ложения функционального анализа к задачам математической физики/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики.— Новосибирск, 1984.— № 2.— С. 65—95.— (Тр. семин. С. Л. Соболева).
44. **Водопьянов С. К.** Анизотропные пространства дифференцируемых функций и квазиконформные отображения // XI Всесоюз. шк. по теории операторов в функциональных пространствах, Челябинск, май 1986 г.: Тез. докл.— Челябинск, 1986.— Ч. 2.— С. 23.
45. **Vodop'janov S. K.** Function spaces and quasiconformal mappings on homogeneous groups // Conf. on Function Spac. and Appl., Lund, June 1986: Abstracts.— Lund, 1986.— P. 11.
46. **Vodop'janov S. K.** Function spaces and quasiconformal mappings on homogeneous groups // 13 Rolf Nevanlinna — Colloquium, Joensuu, aug. 1987: Abstracts.— Joensuu, 1987.— P. 79—80.
47. **Трибель X.** Теория функциональных пространств.— М.: Мир, 1986.
48. **Берг Й., Лёфстрём Й.** Интерполяционные пространства. Введение.— М.: Мир, 1980.
49. **Трибель X.** Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы.— М.: Мир, 1980.
50. **Халмош П.** Теория меры.— М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
51. **Adams D. R.** Traces of potentials. II // Indiana Univ. Math. J.— 1973.— T. 22.— P. 907—918.

Л. Г. ГУРОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПСЕВДОИЗОМЕТРИЙ

Посвящается Ю. Г. Решетняку

Первые работы по устойчивости классов отображений принадлежат М. А. Лаврентьеву [1] и Ф. Джону [2]. М. А. Лаврентьев для исследования некоторых гидродинамических моделей ввел понятие квазиконформных отображений в многомерных пространствах. Им же поставлена задача об оценке отклонения квазиконформного отображения от класса конформных отображений. Наличие таких оценок и называют устойчивостью класса отображений. Задачу М. А. Лаврентьева решали также П. П. Белинский [3] и Ю. Г. Решетняк. В окончательной форме решение этой задачи изложено в монографии Ю. Г. Решетняка [4]. Ф. Джон применял понятие устойчивости при исследовании некоторых задач теории упругости и деформации твердых тел. Им была решена задача об устойчивости изометрий. Вопросами устойчивости классов функций, в частности классов многомерных голоморфных отображений, занимался А. П. Копылов [5—7]. В работах [8, 9] автор исследовал устойчивость преобразований Лоренца. В настоящей работе изучается устойчивость псевдоизометрий, т. е. аффинных преобразований пространства, сохраняющих квадратичную форму $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2-x_{k+1}^2-\ldots-x_n^2$. Вводится класс квазипсевдоизометрических отображений и устанавливаются оценки в норме пространства $C(U)$ отклонения квазипсевдоизометрии от класса псевдоизометрий для областей, удовлетворяющих условию Ф. Джона.

§ 1. Квазипсевдоизометрические отображения

В пространстве $\mathbf{R}^n$ зафиксируем подпространства $\mathbf{R}^k$ и $\mathbf{R}^{n-k}$, состоящие из точек $(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ и $(0, 0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ соответственно. Через $e_1, e_2, \ldots, e_n$ будем обозначать канонический базис в $\mathbf{R}^n$. Введем еще такие обозначения:

$$\pi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0),$$
$$\pi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(0, 0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$
$$\mathscr{D}(x)=|\pi_1(x)|^2-|\pi_2(x)|^2,$$
$$S^{k-1}=\{x\in\mathbf{R}^n\colon \mathscr{D}(x)=|x|^2=1\},$$
$$S^{n-k-1}=\{x\in\mathbf{R}^n\colon \mathscr{D}(x)=-|x|^2=-1\},$$

$L(M)$ — линейная оболочка множества M. Положим $K_1 = \{x \in \mathbf{R}^n$: $|\pi_1(x)| + |\pi_2(x)| \leqslant 1\}$. Образы множества K_1 при гомотетиях и параллельных переносах будем называть *коноидами*. Если $M \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченное множество, то K-оболочкой множества M будем называть наименьший коноид, в котором содержится наименьший замкнутый шар, содержащий множество M. Будем обозначать K-оболочку множества M через KM. Заметим, что $KB(x, r) \subset B(x, \sqrt{2}\, r)$. Докажем, что имеет место равенство

$$K_1 = \left(\bigcap_{a \in S^{k-1}} \{x\colon |\pi_2(x)| \leqslant |\pi_1(x-a)|\}\right) \cap$$
$$\cap \left(\bigcap_{b \in S^{n-k-1}} \{x\colon |\pi_1(x)| \leqslant |\pi_2(x-b)|\}\right).$$

Действительно, пусть $|\pi_1(x)| + |\pi_2(x)| \leqslant 1$ и $|\pi_1(a)| = 1$, $\pi_2(a)| = 0$. Тогда

$$|\pi_1(x-a)| = |\pi_1(x) - a| \geqslant 1 - |\pi_1(x)| \geqslant |\pi_2(x)|.$$

Аналогично для $b \in S^{n-k-1}$. Для доказательства обратного включения положим $a = \pi_1(x)/|\pi_1(x)|$, $b = \pi_2(x)/|\pi_2(x)|$. Тогда

$$|\pi_2(x)| \leqslant |\pi_1(x-a)| = \left|\pi_1(x) - \frac{\pi_1(x)}{|\pi_1(x)|}\right| =$$
$$= |\pi_1(x)| \left|1 - \frac{1}{|\pi_1(x)|}\right| = [1 - |\pi_1(x)||.$$

Из неравенств $|\pi_2(x)| \leqslant |1 - |\pi_1(x)||$ и $|\pi_1(x)| \leqslant |1 - |\pi_2(x)||$ следует $|\pi_1(x)| + |\pi_2(x)| \leqslant 1$.

Определение 1. *Отображение* $\varphi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *называется псевдоизометрией, если для любых* $x, y \in \mathbf{R}^n$

$$\mathscr{D}(\varphi(x) - \varphi(y)) = \mathscr{D}(x-y).$$

Псевдоизометрия — невырожденное афинное преобразование пространства $\mathbf{R}^n$. Примером псевдоизометрии служит гиперболический поворот. Пусть $a \in S^{k-1}$ и $b \in S^{n-k-1}$. Представим $\mathbf{R}^n$ в виде ортогональной суммы $\mathbf{R}^n = L(a, b) \oplus M$. Гиперболический поворот ψ есть линейное преобразование $\mathbf{R}^n$ такое, что $\psi|_M = id$ и $\psi(pa + qb) = (p\operatorname{ch}t + q\operatorname{sh}t)a + (p\operatorname{sh}t + q\operatorname{ch}t)b$, где $p, q, t \in \mathbf{R}$. Псевдоизометриями также являются ортогональные преобразования подпространств $\mathbf{R}^k$ и $\mathbf{R}^{n-k}$.

Лемма 1. *Пусть* $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0 < 1$ *и точки* $P_1, P_2, \ldots, P_{n-k}$ *таковы, что*

$$\mathscr{D}(P_i) = -(1+\alpha_i)R^2 \quad (|\alpha_i| < \varepsilon), \tag{1.1}$$
$$\mathscr{D}(P_i - P_j) = -2(1+\beta_{ij})R^2 \quad (|\beta_{ij}| < \varepsilon) \tag{1.2}$$

для $i = 1, 2, \ldots, n-k$; $j = 1, 2, \ldots, n-k$. *Тогда найдется псевдоизометрия* φ *такая, что*

$$\varphi(0) = 0, \ \varphi(P_i) = Re_{k+i} + O(\varepsilon R) \tag{1.3}$$

для $i = 1, 2, \ldots, n-k$.

Доказательство. Если $\pi_1(P_1) \neq 0$, то гиперболическим поворотом ψ в плоскости $L(\pi_1(P_1), \pi_2(P_1))$ добьемся обращения в нуль проекции $\pi_1[\psi(P_1)]$. Тогда из (1.1) $|\psi(P_1)| = (1 + O(\varepsilon))R$. Применяя ортогональное преобразование $\gamma\colon \mathbf{R}^{n-k} \to \mathbf{R}^{n-k}$, получим $\gamma[\psi(P_1)] = (1 + O(\varepsilon))Re_{k+1}$. Обозначаем $\varphi_1 = \gamma \circ \psi$.

Предположим, что уже построена псевдоизометрия φ_s, $s < n-k$, для которой

$$\varphi_s(0) = 0, \ \varphi_s(P_i) \in L(e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_{k+s}) \text{ для } i = 1, 2, \ldots, s,$$
$$\varphi_s(P_i) = Re_{k+i} + O(\varepsilon R). \tag{1.4}$$

Тогда, если $z=\varphi_s(P_{s+1})$, то $\mathscr{D}(z)=-(1+O(\varepsilon))R^2$ и $\mathscr{D}(z-\varphi_s(P_i))=-2(1+O(\varepsilon))R^2$, $i=1, 2, \ldots, s$. Отсюда $z_{k+i}=O(\varepsilon R)$ для $i=1, 2, \ldots, s$. Положим $z'=z-\sum_{i=1}^{s} z_{k+i}e_{k+i}$. Тогда $|\pi_2(z')|<|\pi_1(z')|$ и $\pi_2(z')\perp\varphi_s(P_i)$, $i=1, 2, \ldots, s$. Поэтому гиперболическим поворотом ψ в плоскости $L(\pi_1(z'), \pi_2(z'))$ можно добиться обращения в нуль проекции $\pi_1[\psi(z')]$. При этом точки $\varphi_s(P_i)$, $i=1, 2, \ldots, s$, остаются неподвижными. Имеем

$$|\psi(z')|=(1+O(\varepsilon))R,\ \psi(z')\in L(e_{k+s+1}, \ldots, e_n).$$

Ортогональным преобразованием γ в подпространстве $L(e_{k+s+1}, \ldots, e_n)$ добьемся того, чтобы $\gamma(\psi(z'))=(1+O(\varepsilon))Re_{k+s+1}$. Положим $\varphi_{s+1}=\gamma\circ\psi\circ\varphi_s$. Очевидно, что

$$\varphi_{s+1}(P_{s+1})=\gamma(\psi(z'))+\sum_{i=1}^{s} z_{k+i}e_{k+i}=$$
$$=Re_{k+s+1}+O(\varepsilon R)\in L(e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_{k+s+1}).$$

Продолжаем это построение до тех пор, пока не получим $s=n-k$. Окончательно полагаем $\varphi=\varphi_{n-k}$.

Число ε_0 в данной лемме должно быть настолько малым, чтобы для любых $x, y\in L(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ выполнялось $\mathscr{D}(x-y)<0$.

Пусть U — область в $\mathbf{R}^n$, $f: U\to\mathbf{R}^n$ — гомеоморфизм и $\varepsilon\geqslant 0$, $\varepsilon<1$.

Определение 2. *Отображение f будем называть ε-квазипсевдоизометрическим, если для любых чисел $\varepsilon'(\varepsilon<\varepsilon'<1)$ и точки $x_0\in U$ найдется $\delta=\delta(x_0, \varepsilon', f)>0$ такое, что для любых точек x, y из шара $B(x_0, \delta)$ выполняется равенство*

$$\mathscr{D}(f(x)-f(y))=\mathscr{D}(x-y)+\theta(x, y)/x-y/^2, \tag{1.5}$$

где $|\theta(x, y)|<\varepsilon'$.

Совокупность всех ε-квазипсевдоизометрических отображений области U будем обозначать через QPI (ε, U). Отметим, что если $f\in \mathrm{QPI}(\varepsilon, U)$, а φ — псевдоизометрия, то $\varphi\circ f\in\mathrm{QPI}(\varepsilon, U)$.

Лемма 2. *Пусть $0\leqslant\varepsilon<\varepsilon_0<1$, $B=B(0, R)$ и U — область, для которой выполняется соотношение $B\subset U\subset B(0, 2R)$. Предположим, что отображение f: $U\to\mathbf{R}^n$ удовлетворяет следующему условию:*
для любых $x, y\in U$

$$\mathscr{D}(f(x)-f(y))=\mathscr{D}(x-y)+\theta(x, y)|x-y|^2, \tag{1.6}$$

где $|\theta(x, y)|\leqslant\varepsilon$. Тогда можно найти такие значения $\varepsilon_0=\varepsilon_0(n)$, $C=C(\varepsilon_0, n)$ и псевдоизометрию φ, что для $x\in U$

$$|\varphi[f(x)]-x|\leqslant C\varepsilon R,\ \varphi[f(0)]=0.$$

Доказательство. Рассмотрим точки $A_i=Re_i$, $i=1, 2, \ldots, n$. Будем считать, что $f(0)=0$. В этом случае точки $f(A_{k+1}), \ldots, f(A_n)$ удовлетворяют условиям леммы 1. Согласно этой лемме заменяя для сокращения записи $\varphi\circ f$ на f, можно записать

$$f(0)=0,\ f(A_{k+i})=A_{k+i}+O(\varepsilon R),\ i=1, 2, \ldots, n-k. \tag{1.7}$$

Возьмем теперь $1\leqslant i\leqslant k$, $1\leqslant j\leqslant n-k$. Так как $\mathscr{D}(A_i-A_{k+j})=0$, то из (1.6) следует $\mathscr{D}(f(A_i)-f(A_{k+j}))=O(\varepsilon R^2)$ и $\mathscr{D}(f(A_i))=(1+O(\varepsilon))R^2$. Учитывая (1.7), имеем

$$\mathscr{D}(f(A_i)-f(A_{k+j}))=\mathscr{D}(f(A_i))+2Rf_{k+j}(A_i)-$$
$$-R^2+\sum_{s=1}^{k} O(\varepsilon R)f_s(A_i)+O(\varepsilon R^2)=$$
$$=2Rf_{k+j}(A_i)+\sum_{s=1}^{k} O(\varepsilon R)f_s(A_i)+O(\varepsilon R^2).$$

Поэтому

$$f_{k+j}(A_i)=O(\varepsilon R) \tag{1.8}$$

для $i=1, 2, \ldots, k$; $j=1, 2, \ldots, n-k$. Если $1\leqslant s\leqslant k$ и $1\leqslant i\leqslant k$, то $\mathscr{D}(f(A_s)-f(A_i))=2R^2(1+O(\varepsilon))$, и используя (1.8), получаем $|f(A_s)-f(A_i)|=(1-O(\varepsilon))\sqrt{2}R$. Кроме того, из (1.6) и (1.8) следует, что $|f(A_i)|=(1+O(\varepsilon))R$, поэтому при помощи ортогонального преобразования подпространства $\mathbf{R}^k$ можно добиться выполнения соотношений

$$f(0)=0,\ f(A_i)=Re_i+O(\varepsilon R),\ i=1, 2, \ldots, n.$$

Выберем произвольную точку $x\in U$ и запишем для нее соотношения, которые следуют из (1.6): $\mathscr{D}(f(x)-f(A_i))=\mathscr{D}(x-A_i)+O(\varepsilon R^2)$ и $\mathscr{D}(f(x))=\mathscr{D}(x)+O(\varepsilon R^2)$. Тогда приходим к равенству

$$\mathscr{D}(f(x))+\sigma_i 2Rf_i(x)-\sigma_i R^2+O(\varepsilon R^2)=$$
$$=\mathscr{D}(x)+\sigma_i 2Rx_i-\sigma_i R^2+O(\varepsilon R^2),$$

где $\sigma_i=1$ при $i\leqslant k$, $\sigma_i=-1$ при $i>k$. Из этого равенства следует $f_i(x)=x_i+O(\varepsilon R)$, что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Пусть* $x=x(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$,— *некоторая кривая, для которой* $\pi_1(x(t))=\pi_1(x(0))+ta$, *где* $a=\pi_1(x(T)-x(0))/|\pi_1(x(T)-x(0))|\in S^{k-1}$. *Предположим, что имеется разбиение отрезка* $[0, T]$, $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_m=T$, *такое, что для* $i=1, 2, \ldots, m$

$$\mathscr{D}[x(t_i)-x(t_{i-1})]\geqslant -\lambda|x(t_i)-x(t_{i-1})|^2$$

для некоторого $\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$. *Тогда*

$$\mathscr{D}[x(T)-x(0)]+\lambda|x(T)-x(0)|^2\geqslant\left\{\sum_{i=1}^{m}[\mathscr{D}(x(t_i)-(t_{i-1}))+\right.$$
$$\left.+\lambda|x(t_i)-x(t_{i-1})|^2]^{1/2}\right\}^2.$$

Доказательство. Пусть $a_i^2=b_i^2+c_i^2$. Запишем обратное неравенство Минковского

$$\left(\sum|b_i|\right)^2+\left(\sum|c_i|\right)^2\leqslant\left(\sum\sqrt{b_i^2+c_i^2}\right)^2$$

или $\left(\sum|a_i|\right)^2-\left(\sum|b_i|\right)^2\geqslant\left(\sum\sqrt{a_i^2-b_i^2}\right)^2$. Положим $a_i=\sqrt{1+\lambda}|\pi_1\times\times(x(t_i)-x(t_{i-1}))|$ и $b_i=\sqrt{1-\lambda}|\pi_2(x(t_i)-x(t_{i-1}))|$. Тогда

$$\left\{\sum_{i=1}^{m}[\mathscr{D}(x(t_i)-x(t_{i-1}))+\lambda|x(t_i)-x(t_{i-1})|^2]^{1/2}\right\}^2=$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{m}\sqrt{a_i^2-b_i^2}\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{m}b_i\right)^2=$$
$$=(1+\lambda)\left(\sum_{i=1}^{m}|\pi_1(x(t_i)-x(t_{i-1}))|\right)^2-(1-\lambda)\left(\sum_{i=1}^{m}|\pi_2(x(t_i)-x(t_{i-1}))|\right)^2=$$
$$=(1+\lambda)|\pi_1(x(T)-x(0))|^2-(1-\lambda)\left(\sum_{i=1}^{m}|\pi_2(x(t_i)-x(t_{i-1}))|\right)^2\leqslant$$
$$\leqslant(1+\lambda)|\pi_1(x(T)-x(0))|^2-(1-\lambda)|\pi_2(x(T)-x(0))|^2=$$
$$=\mathscr{D}(x(T)-x(0))+\lambda|x(T)-x(0)|^2.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* U — *область в* $\mathbf{R}^n$ *и* $f\in QPI(\varepsilon, U)$. *Тогда для любых компакта* $A\subset U$ *и числа* ε' $(\varepsilon<\varepsilon'<1)$ *найдется* $\Delta=\Delta(\varepsilon', f, A)>$

> 0 *такое, что для любых* x, y, *принадлежащих любому шару* $B(x_0, \Delta)$ *с центром* $x_0 \in A$, *выполняется* (1.5).

Доказательством леммы служит стандартное рассуждение, использующее возможность выбора конечного подпокрытия для компактного множества.

Лемма 5. *Пусть в области* $u \subset \mathbf{R}^n$ *задано отображение* $f \in \mathrm{QPI}(\varepsilon, U)$, *причем* $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$, *где* ε_0 *такое же, как в лемме 2. Пусть* $R > 0$, $R_0(\varepsilon) = (4 + 2\sqrt{2(1+\varepsilon)})^{1/2}(1-\varepsilon)^{-1}R$, $R_1 > R_0(\varepsilon)$, $B = B(0, R)$, $B_1 = B(0, R_1)$ *и предположим, что* $\bar{B}_1 \subset U$. *Выберем две точки* $x, y \in B$ *такие, что отрезок* $[f(x), f(y)]$ *содержится в* $f(B)$. *Тогда если* $\mathscr{D}(f(x) - f(y)) > 0$, *то*

$$\mathscr{D}(x-y) + \varepsilon|x-y|^2 \geqslant \mathscr{D}(f(x) - f(y)), \tag{1.9}$$

а если $\mathscr{D}(f(x) - f(y)) < 0$, *то*

$$-\mathscr{D}(x-y) + \varepsilon|x-y|^2 \geqslant -\mathscr{D}(f(x) - f(y)). \tag{1.10}$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon' > \varepsilon$, $\varepsilon' < \varepsilon_0$. По заданному ε' и множеству $\bar{B}_1$ выберем Δ как в лемме 4 и при этом потребуем, чтобы $R_1 - R_0(\varepsilon') > \Delta$. Будем доказывать неравенство (1.9), т. е. предположим, что $\mathscr{D}(f(x) - f(y)) = \omega|f(x) - f(y)|^2$, где $0 < \omega \leqslant 1$. Рассмотрим k-мерную плоскость Π, проходящую через точки $f(x)$ и $f(y)$, для любых двух точек z и w которой выполняется неравенство $\mathscr{D}(z-w) \geqslant \omega|z-w|^2$. Через S' обозначим компоненту связности пересечения $\Pi \cap f(B)$, содержащую точку $f(x)$, а через T' — компоненту связности $\Pi \cap f(B_1)$, содержащую S'. Положим $S = f^{-1}(S')$ и $T = f^{-1}(T')$. Для $z \in T$ отображение $\pi_1 : T \cap B(z, \Delta) \to \mathbf{R}^k$ инъективно, так как для любых двух точек v и w из $T \cap B(z, \Delta)$ выполняется неравенство $|\pi_1(v-w)| \geqslant |\pi_2(v-w)|(1 - \varepsilon')(1+\varepsilon')^{-1}$. Ввиду этого неравенства из леммы 2 следует, что множества $\pi_1(S)$ и $\pi_1(T)$ открыты в $\mathbf{R}^k$.

Для $z \in \mathbf{R}^n$ и $a \in S^{k-1}$ положим $L_a = L(a, e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_n)$ и $\Gamma_{z,a} = z + L_a$. Пусть $z \in T$, $a \in S^{k-1}$ и $w \in T \cap B(z, \Delta)$. Множество $\pi_1(\Gamma_{w,a} \cap T \cap B(z, \Delta))$ — открытое подмножество прямой $\pi_1(\Gamma_{w,a})$, содержащее точку $\pi_1(w)$. Одним из составляющих его интервалов будет $\pi_1(w) + ta$, $-t_0 < t < t_1$ $(t_0 > 0,\ t_1 > 0)$. Часть множества $\Gamma_{w,a} \cap T \cap B(z, \Delta)$, проецирующуюся в полуинтервал $0 \leqslant t < t_1$, обозначим через $\sigma(w, z, a)$. Множество $\sigma(w, z, a)$ есть непрерывная кривая, которая может быть задана параметрическим уравнением $x = x(t)$, $0 \leqslant t < t_1$ так, что $\pi_1(x(t)) = \pi_1(w) + ta$. Заметим, что $\lim\limits_{t \to t_1 - 0} x(t) \in \partial B(z, \Delta)$, а также $|\pi_1 \sigma(z, z, a)| \geqslant \Delta\sqrt{(1-\varepsilon')/2}$. Фиксируем $z \in S$, $a \in S^{k-1}$ и построим по индукции некоторую кривую, которую мы будем обозначать $l(z, a)$. Положим $l_1(z, a) = \sigma(z, z, a)$. Предположим, что уже построена кривая $l_m(z, a)$, обладающая следующими свойствами:

1) $l_m(z, a) \subset T$;

2) $l_m(z, a)$ задана параметрическим уравнением $x = x(t)$, $0 \leqslant t < t_m$, так, что $\pi_1(x(t)) = \pi_1(z) + ta$;

3) для $\tau_1, \tau_2 \in [0, t_m)$

$$\mathscr{D}(x(\tau_1) - x(\tau_2)) + \varepsilon'|x(\tau_1) - x(\tau_2)|^2 > 0.$$

Кривая $l_{m+1}(z, a)$ строится следующим образом. Выберем произвольную возрастающую последовательность $\tau_n \to t_m$ и положим

$$l_{m+1}(z, a) = l_m(z, a) \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(x(\tau_n), x(\tau_n), a)\right].$$

Легко понять, что $l_{m+1}(z, a)$ не зависит от выбора последовательности τ_n. Свойства 1) и 2) для кривой $l_{m+1}(z, a)$ выполнены по построению, а свойство 3) проверяется следующим образом. Пусть $v \in l_m(z, a)$ и $w \in l_{m+1}(z, a) \setminus l_m(z, a)$, тогда $w \in \sigma(x(\tau_n), x(\tau_n), a)$ при некотором n.

Имеем

$$|\pi_2(w-v)|\leqslant|\pi_2(w-x(\tau_n))|+|\pi_2(x(\tau_n)-v)|\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'}}|\pi_1(w-x(\tau_n))|+\sqrt{\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'}}|\pi_1(x(\tau_n)-v)|=\sqrt{\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'}}|\pi_1(w-v)|.$$

При некотором значении $t>0$ луч $\pi_1(z)+ta$ пересекает границу проекции $\pi_1(B)$. Это значение параметра t мы обозначим через $t(z, a)$. Ввиду выбора значения R_1 при $t_m\leqslant t(z, a)$ имеем $t_{m+1}-t_m\geqslant\Delta\sqrt{(1-\varepsilon')/2}$. Поэтому на некотором шаге мы получим $t_{m+1}>t(z, a)$ и остановим процесс индукции. Через $l(z, a)$ обозначим часть кривой $l_{m+1}(z, a)$, соответствующую значениям параметра $0\leqslant t\leqslant t(z, a)$.

Докажем теперь следующее свойство кривых $l(z, a)$: если $a_1, a_2\in S^{k-1}$ и $|a_1-a_2|<c_1\eta/R$, где $0<\eta<\Delta$, $c_1=\sqrt{1-\varepsilon'}/(3\sqrt{2})$, то $d(l(z, a_1), l(z, a_2))\leqslant\eta$. Здесь через $d(A, B)$ обозначено хаусдорфово расстояние между множествами A и B, т. е.

$$d(A, B)=\max\left(\sup_{u\in A}\inf_{v\in B}|u-v|,\ \sup_{v\in B}\inf_{u\in A}|u-v|\right).$$

Пусть $x=x(t)$, $0\leqslant t\leqslant t(z, a_1)$,— параметризация кривой $l(z, a_1)$ и $y=y(t)$, $0\leqslant t\leqslant t(z, a_2)$,— параметризация кривой $l(z, a_2)$. Рассмотрим функцию $\varphi(t)=|x(t)-y(t)|$ на промежутке $0\leqslant t\leqslant\min(t(z, a_1), t(z, a_2))$. Если $\varphi(t)<\Delta$, то $\mathscr{D}(x(t)-y(t))+\varepsilon'|x(t)-y(t)|^2>0$ и так как $|\pi_1(x(t)-y(t))|=t|a_1-a_2|<c_1\eta t/R$, то

$$|\pi_2(x(t)-y(t))|<\sqrt{\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'}}|\pi_1(x(t)-y(t))|<c_1\sqrt{\frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon'}}\eta t/R.$$

Поэтому $\varphi(t)<c_1\sqrt{2/(1-\varepsilon')}\eta t/R$. Учитывая, что

$$\max(t(z, a_1), t(z, a_2))-\min(t(z, a_1), t(z, a_2))<R|a_1-a_2|,$$

получаем

$$d(l(z, a_1), l(z, a_2))<3c_1\eta\sqrt{2/(1-\varepsilon')}=\eta.$$

Для $z\in S$ положим $S(z)=\bigcup\limits_{a\in S^{k-1}} l(z, a)$. Заметим, что $\pi_1(B)\subset\pi_1(S(z))$ и докажем, что $S\subset S(z)$. Пусть $z_1\in S$. Соединим точки z и z_1 непрерывной кривой $z=z(t)$, $0\leqslant t\leqslant t_0$, $z(0)=z$, $z(t_0)=z_1$ и $z(t)\in S$. Положим $\lambda=\sup\tau$, где супремум берется по всем значениям $\tau(0\leqslant\tau\leqslant t_0)$ таким, что для всех $t\in[0, \tau]$ выполняется $z(t)\in S(z)$. Имеем $z(\lambda)\in S(z)$. В самом деле, рассмотрим векторы

$$a=\frac{\pi_1(z(\lambda)-z)}{|\pi_1(z(\lambda)-z)|},\quad a(t)=\frac{\pi_1(z(t)-z)}{|\pi_1(z(t)-z)|}.$$

При $t\nearrow\lambda$ имеем $a(t)\to a$. Выберем $\eta<(1/3)\Delta$ и $\eta<(1/2)\rho(z(\lambda), \partial B)$, а затем выберем t так, чтобы $|a(t)-a|<c_1\eta/R$ и $|z(t)-z(\lambda)|<\Delta$, т. е. $d(l(z, a), l(z, a(t)))<\eta$. Отсюда

$$\{\pi_1(z)+\xi a:\xi\in\mathbf{R}\}\cap\pi_1 B(z(t), \Delta)\subset\pi_1 l(z, a),$$

и поэтому $\pi_1(z(\lambda))\in\pi_1 l(z, a)$. Но так как $\pi_1: T\cap B(z(t), \Delta)\to\mathbf{R}^k$ инъективно, то $z(\lambda)\in l(z, a)\subset S(z)$.

Далее, $\lambda=t_0$. Действительно, в противном случае повторяем проведенное выше рассуждение для $t\searrow\lambda$ и получаем противоречие с определением λ.

Таким образом, $S\subset S(z)$. Так как z — произвольная точка S, то доказано, что для любых двух точек $z, w\in S$ кривая $l(z, a)$, где $a=\pi_1(w-z)/|\pi_1(w-z)|$, содержит w. Теперь мы можем доказать неравенство (1.9). Пусть $a=\pi_1(y-x)/|\pi_1(y-x)|$ и l — часть кривой $l(x, a)$, соединяющая точки x и y. Разобьем кривую l на части точками $y_0=x$, $y_1, y_2, \ldots, y_m=y$ так, чтобы для $i=1, 2, \ldots, m$ выполнялось $|y_i-$

$-y_{i-1}| < \Delta$. Точки y_i расположены в порядке возрастания параметра t на кривой $l(x, a)$. Применяя лемму 3, получаем

$$\mathscr{D}(f(x)-f(y)) = \omega|f(x)-f(y)|^2 \leqslant \omega\left(\sum_{i=1}^{m}|f(y_i)-f(y_{i-1})|\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{m}[\mathscr{D}(f(y_i)-f(y_{i-1}))]^{1/2}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m}[\mathscr{D}(y_i-y_{i-1})+\varepsilon'|y_i-y_{i-1}|^2]^{1/2}\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \mathscr{D}(x-y)+\varepsilon'|x-y|^2.$$

Устремляя теперь ε' к ε, приходим к (1.9). Неравенство (1.10) вытекает из (1.9), если квадратичную форму $\mathscr{D}(x)$ взять с противоположным знаком.

Лемма 6. *Пусть ε, U, f, B, B_1 такие же, как в лемме 5, x, $y \in B$ и известно, что К-оболочка отрезка $[f(x), f(y)]$ содержится в $f(B)$. Тогда, если $\mathscr{D}(x-y) > \varepsilon|x-y|^2$, то*

$$\mathscr{D}(x-y)-\varepsilon|x-y|^2 \leqslant \mathscr{D}(f(x)-f(y)), \tag{1.11}$$

а если $\mathscr{D}(x-y) < -\varepsilon|x-y|^2$, то

$$-\mathscr{D}(x-y)-\varepsilon|x-y|^2 \leqslant -\mathscr{D}(f(x)-f(y)). \tag{1.12}$$

Доказательство. Докажем неравенство (1.11). Положим $a = \pi_1(f(y)-f(x))/|\pi_1(f(y)-f(x))|$ и $A = \{z \in \Gamma_{f(x),a} : \langle z-f(x), a\rangle \geqslant |\pi_2(z-f(x))|, \langle f(y)-z, a\rangle \geqslant |\pi_2(z-f(y))|\}$. Имеем $A \subset K[f(x), f(y)] \subset f(B)$. Далее, $\mathscr{D}(x-y) = \omega|x-y|^2$, где $\varepsilon' < \omega \leqslant 1$. Проведем через x и y k-мерную плоскость Π такую, что $\mathscr{D}(z-w) \geqslant \omega|z-w|^2$ для любых двух ее точек z и w. Рассмотрим пересечение $V = f(B \cap \Pi) \cap \Gamma_{f(x),a}$. Множество V содержит кривую l, лежащую в A, соединяющую точки $f(x)$ и $f(y)$ и для любых двух точек которой $z, w \in l$ выполняется неравенство $\mathscr{D}(z-w) > 0$. Для построения кривой l нужно применить такой же процесс индукции, что и в лемме 5. В ситуации данной леммы мы можем продолжать процесс индукции до тех пор, пока не достигнем границы множества $f(B)$, а для этого кривая l должна выйти из множества A. Но так как для любого $z \in l$ в силу леммы 5 $\mathscr{D}(f(x)-z) > 0$ и $\mathscr{D}(f(y)-z) > 0$, то границу множества A кривая может пересекать только в точках $f(x)$ и $f(y)$. Поэтому существование кривой l доказано.

Разобьем кривую $f^{-1}(l)$ на части точками $y_0 = x, y_1, y_2, \ldots, y_m = y$ так, чтобы $|y_i - y_{i-1}| < \Delta$ и проекции точек $f(y_i)$ изменялись монотонно вдоль прямой $\pi_1\Gamma_{f(x),a}$. В таком случае

$$\mathscr{D}(x-y) = \omega|x-y|^2 \leqslant \omega\left(\sum_{i=1}^{m}|y_i-y_{i-1}|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m}[\mathscr{D}(y_i-y_{i-1})]^{1/2}\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\omega}{\omega-\varepsilon'}\left(\sum_{i=1}^{m}[\mathscr{D}(y_i-y_{i-1})+\theta|y_i-y_{i-1}|^2]^{1/2}\right)^2 =$$
$$= \frac{\omega}{\omega-\varepsilon'}\left(\sum_{i=1}^{m}[\mathscr{D}(f(y_i)-f(y_{i-1}))]^{1/2}\right)^2 \leqslant \frac{\omega}{\omega-\varepsilon'}\left(\sum_{i=1}^{m}|\pi_1(f(y_i)-f(y_{i-1}))|\right)^2 =$$
$$= \frac{\omega}{\omega-\varepsilon'}|\pi_1(f(x)-f(y))|^2.$$

Устремляя ε' к ε, получим

$$\mathscr{D}(x-y) \leqslant \frac{\omega}{\omega-\varepsilon}|\pi_1(f(x)-f(y))|^2.$$

Отсюда, подставляя $\omega = \mathscr{D}(x-y)/|x-y|^2$, имеем

$$\mathscr{D}(x-y)-\varepsilon|x-y|^2 \leqslant |\pi_1(f(x)-f(y))|^2.$$

Далее выберем такой гиперболический поворот φ, чтобы

$$|\pi_1(\varphi[f(x)]-\varphi[f(y)])|^2=\mathscr{D}(\varphi[f(x)]-\varphi[f(y)])=\mathscr{D}(f(x)-f(y)).$$

Так как при псевдоизометриях множество A сохраняется, то неравенство (1.11) доказано. Неравенство (1.12) получается из (1.11), если вместо $\mathscr{D}(x)$ рассматривать $-\mathscr{D}(x)$.

§ 2. Теоремы устойчивости

В первой теореме получены локальные оценки устойчивости. Во второй доказывается устойчивость в замкнутой области, удовлетворяющей условию Ф. Джона. Теорема 2 и ее доказательство повторяют соответствующую теорему для квазилоренцевых отображений [8].

Теорема 1. *Пусть U — область в $\mathbf{R}^n$, $0\leqslant\varepsilon<\varepsilon_0<1$ и $f\in\mathrm{QPI}(\varepsilon, U)$. Существуют такие постоянные ε_0, $\alpha>1$, $C>0$, зависящие только от n, и псевдоизометрия φ, что если область U содержит шар $B(x_0, \alpha R)$, то для $x\in B(x_0, R)$*

$$|\varphi[f(x)]-x|<C\varepsilon R.$$

Доказательство. Выберем ε_0 и C *в* лемме 2 так, чтобы $C\varepsilon_0<(2-\sqrt{2})/(1+\sqrt{2})$, и возьмем $\alpha>2(4+2\sqrt{2(1+\varepsilon_0)})^{1/2}/(1-\varepsilon_0)$. Пусть $r(0<r<R)$ таково, что К-оболочка множества $f(B(x_0, r))$ содержится в $f(B(x_0, 2R))$. Таким образом, для точек x, $y\in B(x_0, r)$ выполняются неравенства (1.9)—(1.12), которые все вместе дают соотношение

$$\mathscr{D}(f(x)-f(y))=\mathscr{D}(x-y)+\theta|x-y|^2,$$

где $|\theta|\leqslant\varepsilon$. Теперь при помощи леммы 2 найдем псевдоизометрию φ_r такую, что для $x\in B(x_0, r)$

$$|\varphi_r[f(x)]-x|<C\varepsilon r,\quad \varphi_r[f(x_0)]=x_0.$$

При помощи этих неравенств мы можем оценить размеры образа шара и К-оболочки этого образа:

$$\varphi_r\circ f(B(x_0, r))\subset B(x_0, (1+C\varepsilon)r),$$

$$K(\varphi_r\circ f(B(x_0, r)))\subset B(x_0, \sqrt{2}(1+C\varepsilon)r).$$

Снова при помощи леммы 2 найдем псевдоизометрию (причем из доказательства леммы 2 видно, что этой псевдоизометрией служит уже найденное преобразование φ_r) такую, что для $x\in f^{-1}(K(\varphi_r\circ f(B(x_0, r))))\cap B(x_0; 2r)$ имеем $|\varphi_r[f(x)]-x|\leqslant C\varepsilon r$. Но так как $|\varphi_r[f(x)]-x_0|<\sqrt{2}(1+C\varepsilon)r$, то

$$|x-x_0|<[\sqrt{2}(1+C\varepsilon)+C\varepsilon]r<2r.$$

Это неравенство, ввиду связности множества $K(\varphi_r\circ f(B(x_0, r)))$, означает, что

$$K(\varphi_r\circ f(B(x_0, r)))\subset f(B(x_0, 2r)),$$

и поэтому $\rho(K(\varphi_r\circ f(B(x_0, r))), \partial f(B(x_0, 2R)))>0$. Но в таком случае имеется возможность увеличивать радиус r, не нарушая ни одного из выписанных неравенств. Мы можем увеличить r до значения $r=R$, и тем самым теорема доказана.

Определение 3. *Область $U\subset\mathbf{R}^n$ удовлетворяет условию Ф. Джона, если заданы числа d и D $(0<d\leqslant D<\infty)$ и можно указать точку $x_0\in U$ такую, что любая другая точка $z\in U$ может быть соединена в U с точкой x_0 спрямляемой кривой $x(s)$, $0\leqslant s\leqslant S\leqslant D$ (параметр s — дли-*

на дуги), для которой $x(0)=z$, $x(S)=x_0$, и для всякого $s\in[0, S]$ выполняется неравенство

$$\rho(x(s),\ \partial U)\geqslant sd/S. \tag{2.1}$$

Теорема 2. *Пусть область $U\subset\mathbf{R}^n$ удовлетворяет условию Ф. Джона и $0\leqslant\varepsilon\leqslant\delta_n d/D$. Тогда для всякого отображения $f\in \mathrm{QPI}(\varepsilon,\ U)$ найдется псевдоизометрия φ такая, что для $x\in U$*

$$|\varphi[f(x)]-x|\leqslant A_n\varepsilon D^2/d.$$

Постоянные δ_n и A_n зависят только от n.

Доказательство. Фиксируем $z\in U$, и пусть $x(s)$ — кривая из определения 3. Положим $r_0=d/\alpha$, где α — параметр из теоремы 1, и $q=S/(S+r_0)$. Введем обозначения $s_m=q^mS$, $x_m=x(s_m)$, $\rho_m=q^md$, $r_m=q^mr_0=\rho_m/\alpha$, $z_m=1/2(x_m+x_{m+1})$. Имеем $B(x_m,\ \rho_m)\subset U$, так как из неравенства (2.1)

$$\rho(x_m,\ \partial U)\geqslant s_md/S=q^md=\rho_m.$$

В силу теоремы 1 для каждого m найдется псевдоизометрия φ_m такая, что для $x\in B_m=B(x_m,\ r_m)$

$$|\varphi_m[f(x)]-x|\leqslant a\varepsilon r_m,\quad \varphi_m[f(x_m)]=x_m.$$

Положим $g_m=\varphi_m\circ f$ и $\theta_m=\varphi_m\circ\overset{-1}{\varphi}_{m+1}$, т. е $g_m=\theta_m\circ g_{m+1}$. Для $x\in B_m\cap B_{m+1}$ получаем

$$|g_m(x)-g_{m+1}(x)|\leqslant a\varepsilon(r_m+r_{m+1}).$$

Если $\varepsilon<1/(12a)$, то в множестве $g_{m+1}(B_m\cap B_{m+1})$ содержится шар радиуса $r_{m+1}/3$, а именно

$$B(g_{m+1}(z_m),\ r_{m+1}/3)\subset g_{m+1}(B_m\cap B_{m+1}).$$

Для y из этого шара $|\theta_m(y)-y|\leqslant a\varepsilon(r_m+r_{m+1})$. Поэтому для $P,\ Q\in\mathbf{R}^n$

$$|\theta_m(P)-\theta_m(Q)|\leqslant[1+3a\varepsilon(1+1/q)]\,|Q-P| \tag{2.2}$$

и, кроме того,

$$|\theta_m(P)-P|\leqslant 6a\varepsilon(1+1/q)\,|P-g_{m+1}(z_m)|+a\varepsilon(r_m+r_{m+1}). \tag{2.3}$$

Получим еще некоторые оценки. Так как $g_{k+1}=\theta_{k+1}\circ\theta_{k+2}\circ\ldots\circ\theta_p\circ g_{p+1}$, то из (2.2)

$$|g_{k+1}(z_p)-g_{k+1}(z_{p+1})|\leqslant\mu^{p-k}|g_{p+1}(z_p)-g_{p+1}(z_{p+1})|\leqslant$$
$$\leqslant(1+2a\varepsilon)\mu^{p-k}r_{p+1}=(1+2a\varepsilon)\mu^{p-k}q^{p+1}r_0.$$

Здесь $\mu=1+3a\varepsilon(1+1/q)$. Число ε должно быть выбрано так, чтобы $\mu q<1$. Далее,

$$|g_{k+1}(z_m)-g_{k+1}(z_k)|\leqslant\sum_{p=k}^{m-1}|g_{k+1}(z_p)-g_{k+1}(z_{p+1})|\leqslant(1+2a\varepsilon)q^{k+1}r_0/(1-\mu q),$$

и отсюда при помощи (2.3)

$$|g_k(z_m)-g_{k+1}(z_m)|\leqslant 6a\varepsilon(1+1/q)(1+2a\varepsilon)q^{k+1}r_0/(1-\mu q)+a\varepsilon(1+1/q)q^{k+1}r_0=$$
$$=a\varepsilon\left(1+\frac{1}{q}\right)q^{k+1}r_0\left[(1+2a\varepsilon)\frac{6}{1-\mu q}+1\right]=A\varepsilon r_0q^{k+1}/(1-\mu q).$$

Теперь получаем

$$|g_0(z_m)-z_m|\leqslant\sum_{k=0}^{m-1}|g_k(z_m)-g_{k+1}(z_m)|+|g_m(z_m)-z_m|\leqslant$$
$$\leqslant A\varepsilon r_0\frac{1}{1-\mu q}\,\frac{1}{1-q}+a\varepsilon r_m.$$

При $m \to \infty$ будем иметь

$$|\varphi_0[f(z)] - z| \leqslant A\varepsilon r_0 \frac{1}{1-\mu q}\frac{1}{1-q}. \tag{2.4}$$

Заметим, что $\dfrac{1}{1-q} = \dfrac{S+r_0}{r_0}$, а при

$$\varepsilon \leqslant \frac{r_0}{6a(r_0+2S)} \text{ еще и } \frac{1}{1-\mu q} \leqslant 2\frac{S+r_0}{r_0}.$$

Подставляя это в (2.4), получаем требуемую в теореме оценку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лаврентьев М. А.** Об устойчивости в теореме Лиувилля // Докл. АН СССР.— 1954.— Т. 95, № 5.— С. 925—926.
2. **John F.** Rotation and strain // Communs Pure and Appl. Math.— 1961.— V. 14, N 3.— P. 391—413.
3. **Белинский П. П.** О порядке близости пространственного квазиконформного отображения к конформному // Сиб. мат. журн.— 1973.— Т. 14, № 3.— С. 475—483.
4. **Решетняк Ю. Г.** Теоремы устойчивости в геометрии и анализе.— Новосибриск: Наука, Сиб. отд-ние, 1982.
5. **Копылов А. П.** Об устойчивости классов многомерных голоморфных отображений. I. Концепция устойчивости. Теорема Лиувилля // Сиб. мат. журн.— 1982.— Т. 23, № 2.— С. 83—111.
6. **Копылов А. П.** То же. II. Устойчивость классов голоморфных отображений // Там же.— 1982.— Т. 23, № 4.— С. 65—89.
7. **Копылов А. П.** То же. III. Свойства отображений, близких к голоморфным // там же.— 1983.— Т. 24, № 3.— С. 70—91.
8. **Гуров Л. Г.** Оценки устойчивости лоренцевых отображений // Там же.— 1974.— Т. 15, № 3.— С. 498—515.
9. **Гуров Л. Г.** Об устойчивости преобразований Лоренца в пространстве W^1_p// Там же.— 1980.— Т. 21, № 2.— С. 51—60.

В. И. ДИСКАНТ

УТОЧНЕНИЯ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОГО НЕРАВЕНСТВА И ТЕОРЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ В ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Посвящается
Юрию Григорьевичу Решетняку

К основным результатам теории смешанных объемов выпуклых тел в $\mathbf{R}^n$ относятся неравенство Брунна и его следствия — неравенства Минковского между смешанными объемами, теорема Минковского о единственности выпуклого многогранника с заданными площадями граней и нормалями к ним, теорема Минковского о единственности регулярного выпуклого тела с заданной функцией кривизны $(n-1)$-го порядка. Особый интерес представляет вопрос о том, в каком случае в неравенстве Брунна и изопериметрическом неравенстве Минковского стоит знак равенства. Отмеченные выше теоремы единственности Минковского являются прямыми следствиями ответа на этот вопрос [1].

А. Д. Александров в [2—5] обобщил эти результаты как по размерности, так и по содержанию. Он доказал обобщенное неравенство Брунна, решил вопрос о наличии в нем знака равенства, доказал теорему единственности выпуклого тела с заданной функцией кривизны любого порядка. При этом А. Д. Александров существенно расширил понятие функции кривизны, сделав его пригодным не только для регулярного, но и для произвольного выпуклого тела.

В настоящей статье усилены некоторые из приведенных выше результатов Брунна, Минковского, Александрова. Так, основным результатом § 1 является неравенство, уточняющее изопериметрическое неравен-