mathfrak{M})^{p-1}(\operatorname{diam}B)^{\nu-\gamma p},$$

каков бы ни был шар B. Пусть $\mathscr{B}=\{B\}$ — какое-нибудь не более чем счетное покрытие множества e, состоящее из ν-мерных шаров диаметра, меньшего ε. Тогда

$$\frac{\theta(e)}{[k(\varepsilon)]^{p-1}}\leqslant\sum_{B\in\mathscr{B}}\frac{\theta(B)}{[k(\operatorname{diam}B)]^{p-1}}\leqslant(3\mathfrak{M})^{p-1}\sum_{B\in\mathscr{B}}(\operatorname{diam}B)^{\nu-\gamma p}.\tag{3.6}$$

Если бы хаусдорфова мера множества E размерности $\nu-\gamma p$ была конечной, то нашлось бы положительное число M, обладающее тем свойством, что при любом положительном ε возможен выбор покрытия $\mathscr{B}$, при котором правая часть неравенства (3.6) меньше M. Это, однако, невозможно, так как $\vartheta(e)>0$, а $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}k(\varepsilon)=0$. Теорема доказана.

Следствие 3.7. *Пусть* $\mathbf{G}=\mathbf{R}^n$, *норма* r *однородна относительно растяжений* $\delta_t=t^A$, *где* $A=\operatorname{diag}\{l^*/l_i\}$, $l_i>0$, $i=1, 2, \ldots, n$, *а компактное множество* e *расположено в плоскости* $L=\{x\in\mathbf{R}^n: x_{i_1}=x_{i_2}=\ldots=x_{i_k}=0\}$, $k=1,\ldots,n-1$ *и имеет ненулевую* $(n-k)$*-мерную меру Лебега. Тогда* $\operatorname{cap}(e; I^{l^*}(L_p))=0$ *в том и только том случае, если* $p\leqslant 1/l_{i_1}+1/l_{i_2}+\ldots+1/l_{i_k}$.

Доказательство. Если $p\leqslant\sum\limits_{j=1}^{k}l_{i_j}^{-1}$, то $n-l^*p\geqslant l^*\sum\limits_{j=k+1}^{m}l_{i_j}^{-1}$. Отсюда для любого I-шара $Q(x,\rho)=\{y\in\mathbf{R}^n: r_1(x,y)\leqslant\rho\}$, $x\in L$, получаем соотношение $\rho^{n-l^*p}\leqslant bm_{n-k}(Q(x,\rho)\cap L)$, где m_{n-k} — $(n-k)$-мерная мера Лебега, а b — постоянная, зависящая от размерности. Следовательно, $(n-l^*p)$-мера Хаусдорфа множества e конечна. Из теоремы 3.6 следует, что $\operatorname{cap}(e; I^{l^*}(L_p))=0$.

Если теперь $p>1/l_{i_1}+\ldots+1/l_{i_k}$, то для некоторого δ имеем $\rho^{n-l^*p}>\rho^{\delta}\geqslant bm_{n-k}(Q(x,\rho)\cap L)$, где $x\in L$, а ρ произвольно. Полагая в теореме 3.5 $h(\rho)=\rho^{\delta}$, $\gamma=l^*$, мы получаем оценку

$$0<m_{n-k}(e)\leqslant\Lambda_h^{(\delta_0)}(e)\leqslant A\operatorname{cap}(e; I^{l^*}(L_p)).$$

Таким образом, следствие доказано.

Замечание 3.8. В доказательстве достаточности мы не использовали условие $m_{n-k}(e)\neq 0$. Поэтому для компактного множества e, расположенного в плоскости L, емкость $\operatorname{cap}(e; I^{l^*}(L_p))$ равна нулю всегда, когда $p\leqslant\sum\limits_{j=1}^{k}l_{i_j}^{-1}$.

Замечание 3.9. В линейном случае ($p=2$) результаты данного пункта обобщают классические теоремы Фростмана, см., например, [1, 2]. В нелинейной теории для $\mathbf{G}=\mathbf{R}^n$ и $r=|\cdot|$ теоремы 3.5—3.6 доказаны в [4] (см. также [3], где аналоги этих утверждений установлены в более слабой форме).

§ 4. Случай анизотропных бесселевых ядер

Почти все результаты, приведенные в § 2—3, справедливы также для потенциалов относительно анизотропных бесселевых ядер. Мы сформулируем здесь лишь те из них, которые видоизменяются при $\gamma p=\nu$ по сравнению с вышеизложенными.

В качестве однородной группы мы рассматриваем евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ с определенной на нем группой растяжений $\delta_t=t^A=\exp(A\ln t)$, $t>0$, где A — действительная $n\times n$-матрица с собственными числами λ_j, $\operatorname{Re}\lambda_j>0$, и $\operatorname{tr}A=\nu$. Пусть A' — матрица, сопряженная матрице A, $\delta_t'=t^{A'}$, $t>0$, и $r'\in C^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$ — однородная метрика, связанная с группой δ_t'. Анизотропное бесселево ядро есть функция $G_\gamma(x)$, $0<\gamma<\infty$, преобразование Фурье $\widehat{G}_\gamma(\xi)=\int\limits_{R^n}G_\gamma(x)e^{-i\xi\cdot x}\,dx$ которой равно $(1+r'(\xi))^{-\gamma/2}$ (здесь $\xi\cdot x=\xi_1x_1+\ldots+\xi_nx_n$ — скалярное произведение векторов).

Аналогично понятиям п. 2.1 мы определяем здесь энергию меры μ, $p\in(1,\infty)$, $p^{-1}+q^{-1}=1$,

$$\mathscr{E}_{\gamma,p}(\mu)=\int\limits_{\mathbf{R}^n}[G_\gamma*\mu]^q\,dx=\int\limits_{\mathbf{R}^n}V_{\gamma,p}\mu(x)\,d\mu(x),$$

где функция $V_{\gamma,p}\mu(x)=G_\gamma*[G_\gamma*\mu]^{q-1}(x)$ называется *нелинейным потенциалом меры* μ (относительно анизотропного ядра Бесселя G_γ).

Альтернативным к предыдущим параграфам является подход к теории потенциала, основанный на неравенстве Вольфа [8] (случай $A=E$ см. в [6, 19]). Положим для меры μ на $\mathbf{R}^n$

$$W_{\gamma,p}\mu(x)=\int_0^1\left[\frac{\mu(B(x,\rho))}{\rho^{\nu-\gamma p}}\right]^{q-1}\frac{d\rho}{\rho},\quad \gamma p\leqslant\nu.$$

Теорема 4.1. *Пусть μ — борелевская мера на $\mathbf{R}^n$. Существуют такие постоянные A_1 и A_2, что*

$$A_1\int_{\mathbf{R}^n}W_{\gamma,p}\mu\,d\mu\leqslant\int_{\mathbf{R}^n}V_{\gamma,p}\mu\,d\mu\leqslant A_2\int_{\mathbf{R}^n}W_{\gamma,p}\mu\,d\mu.\tag{4.1}$$

Доказательство. Для меры μ определим дробную максимальную функцию порядка γ

$$M_{\gamma;\tau}\mu(x)=\sup_{0<t\leqslant\tau}\frac{\mu(B(x,\tau))}{\tau^{\nu-\gamma}},\quad 0\leqslant\gamma<\nu,\quad \tau>0.$$

Используя неоднородный вариант теоремы Макенхаупта — Уидена [20], мы можем доказать неравенство

$$\|G_\gamma*\mu|L_q\|\leqslant A_\tau\|M_{\gamma;\tau}\mu|L_q\|,\quad 1<q<\infty,\tag{4.2}$$

где постоянная A_τ не зависит от выбора меры μ. Применяя к энергии $\mathscr{E}_{\gamma,p}(\mu)$ неравенство (4.2) и простое соотношение (здесь c — постоянная из обобщенного неравенства треугольника)

$$M_{\gamma;1/4c}\mu(x)\leqslant K\left[\int_0^{1/2c}\left[\frac{\mu(B(x,\rho))}{\rho^{\nu-\gamma}}\right]^q\frac{d\rho}{\rho}\right]^{\frac{1}{q}},\quad 1<q<\infty,$$

мы получаем, что

$$\mathscr{E}_{\gamma,p}(\mu)\leqslant K\int_{\mathbf{R}^n}\left[\int_0^{1/2c}\left[\frac{\mu(B(x,\rho))}{\rho^{\nu-\gamma}}\right]^q\frac{d\rho}{\rho}\right]dx=$$

$$=K\int_0^{1/2c}\left[\int_{\mathbf{R}^n}\mu(B(x,\rho))^q\,dx\right]\frac{d\rho}{\rho^{(\nu-\gamma)q+1}}.$$

Для внутреннего интеграла имеем

$$\int_{\mathbf{R}^n}\mu(B(x,\rho))^q\,dx=\int_{\mathbf{R}^n}\mu(B(x,\rho))^{q-1}\left(\int_{r(x-y)<\rho}d\mu(y)\right)dx=$$

$$=\int_{\mathbf{R}^n}\left(\int_{r(x-y)<\rho}\mu(B(x,\rho))^{q-1}\,dx\right)d\mu(y)\leqslant Ar^\nu\int_{\mathbf{R}^n}\mu(B(y,2c\rho))^{q-1}\,d\mu(y),$$

откуда следует правая часть неравенства (4.1).

Левая часть неравенства (4.1) есть следствие поточечной оценки

$$V_{\gamma,p}\mu(x)\geqslant A_1W_{\gamma,p}\mu(x).\tag{4.3}$$

В самом деле, используя характер поведения анизотропного ядра $G_\gamma(x)$ в окрестности 0 и ∞ [21, 22], для нелинейного потенциала $V_{\gamma,p}\mu(x)$ имеем оценку снизу

$$(\nu-\gamma)\int_0^1\rho^{\gamma-\nu}\left(\int_{r(x-y)<\rho}\left[\int_{r(x-z)<\rho}r(y-z)^{\gamma-\nu}\,d\mu(z)\right]^{q-1}dy\right)\frac{d\rho}{\rho}.$$

Последняя величина, очевидно, не превосходит

$$K\int_0^1 \rho^{(\gamma-\nu)q}\mu(B(x,\rho))^{q-1}\rho^{\nu}\frac{d\rho}{\rho},$$

откуда следует (4.3).

Для W-потенциалов справедливы аналоги результатов п. 2.2. Сформулируем два из них.

Теорема 4.2. *Пусть μ — мера в $\mathbf{R}^n$ и сужение функции $W_{\gamma,p}\mu(x)$ на множестве* $\operatorname{supp}\mu$ *— непрерывная функция. Тогда функция $W_{\gamma,p}\mu$ непрерывна в $\mathbf{R}^n$.*

Лемма 4.3. *Пусть μ — конечная мера в $\mathbf{R}^n$ и $W_{\gamma,p}\mu(x)<\infty$ при μ-почти всех x. Тогда существует последовательность $\{K_j\}$, $j\in\mathbf{N}$, замкнутых подмножеств группы $\mathbf{G}$ такая, что*

(а) *функция $W_{\gamma,p}\mu_j$, где μ_j — сужение меры μ на множество K_j, непрерывна в $\mathbf{G}$* $(j=1, 2, \ldots)$;

(в) $\lim\limits_{j\to\infty}\mu(G\setminus K_j)=0$.

Близкими к доказательствам теорем 3.5 и 3.6 расуждениями проверяются следующие утверждения (применение W-потенциалов упрощает их доказательство). Чтобы их сформулировать, введем пространство анизотропных бесселевых потенциалов

$$L_p^\gamma=\{f\colon f=G_\gamma * g,\ g\in L_p(\mathbf{R}^n)\},\qquad p\in(1,\infty),\quad 0<\gamma<\infty,$$

в котором норма $\|f\,|\,L_p^\gamma\|$ элемента $f=G_\gamma * g$ по определению равна $\|g\,|\,L_p\|$. В [21, 22] доказано, что $G_\gamma\in L_1$, поэтому свертка $G_\gamma * g$, $g\in L_p(\mathbf{R}^n)$, определена корректно. Там же установлено, что пространство L_p^γ, $p\in(1,\infty)$, не зависит от выбора δ_t'-однородной метрики r'.

Емкостью множества $E\subset\mathbf{R}^n$ относительно пространства L_p^γ называется величина

$$\operatorname{cap}(E;L_p^\gamma)=\inf\{\|f\,|\,L_p\|^p\colon f\in L_p,\ f\geqslant 0,\ G_\gamma * f\geqslant 1 \text{ на } E\}.$$

Общие свойства емкости изложены в [3, 4, 18, 23] или § 6 настоящей статьи.

Теорема 4.4. *Пусть E — борелевское множество в $\mathbf{R}^n$. Положим $h(\rho)=\rho^{\nu-\gamma p}$, если $\gamma p<\nu$ и $h(\rho)=(\ln(2/\rho))^{1-p}$, если $\gamma p=\nu$. Тогда $\operatorname{cap}(E;L_p^\gamma)=0$, если $\Lambda_h(E)<\infty$.*

Теорема 4.5. *Пусть матрица A диагональна, $\gamma p\leqslant\nu$ и $e\subset\mathbf{R}^n$ — компактное множество, а $h(\rho)$ — неубывающая непрерывная функция, для которой $h(0)=0$. Предположим, что*

$$\int_0^1\left[\frac{h(\rho)}{\rho^{\nu-\gamma p}}\right]^{q-1}\frac{d\rho}{\rho}<\infty.$$

Тогда существует такая постоянная $\tilde{A}$, зависящая от размерности и вектора $\mathbf{l}$, что $\Lambda_h^{(\infty)}(e)\leqslant\tilde{A}\operatorname{cap}(e;L_p^\gamma)$.

Таким образом, $\Lambda_h(e)=0$, если $\operatorname{cap}(e;L_p^\gamma)=0$.

З а м е ч а н и е 4.6. Из теорем 4.4 и 4.5 вытекают результаты для емкости $\operatorname{cap}(\cdot;L_p^\gamma)$, аналогичные следствию 3.7.

§ 5. Функциональные пространства на однородных группах и метрические свойства отображений

5.1. В задаче о свойствах отображений, индуцирующих операторы функциональных пространств по правилу замены переменной, мы различаем две постановки.

1. Отображение φ: $\mathbf{G} \to \mathbf{G}$ — гомеоморфизм однородной группы $\mathbf{G}$, а оператор φ^*, действующий по правилу $\varphi^* f = f \circ \varphi$, есть ограниченный оператор из полунормированного пространства функций $N(\mathbf{G})$, определенных на группе $\mathbf{G}$, в полунормированное пространство $F(\mathbf{G})$.

2. Отображение φ: $\mathbf{G} \to \mathbf{G}$ — измеримое отображение однородных групп, а оператор φ^* есть изоморфизм или эндоморфизм векторного пространства $F(\mathbf{G})$.

Настоящий параграф полностью (за исключением теоремы 5.11) посвящен первой задаче. Здесь мы развиваем идеи и методы работы [10] и доказываем результаты, сформулированные в [7, 24].

Вторая задача детально изучается в § 7, которому предшествует раздел (§ 6), где получены необходимые для ее исследования результаты по описанию особенностей функций на однородных группах.

5.2. Емкость на однородной группе. Рассмотрим полунормированное пространство $N(\mathbf{G})$ функций, определенных на однородной группе $\mathbf{G}$, в котором подмножество $N(\mathbf{G}) \cap C(\mathbf{G})$ всюду плотно.

Пусть (F_0, F_1) — пара множеств, содержащихся в группе $\mathbf{G}$. Функция $f \in N(\mathbf{G}) \cap C(\mathbf{G})$ называется *N-допустимой для пары множеств F_0, F_1*, если $f(x) = 0$ $(f(x) = 1)$ для всех x, принадлежащих некоторой окрестности множества F_0 (F_1). Величина

$$\mathfrak{C}(F_0, F_1; N(\mathbf{G})) = \inf \| f | N(\mathbf{G}) \|,$$

где нижняя грань берется по всем N-допустимым для пары (F_0, F_1) функциям, называется *емкостью пары множеств F_0, F_1 в пространстве $N(\mathbf{G})$*.

Непосредственно из определения вытекает следующее свойство емкости.

Свойство 5.1 (монотонность емкости относительно пары множеств). *Если пара множеств (F_0', F_1') содержится в паре множеств (F_0, F_1), т. е. $F_i' \subset F_i$, $i = 0, 1$, то*

$$\mathfrak{C}(F_0', F_1'; N(\mathbf{G})) \leqslant \mathfrak{C}(F_0, F_1; N(\mathbf{G})).$$

Функция двух переменных $0 < \rho < \mathrm{P} < \infty$

$$C(\rho, \mathrm{P}; N) = \mathfrak{C}(\mathbf{G} \setminus B(0, \mathrm{P}), \overline{B(0, \rho)}; N(\mathbf{G}))$$

называется *емкостью кольца* $D_{\rho, \mathrm{P}} = B(0, \mathrm{P}) \setminus \overline{B(0, \rho)}$ *в пространстве* $N(\mathbf{G})$ (здесь $\overline{B(0, \rho)}$ есть замыкание шара $B(0, \rho)$).

Из свойства 5.1 имеем следующее свойство емкости кольца.

Свойство 5.2. *Функция $C(\rho, \mathrm{P}; N)$ при фиксированном P не убывает на промежутке $(0, \mathrm{P})$, а при фиксированном ρ не возрастает на промежутке (ρ, ∞).*

Положим по определению

$$C(0, \mathrm{P}; N) = \lim_{\rho \to 0} C(\rho, \mathrm{P}; N), \quad C(\rho, \infty; N) = \lim_{\mathrm{P} \to \infty} C(\rho, \mathrm{P}; N).$$

Существование пределов вытекает из свойства 5.2.

Пространство $N(\mathbf{G})$ называется в дальнейшем *инвариантным относительно однопараметрической группы растяжений δ_t*, если для любой функции $f \in N(\mathbf{G})$ суперпозиция $\delta_t^* = f \circ \delta_t \in N(\mathbf{G})$, $t > 0$, причем полунорма пространства $N(\mathbf{G})$ однородна степени σ относительно действия группы δ_t^*, т. е.

$$\| \delta_t^* f | N(\mathbf{G}) \| = t^{\sigma} \| f | N(\mathbf{G}) \|.$$

Следующее свойство вытекает из однородности полунормы в пространстве $N(\mathbf{G})$ относительно однопараметрической группы растяжений.

Свойство 5.3. *Пусть пространство $N(\mathbf{G})$ инвариантно относительно действия группы растяжений δ_t, $t > 0$, причем полунорма в $N(\mathbf{G})$ одно-*

родна степени σ. Тогда емкости колец $D_{\rho,\mathrm{P}}$ и $D_{t\rho,t\mathrm{P}}$ в пространстве $N(\mathbf{G})$ связаны условием

$$C(\rho,\ \mathrm{P};\ N)=t^{\sigma}C(t\rho,\ t\mathrm{P};\ N),\ 0\leqslant\rho<\mathrm{P}\leqslant\infty.$$

Доказательство свойства 5.3 производится аналогично случаю $\mathbf{G}=\mathbf{R}^n$ [10].

Полагая в последнем свойстве $t=\mathrm{P}^{-1}$, получаем

$$C(\rho,\ \mathrm{P};\ N)=\mathrm{P}^{-\sigma}C(\rho/\mathrm{P},\ 1;\ N),\ 0\leqslant\rho<\mathrm{P}\leqslant\infty. \tag{5.1}$$

Назовем *емкостью Тейхмюллера* функцию переменной $r>0$

$$T(r;N)=\inf_{F_0,F_1}\mathfrak{C}(F_0,F_1;N(\mathbf{G})),$$

где нижняя грань берется по всем замкнутым связным множествам F_0, F_1 таким, что F_1 пересекает $S(0,\ r)$ и $\{0\}$, а F_0 пересекает $S(0,\ r)$ и $S(0,\ 2r)$.

Аналогично свойству 5.3 доказывается

Свойство 5.4. *Пусть выполнены условия свойства* 5.3. *Тогда емкости Тейхмюллера в пространстве $N(\mathbf{G})$ связаны условием*

$$T(r;\ N)=t^{\sigma}T(tr;\ N),$$

где σ — степень однородности полунормы в пространстве относительно группы растяжений δ_t, $t>0$.

Полагая в свойстве 5.4 $t=r^{-1}$, получаем

$$T(r;\ N)=r^{-\sigma}T(1;\ N),\ 0<r<\infty. \tag{5.2}$$

Будем говорить, что пространство $N(\mathbf{G})$ *инвариантно относительно сдвига*, если для любых левого сдвига L_a, $a\in\mathbf{G}$, и функции $f\in N(\mathbf{G})$ функция $L_a^*f=f\circ L_a$ также принадлежит пространству $N(\mathbf{G})$ и $\|L_a^*f\mid N(\mathbf{G})\|=\|f\mid N(\mathbf{G})\|$.

Свойство 5.5. *Пусть пространство $N(\mathbf{G})$ инвариантно относительно сдвига. Если L_a, $a\in\mathbf{G}$,— левый сдвиг на группе $\mathbf{G}$, то для любой пары множеств $(F_0,\ F_1)$ справедливо равенство*

$$\mathfrak{C}(F_0,\ F_1;\ N(\mathbf{G}))=\mathfrak{C}(L_a(F_0),\ L_a(F_1);\ N(\mathbf{G})).$$

Доказательство. Заметим, что функция $f\in N(\mathbf{G})$ допустима для пары $(L_a(F_0),\ L_a(F_1))$ тогда и только тогда, когда функция $L_a^*f=f\circ L_a$ является допустимой для пары $(F_0,\ F_1)$. При этом выполняется равенство $\|L_a^*f\|=\|f\|$. Поскольку допустимая функция f может быть выбрана произвольно, то отсюда следует требуемое свойство.

5.3. Метрические свойства гомеоморфизмов. В этом пункте доказывается основной результат параграфа о необходимых условиях для замены переменной в функциональных пространствах.

Теорема 5.6. *Пусть функциональные пространства $F(\mathbf{G})$ и $N(\mathbf{G})$ инвариантны относительно сдвига и однопараметрической группы растяжений δ_t, $t>0$, причем полунормы в $F(\mathbf{G})$ и $N(\mathbf{G})$ однородны степени σ относительно действия группы δ_t, $t>0$. Если гомеоморфизм φ: $\mathbf{G}\to\mathbf{G}$ порождает ограниченный оператор φ^*: $N(\mathbf{G})\leftarrow F(\mathbf{G})$ согласно правилу $\varphi^*f=f\circ\varphi$, $f\in N(\mathbf{G})$, то в случае*

1) $\sigma=0$ *и* $T(1;\ F)\neq0$, $C(0,\ 1;\ N)=0$ *отображение φ обладает свойством*

$$\max_{r(x,y)=\rho}r(\varphi(x),\varphi(y))\Big/\min_{r(x,y)=\rho}r(\varphi(x),\varphi(y))\leqslant C<\infty, \tag{5.3}$$

где C не зависит ни от $x\in\mathbf{G}$, ни от $\rho>0$;

2) $\sigma>0$ и $T(1;\ F)\neq 0$, $C(0,\ 1;\ F)\neq 0$ *отображение* φ *обладает свойством*

$$r(\varphi(x),\ \varphi(y))\leqslant Cr(x,\ y), \tag{5.4}$$

где C *не зависит от выбора точек* $x,\ y\in \mathbf{G}$;

3) $\sigma<0$ *и* $T(1;\ F)\neq 0$, $C(1,\ \infty;\ F)\neq 0$ *отображение* φ^{-1} *обладает свойством* (5.4), *т. е.* $r(\varphi^{-1}(x),\ \varphi^{-1}(y))\leqslant Cr(x,\ y)$, *где* C *не зависит от выбора точек* $x,\ y\in \mathbf{G}$;

Замечание 5.7. В случае $\mathbf{G}=\mathbf{R}^n$ теорема 5.6 установлена в [10]. В общем виде теорема сформулирована в [24].

Доказательству теоремы предпошлем три леммы.

Лемма 5.8. *Пусть непрерывное отображение* φ: $\mathbf{G}\to\mathbf{G}$ *индуцирует ограниченный оператор* φ^*: $N(\mathbf{G})\to F(\mathbf{G})$ *полунормированных пространств функций по правилу* $\varphi^*f=f\circ\varphi$, *где* $f\in N(\mathbf{G})$. *Тогда для любой пары замкнутых множеств* F_0, F_1 *в* $\mathbf{G}$ *имеем*

$$\mathfrak{C}(\varphi^{-1}(F_0),\ \varphi^{-1}(F_1);\ F(\mathbf{G}))\leqslant K\mathfrak{C}(F_0,\ F_1;\ N(\mathbf{G})),$$

где K — *норма оператора* φ^*.

Доказательство леммы следует из ограниченности оператора φ^* и того факта, что если функция $f\in N(\mathbf{G})$ допустима для пары $(F_0,\ F_1)$, то функция φ^*f допустима для пары множеств $(\varphi^{-1}(F_0),\ \varphi^{-1}(F_1))$.

Для гомеоморфизма φ: $\mathbf{G}\to\mathbf{G}$ введем следующие функции:

$$L(x,\ \rho)=\max_{r(x,y)=\rho} r(\varphi(x),\ \varphi(y)),\quad l(x,\ \rho)=\min_{r(x,y)=\rho} r(\varphi(x),\ \varphi(y)).$$

Здесь x — произвольная точка группы $\mathbf{G}$, а $\rho>0$.

Лемма 5.9. *Пусть функциональные пространства* $F(\mathbf{G})$ *и* $N(\mathbf{G})$ *инвариантны относительно сдвига. Если гомеоморфизм* φ: $\mathbf{G}\to\mathbf{G}$ *индуцирует ограниченный оператор* φ^*: $N(\mathbf{G})\to F(\mathbf{G})$ *по правилу* $\varphi^*f=f\circ\varphi$, $f\in N(\mathbf{G})$, *то справедливо неравенство*

$$T(\rho;\ F)\leqslant KC(l(x,\ \rho),\ L(x,\ \rho);\ N),$$

где x — *произвольная точка группы* $\mathbf{G}$, $\rho>0$, *а* K — *норма оператора* φ^*.

Доказательство. Положим $F_1=\overline{B}(\varphi(x),\ l(x,\ \rho))$, $F_0=\mathbf{G}\backslash B(\varphi(x),\ L(x,\ \rho))$. По определению емкости Тейхмюллера $T(\rho)$, свойствам 5.5, 5.1 и лемме 5.8 последовательно имеем следующие неравенства:

$$T(\rho;\ F)\leqslant\mathfrak{C}\,(L_{x^{-1}}(\varphi^{-1}(F_0)\cap D_{\rho,2\rho}),\ L_{x^{-1}}(\varphi^{-1}(F_1);\ F(\mathfrak{C})))=$$

$$=\mathfrak{C}\,(\varphi^{-1}(F_0)\cap L_xD_{\rho,2\rho},\ \varphi^{-1}(F_1);\ F(\mathbf{G}))\leqslant\mathfrak{C}\,(\varphi^{-1}(F_0),\ \varphi^{-1}(F_1);\ F(\mathbf{G}))\leqslant$$

$$\leqslant K\mathfrak{C}\,(F_0,\ F_1;\ N(\mathbf{G}))=K\mathfrak{C}\,(L_{\varphi(x)^{-1}}(F_0),\ L_{\varphi(x)^{-1}}(F_1);\ N(\mathbf{G}))=$$

$$=KC\,(l(x,\ \rho),\ L(x,\ \rho);\ N(\mathbf{G})).$$

Лемма 5.9 доказана.

Лемма 5.10. *Если выполнены условия теоремы* 5.6, *то справедливо неравенство*

$$\rho^{-\sigma}T(1;\ F)\leqslant KL^{-\sigma}(x,\ \rho)C(l(x,\ \rho)/L(x,\ \rho),\ 1;\ N),$$

где x — *произвольная точка группы* $\mathbf{G}$, $\rho>0$, *а* K — *норма оператора* φ^*.

Доказательство. Из леммы 5.9 и свойств 5.4 и 5.3 имеем

$$\rho^{-\sigma}T(1;\ F)=T(\rho;\ F)\leqslant KC(l(x,\ \rho),\ L(x,\ \rho);\ N)=$$

$$=KL^{-\sigma}(x,\ \rho)C(l(x,\ \rho)/L(x,\ \rho);\ N),$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 5.6. Рассмотрим первый случаи: $\sigma=0$. Из леммы 5.10 имеем

$$0<T(1;\ F)\leqslant KC(l(x,\ \rho)/L(x,\ \rho),\ 1;\ N). \tag{5.5}$$

По условию теоремы $\lim\limits_{t\to 0} C(t,\ 1;\ N)=0$. Поэтому если существуют последовательности $\{x_n\}$, $\{r_n\}$, $n\in N$, для которых $L(x_n,\ r_n)/l(x_n,\ r_n)\to\infty$ при $n\to\infty$, то мы приходим к противоречию с неравенством (5.5). Таким образом, (5.3) доказано.

Если $\sigma>0$, то из условий теоремы $T(1;\ F)\neq 0$ и по лемме 5.10 с учетом $0\neq C(0,\ 1;\ N)\leqslant C(t,\ 1;\ N)\leqslant C(1/2,\ 1;\ N)$, $t=\dfrac{l(x,\ \rho)}{L(x,\ \rho)}\leqslant\dfrac{1}{2}$, получаем

$$L(x,\ \rho)\leqslant\left\{\frac{KC(1/2,\ 1;\ N)}{T(1;\ F)}\right\}^{1/\sigma} r.$$

Отсюда немедленно следует неравенство

$$r(\varphi(x),\ \varphi(y))\leqslant C_1 r(x,\ y),$$

где $C_1=\{KC(1/2,\ 1;\ N)/T(1;\ F)\}^{1/\sigma}$, полученное в предположении, что $l(x,\ \rho)/L(x,\ \rho)\leqslant 1/2$.

В случае $1/2<l(x,\ \rho)/L(x,\ \rho)$ лемма 5.8, монотонность емкости (свойство 5.1) и свойство 5.5 приводят к соотношению

$$C(0,\ r;\ F)\leqslant KC(0,\ l(x,\ \rho);\ N),$$

откуда

$$\rho^{-\sigma}C(0,\ 1;\ F)\leqslant Kl^{-\sigma}(x,\ \rho)C(0,\ 1;\ N),$$

что приводит к неравенствам

$$L(x,\ \rho)\leqslant 2l(x,\ \rho)\leqslant 2\{KC(0,\ 1;\ N)/C(0,\ 1;\ F)\}^{1/\sigma}\rho.$$

Таким образом, в случае $1/2<l(x,\ \rho)/L(x,\ \rho)$ также получаем неравенство (5.4) с постоянной $C_2=2\{KC(0,\ 1;\ N)/C(0,\ 1;\ F)\}^{1/\sigma}$. Следовательно, при $\sigma>0$ неравенство (5.4) доказано с постоянной $C=\max(C_1,\ C_2)$.

Рассмотрим теперь случай $\sigma<0$. Из условий теоремы и свойств 5.2 и 5.3 получаем, что при $t\in(0,\ 1/2)$

$$C(t,\ 1;\ N)\leqslant C(t,\ 2t;\ N)=t^{-\sigma}C(1,\ 2;\ N).$$

Последнее соотношение позволяет переписать утверждение леммы 5.10 в следующем виде:

$$\rho^{-\sigma}T(1;\ F)\leqslant KL^{-\sigma}(x,\ \rho)\ \frac{l^{-\sigma}(x,\ \rho)}{L^{-\sigma}(x,\ \rho)}\ C(1,\ 2;\ N),$$

откуда

$$\rho\leqslant\left\{\frac{KC(1,\ 2;\ N)}{T(1;\ F)}\right\}^{-1/\sigma} l(x,\ \rho).$$

Из последнего неравенства следует соотношение

$$r(\varphi^{-1}(x),\ \varphi^{-1}(y))\leqslant C_3 r(x,\ y). \tag{5.6}$$

где $C_3=\{KC(1,\ 2;\ N)/T(1;\ F)\}^{-1/\sigma}$, полученное в предположении $l(x,\ \rho)/L(x,\ \rho)\leqslant 1/2$. В случае $1/2<l(x,\ \rho)/L(x,\ \rho)$ лемма 5.8 и свойства 5.1 и 5.5 приводят к неравенству

$$C(\rho,\ \infty;\ F)\leqslant KC(L(x,\ \rho),\ \infty;\ N),$$

из которого имеем

$$\rho^{-\sigma}C(1,\ \infty;\ F)\leqslant KL^{-\sigma}(x,\ \rho)C(1,\ \infty;\ N),$$

откуда

$$\rho \leqslant 2\{KC(1, \infty; N)/C(1, \infty; F)\}^{-1/\sigma} l(x, \rho).$$

Таким образом, в случае $1/2 < l(x, \rho)/L(x, \rho)$ мы также приходим к неравенству (5.6) с постоянной $C_4 = 2\{KC(1, \infty; N)/C(1, \infty; F)\}^{-1/\sigma}$. Следовательно, третье утверждение выполняется с постоянной $C = \max(C_3, C_4)$. Теорема доказана.

Применение теоремы 5.6 к конкретным функциональным пространствам см. в [10]. В [7] указаны те части шкал анизотропных пространств Бесова и бесселевых потенциалов, для которых полученные метрические условия гомеоморфизмов достаточны для замены переменной.

5.4. В этом пункте мы докажем утверждения о метрических свойствах отображений, индуцирующих ограниченный оператор неоднородных функциональных пространств. В следующем предложении однородная структура евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ определяется вектором гладкости $\mathbf{l} \in (\mathbf{R}_+)^n$: в группе растяжений $\delta_t = t^A$, $t > 0$, матрица $A = \operatorname{diag}\{l^*/l_i\}$, r — соответствующая однородная норма.

Непрерывное отображение φ: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ будем называть (r, ε)-*липшицевым*, $\varepsilon \in (0, \infty]$, если соотношение (5.4) выполняется для всех точек $x, y \in \mathbf{R}^n$, для которых $r(x, y) < \varepsilon$.

Теорема 5.11. *Пусть измеримое отображение* φ: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *порождает оператор* φ^*: $B^{\mathbf{l}}_{p,\theta_1}(\mathbf{R}^n) \to B^{\mathbf{l}}_{p,\theta_2}(\mathbf{R}^n)$, $p \in (1, \infty])$, $1 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \infty$, $l^*p > n$, *по правилу* $\varphi^* f = f \circ \varphi, f \in B^{\mathbf{l}}_{p,\theta_1}(\mathbf{R}^n)$. *Тогда существует* (r, ε)-*липшицево отображение* $\tilde{\varphi}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $\varepsilon > 0$ — *некоторое число, совпадающее с отображением* φ *почти всюду.*

Доказательство. Из C-свойства Лузина следует существование множества $F \subset \mathbf{R}^n$, $|\mathbf{R}^n \backslash F| = 0$, во всех точках которого отображение φ принимает естественные значения в следующем смысле. Пусть x, y — две точки из множества F. Тогда на некотором множестве $F_0 \subset F$, $x, y \in F_0$, все точки которого имеют ненулевую плотность, отображение φ непрерывно.

Пусть $f \in B^{\mathbf{l}}_{p,\theta_1}(\mathbf{R}^n)$ — непрерывная функция $(l^*p > n)$, а $\tilde{g} \in B^{\mathbf{l}}_{p,\theta_2}(\mathbf{R}^n)$ — непрерывная функция, совпадающая почти всюду с функцией $\varphi^* f$. Тогда в силу выбора множества F для всех точек $x \in F$ имеем $g(x) = f(\varphi(x))$.

Приведенное свойство позволяет проверить условия теоремы Банаха о замкнутом графике для отображения φ^*, откуда следует его ограниченность.

Рассмотрим две произвольные точки $x, y \in F$, и пусть $\rho = r(\varphi(x), \varphi(y))$. Тогда по свойствам 5.1, 5.5 емкости и лемме 5.8 имеем

$$\mathfrak{C}\left(\{x\}, \{y\}; B^{\mathbf{l}}_{p,\theta_2}\right) \leqslant KC\left(0, \rho; B^{\mathbf{l}}_{p,\theta_1}\right), \tag{5.7}$$

где K — норма оператора φ^*. Оценка снизу для емкости в левой части (5.7) следует из теоремы вложения [16]

$$i: B^{\mathbf{l}}_{p,\theta_2}(\mathbf{R}^n) \to B^{\mathbf{s}}_{\infty,\theta_2}(\mathbf{R}^n),$$

где $\mathbf{s} = t\mathbf{l}$, $t \in (0, l_M^{-1})$, $l_M = \max\limits_{i=1,\ldots,n} l_i$, $l^* - n/p = s^*$, и очевидных включений

$$B^{\mathbf{s}}_{\infty,\theta_2}(\mathbf{R}^n) \subset b^{\mathbf{s}}_{\infty,\theta_2}(\mathbf{R}^n) \subset b^{\mathbf{s}}_{\infty,\infty}(\mathbf{R}^n),$$

где строчной буквой «b» обозначается однородное пространство Бесова. Поскольку в более широком пространстве емкость может быть только меньше, то из приведенных вложений получаем

$$\mathfrak{C}(\{x\}, \{y\}; b^{\mathbf{s}}_{\infty,\infty}(\mathbf{R}^n)) \leqslant \mathfrak{C}(\{x\}, \{y\}; B^{\mathbf{l}}_{p,\theta_2}(\mathbf{R}^n)).$$

В работе [25] доказано, что

$$\mathfrak{C}\left(\{x\}, \{y\}; b^{s}_{\infty,\infty}(\mathbf{R}^n)\right) \geqslant \gamma r(x, y)^{-s^*},$$

где постоянная γ не зависит от выбора точек x, y. Имея в виду два последних неравенства, из (5.7) получаем

$$r(x, y)^{-(l^*-n/p)} \leqslant \gamma K C\left(0, \rho; B^{1}_{p,\theta_1}\right),$$

откуда

$$1/C\left(0, \rho; B^{1}_{p,\theta_1}\right) \leqslant \varphi K r(x, y)^{l^*-n/p}. \tag{5.8}$$

Неравенство (5.8) получено в предположении, что x, y — произвольные точки множества $F \subset \mathbf{R}^n$. Если величина $r(x-y)$ достаточно мала, то при $l^*p > n$ (5.8) может выполняться лишь тогда, когда $C\left(0, \rho; B^{1}_{p,\theta_1}\right)$ становится достаточно большой величиной, что происходит лишь при $\rho \to 0$. Таким образом установлено, что существует число $\varepsilon > 0$ такое, что как только $r(x, y) < \varepsilon$, то $\rho = r(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant 1$. В работе [10] доказано, что $C\left(0, \rho; B^{1}_{p,\theta_1}\right) \sim \rho^{-(l^*-n/p)}$. Поэтому из (5.8) окончательно получаем $r(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant Mr(x, y)$ для всех точек $x, y \in F$ таких, что $r(x, y) < \varepsilon$. Поскольку $|\mathbf{R}^n \backslash F| = 0$, то отображение φ: $F \to \mathbf{R}^n$ продолжается по непрерывности до (r, ε)-липшицева отображения $\tilde{\varphi}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, для которого выполняется соотношение $r(\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(y)) \leqslant Mr(x, y)$ уже для всех точек $x, y \in \mathbf{R}^n$, $r(x, y) \leqslant \varepsilon$. Теорема доказана.

Теорема 5.11 позволяет получать аналогичные результаты для промежуточных пространств, например, пространств анизотропных бесселевых потенциалов, пространств Кальдерона [26] и др.

Следующее предложение мы сформулируем для изотропных пространств Бесова. Так же как и в предыдущем случае, из него получаются следствия для промежуточных шкал пространств: изотропных бесселевых потенциалов, Кальдерона и др. Гомеоморфизм φ: $\mathbf{G} \to \mathbf{G}$, удовлетворяющий условию (5.3), будем называть (r, ∞)-*квазиконформным.*

Предложение 5.12. *Пусть гомеоморфизм* φ: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *порождает ограниченный оператор* φ^*: $B^{(l)}_{p,\theta_1}(\mathbf{R}^n) \to B^{(l)}_{p,\theta_2}(\mathbf{R}^n)$, $p \in (1, \infty)$, $1 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \infty$, *изотропных пространств Бесова по правилу* $\varphi^* f = f \circ \varphi$, $f \in B^{(l)}_{p,\theta_1}(\mathbf{R}^n)$.

Тогда

1) *при* $lp = n$, $\theta_1 > 1$ *отображение* φ $(|\cdot|, \infty)$-*квазиконформно и обратное отображение* φ^{-1} *удовлетворяет условию* $|\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(y)| \leqslant M$ *для всех* $x, y \in \mathbf{R}^n$, $|x-y| = 1$; *если при этом* $1 < \theta_1 = \theta_2 < \infty$, *то существует постоянная* $\alpha \in (0, 1]$ *такая, что для всех точек* $x, y \in \mathbf{R}^n$, $|x-y| \leqslant 1$,

$$|\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(y)| \leqslant M|x-y|^{\alpha};$$

2) *при* $n-1 < lp < n$ *отображение* φ^{-1} $(|\cdot|, \infty)$-*липшицево.*

Доказательство следует схеме доказательства теоремы 5.6 с учетом следующих замечаний. Если точка $x \in \mathbf{R}^n$ фиксирована, то радиус $\rho > 0$ шара с центром в точке x выбирается таким, чтобы $L(x, \rho)$ было меньше 1. Имея в виду соотношения $T\left(\rho, b^{(l)}_{p,\theta_2}\right) \leqslant T\left(\rho, B^{(l)}_{p,\theta_2}\right)$, $C\left(l(x, \rho), L(x, \rho); B^{(l)}_{p,\theta_1}\right) \sim C\left(l(x, \rho), L(x, \rho); b^{(l)}_{p,\theta_1}\right)$ $(L(x, \rho) \leqslant 1!)$, перепишем неравенство леммы 5.9 в следующем виде:

$$T\left(\rho, b^{(l)}_{p,\theta_2}\right) = \tilde{K} C\left(l(x, \rho), L(x, \rho); b^{(l)}_{p,\theta_1}\right).$$

Принимая во внимание, что норма в пространстве $b^{(l)}_{p,\theta}$, $\theta \in [1, \infty]$, однородна степени $\sigma = l - n/p$ относительно группы $\delta_t(x) = tx$, $t > 0$, так же, как в теореме 5.6, мы получаем, что при $lp=n$

$$\overline{\lim_{\rho\to 0}} \max_{|x-y|=\rho} |\varphi(x)-\varphi(y)| / \min_{|x-y|=\rho} |\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant C < \infty,$$

а при $n-1 < lp - n$

$$\overline{\lim_{y\to x}} |\varphi^{-1}(x)-\varphi^{-1}(y)|/|x-y| \leqslant C < \infty$$

(здесь постоянные в правой части неравенств не зависят от выбора точки x). Отсюда в силу известных свойств квазиконформных отображений, см., например [27], при $lp=n$ получаем $(|\cdot|, \infty)$-квазиконформность как прямого отображения φ, так и обратного отображения φ^{-1}, а при $n-1<lp<n$ — $(|\cdot|, \infty)$-липшицевость отображения φ^{-1}.

В случае 1 остается доказать, что при $|x-y|=1$, x, $y\in\mathbf{R}^n$ верно $|\varphi^{-1}(x)-\varphi^{-1}(y)|\leqslant M$, где постоянная M не зависит от выбора точек x, y. Пусть

$$x\in\mathbf{R}^n,\ L(x,t)=\max_{|y-x|=t}|\varphi^{-1}(x)-\varphi^{-1}(y)|,\ l(x,t)=\min_{|y-x|=t}|\varphi^{-1}(x)-\varphi^{-1}(y)|,$$

k — коэффициент квазиконформности обратного отображения φ^{-1}. Тогда для всех точек $x\in\mathbf{R}^n$, $t>0$ $L(x,t)/l(x,t)\leqslant k$ и $B(\varphi^{-1}(x), l(x,t))\subset \varphi^{-1}(B(x,t))$. Поэтому для любой функции $f\in B^l_{p,\theta_1}(\mathbf{R}^n)\cap C$, $f\geqslant 1$ на $B(x,t)$ имеем

$$\left\|\varphi^* f \mid B^l_{p,\theta_2}\right\| \leqslant C \left\|f \mid B^l_{p,\theta_1}\right\|,$$

откуда в силу произвола в выборе функции f получаем соотношение

$$\operatorname{cap}\left(B(\varphi^{-1}(x), l(x,t));\ B^l_{p,\theta_2}\right) \leqslant C^p \operatorname{cap}\left(B(x,t);\ B^l_{p,\theta_1}\right). \tag{5.9}$$

(Определение емкости cap см. в § 6.) Из (5.9) при $t=1$ следует неравенство

$$[l(x,1)]^n \leqslant C^p \operatorname{cap}\left(B(x,1);\ B^l_{p,\theta_1}\right).$$

Отсюда для точек x, $y\in\mathbf{R}^n$, $|x-y|=1$, немедленно получаем

$$|\varphi^{-1}(x)-\varphi^{-1}(y)| \leqslant L(x) \leqslant kl(x) \leqslant M.$$

Если $1<\theta_1=\theta_2<\infty$, то, полагая $q=\theta_1=\theta_2$, из (5.9) следует (см. п. 7.5)

$$\left[\ln\frac{1}{l(x,t)}\right]^{-p/q'} \leqslant C' \left[\ln\frac{1}{t}\right]^{-p/q'},$$

где $q'=q/(q-1)$, $t\leqslant 1$. Таким образом, для всех точек x, $y\in\mathbf{R}^n$, $|x-y|\leqslant 1$, имеем

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha,$$

где α — некоторая положительная постоянная, не превосходящая единицы.

В конце пункта мы докажем теорему, иллюстрирующую точность метрических условий, полученных в последнем предложении.

Теорема 5.13 [7]. *Гомеоморфизм* $\varphi\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ *тогда и только тогда индуцирует ограниченный оператор* $\varphi^*\colon W^1_n(\mathbf{R}^n)\to W^1_n(\mathbf{R}^n)$, $n\geqslant 2$, *неоднородных пространств Соболева, когда гомеоморфизм* φ $(|\cdot|, \infty)$-*квазиконформен и* $|\varphi^{-1}(x)-\varphi^{-1}(y)|\leqslant M$ *для всех точек* x, $y\in\mathbf{R}^n$, $|x-y|=1$, *где постоянная* M *не зависит от выбора точек* x, y.

Доказательство. Необходимость условий теоремы доказывается так же, как предложение 5.12.

Если $f \in \mathcal{L}_n^1$, где $\|f \mid \mathcal{L}_n^1\| = \left\{\int\limits_{\mathbf{R}^n} |\nabla f|^n dx\right\}^{1/n}$, то (см. например, [27]) $\|\varphi^* f \mid \mathcal{L}_n^1\| \leqslant C(K) \|f \mid \mathcal{L}_n^1\|$, где постоянная $C(K)$ зависит только от коэффициента квазиконформности отображения φ и размерности пространства. В случае неоднородного пространства Соболева рассмотрим конечнократное разбиение единицы $\{\eta_j\}$ пространства $\mathbf{R}^n$ такое, чтобы $s(\eta_j)$ содержались в шаре единичного радиуса и

$$\|f \mid W_n^1\| \sim \left\{\sum_j \|f\eta_j \mid W_n^1\|^n\right\}^{1/n}$$

(см., например, [28]). Тогда, в силу равенства $\sum\limits_j \varphi^*\eta_j = 1$, для функции $f \in W_n^1$ имеем

$$\|\varphi^* f \mid L_n\|^n \leqslant C \sum_j \|\varphi^*(f\eta_j) \mid L_n\|^n \leqslant CM \sum_j \|\varphi^*(f\eta_j) \mid \mathcal{L}_n^1\|^n \leqslant$$
$$\leqslant C'M \sum_j \|f\eta_j \mid \mathcal{L}_n^1\|^n \leqslant C''M \|f \mid W_n^1\|^n.$$

Здесь во втором неравенстве мы воспользовались неравенством Фридрихса, поскольку $s(\varphi^*(f\eta_j))$ содержится в шаре радиуса M, а в третьем — ограниченностью оператора φ^* в $\mathcal{L}_n^1$, C, C', C'' — различные постоянные, не зависящие от функции f.

Таким образом, окончательно получаем ограниченность оператора φ^*: $W_n^1 \to W_n^1$. Теорема доказана.

Другие результаты о достаточных условиях замены переменной в функциональных пространствах, близкие к теоремам 5.11, 5.13, см. в [7]. Более ранние результаты приведены в § 7.

§ 6. Емкость в функциональных пространствах

Пусть $F(X)$ — нормированное пространство функций, определенных на топологическом локально компактном пространстве X. Обозначим символом $F_{\rm lsc}(X)$ пересечение $F(X) \cap C_{\rm lsc}(X)$ (здесь $C_{\rm lsc}(X)$ — множество полунепрерывных снизу функций, определенных на пространстве X). Далее мы фиксируем некоторый конус $K \subset F_{\rm lsc}$ неотрицательных функций из $F(X)$ с вершиной в точке 0. Будем предполагать далее, что для любого компакта $e \subset X$ класс функций

$$\mathfrak{N}_K(e) = \{f \in K\colon\ f(x) \geqslant 1 \text{ для всех } x \in e\}$$

не пуст. Норма в $F(X)$ определяет функцию множества, называемую *емкостью*, которая на компактных множествах определяется равенством

$$\mathscr{C}_K(e;\ F(X)) = \inf\{\|f\|\colon\ f \in \mathfrak{N}_K(e)\}.$$

Говоря об общих свойствах емкости, символы K и $F(X)$ в обозначении емкости $\mathscr{C}_K(e;\ F(X))$ мы будем опускать, если это не приводит к разночтениям.

Для произвольного множества $E \subset X$ стандартным образом определяется *внутренняя емкость*

$$\underline{\mathscr{C}}(E) = \sup\{\mathscr{C}(e)\colon\ e \subset E \subset X,\ e \text{ — компакт}\}$$

и *внешняя емкость*

$$\overline{\mathscr{C}}(E) = \inf\{\underline{\mathscr{C}}(U)\colon\ E \subset U \subset X,\ U \text{ — открытое множество}\}.$$

Множество $E \subset X$ называется *измеримым относительно емкости* $\mathscr{C}$ (или просто *$\mathscr{C}$-измеримым*), если $\underline{\mathscr{C}}(E) = \overline{\mathscr{C}}(E)$.

Стандартным образом последовательно доказываются следующие свойства емкости.

Лемма 6.1. 1. *Если множество $e \subset X$ компактно, то для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $U_\varepsilon \subset X$ такое, что $e \subset U_\varepsilon$, и для всякого компакта $e' \subset U_\varepsilon$*

$$\mathscr{C}(e') \leqslant \mathscr{C}(e) + \varepsilon.$$

2. *Если $E \subset E'$, то $\underline{\mathscr{C}}(E) \leqslant \underline{\mathscr{C}}(E')$ и $\overline{\mathscr{C}}(E) \leqslant \overline{\mathscr{C}}(E')$.*

3. *Все компактные и открытые подмножества X $\mathscr{C}$-измеримы.*

4. *Пусть $\{E_k\}$, $k \in \mathbb{N}$,— последовательность множеств в X, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Тогда $\overline{\mathscr{C}}(E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mathscr{C}}(E_k)$.*

5. *Для всякой возрастающей последовательности множеств $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_k \subset \ldots$*

$$\overline{\mathscr{C}}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sup_k \overline{\mathscr{C}}(E_k).$$

6. *Для всякой убывающей последовательности компактов $e_1 \supset e_2 \supset \ldots \supset e_k \supset \ldots$*

$$\overline{\mathscr{C}}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} e_k\right) = \inf \overline{\mathscr{C}}(e_k).$$

Сформулированные свойства показывают, в частности, что функция множества $\mathscr{C}_K(e;\ F(X))$ есть обобщенная емкость в смысле Шоке, поэтому все аналитические множества $\mathscr{C}$-измеримы [29]. Если, кроме того, X — локально компактное топологическое пространство со счетной базой, то всякое борелевское множество в X аналитично [30], а следовательно, $\mathscr{C}$-измеримо.

Будем говорить, что *конус K в нормированном пространстве $F(X)$ удовлетворяет условию мажорируемости* [31], если для всякой функции $f \in F(X)$ существует функция $\tilde{f} \in K$ такая, что $|f(x)| \leqslant \tilde{f}(x)$ и $\|\tilde{f}|F\| \leqslant M\|f|F\|$, где постоянная M не зависит от выбора функции f. В дальнейшем мы полагаем постоянную M в условии мажорируемости равной 1. Это не ограничивает общности, поскольку пространство $F(X)$ всегда можно перенормировать эквивалентным образом, определяя $\|f\|_1 = \max(\|f\|, \inf \|\tilde{f}\|)$, где нижняя грань берется по всем функциям $\tilde{f} \in K$, для которых $|f(x)| \leqslant \tilde{f}(x)$, $x \in X$.

Из условия мажорируемости для любого компакта $e \subset X$ имеем соотношение

$$\mathscr{C}_K(e;\ F(X)) = \inf\{\|f\|:\ f \in F(X) \text{ и } |f(x)| \geqslant 1 \text{ на } e\}. \tag{6.1}$$

Приведем примеры пространств, удовлетворяющих сформулированным выше условиям.

Пример 1. Пусть X — топологическое локально-компактное хаусдорфово пространство и μ — неотрицательная мера, определенная на σ-алгебре всех борелевских множеств пространства X. Дополнительно предположим, что для всякой точки $x \in X$ и любой ее окрестности U мера $\mu(U)$ отлична от нуля и мера любого компакта конечна. В качестве $F(X)$ рассмотрим пространство $L_p(X) \cap C(X)$ непрерывных на X функций, суммируемых в степени p, $p \in [1, \infty)$, по мере μ. Пусть конус K состоит из всех неотрицательных функций пространства $F(X)$. Тогда для любого компакта $e \subset X$

$$\mathscr{C}_K(e;\ F(X)) = \mu(e)^{1/p}.$$

Пример 2 [20, 21]. Пусть X и Y — пространства из примера 1, а ν — неотрицательная мера, определенная на σ-алгебре всех борелевских множеств пространства Y. Пусть еще $k\colon X\times Y\to\mathbf{R}$ — неотрицательная борелевская функция такая, что для всякой неотрицательной функции $f\in L_p(Y, \nu)$ функция $Kf(x)=\int\limits_Y k(x, y)f(y)\,d\nu(y)$ полунепрерывна снизу на X. (Последнее свойство легко проверяется, когда ядро $k(x, y)$ в дополнение к приведенным выше свойствам полунепрерывно снизу.)

Пусть $p\in[1, \infty)$. Определим функциональное пространство $F(X)=\{g=Kf\colon f\in L_p(Y, \nu)\}$. Норму функции $g\in F(X)$ полагаем равной $\|f|L_p(Y, \nu)\|$. В качестве конуса $K\subset F_{\mathrm{lsc}}(X)$ рассмотрим множество $\{g=Kf\colon f\geqslant 0,\ f\in L_p(Y, \nu)\}$. Тогда емкость компакта $e\subset X$ равна

$$\mathscr{C}_K(e; F(X))=\left[\inf\left\{\int f(y)^p\,d\nu(y)\colon f\geqslant 0 \text{ и } Kf(x)\geqslant 1 \text{ на } e\right]\right\}^{1/p}.$$

Пример 3 [4, 7, 9]. Положим в предыдущем примере $X=Y=\mathbf{G}$, где $\mathbf{G}$ — однородная группа. В качестве меры ν рассмотрим биинвариантную меру Хаара на группе $\mathbf{G}$, а в качестве ядра $k(x, y)$ — ядро Рисса $r(y^{-1}x)^{\gamma-\nu}$. Тогда пространство $F(\mathbf{G})$ есть пространство $I^\gamma(L_p)$ риссовых потенциалов $(1<p<\nu/\gamma)$, а емкость $\mathscr{C}_K(e; I^\gamma(L_p))=[\mathrm{cap}(e; I^\gamma(L_p))]^{1/p}$. Случай $\mathbf{G}=\mathbf{R}^n$, $A=E$ см. в [4]. Если $A=\mathrm{diag}\{l^*/l_i\}$, где все компоненты l_i вектора гладкости $\mathbf{l}$ — целые числа, то пространство $I^{l^*}(L_p)$ совпадает [13] с замыканием $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ по норме однородного анизотропного пространства Соболева $\mathscr{L}_p^{\mathbf{l}}(\mathbf{R}^n)$:

$$\|f\,|\,\mathscr{L}_p^{\mathbf{l}}(\mathbf{R}^n)\|=\sum_{i=1}^n\left\|D_i^{l_i}f\,|\,L_p\right\|.$$

Пример 4 [3, 7, 9]. Положим в примере 2 $X=Y=\mathbf{R}^n$, мера ν на $\mathbf{R}^n$ — это мера Лебега dx, а в качестве ядра $k(x, y)$ рассмотрим анизотропное бесселево ядро $G_\gamma(x-y)$. Тогда пространство $F(\mathbf{R}^n)$ есть пространство анизотропных бесселевых потенциалов L_p^γ, $1<p<\infty$, а емкость $\mathscr{C}_K(e; L_p^\gamma)$ компакта e равна $[\mathrm{cap}(e; L_p^\gamma)]^{1/p}$. Случай $A=E$ см. в [3]. Если $A=\mathrm{diag}\{l^*/l_i\}$, где все компоненты вектора $\mathbf{l}$ — целые числа, то пространство L_p^γ совпадает [21] с замыканием $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ по норме анизотропного пространства Соболева $W_p^{\mathbf{l}}$:

$$\|f\,|\,W_p^{\mathbf{l}}(\mathbf{R}^n)\|=\|f\,|\,L_p\|+\sum_{i=1}^n\left\|D_i^{l_i}f\,|\,L_p\right\|.$$

Пример 5 [16, 32—35]. Согласно работам [32, 33], анизотропное пространство Бесова $B_{p,\theta}^{\mathbf{l}}$, $1\leqslant p$, $\theta\leqslant\infty$, изоморфно нулевому пространству $B_{p,\theta}^{0\mathbf{l}}$, состоящему из специально определенных обобщенных функций. При этом изоморфизм между ними реализуется как оператор свертки с анизотропным бесселевым ядром G_{l^*}, определяемым матрицей $A=\mathrm{diag}\{l^*/l_i\}$. Таким образом, $f\in B_{p,\theta}^{\mathbf{l}}$ тогда и только тогда, когда для некоторой функции $g\in B_{p,\theta}^{0l}$ $f=G_{l^*}*g$, $1\leqslant p$, $\theta\leqslant\infty$, при этом

$$\left\|g\,|\,B_{p,\theta}^{0\mathbf{l}}\right\|\sim\left\|f\,|\,B_{p,\theta}^{\mathbf{l}}\right\|.$$

Поскольку $G_\gamma*G_\delta=G_{\gamma+\delta}$, то всякое пространство Бесова $B_{p,\theta}^{\mathbf{l}}$ изоморфно некоторому пространству $B_{p,\theta}^{\delta\mathbf{l}}$, где все компоненты вектора $\delta\mathbf{l}$ не превосходят единицы, $\delta>0$. При этом для некоторого $\gamma>0$ имеем

$$G_\gamma(B_{p,\theta}^{\delta\mathbf{l}})=B_{p,\theta}^{\mathbf{l}},\quad \left\|g\,|\,B_{p,\theta}^{\delta\mathbf{l}}\right\|\sim\left\|G_\gamma*g\,|\,B_{p,\theta}^{\mathbf{l}}\right\|.$$

Заметим, что пространство $B_{p,\theta}^{\delta\mathbf{l}}$ есть векторная решетка, т. е. для любой функции $f\in B_{p,\theta}^{\delta\mathbf{l}}$ функция $|f|$ принадлежит $B_{p,\theta}^{\delta\mathbf{l}}$, причем $\left\|f^+\,|\,B_{p,\theta}^{\delta\mathbf{l}}\right\|\leqslant\left\|f\,|\,B_{p,\theta}^{\delta\mathbf{l}}\right\|$ (как обычно $f^+=1/2(f+|f|)$).

В качестве конуса K в пространстве $B^1_{p,\theta}$ рассмотрим множество функций $K = \{G_\gamma * g\colon\ g \geqslant 0,\ g \in B^{\delta 1}_{p,\theta}\}$. Из приведенных выше эквивалентностей норм следует свойство мажорируемости конуса K в пространстве $B^1_{p,\theta}$. Случай $A = E$ см. в [34, 35].

Дальнейшие свойства емкости, формулируемые ниже, в различных частных случаях приведены в работах [3, 4, 18, 23]. Мы опускаем доказательства свойств, не использующие специфику анизотропной геометрии.

Из условия мажорируемости следует

Лемма 6.2. *Для всякой функции $f \in F(X)$ и числа $\alpha \in (0, \infty)$ существует открытое множество U_α такое, что $\{x \in X\colon |f(x)| > \alpha\} \subset U_\alpha$ и $\mathscr{C}(U_\alpha) \leqslant \|f\|/\alpha$.*

Лемма 6.1 и 6.2 стандартным образом используются для доказательства следующего результата.

Теорема 6.3. *Всякая фундаментальная в $F(X)$ последовательность функций $\{f_k\}$, $f_k \in F(X)$, $k \in \mathbf{N}$, содержит подпоследовательность, сходящуюся всюду за исключением множества нулевой внешней емкости, причем для произвольного $\varepsilon > 0$ существует открытое множество U_ε такое, что $\mathscr{C}(U_\varepsilon) < \varepsilon$ и на множестве $X \backslash U_\varepsilon$ подпоследовательность сходится равномерно.*

Термин «квазивсюду», употребленный далее к некоторому свойству, означает его выполнение всюду за исключением множества, имеющего внешнюю емкость нуль.

По теореме Хаусдорфа пространство $F(X)$ можно пополнить до пространства $\tilde{F}$, элементами которого являются классы эквивалентных фундаментальных последовательностей. Теорема 6.3 позволяет реализовать пополнение $\tilde{F}$ как классы эквивалентных функций на X, определенных квазивсюду.

Функция f, принадлежащая $\tilde{F}$, называется *уточненной* (*C-уточненной*), если существует последовательность $\{f_s\}$, $s \in \mathbf{N}$, функций из $F(X)$ $(F(X) \cap C(X))$ такая, что

1) $\lim\limits_{s\to\infty} \| f - f_s \| \tilde{F} \| = 0$,

2) для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое открытое множество U_ε, что $\mathscr{C}(U_\varepsilon) < \varepsilon$ и $f_s \to f$ равномерно в $X \backslash U_\varepsilon$ при $s \to \infty$.

Следствие 6.4. *Всякий элемент пространства $\tilde{F}$ (замыкания в $\tilde{F}$ подпространства $F(X) \cap C(X)$ содержит уточненную (C-уточненную) функцию.*

Следующий результат усиливает лемму 6.2.

Лемма 6.5 *Пусть $E \subset X$ — произвольное множество и $f \in \tilde{F}$ — уточненная функция такая, что $|f(x)| \geqslant \alpha > 0$ квазивсюду на E. Тогда $\mathscr{C}(E) \leqslant \|f|\tilde{F}\|/\alpha$.*

Следствие 6.6. *Две уточненные функции, принадлежащие одному элементу пространства $\tilde{F}$, совпадают квазивсюду.*

Следствие 6.7. *Всякая последовательность уточненных функций, сходящаяся в $\tilde{F}$ к уточненной функции f, содержит подпоследовательность, сходящуюся к f квазивсюду.*

Для произвольного множества $E \subset X$ положим $A(E) = \{f \in \tilde{F}\colon$ существует уточненная функция $\tilde{f}$ такая, что $\tilde{f} \in f$ и $\tilde{f}(x) \geqslant 1$ при квазивсех $x \in E\}$.

Лемма 6.8. *Множество $A(E)$ замкнуто в пространстве $\tilde{F}$ и выпукло.*

Следствие 6.9. *Пусть пространство $\tilde{F}$ рефлексивно (равномерно выпукло). Если $E \subset X$ и $A(E) \neq \varnothing$, то существует (единственный) элемент $f_E \in A(E)$ такой, что $\|f_E|\tilde{F}\| = \inf\{\|f|\tilde{F}\|\colon f \in A(E)\}$.*

Следствие 6.10. *Предположим, что пространство рефлексивно. Пусть $\{E_m\}$, $m \in \mathbf{N}$,— возрастающая последовательность подмножеств в X, $E =$*

$= \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m, \qquad A(E_m) \neq \varnothing \; (m = 1, 2, \ldots)$. *Тогда* $\qquad A(E) = \bigcap_{m=1}^{\infty} A(E_m)$ *и* $\lim_{m\to\infty} \| f_{E_m} | \tilde{F} \| = \inf \{ \| f | \tilde{F} \| : f \in A(E) \}$.

Теорема 6.11. *Предположим, что пространство* $\tilde{f}$ *рефлексивно. Пусть* E *— произвольное множество точек локально-компактного пространства* X *со счетной базой. Тогда* $\overline{\mathscr{C}}(E; \tilde{F}) = \inf \{ \|f | \tilde{F}\| : f \in A(E) \}$.

Если $A(E) \neq \varnothing$, *то* $\overline{\mathscr{C}}(E; \tilde{F}) = \|f_E | \tilde{F}\|$.

Доказательства утверждений 6.8—6.11 могут быть получены формализацией соответствующих утверждений из [4]. Функция f_E из теоремы 6.11 называется *емкостной функцией для множества* E.

Теорема 6.12. *Пусть* $\mathbf{G}$ *— произвольная однородная группа,* μ *— мера на* $\mathbf{G}$. *Тогда для потенциала* $U_\gamma \mu(x) = \int_{\mathbf{G}} r(y^{-1}x)^{\gamma-\nu} \, d\mu(y)$ *при любом* $x \in G$

$$U_\gamma \mu(x) = \lim_{\rho\to 0} \rho^{-\nu} \int_{r(z^{-1}x)<\rho} U_\gamma \mu(z) \, dz. \tag{6.2}$$

Доказательство. Положим $\quad U_{\gamma,\rho}\, \mu(x) = \rho^{-\nu} \int_{r(z^{-1}x)<\rho} U_\gamma \mu(z) \, dz$ и установим неравенство

$$U_{\gamma,\rho} \mu(x) \leqslant A U_\gamma \mu(x), \tag{6.3}$$

где A не зависит от меры μ. В самом деле,

$$U_{\gamma,\rho} \mu(x) = \rho^{-\nu} \int_{r(z^{-1}x)<\rho} dz \int_{S(\mu)} r(y^{-1}x)^{\gamma-\nu} \, d\mu(y) =$$

$$= \rho^{-\nu} \int_{S(\mu)} \frac{d\mu(y)}{r(y^{-1}x)^{\nu-\gamma}} \int_{r(z^{-1}x)<\rho} \frac{r(y^{-1}x)^{\nu-\gamma}}{r(y^{-1}z)^{\nu-\gamma}} \, dz.$$

Интеграл $\rho^{-\nu} \int_{r(z^{-1}x)<\rho} \frac{r(y^{-1}x)^{\nu-\gamma}}{r(y^{-1}z)^{\nu-\gamma}} \, dz$ инвариантен относительно растяжений δ_t: $\mathbf{G} \to \mathbf{G}$, $t > 0$; поэтому можно положить $\rho = 1$. Функция

$$w \to \int_{r(z)<1} \frac{r(w)^{\nu-\gamma}}{r(wz)^{\nu-\gamma}} \, dz, \quad w \in \mathbf{G},$$

непрерывна на $\mathbf{G}$, равна нулю при $w = 0$ и стремится к единице при $r(w) \to \infty$. Следовательно, она имеет конечный максимум A, так что

$$U_{\gamma,\rho} \mu(x) \leqslant A \int_{S(\mu)} r(y^{-1}x)^{\gamma-\nu} \, d\mu(y) = A U_\gamma \mu(x).$$

Если $U_\gamma \mu(x) = \infty$, то (6.2) следует из полунепрерывности функции $U_\gamma \mu(x)$. Если же $U_\gamma \mu(x) < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$, так же как в лемме 2.2, найдется шар $B(x, \delta)$ такой, что для части $\mu_{x,\delta}$ меры μ в $B(x, \delta)$ справедливо неравенство $U_\gamma \mu_{x,\delta}(x) < \varepsilon$. В силу (6.3) $U_{\gamma,\rho} \mu_{x,\delta}(x) \leqslant A\varepsilon$. Далее, вследствие непрерывности потенциала $U_\gamma(\mu - \mu_{x,\delta})$ в точке x, имеем

$$\lim_{\rho\to 0} U_{\gamma,\rho}(\mu - \mu_{x,\delta})(x) = U_\gamma(\mu - \mu_{x,\delta})(x).$$

Из приведенных соотношений следует

$$U_\gamma \mu(x) - (A+1)\varepsilon \leqslant \varliminf_{\rho\to 0} U_{\gamma,\rho} \mu(x) \leqslant \varlimsup_{\rho\to 0} U_{\gamma,\rho} \mu(x) \leqslant U_\gamma \mu(x) + (A+1)\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$, то (6.2) доказано.

Следствие 6.13. *Пусть $I^\gamma(L_p)$, $1 < p < \nu/\gamma$,— пространство риссовых потенциалов на группе* $\mathbf{G}$. *Если $f \in I^\gamma(L_p)$ — C-уточненная функция, то равенство*

$$f(x) = \lim_{\rho\to 0} \rho^{-\nu} \int_{B(x,\rho)} f(y)\, dy$$

выполняется для квазивсех $x \in G$ относительно емкости в пространстве $I^\gamma(L_p)$.

Если, в частности, $f_{\mathcal{U}} \in I^\gamma(L_p)$ — C-уточненная емкостная функция для открытого множества $\mathcal{U} \subset \mathbf{G}$, т. е. $\mathscr{C}(\mathcal{U};\ I^\gamma(L_p)) = \|f_{\mathcal{U}} \mid I^\gamma(L_p)\|$ (см. теорему 6.11), *то $f_{\mathcal{U}}(x) \geqslant 1$ при любом $x \in \mathcal{U}$.*

Доказательство. Заметим, прежде всего, что C-уточненная функция $f \in I^\gamma(L_p)$ совпадает квазивсюду со сверткой $g * r^{\gamma-\nu}$, где $g \in L_p$. В силу леммы 6.5 множество тех точек, где функция $|g| * r^{\gamma-\nu}(x)$ не принимает конечные значения, имеет внешнюю емкость нуль. Применяя теорему 6.12 к каждому из интегралов в правой части равенства $f(x) = g^+ * r^{\gamma-\nu}(x) - g^- * r^{\gamma-\nu}(x)$, мы получаем первое утверждение.

Для доказательства второго утверждения заметим, что емкостная функция $f_{\mathcal{U}}(x)$ равна $g * r^{\gamma-\nu}(x)$, где $g \in L_p$ неотрицательна. Полагая в теореме 6.12 $\mu = g dx$, получаем, что при любом $x \in \mathbf{G}$

$$f_{\mathcal{U}}(x) = \lim_{\rho\to 0} \int_{B(x,\rho)} f_{\mathcal{U}}(z)\, dz.$$

Так как для квазивсех $x \in \mathcal{U}$ справедливо $f_{\mathcal{U}}(x) \geqslant 1$ и для точки $x \in \mathcal{U}$ шар $B(x, \rho) \subset \mathcal{U}$ при достаточно малом ρ, то последний интеграл не меньше 1. Следствие доказано.

Аналогично доказывается (см. примеры 4, 5 и асимптотику анизотропного бесселева ядра в 0 и на ∞ [21])

Предложение 6.14. *Пусть L_p^γ, $1 < p < \infty$, $\gamma > 0$, $(B^{\mathbf{l}}_{p,\theta}(\mathbf{R}^n)$, $\mathbf{l} \in (\mathbf{R}_+)^n$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty)$— пространство анизотропных бесселевых потенциалов (анизотропное пространство Бесова). Если $f \in L_p^\gamma(B^{\mathbf{l}}_{p,\theta}(\mathbf{R}^n))$ — C-уточненная функция, то равенство*

$$f(x) = \lim_{\rho\to 0} \rho^{-\nu} \int_{B(x,\rho)} f(y)\, dy \qquad \left(f(x) = \lim_{\rho\to 0} \rho^{-n} \int_{B(x,\rho)} f(y)\, dy\right)$$

выполняется для квазивсех $x \in \mathbf{R}^n$ относительно емкости в соответствующем пространстве.

Если, в частности, $f_{\mathcal{U}} \in L_p^\gamma$, $1 < p < \infty$, $(B^{\mathbf{l}}_{p,\theta}(\mathbf{R}^n)$, $1 < p, \theta < \infty)$, C-уточненная емкостная функция для открытого множества $\mathcal{U} \subset \mathbf{G}$ (см. теорему 6.11), *то $f_{\mathcal{U}}(x) \geqslant 1$ при любом $x \in \mathcal{U}$.*

Пусть $\bar{F}$ — рассмотренное выше функциональное пространство на X. Функцию f, определенную $\bar{F}$-квазивсюду на X, будем называть *$\bar{F}$-квазинепрерывной* (или просто квазинепрерывной), если для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такое открытое множество $\mathcal{U}_\varepsilon \subset X$, что $\bar{\mathscr{C}}(\mathcal{U}_\varepsilon;\ \bar{F}) < \varepsilon$ и сужение функции f на множество $X \setminus \mathcal{U}_\varepsilon$ непрерывно.

Теорема 6.15. *Пусть $I^\gamma(L_p)$, $1 < p < \nu/\gamma$,— пространство риссовых потенциалов на группе* $\mathbf{G}$; *L_p^γ, $1 < p < \infty$, $0 < \gamma$,— пространство анизотропных бесселевых потенциалов и $B^{\mathbf{l}}_{p,\theta}$, $\mathbf{l} \in (\mathbf{R}_+)^n$, $1 < p < \infty$, $1 < \theta < \infty$,— анизотропное пространство Бесова. Для функции f, принадлежащей любому из перечисленных выше пространств, понятия C-уточненности и квазинепрерывности совпадают.*

Доказательство. Тот факт, что из C-уточненности следует квазинепрерывность, вытекает из утверждений 6.3, 6.4 и определения

C-уточненности. Пусть теперь функция $f \in I^\gamma(L_p)$ квазинепрерывна. Так как подпространство $I^\gamma(L_p) \cap C(\mathbf{G})$ плотно в $I_\gamma(L_p)$, то существует C-уточненная функция $\tilde{f}$ (следствие 6.4), совпадающая почти всюду с функцией f. В силу доказываемого ниже предложения 6.16 квазинепрерывные функции f и $\tilde{f}$ совпадают квазивсюду. Остается заметить, что функция, квазивсюду совпадающая с уточненной функцией, сама уточненная. Аналогично рассматриваются случаи других пространств.

Пусть $\mathbf{G}$ — однородная группа и измеримое множество $E \subset \mathbf{G}$. Точку $x \in \mathbf{G}$ будем называть *точкой ненулевой плотности множества* E, если

$$\overline{\lim_{\rho\to 0}} |B(x, \rho) \cap E|/|B(x, \rho)| > 0.$$

Совокупность всех точек ненулевой плотности множества будем обозначать через $\tilde{E}$.

Утверждения 6.13, 6.14 мотивируют следующее определение. Функциональное пространство $\tilde{F}$ на однородной группе $\mathbf{G}$ будем называть *лебеговым*, если выполняются следующие условия:

1) пространство $\tilde{F}$ равномерно выпукло,

2) подпространство $\tilde{F} \cap C(\mathbf{G})$ *плотно в* $\tilde{F}$,

3) существует вложение i: $\tilde{F} \to L_{1,\,\mathrm{loc}}$,

т. е. для любой точки x найдутся окрестность $B(x, \rho)$ и число K_x, что для всякой функции $f \in \tilde{F}$

$$f|B(x, \rho) \in L_1, \quad \|f|L_1(B(x, \rho))\| \leqslant K_x \|f|\tilde{F}\|,$$

4) значения любой C-уточненной функции $f \in \tilde{F}$ квазивсюду совпадают с пределом

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^{-\nu} \int_{B(x,\rho)} f(y)\,dy.$$

Из этого определения следует, в частности:

1) множества нулевой внешней емкости имеют нулевую меру,

2) две эквивалентные функции из $\tilde{F}$ совпадают почти всюду,

3) две функции из $\tilde{F}$, совпадающие почти всюду, эквивалентны.

Таким образом, под элементом f лебегова пространства $\tilde{F}$ можно понимать класс измеримых функций, эквивалентных $i(f)$ относительно биинвариантной меры Хаара на группе $\mathbf{G}$.

Ясно, что пространства примеров 3, 4 и 5 (при p, $\theta \neq 1, \infty$) лебеговы.

Предложение 6.16. *Пусть $\tilde{F}$ — лебегово пространство на однородной группе $\mathbf{G}$. Если функция $f \in \tilde{F}$ квазинепрерывна и для почти всех точек $x \in E$ некоторого измеримого множества $E \subset \mathbf{G}$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant g(x)$, где g: $E \cup \tilde{E} \to R$ — полунепрерывная снизу функция, то для квазивсех $x \in \tilde{E}$ имеем $f(x) \geqslant g(x)$.*

Доказательство. Заметим, что утверждения 6.5—6.11 остаются справедливыми при замене понятия уточненности на понятие C-уточненности.

Поскольку функция f квазинепрерывна, то для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать открытое множество $\mathcal{U}_\varepsilon$ такое, что $\mathscr{C}(\mathcal{U}_\varepsilon;\ \tilde{F}) < \varepsilon$ и сужение f на $\mathbf{G} \setminus \mathcal{U}_\varepsilon$ непрерывно. Пусть φ_m — емкостная функция из теоремы 6.11 для множества $\mathcal{U}_{1/m}$. Поскольку пространство $\tilde{F}$ удовлетворяет условию мажорируемости и лебегово, то функция φ_m почти всюду неотрицательна. Так как $\|\varphi_m|\tilde{F}\| \to 0$ при $m \to \infty$, то переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m(x) = 0$ при квазивсех $x \in \mathbf{G}$. Кроме того, для любого m

$$\varphi_m(x) = \lim_{\rho\to 0} \rho^{-\nu} \int_{B(x,\rho)} \varphi_m(y)\,dy$$

квазивсюду. Поэтому последние два равенства выполняются при квазивсех $x \in \tilde{E}$. Рассмотрим такую точку $x \in \tilde{E}$.

По определению множества $\tilde{E}$ существует последовательность $\rho_s \to 0$ при $s \to \infty$, для которой $|B(x, \rho_s) \cap E|/|B(x, \rho_s)| \to \delta > 0$ при $s \to \infty$. Докажем, что при $m > m(x)$ неравенство

$$|\mathcal{U}_{1/m} \cap E \cap B(x, \rho_s)| < |E \cap B(x, \rho_s)|$$

выполняется при достаточно малых ρ_s.

Действительно, так как $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m(x) = 0$, то при достаточно больших m имеем $\varphi_m(x) < \delta$. Далее,

$$\varlimsup_{s\to\infty} \frac{|\mathcal{U}_{1/m} \cap E \cap B(x, \rho_s)|}{|E \cap B(x, \rho_s)|} \leqslant \lim_{s\to\infty} \frac{|B(x, \rho_s)|}{|B(x, \rho_s) \cap E|} \varlimsup_{s\to\infty} \rho_s^{-\nu} \int\limits_{U_{1/m}\cap E \cap B(x,\rho_s)} \varphi_m(y)\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta} \lim_{s\to\infty} \frac{1}{|B(x, \rho_s)|} \int\limits_{B(x,\rho_s)} \varphi_m(y)\, dy = \delta^{-1} \varphi_m(x) < 1.$$

Таким образом, при $m > m(x)$ и каждом $s > s(x)$ мера множества $F_s = (E \cap B(x, \rho_s)) \setminus \mathcal{U}_{1/m}$ положительна. Учитывая непрерывность функции $f|\mathbf{G} \setminus \mathcal{U}_{1/m}$ и тот факт, что $f(y) \geqslant g(y)$ при почти всех $y \in E$, получим

$$f(x) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{|F_s|} \int\limits_{F_s} f(y)\, dy \geqslant \varlimsup_{s\to\infty} \frac{1}{|F_s|} \int\limits_{F_s} g(y)\, dy \geqslant g(x).$$

Следствие 6.17. *Пусть выполнены условия предложения* 6.16. *Если две $\tilde{F}$-квазинепрерывные функции $f_1, f_2 \in \tilde{F}$ совпадают почти всюду на множестве $E \subset \mathbf{G}$, то f_1 и f_2 совпадают квазивсюду на $\tilde{E}$.*

Следствие 6.18. *Пусть выполнены условия предложения* 6.16. *Тогда для функций $f \in \tilde{F}$ понятия C-уточненности и квазинепрерывности эквивалентны.*

Следствие 6.19. *Пусть выполнены условия предложения* 6.16. *Тогда для любого множества $E \subset \mathbf{G}$ справедливо $\overline{\mathscr{C}}(E \cup \tilde{E};\ \tilde{F}) = \overline{\mathscr{C}}(E;\ \tilde{F})$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай конечной емкости. Согласно утверждениям 6.11 и 6.4, существует такая уточненная функция f_E, что $\overline{\mathscr{C}}(E;\ \tilde{F}) = \|f_E|\tilde{F}\|$ и $f(x) \geqslant 1$ квазивсюду на E. В силу предложения 6.16 неравенство $f(x) \geqslant 1$ справедливо квазивсюду на $\tilde{E}$. Таким образом, $f_E \in A(E \cup \tilde{E})$, откуда и следует требуемое равенство.

Следствие 6.20. *Пусть выполнены условия предложения* 6.16. *Если почти всюду на множестве E, $E \subset \mathbf{G}$, $f(x) = g(x)$, где f (g) — F-квазинепрерывная на $\mathbf{G}$ (непрерывная на $E \cup \tilde{E}$) функция, то $f(x) = g(x)$ для квазивсех точек $x \in \tilde{E}$.*

§ 7. Функциональные пространства и квазиконформные отображения на однородных группах

В 1968 г. на Первом донецком коллоквиуме по теории квазиконформных отображений Ю. Г. Решетняк поставил вопрос об описании всех изоморфизмов φ^* однородных пространств Соболева $\mathscr{L}_n^1$, порожденных квазиконформными гомеоморфизмами φ евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$. В работе [36] показано, что таковыми являются структурные изоморфизмы пространства $\mathscr{L}_n^1$ и только они. В рамках предложенного в [36] подхода к проблеме Решетняка возникает следующая задача: какие метрические и аналитические свойства имеет измеримое отображение φ, индуцирующее изоморфизм $\varphi^*\colon \mathscr{L}_n^1 \to \mathscr{L}_n^1$ по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$, $u \in \mathscr{L}_n^1$. Варьируя функциональное пространство $\mathscr{L}_n^1$, мы каждый раз приходим к новой задаче (см. § 5 и работы [36—42], где рассмотрено несколько характерных ситуаций).

В этом параграфе мы рассмотрим подобную задачу для функциональных пространств, определенных на произвольной однородной группе. Модельными примерами служат основные анизотропные пространства дифференцируемых функций. Соответствующие отображения имеют качественно новые геометрические и аналитические свойства. Предлагаемый подход к задаче разработан автором в работах [7—12, 43—46], где также частично сформулированы доказываемые ниже результаты.

Пусть $\mathbf{G}$ — однородная группа с нормой r. Гомеоморфизм φ: $\mathbf{G} \to \mathbf{G}$ будем называть (r, ε)-*квазиконформным*, если для всех $\rho \in (0, \varepsilon)$ выполняется соотношение

$$\max_{r(x,y)=\rho} r(\varphi(x), \varphi(y)) / \min_{r(x,y)=\rho} r(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant K < \infty$$

и такое же соотношение для отображения φ^{-1}, где постоянная K не зависит ни от точки $x \in G$, ни от числа $\rho \in (0, \varepsilon)$. Наименьшая постоянная K, для которой выполняются оба соотношения, называется *коэффициентом квазиконформности отображения* φ. Ясно, что K уменьшается с уменьшением ε.

Непрерывное отображение φ: $\mathbf{G} \to \mathbf{G}$ однородной группы $\mathbf{G}$ с нормой r будем называть (r, ε)-*липшицевым*, $\varepsilon \in [0, \infty]$, если в случае $\varepsilon \in (0, \infty]$ соотношение $r(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant Cr(x, y)$ выполняется для всех точек x, $y \in \mathbf{G}$, для которых $r(x, y) < \varepsilon$, а в случае $\varepsilon = 0$ для некоторой постоянной $C > 0$, не зависящей от точки $x \in \mathbf{G}$,

$$\overline{\lim_{y \to x}} r(\varphi(x), \varphi(y)) / r(x, y) \leqslant C.$$

Гомеоморфизм φ: $\mathbf{G} \to \mathbf{G}$ будем называть (r, ε)-*квазиизометрическим*, $\varepsilon \in [0, \infty]$, если как отображение φ, так и отображение φ^{-1} являются (r, ε)-липшицевыми.

В случае $\mathbf{G} = \mathbf{R}^n$, $r = |\cdot|$, в приведенных выше определениях обычно полагают $\varepsilon = 0$, поскольку из выполнения соответствующих свойств при $\varepsilon = 0$ следует их выполнение при $\varepsilon = \infty$. Если, однако, $A \neq E$, то существуют примеры (r, ε)-$(\ldots)$, $\varepsilon < \infty$, отображений φ: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, не являющихся (r, ∞)-$(\ldots)$ отображениями.

Пусть $\tilde{F}$ — функциональное пространство, определенное на однородной группе $\mathbf{G}$. Будем говорить, что определенное почти всюду на группе $\mathbf{G}$ измеримое отображение φ: $\mathbf{G} \to \mathbf{G}$ *принадлежит классу* $I\tilde{F}$ $(T\tilde{F})$, если отображение φ^*: $\tilde{F} \to \tilde{F}$, $\varphi^* f = f \circ \varphi$,— изоморфизм векторных пространств $\tilde{F}$ (ограниченный оператор в пространстве $\tilde{F}$).

В работе [12] сформулирована

Теорема 7.1. *Пусть* $p \in (1, \infty]$, $\theta \in (1, \infty)$, l — *вектор гладкости с компонентами* $l_i \in (0, \infty)$, r — *норма, однородная относительно группы растяжений* $\delta_t = t^A$, $t > 0$, *где* $A = \operatorname{diag}\{l^*/l_i\}$. *Если определенное почти всюду в* $\mathbf{R}^n$ *измеримое отображение* φ: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *принадлежит классу* $IB^1_{p,\theta}$, *либо* $IL^{l^*}_p$, *либо* $II^{l^*}(L_p)$ *при* $1 < p < n/l^*$, *то в случае*

1) $l^* p \neq n$, $l_i p > 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *существует* (r, ε)-*квазиизометрическое отображение* φ_0: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, *совпадающее с отображением* φ *почти всюду (в случае пространства* $II^{l^*}(L_p)$ — (r, ∞)-*квазиизометрическое)*;

2) $l^* p = n$ *существует* (r, ε)-*квазиконформное отображение* φ_0: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, *совпадающее с отображением* φ *почти всюду, причем найдутся такие постоянные* $\alpha \in (0, 1]$, $Q \geqslant 1$, *что для всех точек* x, $y \in R^n$, $r(x, y) \leqslant \varepsilon$, *выполняются неравенства*

$$Q^{-1} r(x, y)^{1/\alpha} \leqslant r(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant Q r(x, y)^{\alpha}.$$

В изотропном случае, кроме этого, для всех точек x, $y \in \mathbf{R}^n$, $|x - y| \geqslant \varepsilon$,

$$\tilde{Q}^{-1} |x - y| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \tilde{Q} |x - y|.$$

В изотропном случае $(A = E)$ теорема 7.1 доказана в следующих случаях: для однородных пространств Соболева $\mathcal{L}^1_p$, $p \geqslant n$ (Бесова $b^{n/n+1}_{n+1,n+1}(\mathbf{R}^n)$ в предположении, что φ — гомеоморфизм) — в [36, 37]

([38], без последнего утверждения о гельдеровости), для пространств Соболева W^1_p, $p\in(n-1,n)$, — в [39], для пространств риссовых и бесселевых потенциалов, $1/l<p<n/l$,— в [40] (более простое доказательство, основанное на другой идее см. в [42]).

Если φ — гомеоморфизм R^n, то при $p>\max\limits_k \sum\limits_{i\neq k} l_i^{-1}$ теорема 7.1 есть следствие абстрактного результата, установленного в [10, 46]. В этой работе теорема 7.1 доказывается при тех же ограничениях на показатели гладкости и суммируемости. Доказательство разбито на несколько пунктов: в первом устанавливается существование квазинепрерывного отображения, совпадающего почти всюду с данным; во втором приводятся оценки скажения меры Лебега при отображении φ; в третьем доказывается непрерывность, а в четвертом — гомеоморфность отображения φ; в пятом устанавливаются метрические свойства отображения φ; в шестом приводятся результаты о замене переменной в анизотропных пространствах дифференцируемых функций.

Для изотропных трехиндексных пространств Бесова теорема 7.1 доказывается в полном объеме.

1°. Существование квазинепрерывного отображения, совпадающего почти всюду с данным. Мы излагаем доказательство применительно к пространствам Бесова, поскольку трехиндексный случай имеет в дальнейшем свою специфику. Однако схема доказательства остается той же в более общей ситуации по сравнению с теоремой 7.1. По существу, все результаты этого пункта справедливы для лебегова пространства $\tilde{F}$, определенного на группе G (см. § 6) и удовлетворяющего следующим условиям:

1) подпространство $C_0^\infty(\mathrm{G})$ плотно в $\tilde{F}$;

2) для любого множества E нулевой внешней емкости существует C-уточненная функция $f\in\tilde{F}$, полунепрерывная снизу, такая, что $f(x)=\infty$ для всех $x\in E$.

Мы исследуем определенное почти всюду на группе G измеримое отображение φ: $\mathrm{G}\to\mathrm{G}$, принадлежащее классу $I\tilde{F}$. Основной результат пункта сформулирован в предложении 7.11.

Из C-свойства Лузина следует существование такой последовательности измеримых множеств $\{E_i\}$, $i\in\mathrm{N}$, что

1) $\left|\mathrm{R}^n/\bigcup\limits_i E_i\right|=0$,

2) все точки множества E_i являются точками ненулевой плотности, т. е. $E_i\subset\hat{E}_i$,

3) на каждом из множеств E_i отображение φ непрерывно.

Поскольку $E_i\subset\hat{E}_i$, из предложения 6.16 следует

Лемма 7.2. *Пусть $f\in B^1_{p,\theta}$ — полунепрерывная снизу функция и $E_i\subset R^n$ — множество, на котором отображение φ непрерывно. Если $g=\varphi^*f$ — уточненная функция в $B^1_{p,\theta}$, то $g(x)\geqslant f\circ\varphi(x)$ квазивсюду на E_i* (по условию $g(x)=f\circ\varphi(x)$ почти всюду).

Лемма 7.3. *Пусть $E_i\subset\mathrm{R}^n$ — множество, на котором отображение φ непрерывно, а F — множество нулевой внешней емкости. Тогда множество $\varphi^{-1}(F)\cap E_i$ имеет нулевую емкость.*

Доказательство. Из определения внешней емкости и утверждений 6.11, 6.14 следует существование последовательности $\{f_k\}$, $k\in\mathrm{N}$, неотрицательных уточненных полунепрерывных снизу функций класса $B^1_{p,\theta}$ такой, что

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)=\infty,\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\,|\,B^1_{p,\theta}\|<\infty,$$

при этом функция $f\in B^1_{p,\theta}$ уточнена и полунепрерывна снизу. По лемме 7.2 уточненная функция $g=\varphi^*f$ не меньше функции $f\circ\varphi$ квазивсюду на E_i. В частности, для квазивсех точек $x\in\varphi^{-1}(F)\cap E$ $g(x)=\infty$. Из леммы 6.5 получаем, что $\overline{\mathscr{C}}(\varphi^{-1}(F)\cap E_i;\ B^1_{p,\theta})=0$.

Из леммы 7.3 следует

Лемма 7.4. *Пусть $f_k\in B^1_{p,\theta}$ — последовательность уточненных функций, сходящаяся квазивсюду к функции $f\in B^1_{p,\theta}$. Тогда последовательность $f_k\circ\varphi$ сходится почти всюду к функции $f\circ\varphi\in B^1_{p,\theta}$.*

Лемма 7.5. *Операторы φ^* и φ^{*-1} ограничены.*

Доказательство. Поскольку φ^* — изоморфизм, то достаточно проверить, что для оператора φ^* выполняются условия теоремы Банаха о замкнутом графике. Пусть последовательность f_k сходится к f в $B^1_{p,\theta}$, а φ^*f_k — к g в $B^1_{p,\theta}$. По следствию 6.7 можно считать, что функции f_k сходятся к функции f квазивсюду. По лемме 7.4 последовательность $\varphi^*f_k=f_k\circ\varphi$ сходится почти всюду к функции $\varphi^*f=f\circ\varphi$. Поэтому $g=\varphi^*f$ почти всюду в $\mathbf{R}^n$. Лемма доказана.

Лемма 7.6. *Пусть $f\in B^1_{p,\theta}$ — уточненная функция, а $E_i\subset\mathbf{R}^n$ — множество, на котором отображение φ непрерывно. Если $g=\varphi^*f$ — уточненная функция в $B^1_{p,\theta}$, то $g|E_i$ совпадает квазивсюду с функцией $f\circ\varphi|E_i$.*

Доказательство. Пусть $f_k\in B^1_{p,\theta}$ — последовательность непрерывных функций, сходящаяся к функции f всюду за исключением множества F нулевой внешней емкости. По лемме 7.5 и следствию 6.7 можно считать, что последовательность уточненных функций $g_k=\varphi^*f_k$ сходится квазивсюду к функции $g=\varphi^*f$. Функции $g_k=\varphi^*f_k$, согласно следствию 6.20, совпадают квазивсюду на E_i с функциями $f_k\circ\varphi|E_i$. Кроме того, по лемме 7.3 функции $f_k\circ\varphi|E_i$ вне множества $\varphi^{-1}(F)$ нулевой емкости сходятся квазивсюду к функции $f\circ\varphi|E_i$. Таким образом, функция g совпадает квазивсюду на E_i с функцией $f\circ\varphi$. Лемма доказана.

Лемма 7.7. *Существует квазинепрерывное отображение ψ: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ такое, что $\psi(x)=\varphi(x)$ почти всюду в $\mathbf{R}^n$.*

Доказательство. В силу следствия 6.17 достаточно для произвольного открытого куба $Q\subset\mathbf{R}^n$ построить квазинепрерывное отображение $\overline{\varphi}$: $Q\to\mathbf{R}^n$, совпадающее на Q с отображением φ: $Q\to\mathbf{R}^n$ почти всюду. Далее мы фиксируем открытый куб $Q\subset\mathbf{R}^n$.

Пусть f — произвольная функция класса $B^1_{p,\theta}\cap C$, не меньшая единицы на Q. Существует уточненная функция $g\in B^1_{p,\theta}$, для которой $f=\varphi^*g$. По леммам 7.6 и 6.1 функции $f|E$ и $g\circ\varphi|E$ совпадают квазивсюду (здесь $E=\cup E_{i,Q}$, $E_{i,Q}=Q\cap E_i$). Обозначим через F_0 множество нулевой емкости, на котором значения функций $f|E$ и $g\circ\varphi|E$ не совпадают. Очевидно, что для отображения φ: $E\setminus F_0\to\mathbf{R}^n$ выполняются утверждения лемм 7.2—7.6. Кроме того, для всех точек $y\in\varphi(E\setminus F_0)$ функция $g(y)=g(\varphi(x))=g(x)\geqslant 1$. Таким образом, емкость множества $\varphi(E\setminus F_0)$ конечна. Далее мы рассматриваем отображение φ лишь на множестве $E\setminus F_0$, считая его на $Q\setminus(E\setminus F_0)$ не определенным.

Положим $T_k=\varphi(Q)\cap B(0,\ k)$, $CT_k=\varphi(Q)\setminus T^k$, $k\in\mathbf{N}$. Поскольку функции класса $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ плотны в пространстве $B^1_{p,\theta}(\mathbf{R}^n)$, то отсюда легко получить, что

$$\mathscr{C}(CT_k;\ B^1_{p,\theta})\to 0,\ k\to\infty \tag{7.1}$$

(напомним, что функция $g\in A(\varphi(Q))$). Пусть $g_k\in A(CT_k)$ — такая последовательность функций, что

$$\|g_k\,|\,B^1_{p,\theta}\|\leqslant\overline{\mathscr{C}}(CT_k;\ B^1_{p,\theta})+2^{-k},\quad k\in\mathbf{N}.$$

По леммам 7.6 и 6.1 уточненная функция $f_k=\varphi^*g_k$ совпадает квазивсюду на множестве E с функцией $g_k\circ\varphi$. Таким образом, $f_k\in A(\varphi^{-1}(CT_k))$.

Обозначим через CF_k подмножество куба Q, состоящее из точек множества $\varphi^{-1}(CT_k)$ и всех точек ненулевой плотности множества $\varphi^{-1}(CT_k)$. По следствию 6.19 имеем

$$\overline{\mathscr{C}}(CF_k;\, B^1_{p,\theta}) = \overline{\mathscr{C}}(\varphi^{-1}(CT_k);\, B^1_{p,\theta}) \leqslant \| f_k \mid B^1_{p,\theta} \| \leqslant$$
$$\leqslant k \| g_k \mid B^1_{p,\theta} \| \leqslant K\overline{\mathscr{C}}(CT_k;\, B^1_{p,\theta}) + 2^{-k},$$

где K — норма оператора φ^*. Из (7.1) следует

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\mathscr{C}}(CF_k;\, B^1_{p,\theta}) = 0. \tag{7.2}$$

Пусть $F_k = Q \setminus CF_k$. Тогда для почти всех $x \in F_k$ $\varphi(x_k) \in T_k$ и для любой точки $x \in F_k$

$$\lim_{\rho\to 0} | F_k \cap B(x, \rho) | / | B(x, \rho) | = 1.$$

Рассмотрим такие срезки $\eta_k \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, что $\eta_k(x) = 1$, $x \in B(0, k)$, и $\eta_k(x) = 0$, $x \notin B(0, k+1)$, $k \in \mathbf{N}$. Пусть $\psi_{i,k}$ — такая уточненная функция, что $\psi_{i,k} = \varphi^*(y_i \cdot \eta_k)$ (здесь y_i — координатные функции, $y_i(y) = y_i$, $y \in \mathbf{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, n$). По леммам 7.6 и 6.1 для квазивсех точек $x \in E$ имеем $\psi_{i,k}(x) = (y_i\eta_k)(\varphi(x))$. Поэтому если $x \in F_k \cap E$, то квазивсюду

$$(\varphi^*(y_i\eta_k))(x) = (y_i \cdot \eta_k)(\varphi(x)) = y_i(\varphi(x)) = \varphi_i(x).$$

Таким образом, почти всюду на F_k координатная функция φ_i совпадает с уточненной функцией $\psi_{i,k}$. Положим

$$\varphi_{i,k}(x) = \begin{cases} \psi_{i,k}(x), & \text{если} \quad x \in F_k, \\ \varphi_i(x), & \text{если} \quad x \in \mathbf{R}^n \setminus F_k. \end{cases}$$

Поскольку функция φ_i изменяется на множестве нулевой меры, то для любого $k \in \mathbf{N}$ выполняется равенство $\varphi_i(x) = \varphi_{i,k}(x)$ почти всюду в $\mathbf{R}^n$.

Пусть $k < m$. По построению множеств F_k имеем $F_k \subset F_m$, поэтому на $F_k \cap E$ функции $\varphi^*(y_i\eta_k)$ и $\varphi^*(y_i\eta_m)$ совпадают квазивсюду с функцией φ_i.

Так как по построению все точки множества F_k имеют плотность, равную единице, то уточненные функции $\psi_{i,k}$ и $\psi_{i,k}$ совпадают квазивсюду на F_k (следствие 6.17). Это обстоятельство позволяет корректно определить квазивсюду на множестве $\bigcup\limits_{k}^{\infty} F_k$ функцию ψ_i. Так как $Q \Big\backslash \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} CF_k$, то в силу (7.2) функция ψ_i определена квазивсюду на кубе Q.

Покажем, что функция ψ_i квазинепрерывна на кубе Q. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда существуют такие открытые множества $\mathscr{U}_1$, $\mathscr{U}_2$, $\mathscr{U}_3$, что

1) существует номер k, для которого $CF_k \subset \mathscr{U}_1$, и $\overline{\mathscr{C}}(\mathscr{U}_1,\, B^1_{p,\theta}) < \varepsilon/3$,

2) на $\mathbf{R}^n \setminus \mathscr{U}_2$ функция $\psi_{i,k}$ непрерывна и $\overline{\mathscr{C}}(\mathscr{U}_2;\, B^1_{p,\theta}) < \varepsilon/3$,

3) $\mathscr{U}_3$ содержит все точки множества $Q \setminus \mathscr{U}_1$ нулевой емкости, где значения функций ψ_i и $\psi_{i,k}$ не совпадают, $\overline{\mathscr{C}}(\mathscr{U}_3;\, B^1_{p,\theta}) < \varepsilon/3$.

Множество $\mathscr{U} = \mathscr{U}_1 \cup \mathscr{U}_2 \cup \mathscr{U}_3$ имеет емкость $\overline{\mathscr{C}}(\mathscr{U};\, B^1_{p,\theta}) < \varepsilon$, а на дополнении $Q \setminus \mathscr{U}$ функция ψ_i непрерывна. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ функция ψ_i квазинепрерывна.

Покрывая пространство $\mathbf{R}^n$ счетным набором открытых кубов Q_j и повторяя описанную выше процедуру на каждом из кубов Q_j, мы построим отображение $\psi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, квазинепрерывное на $\mathbf{R}^n$ и совпадающее почти всюду с отображением φ. Лемма доказана.

Далее последовательно проверяются утверждения, усиливающие леммы 7.2—7.4, 7.6.

Лемма 7.8. 1. *Пусть* $f \in B^1_{p,\theta}$ — *полунепрерывная снизу функция. Если* $g = \varphi^* f$ — *уточненная функция, то* $g(x) \geqslant (f \circ \varphi)(x)$ *квазивсюду в* $\mathbf{R}^n$.

2. *Из* $\overline{\mathscr{C}}(F; B^1_{p,\theta}) = 0$ *следует* $\overline{\mathscr{C}}(\psi^{-1}(F); B^1_{p,\theta}) = 0$.

3. *Если* $f \in B^1_{p,\theta} \cap C$, *то уточненная функция* $\varphi^* f$ *квазивсюду в* $\mathbf{R}^n$ *совпадает с функцией* $f \circ \psi$.

4. *Пусть квазивсюду в* $\mathbf{R}^n$ *выполнено* $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, *где* $f_k \in B^1_{p,\theta} \cap C$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \| f_k \,|\, B^1_{p,\theta} \| < \infty$. *Тогда квазивсюду в* $\mathbf{R}^n$ *уточненная функция* $\varphi^* f(x)$ *равна* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (f_k \circ \psi)(x)$.

5. *Для всякой уточненной функции* $f \in B^1_{p,\theta}$ *уточненная функция* $\varphi^* f$ *квазивсюду совпадает с функцией* $f \circ \psi$.

6. *Для произвольного множества* $E \subset \mathbf{R}^n$

$$\overline{\mathscr{C}}(\psi^{-1}(E); B^1_{p,\theta}) \leqslant K \overline{\mathscr{C}}(E; B^1_{p,\theta}), \quad \overline{\mathscr{C}}(E; B^1_{p,\theta}) \leqslant K \overline{\mathscr{C}}(\psi(E)),$$

где K — *норма оператора* φ^*.

Лемма 7.9. *Существует отображение* ψ_0: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *такое, что квазивсюду в* $\mathbf{R}^n$ *верно* $\varphi_0(x) = \psi(x)$; *для отображения* φ_0 *справедливы все утверждения леммы* 7.8 *и для произвольного множества* $E \subset \mathbf{R}^n$

$$\overline{\mathscr{C}}(\varphi_0(E); B^1_{p,\theta}) \leqslant \widetilde{K} \overline{\mathscr{C}}(E; B^1_{p,\theta}), \tag{7.3}$$

где $\widetilde{K}$ — *норма оператора* φ^{*-1}.

Доказательство. Пусть $\mathscr{P} = \{Q_s \colon s = 1, \ldots, m\}$ — произвольный конечный набор замкнутых параллелепипедов, принадлежащих различным сеткам M_k, построенным в п. 3.2. Обозначим той же буквой P объединение $\bigcup\limits_{s=1}^{m} Q_s$, а через f_P — емкостную функцию из теоремы 6.11. По лемме 7.8 существует уточненная функция $g = \varphi^{*-1} f_P$, что $f_P = g \circ \psi$ квазивсюду в $\mathbf{R}^n$. Если $E_P = \{x \in P \colon g(\psi(x)) < 1\}$, то $\overline{\mathscr{C}}(E_P; B^1_{p,\theta}) = 0$ и $g \in A(\psi(P \setminus E_P))$. Поэтому

$$\overline{\mathscr{C}}(\psi(P \setminus E_P); B^1_{p,\theta}) \leqslant \| g \,|\, B^1_{p,\theta} \| \leqslant \| \varphi^{*-1} \| \| f_P \,|\, B^1_{p,\theta} \| = \widetilde{K} \overline{\mathscr{C}}(P; B^1_{p,\theta}).$$

Полагаем отображение $\varphi_0(x)$ равным $\psi(x)$ на множестве $\mathbf{R}^n \setminus \bigcup\limits_{P} E_P$, где объединение берется по всем конечным наборам $\mathscr{P}$, и не определенным на множестве $\bigcup\limits_{P} E_P$. Ясно, что $\varphi_0(P) \subset \psi(P \setminus E_P)$. По лемме 6.1 $\overline{\mathscr{C}}\left(\bigcup\limits_{P} E_P; B^1_{p,\theta}\right) = 0$, поэтому отображения φ_0 и ψ совпадают квазивсюду в $\mathbf{R}^n$ и для любого конечного набора $\mathscr{P}$ параллелепипедов

$$\overline{\mathscr{C}}(\varphi_0(P); B^1_{p,\theta}) \leqslant \widetilde{K} \overline{\mathscr{C}}(P; B^1_{p,\theta}). \tag{7.4}$$

Всякое открытое множество $\mathscr{U} \subset \mathrm{R}_n$ есть объединение возрастающей последовательности компактов P_s, составленных из конечного набора параллелепипедов. Поэтому (7.3) для $E = \mathscr{U}$ следует из (7.4) и леммы 6.7.

Если E — произвольное множество, то для любого открытого множества $\mathscr{U} \supset E$ имеем

$$\overline{\mathscr{C}}(\varphi_0(E); B^1_{p,\theta}) \leqslant \overline{\mathscr{C}}(\varphi_0(\mathscr{U})) \leqslant \widetilde{K} \overline{\mathscr{C}}(\mathscr{U}; B^1_{p,\theta}),$$

откуда следует (7.3). Лемма доказана.

Отображение ψ: $\mathbf{G} \to \mathbf{G}$ будем называть *F-квазиинъективным, если* для любых множеств $E_1, E_2 \subset \mathbf{G}$ из того, что $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, вытекает $\overline{\mathscr{C}}(\varphi(E_1) \cap \varphi(E_2); \widetilde{F}) = 0$.

Из лемм 7.8—7.9 следует

Лемма 7.10. *Отображение* φ_0, *построенное в лемме* 7.9, $B^1_{p,\theta}$-*квазиинъективно.*

Сформулируем основной результат этого пункта.

Предложение 7.11. *Пусть лебегово пространство* $\tilde{F}$ *на однородной группе* $\mathbf{G}$ *удовлетворяет требованиям, перечисленным в начале пункта.*

Если определенное почти всюду измеримое отображение φ: $\mathbf{G}\to\mathbf{G}$ *принадлежит классу* $I\tilde{F}$, *то существует* F-*квазинепрерывное* F-*квазиинъективное отображение* φ_0: $\mathbf{G}\to\mathbf{G}$ *такое, что* $\varphi_0(x)=\varphi(x)$ *почти всюду в* $\mathbf{G}$, *и для произвольного множества* $E\subset\mathbf{G}$

$$\tilde{K}^{-1}\overline{\mathscr{C}}(\varphi_0(E);\ \tilde{F})\leqslant\overline{\mathscr{C}}(E;\ \tilde{F})\leqslant K\overline{\mathscr{C}}(\varphi_0(E);\ \tilde{F}),$$
$$\overline{\mathscr{C}}(\varphi_0^{-1}(E);\tilde{F})\leqslant K(E;\tilde{F}), \tag{7.5}$$

где K $(\tilde{K})$ — *норма оператора* $\varphi^*(\varphi^{*-1})$.

2°. Случай $l^*p\leqslant n$. Оценки искажения меры. Пусть $\mathbf{G}$ — однородная группа, а δ_t: $\mathbf{G}\to\mathbf{G}$, $t>0$,— ее однопараметрическая группа растяжений. Пространство $\tilde{F}$ на $\mathbf{G}$, удовлетворяющее всем требованиям предыдущего пункта, будем называть δ_t-*однородным* [43, 47], если существуют числа $\delta\in\mathbf{R}$ и $C>0$ такие, что неравенство

$$\|f(\delta_t\cdot)\,|\tilde{F}\|\leqslant Ct^{\sigma}\|f|\tilde{F}\| \tag{7.6}$$

выполняется для всех t, $1\leqslant t<\infty$, и всех $f\in\tilde{F}$. Число σ называется *степенью однородности.*

Заметим, что анизотропные пространства Бесова, бесселевых и риссовых потенциалов (из теоремы 7.1) δ_t-однородны степени $\sigma=l^*-n/p$. Более того, для пространства $\Gamma(L_p)$ на однородной группе $\mathbf{G}$ в (7.6) имеем равенство при $C=1$, $t\in(0,\ \infty)$, $\sigma=\gamma-n/p$ [9]. Далее существенно используется вложение модельных пространств в пространство Лоренца $L_{q\infty}$, $q=-n/\sigma$ [48, 49], $\sigma<0$.

В соответствии с этим мы предлагаем в дальнейшем непрерывность при $-\nu<\sigma<0$ вложения

$$i\colon\ \tilde{F}\to L_{q\infty},\ q=-\nu/\sigma, \tag{7.7}$$

δ_t-однородного пространства $\tilde{F}$ степени σ на однородной группе $\mathbf{G}$ в пространстве Лоренца $L_{q\infty}$. Как известно, пространство Лоренца $\mathrm{L}_{q\infty}$, $1\leqslant q<\infty$, состоит из всех функций f таких, что

$$\|f\,|\,L_{q\infty}\|=\sup_{\xi}\xi m(\xi,\ f)^{1/q}<\infty,$$

где $m(\xi,\ f)=|\{x\colon\ |f(x)|>\xi\}|$ (см., например, [48]).

Напомним, что пространство $\tilde{F}$ инвариантно относительно сдвига, если для любых левого сдвига L_a, $a\in\mathbf{G}$, и функции $f\in\tilde{F}$ функция $L_a^*f=f\circ L_a$ также принадлежит пространству $\tilde{F}$ и $\|L_a^*f|\tilde{F}\|=\|f|\tilde{F}\|$.

Предложение 7.12. *Пусть* $\tilde{F}$ — *инвариантное относительно сдвига* δ_t-*однородное степени* $\sigma\in(-\nu,\ 0)$ *пространство на однородной группе* $\mathbf{G}$. *Если выполнены условия предложения* 7.11 *и вложение* (7.7), *то для любого измеримого множества* $E\subset\mathbf{G}$ *образ* $\varphi(E)$ *измерим и*

$$C_1^{-1}\,|\,\varphi_0(E)\,|\leqslant|\,E\,|\leqslant C_1\,|\,\varphi_0(E)\,|, \tag{7.8}$$

где постоянная C_1 *не зависит от множества* E.

Доказательство предложения базируется на следующих утверждениях.

Лемма 7.13. *Пусть* $\tilde{F}$ — δ_t-*однородное пространство степени* $\sigma\in(-\nu,\ 0)$ *на однородной группе* $\mathbf{G}$ *и выполнено* (7.7). *Для любого множества* $E\subset\mathbf{G}$

$$|\,E\,|^{*1/q}\leqslant C_2\overline{\mathscr{C}}\,(E;\ F), \tag{7.9}$$

где $|E|^*$ — *внешняя мера множества* E, C_2 — *норма оператора вложения* (7.7). *В частности, множества нулевой внешней емкости измеримы и имеют нулевую меру.*

Доказательство. Пусть e — компакт. Для любой функции $f\in\mathfrak{N}_k(e)$ компакт $e\subset\{x\colon f(x)/(1-\varepsilon)>1\}$, где $\varepsilon\in(0, 1)$. Поэтому $\|f\,|\,\widetilde{F}\|/(1-\varepsilon)\geqslant C_2 \sup\limits_{\xi} \xi m\left(\xi, \frac{f}{1-\varepsilon}\right)^{1/q}\geqslant C_2|\{x\colon f(x)/(1-\varepsilon)>1\}|^{1/q}\geqslant \geqslant C_2|e|^{1/q}$. Так как ε и функция $f\in\mathfrak{N}_K(e)$ произвольны, то (7.9) для компактов доказано. Отсюда (7.9) стандартным образом распространяется сначала на открытие, а затем на произвольные множества.

Лемма 7.14. *Пусть* $\widetilde{F}$ — δ_t-*однородное пространство степени* $\sigma\in\in(-\nu, 0)$ *на однородной группе* $\mathbf{G}$ *и выполнено* (7.7). *Для любого множества* $E\subset\mathbf{G}$ *и числа* $t\geqslant 1$ *имеем*

$$\overline{\mathscr{C}}\,(\delta_{t^{-1}}(E);\widetilde{F})\leqslant Ct^{\sigma}\mathscr{C}(E;\widetilde{F}). \tag{7.10}$$

Если, кроме того, пространство $\widetilde{F}$ *инвариантно относительно сдвига и* r — *любая однородная норма на группе* $\mathbf{G}$, *то для шара* $B(x, \rho)$, $\rho\in(0, 1]$, *имеем*

$$C_2^{-1}\rho^{-\sigma}\leqslant\overline{\mathscr{C}}\,(B(x,\rho);\widetilde{F})\leqslant C\rho^{-\sigma}\overline{\mathscr{C}}\,(B(1);\widetilde{F}). \tag{7.11}$$

Доказательство. Так же как в [10], проверяется, что если $f\in A(E)$, то $f\circ\delta_t\in A(\delta_{t^{-1}}E)$. Поэтому (7.10) следует из (7.6).

Поскольку пространство $\widetilde{F}$ инвариантно относительно сдвига, то достаточно доказать (7.11) для $x=0$. Полагая в (7.10) $E=B(0, 1)$, $t=\rho^{-1}$ и учитывая $B(\rho)=\delta_\rho(B(1))$, получим правую часть (7.11). Левая часть (7.11) следует из (7.9), поскольку $|B(\rho)|=\rho^{\nu}$.

Доказательство предложения 7.12. Убедимся прежде всего, что $|\varphi_0(E)|=0$ тогда и только тогда, когда $|E|=0$. В самом деле, полагая в левой части (7.5) $E=B(x, \rho)$, $\rho\in(0, 1]$ из (7.9 и (7.11) получаем

$$|\varphi_0(B(x, \rho))|^*\leqslant C_1\,|B(x, \rho)|. \tag{7.12}$$

Применяя теорему о покрытии, мы распространяем (7.12) на открытые множества, а затем стандартным образом на измеримые множества $E\subset\mathbf{G}$: $|\varphi_0(E)|^*\leqslant C_1|E|$. Для доказательства левой части (7.8) остается заметить, что образ борелевского множества E при квазинепрерывном отображении φ_0 измерим.

Поскольку $\left|E\setminus\varphi_0^{-1}(\varphi_0(E))\right|=0$, то для доказательства правой части (7.8) достаточно доказать, что для любого измеримого множества $E\subset G$

$$|\varphi_0^{-1}(E)|\leqslant C_1|E|. \tag{7.13}$$

Неравенство (7.13) для $E=B(x, \rho)$ получается из неравенства $\overline{\mathscr{C}}\,(\varphi_0^{-1}(E);\widetilde{F})\leqslant K\overline{\mathscr{C}}\,(E;\widetilde{F})$ (лемма 7.8) так же, как (7.12) было получено из (7.5). Распространение (7.13) на произвольные измеримые множества производится стандартным образом.

Из предложений 7.11, 7.12 и [50] следует, что отображение φ^* индуцирует ограниченный оператор пространств L_p: для любой функции $f\in L_p(G)$ функция $\varphi^*f=f\circ\varphi$ также принадлежит $L_p(G)$, при этом

$$\|\varphi^*f\,|\,L_p(\mathrm{G})\|\leqslant C_1^{1/p}\|f\,|\,L_p\|. \tag{7.14}$$

Лемма 7.15. *Пусть выполнены условия теоремы 7.1. Тогда отображение* $\varphi_0\colon\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ *из предложения 7.11 индуцирует ограниченный оператор* $\varphi^*\colon B^{\mathbf{m}}_{p,p}\to B^{\mathbf{m}}_{p,p}$ *анизотропных пространств Бесова, где вектор* $\mathbf{m}$ *пропорционален вектору* $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}=\varepsilon\mathbf{l}$, $\varepsilon\in(0, 1)$, $m^*p<n$, $m_ip>1$,

$i=1, \ldots, n$. *Если* $E \subset \mathbf{R}^n$, *то*

$$\overline{\mathscr{C}}\,(\varphi_0^{-1}(E);\, B^{\mathbf{m}}_{p,p}) \leqslant \overline{K\mathscr{C}}\,(E;\, B^{\mathbf{m}}_{p,p}). \tag{7.15}$$

Доказательство. Ограниченность оператора $\varphi^*\colon B^{\varepsilon\mathbf{l}}_{p,p} \to B^{\varepsilon\mathbf{l}}_{p,p}$ при $\varepsilon \in (0, 1)$ следует из условия леммы, (7.14) и теории интерполяции [49, теорема 2.13.2]. Число $\varepsilon \in (0, 1)$ подбираем так, чтобы для всех компонент вектора $\mathbf{m} = \varepsilon\mathbf{l}$ выполнялось $m_i p > 1$.

Вследствие вложения $B^{\mathbf{m}}_{p,p} \subset B^{\mathbf{l}}_{p,\theta}$ $B^{\mathbf{l}}_{p,\theta}$-квазинепрерывное отображение φ_0 также $B^{\mathbf{m}}_{p,p}$-квазинепрерывно. Отсюда, как и в лемме 7.8, следует (7.15).

Обозначим через $\mathbf{R}^{n-1}_i$ координатную гиперплоскость $\{x \in \mathbf{R}^n\colon x_i = 0\}$, а символом $\pi_i\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-1}_i$ — ортогональную проекцию пространства $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}^{n-1}_i$. Введем еще числа $\alpha_i = l^* \sum\limits_{k\neq i} l_k^{-1}$, где $\mathbf{l}$ — вектор гладкости из теоремы 7.1.

Предложение 7.16. *Пусть* $\tilde{F}$ — *любое из анизотропных пространств* $L^{l^*}_p$, $I^{l^*}(L_p)$, $B^{\mathbf{l}}_{p,p}$ на $\mathbf{R}^n$, $p \in (1, n/l^*)$, $l_i p > 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда для любого измеримого множества* $E \subset \mathbf{R}^n$

$$|\pi_i(E)|_{n-1}^{-\sigma/\alpha_i} \leqslant C_2\overline{\mathscr{C}}\,(E; \tilde{F}), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.16}$$

где постоянная C_2 *не зависит от множества* E, $\sigma = l^* - n/p$ — *степень однородности, и* $|\pi_i(E)|_{n-1}$ — $(n-1)$-*мерная мера Лебега проекции* $\pi_i(E) \subset \mathbf{R}^{n-1}_i$.

Доказательство. Неравенство (7.16) достаточно доказать для компактных множеств $e \subset \mathbf{R}^n$. Если калибровочная функция $h(\rho) = \rho^{\alpha_i}$, то из определения емкости Хаусдорфа $\Lambda^{(\infty)}_h$ и соотношения $|\pi_i(B(x, \rho))|_{n-1} = \rho^{\alpha_i} = h(\rho)$ следует левая часть неравенств

$$|\pi_i(e)| \leqslant \Lambda^{(\infty)}_h(e) \leqslant a_i^{-1}\mu_i(e), \tag{7.17}$$

где мера μ_i и постоянная a_i — из теоремы 3.4. Как следует из теорем вложения типа Соболева — Ильина [9, 51], норма оператора вложения

$$j\colon \tilde{F} \to L_q(\mu_i),\ q > p, \tag{7.18}$$

эквивалентна величине

$$\sup_{\substack{\rho\in(0,1)\\ x\in\mathbf{R}^n}} \rho^{l^*-n/p}\,[\mu_i(B(x, \rho))]^{1/q} \tag{7.19}$$

(в случае пространства $I^{l^*}(L)_p$ верхняя грань берется по всем $\rho \in (0, \infty)$). Из оценки (3.2) при $1/q = -\sigma/\alpha_i$ следует конечность величины (7.19), а следовательно, и непрерывность оператора вложения (7.18). Таким образом, для любой функции $f \in \mathfrak{R}_K(e)$ имеем

$$[\mu(e)]^{-\sigma/\alpha_i} \leqslant \|f \mid L_q(\mu)\| \leqslant \|i\| \|f \mid \tilde{F}\|.$$

Отсюда и из (7.17) следует (7.16). Предложение доказано.

Из определения квазинепрерывности вытекает

Следствие 7.17. *Пусть целое число* i *заключено между* 1 *и* n, $1 \leqslant i \leqslant n$. *Если для* δ_t-*однородного пространства* $\tilde{F}$ *выполняется либо оценка* (7.16), *либо теорема вложения* (7.18)—(7.19), *то любая* $\tilde{F}$-*квазинепрерывная функция на евклидовом пространстве* $\mathbf{R}^n$ *непрерывна на почти всех прямых ортогональных гиперплоскости* $\mathbf{R}^{n-1}_i$.

Аналогично предыдущему доказывается

Предложение 7.18. Пусть $\tilde{F}$ — *любое из пространств теоремы* 7.1 $\left(и \max\limits_k \sum\limits_{i\neq k} l_i^{-1} < p \leqslant n/l^*\right)$. *Тогда* $\tilde{F}$-*квазинепрерывное отображение*

$\varphi_0\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *непрерывно на почти всех прямых (плоскостях) ортогональных (параллельных) гиперплоскости* $\mathbf{R}_i^{n-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство непрерывности отображения φ_0 на плоскостях основано на вложении $B_{p,p}^{\mathbf{m}} \supset B_{p,\theta}^{\mathbf{l}}$, где вектор гладкости $\mathbf{m}$ пропорционален $\mathbf{l}$ и $\max\limits_k \sum\limits_{i\neq k} \frac{1}{m_i} < p < n/m^*$, и неравенстве

$$|\Pi_k(E)|_1^{-\sigma m^*/m_k} \leqslant C_3\overline{\mathscr{C}}(E; \widetilde{F}), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{7.20}$$

доказываемом так же, как (7.16), где Π_k — ортогональная проекция на координатную ось, параллельную e_k, E — измеримое множество и $|\Pi_k(E)|_1$ — одномерная мера Лебега.

Лемма 7.19. *Пусть* $\widetilde{F}$ — *любое из пространств теоремы* 7.1 *и* $\max\limits_k \sum\limits_{i\neq k} l_i^{-1} < p \leqslant n/l^*$. *Если* $\{\gamma_m\}$, $m \in \mathbf{N}$,— *последовательность континуумов* в $\mathbf{R}^n$, *то* $\lim\limits_{m\to\infty} \overline{\mathscr{C}}(\gamma_m; \widetilde{F}) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{m\to\infty} \operatorname{diam} \gamma_m = 0$.

Доказательство. Заметим, что $\operatorname{diam}\gamma_m \leqslant C \sum\limits_{k=1}^{m} \Pi_k(\gamma_m)$, где постоянная C не зависит от m. Достаточность следует из леммы 6.1 и соотношения $\lim\limits_{\rho\to 0}\overline{\mathscr{C}}(B(x, \rho); \widetilde{F}) = 0$ [9, 34]. Необходимость доказывается при помощи вложения $B_{p,p}^{\mathbf{m}} \supset B_{p,\theta}^{\mathbf{l}}$ где $\mathbf{m} = \varepsilon\mathbf{l}$, $\varepsilon \in (0, 1)$, — такой вектор, что справедливо (7.20).

Аналогично доказывается

Лемма 7.20. *Пусть* $\widetilde{F}$ — *любое из пространств теоремы* 7.1 *и* $\max\limits_k \sum\limits_{i\neq k} l_i^{-1} < p \leqslant n/l^*$. *Если* $\{\gamma_m\}$, $m \in \mathbf{N}$,— *последовательность континуумов в* $\mathbf{R}^n$, *то* $\lim\limits_{m\to\infty} \overline{\mathscr{C}}(\gamma_m; \widetilde{F}) \to \infty$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{m\to\infty} \operatorname{diam}(\gamma_m; \widetilde{F}) = \infty$.

Лемма 7.21. *Пусть выполнены условия предложения* 7.11 *и* 7.16, *а целые числа* i *и* j *удовлетворяют условию* $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$. *Если* $e = \overline{B(x, \rho)} \cap \Gamma_j$ *где* $x \in \Gamma_j$, *а* Γ_j — *гиперплоскость, параллельная координатной плоскости* R_j^{n-1}, *то*

$$|\pi_i(\varphi_0^{-1}(e))|_{n-1}^{1/\alpha_i} \leqslant C_3 |e|^{1/\alpha_j}. \tag{7.21}$$

Доказательство. Пусть $\gamma = |B(x, 1) \cap \Gamma_j|$. Тогда $(n-1)$-мерная мера Лебега e равна $\gamma\rho^{\alpha_j}$. Полагая в правой части (7.5) $E = e$, из (7.16) и (7.11) получаем

$$\begin{aligned} |\pi_i(\varphi_0^{-1}(e))|_{n-1}^{-\sigma/\alpha_i} &\leqslant C_2\overline{\mathscr{C}}(\varphi_0^{-1}(e); \widetilde{F}) \leqslant \\ &\leqslant C_2K\overline{\mathscr{C}}(e; \widetilde{F}) \leqslant C_2CK\rho^{-\sigma}\overline{\mathscr{C}}(B(1) \cap \Gamma_j; \widetilde{F}). \end{aligned} \tag{7.22}$$

Из следствия 3.7 вытекает, что при $l_jp > 1$ емкость $\widetilde{\mathscr{C}}(B(1) \cap \Gamma_j;\ \widetilde{F})$ строго положительна. Поскольку $\rho^{-\sigma} = \gamma^{-1}|e|^{-\sigma/\alpha_j}$, обозначая $C_2CK\gamma^{-1}\overline{\mathscr{C}}(B(1) \cap \Gamma_j)$ через C_3, из (7.22) имеем (7.21). Лемма доказана.

Замечание 7.22. В изотропном случае из (7.21) для произвольного измеримого множества $E \subset \Gamma_j$ вытекает неравенство $|\pi_i(\varphi_0^{-1}(E))|_{n-1} \leqslant C_3|E|$. Имея в виду это соотношение, а также утверждения (7.12), (7.15) и (7.18), доказательство теоремы 7.1 для изотропных пространств Бесова $B^l{}_{p,\theta}(\mathbf{R}^n)$, $1/p < l < n/p$, $\theta \in (1, \infty)$, заканчивается так же, как доказательство в [40] соответствующего утверждения для изотропных пространств риссовых и бесселевых потенциалов.

3°. Непрерывность отображения φ_0. В этом и п. 4°—5°, кроме теоремы 7.24, $\tilde{F}$ — любое пространство из теоремы 7.1. В случае $l^*p > n$ $\tilde{F}$-квазинепрерывное отображение φ_0 из предложения 7.11 непрерывно, так как емкость одноточечного множества отлична от нуля [9].

Пусть теперь $\max\limits_k \sum\limits_{i \neq k} l_k^{-1} < p \leqslant n/l^*$. В силу предложения 7.18 отображение φ_0 непрерывно на почти всех сферах $S(x, \rho)$ (в этом пункте шары и сферы рассматриваются в 1-метрике $|\cdot|_1$, § 3). Фиксируем одну из таких сфер, например $S(x, \rho)$. Тогда цикл $\varphi_0(S(x, \rho))$ разбивает пространство $\mathbf{R}^n$ на несколько компонент связности $U_0, U_1, \ldots$. Из квазиинъективности отображения φ_0 (лемма 7.10) следует, что образ $\varphi_0(S(y, \tau))$ любой сферы, на которой отображение φ_0 непрерывно, принадлежит лишь одной компоненте связности U_i.

Пусть V_1 — внутренность, а V_0 — внешность сферы $S(x, \rho)$. Если для некоторого i выполнено $|\varphi_0^{-1}(U_i) \cap V_1| \neq 0$, то из квазиинъективности и квазинепрерывности отображения φ_0 следует, что $\varphi_0(V_1) \subset \overline{U}_i$. Аналогично $\varphi_0(V_0)$ лежит в замыкании одной компоненты связности U_j. Поскольку φ^* — изоморфизм, то отсюда получаем, что $\mathbf{R}^n \backslash \varphi_0(S(x, \rho))$ состоит из двух компонент: ограниченной U_1 и неограниченной U_0. Предположим, что $\varphi_0(V_0) \subset \overline{U}_1$. Рассмотрим произвольную функцию $f \in C_0^\infty$, равную единице на $\overline{U}_1$. Тогда функция $\varphi^* f \circ \varphi$ квазивсюду в V_0 равна единице, чего, очевидно, быть не может. Таким образом, доказано, что цикл $\varphi_0(S(x, \rho))$ разбивает $\mathbf{R}^n$ на две компоненты, при этом $\varphi_0(V_i) \subset \overline{U}_i$, $i = 0, 1$.

По предложению 7.11

$$\mathscr{C}(\varphi_0(B(x, \rho)); \tilde{F}) \leqslant \tilde{K}\mathscr{C}(B(x, \rho); \tilde{F}). \tag{7.23}$$

Правая часть (7.23) стремится к нулю при $\rho \to 0$ [9,34]. Поскольку $\operatorname{diam} \varphi_0(B(x, \rho)) \leqslant \operatorname{diam} \varphi_0(S(x, \rho))$, то из (7.23) и леммы 7.19 получаем $\lim\limits_{\rho \to 0} \operatorname{diam} \varphi_0(B(x, \rho)) = 0$. Отсюда следует непрерывность отображения φ_0 в тех точках, где оно уже определено, и возможность доопределить отображение φ_0 по непрерывности в остальных точках. Построенное таким образом непрерывное на $\mathbf{R}^n$ отображение будем обозначать той же буквой φ_0.

В следующем пункте мы продолжим исследование топологических свойств отображения φ_0.

4°. Гомеоморфность отображения φ_0. Пусть $l^*p \leqslant n$. Заметим прежде всего, что для любой точки $x \in \mathbf{R}^n$ имеем $\operatorname{diam} \varphi_0\overline{(B(x, 1))} \leqslant M$, где постоянная M не зависит от точки x. Действительно, так как $\mathscr{C}(\varphi_0\overline{(B(x, 1)); \tilde{F}}) < M < \infty$ (предложение 7.11), то по лемме 7.20 континуумы $\varphi_0(\overline{B(x, 1)})$ имеют диаметры, ограниченные в совокупности.

Далее мы докажем, что прообраз $\varphi_0^{-1}(B(y, \rho))$ любого шара $B(y, \rho)$, $\rho > 0$, ограничен. Если, напротив, предположить существование последовательности $x_k \in \mathbf{R}^n$, $\varphi_0(x_k) \in B(y, \rho)$ и $\lim\limits_{k \to \infty} r(x_k) = \infty$, то по предыдущему существует такая постоянная M_ρ, не зависящая от k, что $\varphi_0(B(x_k, 1)) \subset B(y, M_\rho)$. Тогда для любой функции $f \in C_0^\infty$, равной единице на $B(y, M_\rho)$, функция $\varphi^* f$ не меньше единицы на любом из шаров $B(x_k, 1)$. Однако такая функция не может принадлежать пространству $\tilde{F}$.

Теперь легко установить, что $\varphi_0(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^n$. В самом деле, если $y \notin \varphi_0(\mathbf{R}^n)$, то существует последовательность точек $y_k \in \varphi_0(\mathbf{R}^n)$, сходящаяся к y. По предыдущему из последовательности $\varphi_0^{-1}(y_k) = x_k$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся, скажем, к точке x_0. В силу непрерывности отображения φ_0 имеем $\varphi_0(x_0) = y$.

Для доказательства гомеоморфности φ_0 остается проверить, что φ_0 инъективно. Пусть, напротив, две различные точки $x, z \in \varphi_0^{-1}(y)$. Заметим, что для любого шара $B(y, \rho)$ точки x, z принадлежат одной компоненте связности γ_ρ множества $\varphi_0^{-1}(\overline{B(y,\rho)})$. Тогда, с одной стороны, $\operatorname{diam}\gamma_\rho \geqslant |x-z|_1$, а с другой (поскольку $\overline{\mathscr{C}}(\overline{B(y,\rho)};\widetilde{F})\to 0$ при $\rho\to 0$ [9, 34]) в силу (7.5) $\lim\limits_{\rho\to 0}\overline{\mathscr{C}}(\varphi_0^{-1}\overline{(B(y,\rho)};\widetilde{F})=0$, что противоречит лемме 7.19.

В случае $l^*p>n$ доказательство того, что $\varphi_0(\mathbf{R}^n)=\mathbf{R}^n$, сводится к предыдущему. Если $x,\ y\in\mathbf{R}^n$ — такие точки, что $\varphi_0(x)=\varphi_0(y)=z$, то для любой функции $f\in\widetilde{F}$ имеем $\varphi^*f(x)=\varphi^*f(y)=f(\varphi(x))$ (здесь f и $\varphi^*f=f\circ\varphi$ — непрерывные представители соответствующих классов). Последнее противоречит изоморфности оператора φ^*. Гомеоморфность отображения φ_0 во всех случаях доказана.

5°. Метрические свойства гомеоморфизма φ_0. Исследование метрических свойств отображения φ_0 сводится к неоднородному варианту теоремы 5.6 в случае $\mathbf{G}=\mathbf{R}^n$. Чтобы применить его, нам понадобятся оценки для емкости кольца и емкости Тейхмюллера относительно рассматриваемых в теореме 7.1 пространств.

Пространство $I^{l^*}(L_p)$ при $\sum\limits_{i\neq k} l_i^{-1}<p<n/l^*$ удовлетворяет условиям теоремы 5.6. Достаточно проверить, что $T(1;I^{l^*}(L_p))\geqslant \geqslant \inf\{\overline{\mathscr{C}}(F_1;I^{l^*}(L_p)):F_1\}\geqslant\gamma>0$ (здесь нижняя грань берется по всем континуумам F_1, пересекающим $S(0,1)$ и $\{0\}$; правая оценка следует из (7.20)), и

$$C(1,\infty;I^{l^*}(L_p))=\lim_{P\to\infty}C(1,P;I^{l^*}(L_p))=\overline{\mathscr{C}}(B(0,1);I^{l^*}(L_p))\geqslant C_2^{-1}$$

(неравенство (7.11)). Таким образом, отображение $\varphi_0\in II^{l^*}(L_p)$ — (r,∞)-квазиизометрический гомеоморфизм.

В случае пространства Бесова заметим, что

$$C(0,1;B^{\mathbf{l}}_{p,\theta})=\lim_{\rho\to 0+}C(\rho,1;B^{\mathbf{l}}_{p,\theta})=0 \quad\text{при}\quad l^*p=n,\quad \theta\neq 1\ [9,34],$$

$$C(0,1;B^{\mathbf{l}}_{p,\theta})\neq 0 \quad\text{при}\quad l^*p>n\quad [9,10],$$

$$C(1,\infty;B^{\mathbf{l}}_{p,\theta})\neq 0 \text{ при } \quad l^*p<n\quad (\text{неравенство } 7.11).$$

Чтобы оценить емкость Тейхмюллера в случае $l^*p\geqslant n$, воспользуемся вложением [16, 47, 49].

$$i:\ B^{\mathbf{l}}_{p,\theta}(\mathbf{R}^n)\to B^{\mathbf{s}}_{\infty,\theta}(\mathbf{R}^n),$$

где $\mathbf{s}=t\mathbf{l}$, $t\in(0,l_M^{-1})$, $l_M=\max\{l_i: i=1,2,\dots,n\}$, $l^*-n/p=s^*$, и очевидным включением

$$B^{\mathbf{s}}_{\infty,\theta}(\mathbf{R}^n)\subset b^{\mathbf{s}}_{\infty,\theta}(\mathbf{R}^n)$$

(здесь $b^{\mathbf{s}}_{q,\theta}$ — анизотропное однородное пространство Бесова, полученное замыканием C_0^∞ в соответствующей однородной норме). Из приведенных вложений следуют неравенства $T(\rho;B^{\mathbf{l}}_{p,\theta})\geqslant C_1T(\rho;B^{\mathbf{s}}_{\infty,\theta})\geqslant C_2T(\rho;b^{\mathbf{s}}_{\infty,\theta})\geqslant C_2\rho^{\frac{n}{p}-l^*}T(1;b^{\mathbf{s}}_{\infty,\theta})$. Емкость, стоящая справа, отлична от нуля (в противном случае мы получили бы последовательность $\{f_k\}$, $k\in\mathbf{N}$, в $b^{\mathbf{s}}_{q,\theta}$, всюду сходящуюся к постоянной функции, чего, очевидно, быть не может).

Если показатель суммируемости удовлетворяет условию $\max\limits_k\sum\limits_{i\neq k}l_i^{-1}< <p<n/l^*$, то из предложения 7.12 и леммы 7.15 получаем, что гомеоморфизм $\varphi_0\in IB^{\mathbf{l}}_{p,\theta}$ принадлежит также классу $IB^{\mathbf{m}}_{p,p}$, где $\mathbf{m}=\varepsilon\mathbf{l}$, $\varepsilon\in(0,1)$,— такое число, что $p>\max\limits_k\sum\limits_{i\neq k}m_i^{-1}$. Оценим теперь емкость Тейхмюллера снизу

$$T\left(\rho;\, B^{\mathbf{m}}_{p,p}\right) \geqslant T\left(\rho;\, b^{\mathbf{m}}_{p,p}\right) = \rho^{\frac{n}{p}-l^*}\, T\left(1;\, b^{\mathbf{m}}_{p,p}\right) \geqslant \rho^{\frac{n}{p}-l^*} \inf \overline{\mathscr{C}}\left(F_1;\, b^{\mathbf{m}}_{p,p}\right);$$

нижняя грань берется по всем континуумам F_1, пересекающим $S(0,\ 1)$ и $\{0\}$. В силу (7.20) упомянутая нижняя грань отлична от нуля (напомним, что локально пространство $b^{\mathbf{m}}_{p,p}$ совпадает с $B^{\mathbf{m}}_{p,p}$).

Учитывая приведенные оценки при $l^*p > n$, так же, как и в теореме 5.11, мы устанавливаем существование числа $\varepsilon > 0$ такого, что как только $r(x,\ y) < \varepsilon$, то $r(\varphi(x),\ \varphi(y)) \leqslant 1$. В этих условиях мы можем локализовать доказательство теоремы 5.6 и проверить $(r,\ \varepsilon)$-квазиизометричность отображения φ_0.

Чтобы применить подобный прием при $l^*p \leqslant n$, покажем, что величины $l(x,\, 1) = \min\limits_{r(x,y)=1} r(\varphi(x),\, \varphi(y))$ отделены от нуля снизу постоянной, не зависящей от $x \in \mathbf{R}^n$. В самом деле, из (7.5) и (7.20) имеем

$$\overline{\mathscr{C}}\left(B(\varphi(x),\, l(x,\, 1));\, B^{\mathbf{l}}_{p,\theta}\right) \geqslant K\overline{\mathscr{C}}\left(\varphi^{-1}\left(B\left(\varphi(x),\, l(x,\, 1)\right)\right);\, B^{\mathbf{l}}_{p,\theta}\right) \geqslant \gamma > 0,$$

где γ не зависит от точки $x \in \mathbf{R}^n$. Поэтому мы можем локализовать доказательство теоремы 5.6 в случае $l^*p = n$ $(l^*p < n)$ и установить $(r,\ \varepsilon)$-квазиконформность ($(r,\ \varepsilon)$-квазиизометричность) отображения φ_0.

Докажем локальную гельдеровость отображения φ_0. Полагая

$$L(x,\, \rho) = \max_{r(x,y)=\rho} r(\varphi(x),\, \varphi(y);\ l(x,\, \rho)) = \min_{r(x,y)=\rho} r(\varphi(x),\, \varphi(y)),$$

для всех $\rho \in (0,\ \varepsilon)$ имеем соотношения

$$B(\varphi(x);\ l(x,\ \rho)) \subset \varphi(B(x,\ \rho)),\quad L(x,\ \rho)/l(x,\ \rho) \leqslant q,$$

где q — коэффициент квазиконформности. Вследствие этого включения получаем неравенства

$$\overline{\mathscr{C}}\left(B(x,\, \rho);\, B^{\mathbf{l}}_{p,\theta}\right) \geqslant K\overline{\mathscr{C}}\left(\varphi\left(B(x,\, \rho)\right);\, B^{\mathbf{l}}_{p,\theta}\right) \geqslant K\overline{\mathscr{C}}\left(B(\varphi(x),\, l(x,\, \rho));\, B^{\mathbf{l}}_{p,\theta}\right). \tag{7.24}$$

Учитывая эквивалентность $\overline{\mathscr{C}}\left(B(x,\, \rho);\, B^{\mathbf{l}}_{p,\theta}\right) \sim \left[\ln\frac{2}{\rho}\right]^{-p/\theta'}$, $\theta' = \theta/(\theta - 1)$, $\rho \in (0,\ 1]$ [9, 34], из (7.24) имеем неравенство

$$\left[\ln\frac{2}{l(x,\, \rho)}\right]^{-p/\theta'} \leqslant \left[\ln\frac{2}{\rho}\right]^{-p/\theta'},$$

откуда следует гельдеровость отображения φ_0: если $r(x,\ y) = \rho$, то $r(\varphi(x),\ \varphi(y)) \leqslant L(x,\ \rho) \leqslant ql(x,\ \rho) \leqslant qr(x,\ y)^{\alpha}$, где $\alpha = 1/C^{\theta'/p}$. Гельдеровость обратного отображения доказывается аналогично.

В изотропном случае в соотношении $L(x,\ \rho)/l(x,\ \rho) \leqslant \bar{q} < \infty$ нет ограничений на радиус ρ. Поэтому при $|x - y| \geqslant 1$ неравенства $m|x - y| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant M|x - y|$ получаются из (7.24) так же, как и предыдущие, с учетом эквивалентности $\overline{\mathscr{C}}\left(B(x,\, \rho);\, B^{\mathbf{l}}_{p,\theta}\right) \sim \rho^{n/p}$.

Случай пространств анизотропных бесселевых потенциалов рассматривается аналогично. Доказательство теоремы 7.1 закончено.

З а м е ч а н и е 7.23. Доказательство теоремы 7.1 основывается на простых геометрических принципах, которые мы сейчас перечислим.

1. Лебегово пространство $\tilde{F}$, определенное на $\mathbf{R}^n$, удовлетворяет условиям предложения 7.11.

2. Пространство $\tilde{F}$ инвариантно относительно сдвигов.

3. Пространство $\tilde{F}$ δ_t-однородно степени σ.

4. Емкость Тейхмюллера обладает свойством $T(\rho;\ \tilde{F}) \geqslant \beta\rho^{-\sigma}$, где $\rho \in (0,\ 1]$, а β не зависит от ρ.

5. Если γ_k — последовательность континуумов и $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{diam}\gamma_k = \infty$, то $\overline{\mathscr{C}}(\gamma_k;\ \tilde{F}) = \infty$.

6. При $\sigma > 0$, если $|E| = \infty$, то $\overline{\mathscr{C}}(E; \tilde{F}) = \infty$.

7. При $\sigma > 0$ вложение i: $\tilde{F} \to C(\mathbf{R}^n)$ непрерывно.

8. При $\sigma = 0$ емкость кольца $C(0, 1; \tilde{F})$ равна нулю.

9. При $\sigma \leqslant 0$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что для всех k, $1 \leqslant k \leqslant n$, неравенство $\overline{\mathscr{C}}(E; \tilde{F}) < \delta$ влечет $|\Pi_k(E)|_1 < \varepsilon$ и $|\pi_k(E)|_{n-1} < \varepsilon$.

Постулируя эти свойства, мы приходим к следующему результату.

Теорема 7.24. *Пусть $\tilde{F}$ — лебегово пространство, определенное на $\mathbf{R}^n$ и удовлетворяющее всем требованиям замечания 7.23. Если определенное почти всюду на $\mathbf{R}^n$ измеримое отображение φ: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ принадлежит классу $I\tilde{F}$, то в случае $\sigma = 0$ ($\sigma \neq 0$) существует (r, ε)-квазиконформное ((r, ε)-квазиизометрическое) отображение φ_0, совпадающее с φ почти всюду, $\varepsilon > 0$.*

6°. В заключение сформулируем несколько результатов о достаточных условиях замены переменной в анизотропных пространствах дифференцируемых функций, установленных в [7, 44, 45].

Пусть все компоненты вектора гладкости $\mathbf{l}$ меньше единицы.

1. *Если гомеоморфизм φ: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ $(r, 0)$-квазиизометричен, то $\varphi \in \in \mathrm{I}L_p$.*

2. *Если гомеоморфизм φ: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ (r, ε)-квазиизометричен ((r, ∞)-квазиизометричен), то $\varphi \in IB^{\mathbf{l}}_{p,\theta}$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$ ($\varphi \in IL^{l^*}_p$, $1 < p < \infty$, и $\varphi \in II^{l^*}(L_p)$, $1 < p < n/l^*$).*

В изотропном случае справедливо также следующее утверждение.

3. *Если квазиконформное отображение φ: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ обладает свойством $0 < m \leqslant |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant M < \infty$ для всех точек x, $y \in \mathbf{R}^n$ ($|x - - y| = 1$), то $\varphi \in IB^l_{p,p}$, где $lp = n$, $p \geqslant n + 1 \geqslant 2$, и $\varphi \in IW^1_n$, $n \geqslant 2$.*

Сравнивая эти утверждения с теоремой 7.1, мы для части шкалы пространств дифференцируемых функций получаем необходимые и достаточные условия замены переменной.

Другие результаты о замене переменной в анизотропных пространствах дифференцируемых функций см. в [7], некоторые из которых новы и в изотропном случае (ср. с работами [36—42]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ландкоф Н. С.** Основы современной теории потенциала.— М.: Наука, 1966.
2. **Карлесон Л.** Избранные проблемы теории исключительных множеств.— М.: Мир, 1971.
3. **Решетняк Ю. Г.** О понятии емкости в теории функций с обобщенными производными // Сиб. мат. журн.— 1969.— Т. 10, № 5.— С. 1109—1138.
4. **Мазья В. Г., Хавин В. П.** Нелинейная теория потенциала // Успехи мат. наук.— 1972.— Т. 27, № 6.— С. 67—138.
5. **Adams D. R., Meyers N. G.** Bessel potentials. Inclusion relations among classes of exceptional sets // Indiana Univ. Math. J.— 1973.— V. 22, N 9.— P. 873—905.
6. **Hedberg L. I., Molf T. H.** Thin sets in nonlinear potential theory // Ann. Inst. Fourier (Grenoble).— 1983.— V. 33, N 4.— P. 161—187.
7. **Водопьянов С. К.** Квазиэллиптическая L_p-теория потенциала и ее приложения // Докл. АН СССР.— 1988.— Т. 298, № 4.— С. 780—784.
8. **Водопьянов С. К.** Сравнение метрических и емкостных характеристик в теории потенциала // Тез. докл. Всесоюз. школы по комплексному анализу и математической физике. Дивногорск, июнь — июль 1987.— Красноярск, 1987.— С. 20.
9. **Водопьянов С. К.** Принцип максимума в теории потенциала и теоремы вложения для анизотропных пространств дифференцируемых функций // Сиб. мат. журн.— 1988.— Т. 29, № 2.— С. 17—33.
10. **Водопьянов С. К.** Геометрические свойства отображений и областей. Оценки снизу нормы оператора продолжения // Исследования по геометрии и математическому анализу/Под ред. Ю. Г. Решетняка.— Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1987.— С. 70—101.— (Тр. Ин-та математики; Т. 7).
11. **Водопьянов С. К.** Изопериметрические соотношения и условия продолжения дифференцируемых функций // Докл. АН СССР.— 1987.— Т. 292, № 1.— С. 11—16.
12. **Водопьянов С. К.** Геометрические свойства областей и оценки для нормы оператора продолжения // Докл. АН СССР.— 1987.— Т. 292, № 4.— С. 791—795.
13. **Алборова М. С., Водопьянов С. К.** Устранимые особенности решений квазиэллиптических уравнений/Новосиб. гос. ун-т.— Новосибирск, 1987.— 44 с.: Деп. в ВИНИТИ 04.02.87, № 804 — В87.

14. **Folland G. B., Stein E. M.** Hardy spaces on homogeneous groups // Math. Notes 28/ Princ. univ. Press, 1982.
15. **Fabes E. B., Riviere N. M.** Singular integrals with homogeneity // Studia Math.— 1966.— T. 27.— P. 19—38.
16. **Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения.— М.: Наука, 1975.
17. **Stein E. M., Wainger S.** Problems in harmonic analysis related with curvature // Bull. Amer. Math. Soc.— 1978.— T. 84.— P. 1239—1295.
18. **Meyers N. G.** A theory of capacities for potentials of functions in Lebesgue classes // Math. Scand.— 1970.— V. 26, N 2.— P. 255—292.
19. **Adams D. R.** Weighted nonlinear potential theory // Trans. Amer. Math. Soc.— 1986.— V. 297, N 1.— P. 73—94.
20. **Muckenhoupt B., Wheeden R. L.** Weighted norm Inequality for fractional Integrals // Ibid.— 1974.— V. 192, N 6.— P. 261—274.
21. **Лизоркин П. И.** Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. мат. ин-та АН СССР.— 1969.— Т. 105.— С. 89—167.
22. **Dappa H., Trebels W.** On L_1-criteria for quasiradial Fourier multipliers with applications to some anisotropic functions spaces // Anal. Math.— 1983.— T. 9, N 4.— P. 275—289.
23. **Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.** Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.— М.: Наука, 1983.
24. **Водопьянов С. К.** Функциональные пространства и квазиконформные отображения на однородных группах // Тр. 5-й Респ. конф. по нелин. задачам мат. физики, Львов, сент., 1985/Донец. ун-т.— Донецк, 1987.— С. 107—109.: Деп. в УкрНИИНТИ 16.07.87, № 2077.
25. **Водопьянов С. К.** Эквивалентные нормировки пространств Соболева и Никольского в областях, условия продолжения и следы/Новосиб. гос. ун-т.— Новосибирск, 1986.— 70 с.: Деп. в ВИНИТИ 14.11.1986, № 7809.
26. **Devore R. A., Sharpley R. C.** Maximal functions measuring smoothness // Mem. Amer. Math. Soc., 1984.— N 293.
27. **Решетняк Ю. Г.** Пространственные отображения с ограниченным искажением.— Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1982.
28. **Мазья В. Г.** Пространства С. Л. Соболева.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
29. **Choquet G.** Forme abstraite du theoreme de capacitabilite // Ann. Inst. Fourier.— 1959.— V. 9.— P. 83—89.
30. **Брело М.** Основы классической теории потенциала.— М.: Мир, 1964.
31. **Aronszajn N., Smith K. T.** Functional spaces and functoinal completion. // Ann. Inst. Fourier.— 1956.— V. 6.— P. 125—185.
32. **Лизоркин П. И.** Обобщенные гельдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношения с пространствами Соболева $L^{(r)}_p$// Сиб. мат. журн.— 1968.— Т. 9, № 5.— С. 1127—1152.
33. **Lizorkin P. I.** Isomorphism of Besov spaces $B^{(r)}_{p,\theta}(\mathbf{R}^n)$ with the space $l_\theta(l_p)$. On zero-spaces $B^0_{p,\theta}(\mathbf{R}^n)$// Anal. Math.— 1976.— V. 2, N 2.— P. 203—210.
34. **Adams D. R.** The classification problem for the capacities associated with the Besov and Triebel — Lizorkin spaces.— Lexington, 1986.— 22 p.— (Preprint/Banach Center Publications).
35. **Adams R., Aronszajn N., Smith K. T.** Theory of Bessel potentials, Part II // Ann. Inst. Fourier.— 1967.— V. 17, N 2.— P. 1—135.
36. **Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.** Структурные изоморфизмы пространств W и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн.— 1975.— Т. 16, № 2.— С. 224—246.
37. **Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.** Функциональные характеристики квазиизометрических отображений // Там же.— 1976.— Т. 17, № 4.— С. 768—773.
38. **Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.** Новый функциональный инвариант для квазиконформных отображений // Некоторые вопросы современной теории функций: Материалы конф., Новосибирск, март 1976 г.— Новосибирск, 1976.— С. 18—20.
39. **Гольдштейн В. М., Романов А. С.** Об отображениях, сохраняющих пространства Соболева // Сиб. мат. журн.— 1984.— Т. 25, № 3.— С. 55—61.
40. **Романов А. С.** О замене переменной в пространствах потенциалов Бесселя и Рисса // Функциональный анализ и математическая физика: Сб. науч. тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики.— Новосибирск, 1985.— С. 117—133.
41. **Maz'ya V. G., Shaposhnikova T. O.** Theory of multipliers in spaces of differentiable functions.— Boston — London — Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1985.
42. **Маркина И. Г.** Замена переменных как автоморфизм пространств Бесова и пространств бесселевых потенциалов // Матер. XXIV Всесоюз. науч. студенч. конф. Математика/Новосиб. гос. ун-т.— Новосибирск, 1986.— С. 41—46.
43. **Водопьянов С. К.** Геометрические свойства областей, удовлетворяющих условию продолжения для пространств дифференцируемых функций // Некоторые при-

ложения функционального анализа к задачам математической физики/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики.— Новосибирск, 1984.— № 2.— С. 65—95.— (Тр. семин. С. Л. Соболева).
44. **Водопьянов С. К.** Анизотропные пространства дифференцируемых функций и квазиконформные отображения // XI Всесоюз. шк. по теории операторов в функциональных пространствах, Челябинск, май 1986 г.: Тез. докл.— Челябинск, 1986.— Ч. 2.— С. 23.
45. **Vodop'janov S. K.** Function spaces and quasiconformal mappings on homogeneous groups // Conf. on Function Spac. and Appl., Lund, June 1986: Abstracts.— Lund, 1986.— P. 11.
46. **Vodop'janov S. K.** Function spaces and quasiconformal mappings on homogeneous groups // 13 Rolf Nevanlinna — Colloquium, Joensuu, aug. 1987: Abstracts.— Joensuu, 1987.— P. 79—80.
47. **Трибель X.** Теория функциональных пространств.— М.: Мир, 1986.
48. **Берг Й., Лёфстрём Й.** Интерполяционные пространства. Введение.— М.: Мир, 1980.
49. **Трибель X.** Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы.— М.: Мир, 1980.
50. **Халмош П.** Теория меры.— М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
51. **Adams D. R.** Traces of potentials. II // Indiana Univ. Math. J.— 1973.— Т. 22.— P. 907—918.

Л. Г. ГУРОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПСЕВДОИЗОМЕТРИЙ

Посвящается Ю. Г. Решетняку

Первые работы по устойчивости классов отображений принадлежат М. А. Лаврентьеву [1] и Ф. Джону [2]. М. А. Лаврентьев для исследования некоторых гидродинамических моделей ввел понятие квазиконформных отображений в многомерных пространствах. Им же поставлена задача об оценке отклонения квазиконформного отображения от класса конформных отображений. Наличие таких оценок и называют устойчивостью класса отображений. Задачу М. А. Лаврентьева решали также П. П. Белинский [3] и Ю. Г. Решетняк. В окончательной форме решение этой задачи изложено в монографии Ю. Г. Решетняка [4]. Ф. Джон применял понятие устойчивости при исследовании некоторых задач теории упругости и деформации твердых тел. Им была решена задача об устойчивости изометрий. Вопросами устойчивости классов функций, в частности классов многомерных голоморфных отображений, занимался А. П. Копылов [5—7]. В работах [8, 9] автор исследовал устойчивость преобразований Лоренца. В настоящей работе изучается устойчивость псевдоизометрий, т. е. аффинных преобразований пространства, сохраняющих квадратичную форму $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2-x_{k+1}^2-\ldots-x_n^2$. Вводится класс квазипсевдоизометрических отображений и устанавливаются оценки в норме пространства $C(U)$ отклонения квазипсевдоизометрии от класса псевдоизометрий для областей, удовлетворяющих условию Ф. Джона.

§ 1. Квазипсевдоизометрические отображения

В пространстве $\mathbf{R}^n$ зафиксируем подпространства $\mathbf{R}^k$ и $\mathbf{R}^{n-k}$, состоящие из точек $(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ и $(0, 0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ соответственно. Через $e_1, e_2, \ldots, e_n$ будем обозначать канонический базис в $\mathbf{R}^n$. Введем еще такие обозначения:

$$\pi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0),$$
$$\pi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(0, 0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$
$$\mathcal{D}(x)=|\pi_1(x)|^2-|\pi_2(x)|^2,$$
$$S^{k-1}=\{x\in\mathbf{R}^n:\ \mathcal{D}(x)=|x|^2=1\},$$
$$S^{n-k-1}=\{x\in\mathbf{R}^n:\ \mathcal{D}(x)=-|x|^2=-1\},$$