22. **Лейхтвейс К.** Выпуклые множества.— М.: Наука, 1985.
23. **Хадвигер Г.** Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии.— М.: Наука, 1966.
24. **Бляшке В.** Круг и шар.— М.: Наука, 1967.
25. **Herz B.** Über die Willssche Verallgemeinerung einer Ungleichung von Bonnesen // Monatsh. Math.— 1971.— V. 75, № 4.— S. 316—319.
26. **Волков Ю. А.** Устойчивость решения проблемы Минковского // Вестн. ЛГУ.— 1963.— № 1.— С. 33—43.
27. **Chakerian G. D.** Higher Dimensional Analogues of an Isoperimetric Inequality of Benson // Math. Nachr.— 1971.— V. 48, N 1—6.— P. 33—41.
28. **Сенькин Е. П.** Об устойчивости ширины общей замкнутой выпуклой поверхности в зависимости от изменения средней интегральной кривизны // Укр. геометр. сб.— 1966.— Вып. 2.— С. 88—89.
29. **Сенькин Е. П.** Об устойчивости ширины общей замкнутой выпуклой поверхности в зависимости от изменения интегральной средней кривизны // Там же.— 1966.— Вып. 3.— С. 93—94.
30. **Невмержицкий Н. С.** Устойчивость в теореме об омбилических поверхностях. I // Вестн. ЛГУ.— 1969.— № 7.— С. 55—60.
31. **Решетняк Ю. Г.** Оценки отклонения от сферы почти омбилических поверхностей // Тр. III Казахстан. межвуз. науч. конф. по мат. и мех., 1967.— Алма-Ата, 1970.— С. 108—109.
32. **Guggenheimer H.** Nearly spherical surfaces // Aequat. Math.— 1969.— V. 3, N 1.—2.— P. 186—198.
33. **Алексеева В. Е., Волков Ю. А.** Почти омбилические поверхности в относительной дифференциальной геометрии // Геометрия.— Л., 1975.— Вып. 4.— С. 3—13.
34. **Фет А. И.** Теоремы устойчивости для выпуклых поверхностей, близких к сфере // Докл. АН СССР.— 1963.— Т. 153, № 3.— С. 537—540.
35. **Koutroufiotis D.** Ovaloids which are almost spheres // Comm. Pure and Appl. Math.— 1971.— V. 24, N 3.— P. 289—300.
36. **Motomiya K.** On hypersurfaces which are close to spheres // Proc. Jap. Acad.— 1972.— V. 48, N 6.— P. 398—401.
37. **Moore J. D.** Almost spherical convex hypersurfaces // Trans. Amer. Math. Soc.— 1973.— V. 180.— P. 347—358.
38. **Дискант В. И.** Оценки для диаметра и ширины выпуклых поверхностей ограниченной гауссовой кривизны // Докл. АН СССР.— 1963.— Т. 153, № 3.— С. 516—518.
39. **Дискант В. И.** Устойчивость в теореме Лимбана // Там же.— Т. 158, № 6.— С. 1257—1259.
40. **Дискант В. И.** Теоремы устойчивости для поверхностей, близких к сфере // Сиб. мат. журн.— 1965.— Т. 6, № 6.— С. 1254—1266.
41. **Дискант В. И.** Устойчивость сферы в классе выпуклых поверхностей ограниченной удельной кривизны // Там же.— 1968.— Т. 9, № 4.— С. 816—824.
42. **Дискант Н. И.** Некоторые оценки для выпуклых поверхностей с ограниченной функцией кривизны // Там же.— 1971.— Т. 12, № 1.— С. 109—125.
43. **Дискант В. И.** Выпуклые поверхности с ограниченной средней кривизной // Там же.— 1971.— Т. 12, № 3.— С. 659—663.
44. **Погорелов А. В.** Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей.— Киев: Изд-во АН УССР, 1951.
45. **Волков Ю. А.** Оценка деформации выпуклой поверхности в зависимости от изменения ее внутренней метрики // Укр. геометр. сб.— 1968.— Вып. 5—6.— С. 44—69.

А. Г. КУСРАЕВ, С. А. МАЛЮГИН

ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ПРОЕКТИВНЫЙ ПРЕДЕЛ ВЕКТОРНЫХ МЕР

Ю. Г. Решетняку
в связи с шестидесятилетием

В теории векторных мер имеется весьма интересный круг вопросов, связанный с существованием произведения и проективного предела согласованного семейства мер. Отметим несколько основных публикаций, относящихся к этой проблематике. Тензорное произведение банаховозначных мер изучалось в [1—3]; о векторнозначном аналоге теоремы Фубини см. [4—6]. Произведение положительных мер со значениями в упорядоченном векторном пространстве рассмотрено в [7, 8]. О произведениях спектральных мер см., например, [9, 10]. Различные варианты теоремы Колмогорова о проективном пределе согласованного семейства векторных мер получены в [11—13]. При внимательном анализе методов исследования обнаруживается, что указанные работы относятся к двум различным направлениям теории векторных мер, которые условно можно назвать *топологическим* и *порядковым*. Первое направление изучает меры, значения которых принадлежат банахову (или топологическому векторному) пространству, а второе — меры со значениями в упорядоченном векторном пространстве. Эти направления существенно отличаются по методам исследования.

В настоящей статье изучаются произведения и проективные пределы мер, принимающих значения в решеточно нормированном пространстве. Привлечение решеточно нормированных пространств оправдано в основном двумя обстоятельствами. Во-первых, это позволяет взглянуть с единой точки зрения на топологический и порядковый подходы к изучению векторных мер, ибо решеточно нормированными являются как локально выпуклые пространства, так и векторные решетки. Во-вторых, существенно расширяется класс векторных мер, так как, например, для мер со значениями в пространстве измеримых по Бохнеру вектор-функций не приемлем ни топологический, ни порядковый подходы в чистом виде.

Материал статьи организован в следующем виде. После введения основных обозначений и определений устанавливается одна общая теорема о продолжении векторных мер, которая в дальнейшем играет ключевую роль. Из нее выводится, что для любой согласованной последовательности квазирадоновых борелевских мер, заданных на полных по Чеху пространствах, существует проективный предел, являющийся квазирегулярной мерой. Если же в нормирующем K-пространстве выполняется закон слабой (σ, ∞)-дистрибутивности, то всякая квазирадоновая мера радонова и проективный предел последовательности радоновых мер является радоновой мерой. Приводятся также векторнозначные обобщения двух теорем Улама. Далее рассматривается проективный предел несчетных направленностей борелевских и бэровских векторных мер. Показано, что для существования проективного предела в этой ситуации необходимы более жесткие требования. В частности, рассматриваемые меры должны быть заданы на подмножествах компактных пространств. Выводится существование произведения квазирадоновых мер, заданных на полных по Чеху пространствах, причем произведение также есть квазирадонова мера. Далее приводятся несколько вариантов теоремы о существовании бесконечного произведения векторных мер. Указаны утверждения, равносильные слабой (σ, ∞)-дистрибутивности нормирующего K-пространства. Обсуждается измеримое функциональное исчисление в K-пространствах. Показано, как определить борелевскую функцию от бесконечного числа элементов K-пространства и дано обобщение теоремы Неймана о представлении последовательности коммутирующих самосопряженных операторов функциями от одного оператора.

§ 1. Обозначения и определения

Все необходимые сведения об упорядоченных и решеточно нормированных пространствах имеются в [14—16]. Всюду ниже фиксированы следующие обозначения: F — произвольное K-пространство, Y — это o-полное K-нормированное пространство с F-значной нормой $|\cdot|$. Не оговаривая специально, будем считать всегда, что K-пространство F нормировано самим собой, причем нормой элемента служит его модуль. Для топологического пространства X рассматриваются следующие семейства множеств: $\mathcal{T}_X(\mathcal{F}_X)$ — открытых (замкнутых) подмножеств: $\mathcal{T}^0_X(\mathcal{F}^0_X)$ — функционально открытых (замкнутых) подмножеств; $\mathcal{B}_X(\mathcal{B}^0_X)$ — борелевских (бэровских) подмножеств; $\mathcal{K}_X$ — компактных подмножеств X. Через $\mathscr{A}_X$ обозначаем алгебру, порожденную всеми функционально открытыми подмножествами X.

Пусть $\mathscr{A}$ — алгебра подмножеств в X. Конечно аддитивное отображение из $\mathscr{A}$ в Y будем называть мерой. Говорят, что мера μ: $\mathscr{A} \to Y$ имеет ограниченную F-вариацию, если существует положительная мера ν: $\mathscr{A} \to F$ такая, что $|\mu(A)| \leqslant \nu(\mathscr{A})(A \in \mathscr{A})$. В K-пространстве всех ограниченных мер ν: $\mathscr{A} \to F$ существует наименьший элемент, удовлетворяющий этому неравенству. Он называется *F-вариацией меры* μ и обозначается через $|\mu|$. Далее рассматриваются только меры ограниченной F-вариации. Пусть выделены два семейства подмножеств $\mathscr{U}$, $\mathscr{V} \subset \mathscr{A}$. Мера μ: $\mathscr{A} \to Y$ называется *$(\mathscr{U}, \mathscr{V})$-регулярной*, если для любого $U \in \mathscr{U}$

$$|\mu|(U) = \sup\{|\mu|(V)\colon\ V \subset U,\ V \in \mathscr{V}\}.$$

Мера μ: $\mathscr{A} \to Y$ называется *борелевской* (*бэровской*), если она σ-аддитивна и $\mathscr{A} = \mathscr{B}_X (\mathscr{A} = \mathscr{B}_X^0)$. Борелевская мера называется *регулярной* (*квазирегулярной*), если она $(\mathscr{B}_X, \mathscr{F}_X)$-регулярна $((\mathscr{T}_X, \mathscr{F}_X)$-регулярна) и называется *радоновой*) (*квазирадоновой*), если она $(\mathscr{B}_X, \mathscr{K}_X)$-регулярна $((\mathscr{T}_X, \mathscr{K}_X)$-регулярна). Аналогично определяются регулярность (квазирегулярность) и радоновость (квазирадоновость) бэровской меры путем замены $\mathscr{B}_X$ на $\mathscr{B}_X^0$ и $\mathscr{F}_X$ на $\mathscr{F}_X^0$. Линейное пространство, порожденное всеми характеристическими функциями χ_A множеств A из $\mathscr{A}$, обозначаем через $S(\mathscr{A})$. Замыкание и внутренность множества $A \subset X$ обозначаются символами $\mathrm{cl}(A)$ и $\mathrm{int}(A)$.

Говорят, что на K_σ-пространстве F *выполняется закон слабой* (σ, ∞)*-дистрибутивности* (*слабой σ-дистрибутивности*), если для любой ограниченной последовательности убывающих к нулю направленностей $\{h_{\alpha,n}\colon \alpha \in \mathrm{A}_n\}$ $(n \in \mathbf{N})$ (соответственно убывающих к нулю последовательностей $\{h_{m,n}\colon m \in \mathbf{N}\}$ $(n \in \mathbf{N})$) выполняется тождество

$$\inf\left\{\sup_{n\in\mathbf{N}}\{h_{\varphi(n),n}\}\colon\ \varphi \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n\right\} = 0$$

(соответственно

$$\left.\inf\left\{\sup_{n\in\mathbf{N}}\{h_{\varphi(n),n}\}\colon\ \varphi \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}\right\} = 0\right).$$

Пусть Q — стоуновский компакт K-пространства F, причем в F имеется (слабая) порядковая единица. Тогда на F выполняется закон слабой (σ, ∞)-дистрибутивности (слабой σ-дистрибутивности) в том и только в том случае, если любое тощее множество в Q нигде не плотно (любая последовательность замкнутых нигде не плотных G_δ-множеств в Q имеет нигде не плотное объединение).

§ 2. Продолжение мер

Пусть X — компактное топологическое пространство, $\mathscr{A}$ — произвольная подалгебра в $\mathscr{A}_X$.

Определение 1. *Мера μ: $\mathscr{A} \to Y$ называется плотной, если*

(1) *равномерное замыкание пространства $S(\mathscr{A})$ содержит пространство всех непрерывных функций на X;*

(2) *для любого $A \in \mathscr{A}$ существует возрастающая последовательность $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathscr{A}$ такая, что*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\quad \mathrm{cl}(A_n) \subset A\ (n \in \mathbf{N}),$$
$$|\mu|(A) = \sup_{n\in\mathbf{N}} |\mu|(A_n).$$

Основным техническим средством при получении результатов о произведении и проективных пределах мер является следующая теорема о продолжении.

Теорема 1. *Любая плотная мера* $\mu\colon \mathscr{A} \to Y$ *продолжается единственным образом до квазирегулярной борелевской меры* $\mu_1\colon \mathscr{B}_X \to Y$.

$\triangleleft$ Обозначим через $C(\mathscr{A})$ равномерное замыкание пространства $S(\mathscr{A})$. Рассмотрим линейный оператор $I_0\colon S(\mathscr{A}) \to Y$, для которого

$$I_0 x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k) \quad (x \in S(\mathscr{A})),$$

где

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}, \quad (A_k)_{k=1}^{n} \subset \mathscr{A}.$$

Пусть $\mathbf{1} := |\mu|(X) \in F$. Тогда в Y можно выделить подмножество $Z := \{y \in Y\colon \ |y| \leqslant \alpha\mathbf{1}$ при некотором $\alpha > 0\}$, которое является банаховым пространством относительно нормы $\|y\| = \inf\{\alpha > 0\colon |y| \leqslant \alpha\mathbf{1}\}$ $(y \in Z)$. Оператор I_0 продолжается по равномерной непрерывности до мажорированного оператора $I\colon C(\mathscr{A}) \to Z$, который мы будем называть *интегралом по мере* μ и обозначать

$$Ix = \int x\, d\mu \quad (x \in C(\mathscr{A})).$$

Очевидно, $C(X) \subset C(\mathscr{A})$. Пусть $T := I|_{C(X)}$. Мажорантой для T является положительный оператор $U\colon C(X) \to F$, который определяется равенствами

$$Ux = \int x d|\mu| \quad (x \in C(X)).$$

Пусть S — стоуновский компакт K-пространства ограниченных элементов $W := \{f \in F\colon |f| \leqslant \alpha\mathbf{1}$ при некотором $\alpha > 0\}$. По реализационной теореме Крейнов — Какутани W изоморфно K-пространству $C(S)$, поэтому будем считать, что $W = C(S)$. По теореме 4.1 из [17] существует единственная квазирегулярная борелевская мера $\nu\colon \mathscr{B}_X \to W \subset F$ такая, что

$$Ux = \int x\, d\nu \quad (x \in C(X)).$$

(Здесь интеграл понимается в смысле интеграла Лебега по K-пространственнозначной мере, который подробно рассматривался в [17].)

Пусть $M_\infty(X)$ — пространство всех ограниченных измеримых по Борелю функций на X. Формула

$$Vx = \int x\, d\nu \, (x \in M_\infty(X))$$

определяет положительный секвенциально o-непрерывный оператор $V\colon M_\infty(X) \to F$, который является продолжением оператора U.

Теперь займемся продолжением оператора T. Оно будет осуществляться путем последовательного процесса элементарных продолжений с помощью трансфинитной индукции. Обозначим через $C^\dagger$ множество супремумов всевозможных ограниченных подмножеств из $C(X)$. Пусть $x \in C^\dagger$ и возрастающая направленность $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ из $C(X)$ такова, что $x = \sup\limits_\alpha x_\alpha$. Из оценки

$$|Tx_\alpha - Tx_\beta| \leqslant V(x_\alpha - x_\beta) \quad (\alpha \geqslant \beta)$$

следует o-фундаментальность направленности $(Tx_\alpha)_{\alpha \in A}$. Значит, можно определить вектор $T^\dagger x = o\text{-}\lim Tx_\alpha$. Из квазирегулярности меры ν следует, что таким способом корректно определяется оператор $T^\dagger\colon C^\dagger \to Y$, удовлетворяющий неравенствам

$$|T^{\dagger}x| \leqslant Vx \quad (0 \leqslant x \in C^{\dagger}).$$

Кроме этого, $C^{\dagger}$ является решеткой, замкнутой относительно сложения, и $T^{\dagger}$ аддитивен на $C^{\dagger}$. По аддитивности можно продолжить $T^{\dagger}$ до линейного оператора на линейную подрешетку $M_0 := C^{\dagger} - C^{\dagger}$. Оценка нормы при этом сохраняется:

$$|T_0 x| \leqslant V(|x|) \quad (x \in M_0).$$

Пусть ω_1 — первый несчетный ординал. Предположим, что для всех ординалов $\beta < \alpha < \omega_1$ мы уже определили линейные подрешетки $M_\beta \subset M_\infty(X)$ и линейные операторы T_β: $M_\beta \to Y$, удовлетворяющие оценкам

$$|T_\beta x| \leqslant V(|x|) \quad (x \in M_\beta)$$

и такие, что $M_\beta \subset M_\gamma$, $T_\gamma|_{M_\beta} = T_\beta$ при $\beta < \gamma < \alpha$. Если α — предельный ординал, то полагаем $M_\alpha := \cup\{M_\beta$: $\beta < \alpha\}$ и определяем линейный оператор T_α: $M_\alpha \to Y$ так, чтобы $T_\alpha|_{M_\beta} = T_\beta (\beta < \alpha)$. Если α — непредельный ординал, то рассматриваем множество $M_{\alpha-1}^{\sigma}$ всех $x \in M_\infty(X)$, являющихся супремумами ограниченных счетных подмножеств из $M_{\alpha-1}$. Если возрастающая последовательность $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ содержится в $M_{\alpha-1}$ и $\sup\limits_n x_n = x \in M_{\alpha-1}^{\sigma}$, то из соображений, аналогичных вышеприведенным следует o-фундаментальность последовательности $(T_{\alpha-1}x_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Значит, можно положить $T_{\alpha-1}^{\sigma}x := o\text{-}\lim T_{\alpha-1}x_n$. Из секвенциальной o-непрерывности оператора V видно, что таким способом корректно определяется оператор $T_{\alpha-1}^{\sigma}$: $M_{\alpha-1}^{\sigma} \to Y$, удовлетворяющий неравенствам

$$|T_{\alpha-1}^{\sigma}x| \leqslant Vx \quad (0 \leqslant x \in M_{\alpha-1}^{\sigma}).$$

Из соображений, аналогичных вышеприведенным, следует, что $T_{\alpha-1}^{\sigma}$ можно продолжить по аддитивности до линейного оператора T_α: $M_\alpha \to Y$, где $M_\alpha := M_{\alpha-1}^{\sigma} - M_{\alpha-1}^{\sigma}$ — линейная подрешетка в $M_\infty(X)$. Теперь легко понять, что $M_\infty(X) = M_{\omega_1}$ и оператор $T_1 := T_{\omega_1}$ является секвенциально o-непрерывным продолжением оператора T на пространство $M_\infty(X)$. Мажорированность оператора вытекает из оценки

$$|T_1 x| \leqslant V(|x|) \qquad (x \in M_\infty(X)).$$

Пусть $\mu_1(B) = T_1(\varkappa_B)$ $(B \in \mathscr{B}_X)$. Очевидно, мера μ_1: $\mathscr{B}_X \to Y$ σ-аддитивна и имеет ограниченную F-вариацию,

$$|\mu_1(B)| \leqslant V(\chi_B) = \nu(B) \qquad (B \in \mathscr{B}_X).$$

Из этой же оценки и из квазирегулярности ν следует квазирегулярность μ_1. Покажем, что μ_1 является продолжением μ. Пусть $A \in \mathscr{A}$, тогда из условия плотности меры (условие (2) из определения 1) выводится существование возрастающей к A последовательности $(A_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathscr{A}$ убывающей к A последовательности $(B_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathscr{A}$, для которых $\mathrm{cl}(A_n) \subset A \subset \mathrm{int}(B_n)$ и $\inf\limits_n |\mu|(B_n \setminus A_n) = 0$. По теореме Титце — Урысона существует последовательность функций $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset C(X)$, для которой $0 \leqslant x_n(t) \leqslant 1$ $(t \in X, n \in \mathbf{N})$, $x_n(t) = 1$ $(t \in A_n)$, $x_n(t) = 0$ $(t \notin B_n)$. Тогда, привлекая свойства интеграла по конечно-аддитивной мере, получим

$$\left|\mu(A) - \int x_n\, d\mu\right| = \left|\int (\chi_A - x_n)\, d\mu\right| \leqslant \int |\chi_A - x_n|\, d|\mu| \leqslant |\mu|(B_n \setminus A_n),$$

$$\left|\mu_1(A) - \int x_n\, d\mu_1\right| \leqslant |\mu_1|(B_n \setminus A_n) \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Поскольку равномерное замыкание $S(\mathscr{B}_X)$ совпадает с $M_\infty(X)$, то определен интеграл по мере μ_1 на пространстве $M_\infty(X)$ и

$$T_1 x = \int x\, d\mu_1 \quad (x \in M_\infty(X)).$$

Следовательно, имеет место соотношение

$$\int x_n\, d\mu = \int x_n\, d\mu_1 \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Отсюда выводим

$$|\mu(A) - \mu_1(A)| \leqslant |\mu|(B_n \setminus A_n) + |\mu_1|(B_n \setminus A_n) \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Из плотности мер μ и μ_1 на алгебре $\mathscr{A}$ имеем $\mu(A) = \mu_1(A)$. Значит, μ_1 является продолжением меры μ. Единственность продолжения следует из квазирегулярности и леммы о монотонном классе. $\triangleright$

Следствие 1. *Для любой бэровской меры* μ: $\mathscr{B}^0_X \to Y$ *существует единственная квазирегулярная борелевская мера* μ_1: $\mathscr{B}_X \to Y$, *продолжающая* μ.

Следствие 2. *Пусть X — вполне несвязный компакт и $\mathfrak{B}(X)$ — алгебра всех открыто-замкнутых подмножеств в X. Тогда любая конечно-аддитивная мера* μ: $\mathfrak{B}(X) \to Y$ *продолжается единственным образом до квазирегулярной борелевской меры* μ_1: $\mathscr{B}_X \to Y$.

Замечание 1. Если на K-пространстве F выполняется закон слабой (σ, ∞)-дистрибутивности, то любая бэровская мера μ: $\mathscr{B}^0_X \to Y$ продолжается единственным образом до регулярной борелевской меры μ_1: $\mathscr{B}_X \to Y$. В частности, любая квазирегулярная борелевская мера μ_1: $\mathscr{B}_X \to Y$ является регулярной (см. доказательство теоремы 3).

Теорема 1 существенно отличается от известных фактов о продолжении мер из [18, 19] тем, что в ней не требуется выполнения на K-пространстве F никаких законов дистрибутивности.

§ 3. Проективный предел последовательности мер

Рассмотрим систему $(X_n, \pi_n^{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$, состоящую из полных по Чеху пространств X_n и непрерывных отображений π_n^{n+1} пространства X_{n+1} на X_n $(n \in \mathbf{N})$. Топологический проективный предел $X_\infty := \overleftarrow{\lim}\, X_n$ такой системы тоже будет полным по Чеху пространством. Положим $\mathscr{B}_n := \mathscr{B}_{X_n}$ и $\mathscr{B}_\infty := \mathscr{B}_{X_\infty}$. Последовательность борелевских мер μ_n: $\mathscr{B}_n \to Y$ $(n \in \mathbf{N})$ называется *согласованной*, если $\mu_n = \mu_{n+1} \circ (\pi_n^{n+1})^{-1} (n \in \mathbf{N})$ и в K-пространстве F существует конечный $\sup|\mu_n|(X)$. Обозначим через π_n канонические проекции X_∞ на X_n $(n \in \mathbf{N})$. Борелевская мера μ: $\mathscr{B}_\infty \to Y$ называется *проективным пределом согласованной последовательности борелевских мер* μ_n: $\mathscr{B}_n \to Y$, если для любого $n \in \mathbf{N}$ выполняется $\mu_n = \mu \circ \pi_n^{-1}$. В этом случае будем писать $\mu = \overleftarrow{\lim}\, \mu_n$.

Теорема 2. *Для любой согласованной последовательности квазирадоновых мер* μ_n: $\mathscr{B}_n \to Y$ $(n \in \mathbf{N})$ *существует проективный предел* $\mu = \overleftarrow{\lim}\, \mu_n$, *являющийся единственной квазирегулярной мерой из* $\mathscr{B}_\infty$ *в* Y, *для которой* $\mu_n = \mu \circ \pi_n^{-1} (n \in N)$.

$\triangleleft$ Пусть βX_n — стоун-чеховская компактификация пространства X_n. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ существует отображение $\beta\pi_n^{n+1}$: $\beta X_{n+1} \to \beta X_n$, являющееся единственным непрерывным продолжением отображения π_n^{n+1}. Тогда проективный предел $\overline{X} := \overleftarrow{\lim}\, \beta X_n$ является компактным топологическим пространством, содержащим $X_\infty := \overleftarrow{\lim}\, X_n$ в качестве плотного

G_δ-подмножества. Обозначим $\overline{\mathscr{B}}_n := \mathscr{B}_{\beta X_n}$ и рассмотрим меру $\overline{\mu}_n\colon \overline{\mathscr{B}}_n \to Y$, определенную равенствами $\overline{\mu}_n(B) = \mu_n(B \cap X_n)$ $(B \in \overline{\mathscr{B}}_n)$. Из квазирадоновости μ_n следует квазирегулярность $\overline{\mu}_n$, кроме того, $\overline{\mu}_n$ является продолжением μ_n. Рассмотрим в $\mathscr{A}_{\overline{X}}$ подалгебру

$$\mathscr{A}_0 := \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\pi}_n^{-1}(\mathscr{A}_{\beta X_n}).$$

Существует единственная мера $\mu_0\colon \mathscr{A}_0 \to Y$ такая, что $\overline{\mu}_n(A) = \mu_0(\overline{\pi}_n^{-1}(A))$ $(A \in \mathscr{A}_{\beta X_n},\ n \in \mathbf{N})$. Ограниченность F-вариации μ_0 следует из конечности $\sup|\mu_n|(X_n) \in F$. Легко проверяется, что μ_0 и $\mathscr{A}_0$ удовлетворяют условиям плотности (1), (2) из определения 1. По теореме 1 существует единственная квазирегулярная борелевская мера $\overline{\mu}\colon \mathscr{B}_{\overline{X}} \to Y$, продолжающая μ_0. Кроме этого,

$$|\overline{\mu}(\overline{X} \setminus X)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\overline{\mu}|(\overline{\pi}_n^{-1}(\beta X_n \setminus X_n)) = 0.$$

Полагая $\mu := \overline{\mu}|_{\mathscr{B}_\infty}$, получим, что $\mu = \overleftarrow{\lim}\, \mu_n$. Из квазирегулярности μ_n следует квазирегулярность μ и ее единственность. ▷

Замечание 2. Из доказательства видно, что теорема 2 остается справедливой, если последовательность $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ состоит из вполне регулярных пространств, измеримых по Борелю в своих стоун-чеховских компактификациях.

Ниже будет показано, что вопрос о квазирадоновости проективного предела в общем случае решается отрицательно, см. теорему 13. Несмотря на это, справедлива

Теорема 3. *Пусть на K-пространстве F выполняется закон слабой (σ, ∞)-дистрибутивности. Тогда любая квазирадонова мера $\mu\colon \mathscr{B}_X \to Y$ на хаусдорфовом топологическом пространстве X радонова и проективный предел согласованной последовательности радоновых мер $\mu_n\colon \mathscr{B}_n \to Y$, заданных на полных по Чеху пространствах X_n, является радоновой мерой.*

◁ Пусть $(X, \mathscr{T})$ — хаусдорфово топологическое пространство. Рассмотрим квазирадонову меру $\mu\colon \mathscr{B}_X \to Y$. Векторная F-вариация $|\mu|\colon \mathscr{B}_X \to F$ тоже будет квазирадоновой мерой. Нам достаточно теперь установить радоновость меры $|\mu|$. Рассмотрим класс $\mathscr{A}$, состоящий из всех множеств $A \in \mathscr{B}_X$, для которых

$$|\mu|(A) = \sup\{|\mu|(K)\colon K \subset A,\ K \in \mathscr{K}_X\},$$
$$|\mu|(X \setminus A) = \sup\{|\mu|(K)\colon K \subset X \setminus A,\ K \in K_X\}.$$

Пусть $A = U \setminus V$, где $U,\ V \in \mathscr{T}_X$. Тогда

$$\inf\{|\mu|(A \setminus K)\colon K \subset A,\ K \in \mathscr{K}_X\} = \inf\{|\mu|(A \setminus K)\colon K \subset U,\ K \in \mathscr{K}_X\} \leqslant$$
$$\leqslant \inf\{|\mu|(U \setminus K)\colon K \subset U,\ K \in \mathscr{K}_X\} = 0.$$

Аналогичный факт, конечно, справедлив и для множеств $A = \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \setminus V_i)$ $(U_i,\ V_i \in \mathscr{T}_X;\ i := 1, \ldots, n)$. Следовательно, $\mathscr{A}$ содержит алгебру множеств, порожденную $\mathscr{T}_X$. Пусть $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ — возрастающая последовательность элементов из $\mathscr{A}$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда, из σ-аддитивности $|\mu|$ имеем

$$|\mu|(A) = \sup_n |\mu|(A_n) = \sup_n \sup\{|\mu|(K)\colon K \subset A_n,\ K \in \mathscr{K}_X\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup\{|\mu|(K)\colon K \subset A,\ K \in \mathscr{K}_X\}.$$

Обратное неравенство очевидно. Для сокращения обозначим $B_n := X \backslash A_n$ $(n \in \mathbf{N})$, $B := X \backslash A$. Возьмем компакт $K_n \subset B_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Справедлива оценка

$$|\mu|\left(B \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) \leqslant \sup_n \left(b \wedge 2^n |\mu|(B_n \setminus K_n)\right),$$

где обозначено $b = |\mu|(B)$. При каждом $n \in \mathbf{N}$ направленность $(h_{\alpha,n})_{\alpha \in A(n)}$, где

$$h_{\alpha,n} := b \wedge 2^n |\mu|(B_n \setminus \alpha), \quad \alpha \in A(n) := \{K \in \mathscr{K}_X\colon\ K \subset B_n\},$$

ограничена элементом b и убывает к нулю. Из слабой (σ, ∞)-дистрибутивности сразу получаем, что

$$\inf\left\{|\mu|\left(B \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi(n)\right)\colon\ \varphi \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}(n)\right) = 0.$$

Значит, $A \in \mathscr{A}$. Кроме этого, из $B \in \mathscr{A}$ следует $X \backslash B \in \mathscr{A}$. Тогда лемма о монотонном классе влечет, что $\mathscr{A} = \mathscr{B}_X$.

Пусть теперь (X_n, π_n^{n+1}) — система, состоящая из полных по Чеху пространств X_n и непрерывных отображений π_n^{n+} пространства X_{n+1} на X_n $(n \in \mathbf{N})$. Рассмотрим согласованную последовательность $\mu_n\colon \mathscr{B}_n \to Y$ радоновых мер. Пусть регулярные борелевские меры $\bar{\mu}_n\colon \bar{\mathscr{B}}_n \to Y$ такие же, как и в доказательстве теоремы 2. По этой теореме проективный предел $\bar{\mu} := \overleftarrow{\lim}\, \bar{\mu}_n$ является квазирегулярной борелевской мерой. По замечанию 1 она регулярна. Так как $X_\infty = \overleftarrow{\lim}\, X_n \in \mathscr{B}_{\bar{X}}$, то мера μ, являющаяся ограничением $\bar{\mu}$ на $\mathscr{B}_\infty$, будет радоновой. $\triangleright$

При применении теорем 2 и 3 возникает необходимость в получении признаков радоновости и квазирадоновости данной борелевской меры. Например, справедливо следующее обобщение известной теоремы Улама.

Теорема 4. *Пусть* (X, ρ) — *полное сепарабельное метрическое пространство и на* F *выполняется закон слабой* σ*-дистрибутивности. Тогда любая борелевская мера* $\mu\colon \mathscr{B}_X \to Y$ *является радоновой.*

$\triangleleft$ Так как на X борелевская σ-алгебра совпадает с бэровской σ-алгеброй, то мера μ будет регулярной. Теперь достаточно показать, что

$$|\mu|(X) = \sup\{|\mu|(K)\colon\ K \in \mathscr{K}_X\}.$$

Пусть $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ — счетное плотное в X множество и $(B_n(x_k))_{n,k \in \mathbf{N}}$ — последовательность замкнутых шаров, где радиус каждого $B_n(x_k)$ равен n^{-1}. Для любого $n \in \mathbf{N}$ справедливо равенство $X = \cup\{B_n(x_k)\colon\ k \in \mathbf{N}\}$. Ради удобства введем обозначение

$$h_{n,m} := |\mu|\left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{m} B_n(x_k)\right) \quad (n, m \in \mathbf{N}).$$

Для любой функции $\varphi\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ полагаем

$$K_\varphi := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\varphi(n)} B_n(x_k).$$

Множество K_φ замкнуто и вполне ограничено, следовательно, компактно. Кроме этого,

$$|\mu|(X \setminus K_\varphi) \leqslant \sup_n \left(h \wedge 2^n h_{n,\varphi(n)}\right) = \sup_n h'_{n,\varphi(n)},$$

где положено $h := |\mu|(X)$, $h'_{n,m} := h \wedge 2^n h_{n,m}$. Для любого $n \in \mathbf{N}$ имеем $h'_{n,m} \downarrow 0$ при $m \to \infty$. Значит,

$$\inf\{|\mu|(X \setminus K_\varphi) \colon \varphi \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}\} = 0,$$

что и доказывает радоновость меры μ. $\triangleright$

Используя тот же прием, можно получить обобщение еще одной теоремы Улама. Доказательство (которое опускаем) основано на теореме Банаха — Куратовского и проводится по той же схеме, что и в [20].

Теорема 5. *Пусть на F выполняется закон слабой σ-дистрибутивности. Тогда при выполнении гипотезы континуума любая безатомная σ-аддитивная мера μ: $2^{\mathbf{R}} \to Y$ равна нулю тождественно.*

Ниже будет показано, что если на F не выполняется закон слабой σ-дистрибутивности, то аналога теоремы 4 для квазирадоновых мер не существует. Теоремы о квазирадоновости борелевских мер справедливы при других ограничениях на пространство X.

Теорема 6. *Пусть X — σ-компактное топологическое пространство. Тогда любая квазирегулярная мера μ: $\mathscr{B}_X \to Y$ является квазирадоновой.*

Так как на метрическом пространстве борелевская и бэровская σ-алгебры совпадают и любая бэровская мера автоматически квазирегулярна, то получаем

Следствие 3. *Пусть X — σ-компактное метрическое пространство. Тогда любая борелевская мера μ: $\mathscr{B}_X \to Y$ является квазирадоновой.*

В случае $X = \mathbf{R}$, имеем

Следствие 4. *Любая борелевская мера μ: $\mathscr{B}_{\mathbf{R}} \to Y$ квазирадонова.*

Используя замечание 2 и теорему 6, мы получаем следующую теорему.

Теорема 7. *Пусть $(X_n, \pi_n^{n+1})_{n \in \mathbf{N}}$ — система, состоящая из вполне регулярных σ-компактных топологических пространств X_n и непрерывных отображений π_n^{n+1} пространства X_{n+1} на X_n. Тогда для любой согласованной последовательности квазирегулярных мер μ_n: $\mathscr{B}_n \to Y$ существует проективный предел $\mu := \overleftarrow{\lim}\, \mu_n$, являющийся единственной квазирегулярной мерой из $\mathscr{B}_\infty$ в Y, для которой $\mu_n = \mu \circ \pi_n^{-1}$ $(n \in \mathbf{N})$.*

§ 4. Проективный предел направленного семейства мер

Для существования проективного предела несчетных направленностей мер необходимы более жесткие требования, связанные либо с требованием компактности всех рассматриваемых пространств, либо с переходом к бэровским σ-алгебрам на произведении пространств.

Рассмотрим систему $(X_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha,\beta \in A}$, состоящую из направленного множества A, семейства топологических пространств X_α и семейства непрерывных отображений π_α^β пространства X_β в X_α $(\alpha, \beta \in A;\ \alpha \leqslant \beta)$. Через π_α обозначаем канонические проекции проективного предела $X_\infty := \overleftarrow{\lim_\alpha}\, X_\alpha$ (если он непуст) в X_α. Обозначаем $\mathscr{B}_\alpha := \mathscr{B}_{X_\alpha}$, $\mathscr{B}_\alpha^0 := \mathscr{B}_{X_\alpha}^0$, $\mathscr{B}_\infty := \mathscr{B}_{X_\infty}$, $\mathscr{B}_\infty^0 := \mathscr{B}_{X_\infty}^0$. Направленность борелевских мер μ_α: $\mathscr{B}_\alpha \to Y$ (бэровских мер μ_α: $\mathscr{B}_\alpha^0 \to Y$) называется *согласованной*, если для любых $\alpha \leqslant \beta$ выполняется равенство $\mu_\alpha = \mu_\beta \circ (\pi_\alpha^\beta)^{-1}$ и в K-пространстве F существует конечный $\sup_\alpha |\mu|(X_\alpha)$. Борелевская мера μ: $\mathscr{B}_\infty \to Y$ (бэровская мера μ: $\mathscr{B}_\infty^0 \to Y$) называется *проективным пределом согласованной направленности борелевских мер μ_α: $\mathscr{B}_\alpha \to Y$ (бэровских мер μ_α: $\mathscr{B}_\alpha^0 \to Y$)*, если для любого $\alpha \in A$ выполняется $\mu_\alpha = \mu \circ \pi_\alpha^{-1}$.

В отличие от проективных пределов последовательностей мер при изучении проективных пределов несчетных направленностей мер возникают существенные трудности. Например, даже если все отображения π_α^β: $X_\beta \to X_\alpha (\alpha, \beta \in \mathrm{A};\ \alpha \leqslant \beta)$ являются отображениями «на», отображения π_α: $X_\infty \to X_\alpha$ не обязаны быть таковыми, см. [21]. Именно по этой причине в книге [22] приводится ошибочное доказательство утверждения 27.8 о существовании проективного предела мер в случае, когда X_α — произвольное польское пространство, а π_α^β — борелевское отображение. (Мы не располагаем ни доказательством этого факта, ни соответствующим контрпримером.) Если все пространства X_α компактны, таких патологий не возникает и, используя идею доказательства теоремы 2, можно доказать следующую теорему.

Теорема 8. *Пусть даны система* $(X_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha,\beta\in\mathrm{A}}$, *в которой все* X_α *компактны и согласованная направленность квазирегулярных мер* μ_α: $\mathscr{B}_\alpha \to Y$ $(\alpha \in \mathrm{A})$. *Тогда существует проективный предел* $\mu := \overleftarrow{\lim}\, \mu_\alpha$, *являющийся единственной квазирегулярной мерой из* $\mathscr{B}_\infty$ *в* Y, *для которой* $\mu_\alpha = \mu \circ \pi_\alpha^{-1} (\alpha \in \mathrm{A})$.

Так как по следствию 1 всякая бэровская мера продолжается единственным образом до квазирегулярной борелевской меры, то мы получаем

Следствие 5. *Пусть* F *является* K_σ*-пространством и* Y — *секвенциально о-полное* F*-нормированное пространство. Тогда в условиях теоремы 8 для любой согласованной направленности бэровских мер* μ_α: $\mathscr{B}_\alpha^0 \to Y$ $(\alpha \in A)$ *существует проективный предел* $\mu := \overleftarrow{\lim}\, \mu_\alpha$, *являющийся единственной бэровской мерой из* $\mathscr{B}_\infty^0$ *в* Y, *для которой* $\mu_\alpha = \mu \circ \pi_\alpha^{-1}$ $\alpha \in \mathrm{A})$.

Здесь еще используется результат о вложимости Y в o-полное решеточно нормированное пространство, но следствие 5 может быть получено непосредственно из доказательства бэровского варианта теоремы 1. Так как на F не требуется выполнения закона слабой σ-дистрибутивности, то следствие 5 является усилением основного результата из [13] (теорема 2.5).

Пусть Γ — произвольное бесконечное множество и $(Z_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ — семейство полных сепарабельных метрических пространств. Обозначим через A множество всех конечных непустых подмножеств из Γ. Если $\alpha \in \mathrm{A}$ и $\alpha = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, то полагаем $X_\alpha := Z_{\gamma_1} \times \ldots \times Z_{\gamma_n}$. Пусть $\beta \in \mathrm{A}, \beta \supset \alpha$ и $\beta = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_m\}$. Полагаем $\pi_\alpha^\beta((x_1, \ldots, x_m)) = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_k \in Z_{\gamma_k}$ $(k := 1, \ldots, m)$. В этом случае проективный предел системы $(X_\alpha, \pi_\alpha^\beta)_{\alpha,\beta\in\mathrm{A}}$ отождествляется с прямым произведением пространств Z_γ $(\gamma \in \Gamma)$. Для любого $\Delta \subset \mathrm{A}$ обозначаем через π_Δ каноническую проекцию пространства $X_\infty = \Pi\{Z_\gamma\colon \gamma \in \Gamma\}$ на произведение $X_\Delta := \Pi\{Z_\gamma\colon \gamma \in \Delta\}$. Если $\mathscr{B}_\Delta^0$ — бэровская σ-алгебра на X_Δ, то, очевидно, $\mathscr{B}_\Delta^0 = \otimes\{\mathscr{B}_\gamma\colon \gamma \in \Delta\}$. Пусть $\widetilde{\mathscr{B}}_\Delta := \pi_\Delta^{-1}(\mathscr{B}_\Delta^0)$ — σ-подалгебра Δ-цилиндров в $\mathscr{B}_\infty^0$. Рассмотрим согласованное семейство квазирадоновых бэровских мер

$$\mu_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n} := \mu_\alpha\colon \mathscr{B}_\alpha^0 \to Y \quad (\alpha = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathrm{A}).$$

Если фиксировано счетное подмножество $\Delta := (\gamma_k)_{k\in\mathrm{N}} \subset \Gamma$, то по теоремам 2 и 3 мы получаем бэровскую меру $\mu_\Delta := \overleftarrow{\lim}\, \mu_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n}$ на σ-алгебре $\mathscr{B}_\Delta^0$. В силу единственности проективного предела, все меры $\mu_\Delta \circ \pi_\Delta$, заданные на цилиндрических σ-алгебрах $\widetilde{\mathscr{B}}_\Delta(\Delta := (\gamma_k)_{k\in\mathrm{N}} \subset \Gamma)$, согласованы между собой. Кроме этого, $\mathscr{B}_\infty^0 = \bigcup\{\widetilde{\mathscr{B}}_\Delta\colon \Delta = (\gamma_k)_{k\in\mathrm{N}} \subset \Gamma\}$. Поэтому существует бэровская мера μ: $\mathscr{B}_\infty^0 \to Y$, продолжающая все меры μ_Δ. Таким образом, доказана

Теорема 9. *Для любых семейств полных сепарабельных метрических пространств* $(Z_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *и согласованной системы квазирадоновых бэровских мер* $\mu_\alpha\colon \mathscr{B}^0_\alpha \to Y(\alpha := \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \subset \Gamma,\ n \in \mathbf{N})$ *существует единственная бэровская мера* $\mu\colon \mathscr{B}^0_\infty \to Y$, *на произведении пространств* Z_γ $(\gamma \in \Gamma)$ *такая, что* $\mu_\alpha = \mu \circ \pi_\alpha^{-1}$ $(\alpha \in \mathrm{A})$.

Эта теорема является векторным вариантом классической теоремы Колмогорова о согласованных семействах вероятностных мер.

§ 5. Произведение мер

Рассмотрим три o-полных K-нормированных пространства Y, Y' и Z с нормирующими K-пространствами F, F' и G соответственно. Пусть задано билинейное отображение $\times$: $Y \times Y' \to Z$, которое мажорируется положительным o-непрерывным билинейным отображением $\circ$: $F \times F' \to G$, т. е.

$$|y \times y'| \leqslant |y| \circ |y'| \quad (y \in Y,\ y' \in Y').$$

Кроме этого, пусть X и X' — два полных по Чеху топологических пространства. Рассмотрим две борелевские меры μ: $\mathscr{B}_X \to Y$ и μ': $\mathscr{B}_{X'} \to Y'$. Обозначаем $\mathscr{C} := \mathscr{B}_{X\times X'}$. Через $\mathscr{A} \square \mathscr{A}'$ будем обозначать алгебру подмножеств, порожденную всеми «прямоугольниками» $A \times A'$, где $A \in \mathscr{A}$, $A' \in \mathscr{A}'$. Задача состоит в построении борелевской меры $\mu \otimes \mu'$: $\mathscr{C} \to Z$ такой, что

$$(\mu \otimes \mu')(B \times B') = \mu(B) \times \mu'(B') \quad (B \in \mathscr{B}_X,\ B' \in \mathscr{B}_{X'}).$$

Будем называть меру $\mu \otimes \mu'$ *произведением мер* μ и μ'.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть $Y := F$ и $Y' := F'$, где F и F' — фундаменты одного и того же расширенного K-пространства $mF = mF'$, в котором фиксирована порядковая единица $\mathbf{1}$. Тогда в пространстве mF однозначно определено умножение, превращающее его в решеточно упорядоченное кольцо с единицей $\mathbf{1}$. Возьмем еще один фундамент $G \subset mF$ такой, что $F \cdot F' \subset G$. В этом случае для любой пары элементов $x \in F$ и $x' \in F'$ определено их произведение $x \cdot x' \in G$; o-непрерывность такого произведения и равенство $|x \cdot x'| = |x| \cdot |x'|$ $(x \in F,\ x' \in F')$ хорошо известны, и мы можем говорить о произведении двух борелевских мер μ: $\mathscr{B}_X \to F$ и μ': $\mathscr{B}_{X'} \to F'$. Если $F = F' = G$, то F будет упорядоченным кольцом, и все меры μ, μ', $\mu \otimes \mu'$ будут принимать значения в одном и том же K-пространстве F.

Пример 2. Пусть $Y = F = \mathrm{Orth}(F')$ и векторная норма пространства Y' разложима (см. [16]). Известно [16], что в этом случае на Y' можно определить структуру F-модуля, т. е. определено билинейное отображение из $F \times Y'$ в Y' такое, что $|a \cdot y| = |a| \cdot |y|$ $(a \in F,\ y \in Y')$. Если даны борелевские меры μ: $\mathscr{B}_X \to F$ и μ': $\mathscr{B}_{X'} \to Y'$, то можно говорить об их произведении $\mu \otimes \mu'$: $\mathscr{C} \to Y'$. При $F = \mathbf{R}$ имеем дело с обычным умножением скалярной меры на векторную.

Пример 3. Будем считать, что F и F' являются фундаментами одного расширенного K-пространства $mF = mF'$, в котором фиксирована порядковая единица, определяющая умножение в mF. Пусть $G := \mathrm{Orth}(F) \cap \mathrm{Orth}(F')$ и для любых $a \in F$, $a' \in F'$ определено произведение $a \cdot a' \in mF$. Кроме этого, считаем, что векторные нормы пространств Y и Y' разложимы. Тогда по [16] на Y и Y' можно определить структуру G-модуля. Пусть $Y \otimes_G Y'$ — алгебраическое тензорное произведение G-модулей Y и Y', см. [23]. Рассмотрим векторную полунорму на $Y \otimes_G Y'$ со значениями в mF, определяемую формулой

$$|z| := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} |y_k| \cdot |y'_k| \right\},$$

где inf в K-пространстве mF берется по всевозможным представлениям элемента z в виде $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k \otimes y'_k (y_k \in Y,\ y'_k \in Y',\ k := 1, \ldots, n)$. Так как G — коммутативное кольцо, то пространства Y и Y' наделены структурой бимодуля. Поэтому их тензорное произведение $Y \otimes_G Y'$ тоже является G-модулем (см. [23, п. 10.2.2]). Значит, выполняется равенство

$$|g \cdot z| = |g||Z| (g \in G,\ z \in Y \otimes_G Y').$$

В частности, полунорма разложима.

Выделим в $Y \otimes_G Y'$ подпространство $Z := \{z \in Y \otimes_G Y' \colon |z| = 0\}$. Следуя [16], можно построить o-пополнение фактор-пространства $(Y \otimes_G Y')/Z$ по норме. Это пополнение естественно называть *проективным тензорным произведением K-нормированных пространств Y и Y'*, которое будем обозначать через $Y \widehat{\otimes}_G Y'$. Обозначаем через $y \otimes y'$ тензорное произведение двух элементов $y \in Y$, $y' \in Y'$. Очевидно, $|y \otimes y'| = |y| \cdot |y'|$ $(y \in Y,\ y' \in Y')$ (мы сохраняем за фактор-нормой на $Y \widehat{\otimes}_G Y'$ прежнее обозначение $|\cdot|$); o-непрерывность билинейного отображения $\otimes\colon Y \times Y' \to Y \widehat{\otimes} Y'$ очевидна. Следовательно, мы можем ввести в рассмотрение тензорное произведение $\mu \otimes \mu' \colon \mathscr{C} \to Y \widehat{\otimes}_G Y'$ двух борелевских мер $\mu\colon \mathscr{B}_X \to Y$ и $\mu'\colon \mathscr{B}_{X'} \to Y'$. Аналогично можно определить индуктивное тензорное произведение. Существует также другой способ построения тензорного произведения K-нормированных пространств с привлечением методов булевозначного анализа, см. [16].

Будем говорить, что *умножения* $\times\colon Y \times Y' \to Z$ *и* $\circ\colon F \times F' \to G$ *связаны кросс-равенством*, если

$$|y \times y'| = |y| \circ |y'| \quad (y \in Y,\ y' \in Y').$$

В примерах 1, 2 и 3 рассмотрены умножения как раз такого сорта.

Лемма 1. *Если для двух борелевских мер $\mu\colon \mathscr{B}_X \to Y$ и $\mu'\colon \mathscr{B}_{X'} \to Y'$ существует произведение $\mu \otimes \mu' \colon \mathscr{C} \to Z$, являющееся квазирадоновой мерой, то оно единственно.*

◁ Возьмем открытое множество $U \subset X \times X'$ и компактное подмножество $K \subset U$. Тогда существуют конечные наборы открытых подмножеств $U_k \subset X$, $U'_k \subset X'$ $(k := 1, \ldots, n)$ такие, что $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} (U_k \times U'_k) \subset U$. Ввиду квазирадоновости $\mu \otimes \mu'$ будет

$$|\mu \otimes \mu'|(U) = \sup\{|\mu \otimes \mu'|(K)\colon K \subset U,\ K \in \mathscr{K}_{X \times X'}\} =$$
$$= \sup\{|\mu \otimes \mu'|(V)\colon V \subset U,\ V \in \mathscr{B}_X \square \mathscr{B}_{X'}\}.$$

Значит,

$$\mu \otimes \mu'(U) = o\text{-}\lim\{\mu \otimes \mu'(V)\colon V \subset U,\ V \in \mathscr{B}_X \square \mathscr{B}_{X'}\}.$$

Но мера $\mu \otimes \mu'$ на алгебре $\mathscr{B}_X \square \mathscr{B}_{X'}$ определяется однозначно по значениям $\mu \otimes \mu'(B \times B')$ $(B \in \mathscr{B}_X,\ B' \in \mathscr{B}_{X'})$. Тогда и $\mu \otimes \mu'(U)$ определяется однозначно. Из σ-аддитивности сразу следует однозначная определенность всех значений $\mu \otimes \mu'(C)$ $(C \in \mathscr{C})$. ▷

Теорема 10. *Пусть X и X' — полные по Чеху топологические пространства и $\mu\colon \mathscr{B}_X \to Y$, $\mu'\colon \mathscr{B}_{X'} \to Y'$ — квазирадоновы меры. Тогда существует их произведение $\mu \otimes \mu'\colon \mathscr{C} \to Z$, являющееся квазирадоновой мерой. Для векторных вариаций справедливо неравенство $|\mu \otimes \mu'| \leqslant |\mu| \otimes |\mu'|$. Если умножения $\times$ и $\circ$ связаны кросс-равенством, то $|\mu \otimes \mu'| = |\mu| \otimes |\mu'|$.*

◁ Пусть βX, $\beta X'$ — стоун-чеховские компактификации пространств X и X'. Рассмотрим меры $\bar{\mu}\colon \mathscr{B}_{\beta X} \to Y$, $\bar{\mu}'\colon \mathscr{B}_{\beta X'} \to Y'$, определяемые равенствами $\bar{\mu}(B) = \mu(B \cap X)$, $\bar{\mu}'(B') = \mu'(B' \cap X')$ $(B \in \mathscr{B}_{\beta X},\ B' \in \mathscr{B}_{\beta X'})$. Существует единственная мера $\lambda\colon \mathscr{A}_{\beta X} \square \mathscr{A}_{\beta X'} \to Z$, для которой $\lambda(A \times A') = \bar{\mu}(A) \times \bar{\mu}'(A')$ $(A \in \mathscr{A}_{\beta X},\ A' \in \mathscr{A}_{\beta X'})$. Легко проверяется, что мера λ имеет ограниченную векторную вариацию, при этом $|\lambda| \leqslant |\mu| \otimes |\mu'|$. Покажем, что λ удовлетворяет условиям плотности из определения 1. Условие (1) очевидно. Условие (2) достаточно проверить на произвольном множестве $A \times A'$, где $A \in \mathscr{A}_{\beta X}$, $A' \in \mathscr{A}_{\beta X'}$. Пусть последовательности $(A_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \mathscr{A}_{\beta X}$ и $(A_k')_{k\in\mathbf{N}} \in \mathscr{A}_{\beta X'}$ такие, что $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, $A' = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k'$, $\mathrm{cl}(A_k) \subset A$, $\mathrm{cl}(A_k') \subset A'$ $(k \in \mathbf{N})$. Тогда $\mathrm{cl}(A_k \times A_k') \subset A \times A'$ и

$$\inf_k \{|\lambda|(A \times A' \setminus A_k \times A_k')\} \leqslant \inf \{|\bar{\mu}|(A \setminus A_k) \circ |\bar{\mu}'|(A') + |\bar{\mu}|(A) \circ |\bar{\mu}'|(A' \setminus A_k')\} = 0.$$

По теореме 1 существует квазирегулярная мера $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}'$: $B_{\beta X \times \beta X'} \to Z$, продолжающая λ. По определению $\bar{\mu}(A) \times \bar{\mu}'(A') = \bar{\mu} \otimes \bar{\mu}'(A \times A')$. Из квазирегулярности мер μ, μ', $\mu \otimes \mu'$ и o-непрерывности умножения $\times$ вытекает справедливость этого равенства для любых $A \in \mathscr{T}$ и $A' \in \mathscr{T}'$. Из σ-аддитивности и леммы о монотонном классе следует, что это равенство справедливо для любых $A \in \mathscr{B}_{\beta X}$, $A' \in \mathscr{B}_{\beta X'}$. Отсюда видно, что мера $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}'$ действительно является произведением мер $\bar{\mu}$ и $\bar{\mu}'$. Так как значения $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}'$ на всех борелевских подмножествах множества $(\beta X \times (\beta X' \setminus X')) \cup ((\beta X \setminus X) \times \beta X')$ равны нулю, то, рассматривая ограничение $\bar{\mu} \otimes \bar{\mu}'$ на борелевские подмножества пространства $X \times X' \subset \beta X \times \beta X'$, мы получим требуемое произведение $\mu \otimes \mu'$ мер μ и μ', являющееся квазирегулярной борелевской мерой. Векторные вариации $|\mu|$ и $|\mu'|$ тоже удовлетворяют условию этой теоремы, поэтому существует их произведение $|\mu| \otimes |\mu'|$: $\mathscr{C} \to G$. Кроме этого, как легко видеть, $|\mu \otimes \mu'| \leqslant |\mu| \otimes |\mu'|$. Квазирадоновость меры $\mu \otimes \mu'$ выводится из этого неравенства, из квазирегулярности $\mu \otimes \mu'$ и того, что

$$\inf \{|\mu \otimes \mu'|(X \times X' \setminus K \times K') \colon K \in \mathscr{K}_X, K' \in K_{X'}\} \leqslant$$
$$\leqslant \inf \{|\mu|(X) \circ |\mu'|(X' \setminus K') + |\mu|(X \setminus K) \circ |\mu'|(X')\} = 0.$$

Допустим, что умножения $\times$ и $\circ$ связаны кросс-равенством. Пусть $(C_k)_{k=1}^{n} \subset \mathscr{B}_X$ и $(C_l')_{l=1}^{m} \subset \mathscr{B}_{X'}$ — произвольные разбиения множеств $C \subset \mathscr{B}_x$ $C' \in \mathscr{B}_{X'}$ соответственно. Тогда, $(C_k \times C_l')_{k=1,l=1}^{n\ \ m}$ является разбиением для $C \times C'$ и мы имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |\mu(C_k)| \circ \sum_{l=1}^{m} |\mu'(C_l')| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} |\mu \otimes \mu'((C_k \times C_l')| \leqslant |\mu \otimes \mu'|(C \times C').$$

Это влечет неравенство

$$|\mu| \otimes |\mu'|(C \times C') \leqslant |\mu \otimes \mu'|(C \times C'),$$

которое по аддитивности распространяется на произвольные конечные объединения множеств вида $C \times C'$ $(C \in \mathscr{B}_X$, $C' \in \mathscr{B}_{X'})$, т. е. оно справедливо для множеств из $\mathscr{B}_X \square \mathscr{B}_{X'}$. Квазирадоновость и σ-аддитивность $|\mu \otimes \mu'|$ позволяют распространить это неравенство на произвольные множества из $\mathscr{C}$. Значит, $|\mu| \otimes |\mu'| \leqslant |\mu \otimes \mu'|$. Как уже отмечалось, обратное неравенство выполняется всегда. Отсюда $|\mu \otimes \mu'| = |\mu| \otimes |\mu'|$. $\triangleright$

З а м е ч а н и е 3. На самом деле теорема 10 справедлива, если считать X и X' произвольными вполне регулярными пространствами, образующими борелевские подмножества в каких-нибудь своих компактификациях.

З а м е ч а н и е 4. Произведение борелевских мер на локально компактных пространствах, принимающих значения в монотонно полном упорядоченном векторном пространстве, построено в [7]. Для K-пространств этот результат содержится в теореме 10. С другой стороны, если в примере 3 взять $F = F' = \mathbf{R}$, то теорема 10 дает существование тензорного произведения банаховозначных мер (см. [1—3]).

Теперь мы переходим к изложению вопросов, связанных с теоремой Фубини. Для этого необходимо определить новый интеграл от векторной функции по векторной мере. Пусть X и X' — полные по Чеху топологические пространства. Обозначим через $\mathscr{M}(X', Y)$ пространство всех функций f: $X' \to Y$, представимых в виде $f = y_1 g_1 + \ldots - y_n g_n$, где $y_k \in Y$ и g_k: $X' \to \mathbf{R}$ — ограниченные измеримые по Борелю функции. Пусть также μ: $\mathscr{B}_X \to Y$ и μ': $\mathscr{B}_{X'} \to Y'$ — квазирадоновы меры. Для любой функции $f \in \mathscr{M}(X', Y)$, имеющей вышеприведенное выше представление, полагаем по определению

$$\int f d\mu = \sum_{k=1}^{n} y_i \times \int g_k d\mu'.$$

Стандартным образом проверяется корректность такого определения интеграла. Легко устанавливается также оценка

$$\left| \int f d\mu \right| \leqslant |f|_\infty \circ |\mu'|(X'),$$

где $|f|_\infty := \sup\{|f(t)|: t \in X'\}$. Пусть $\overline{\mathscr{M}}(X', Y)$ — r-замыкание пространства $\mathscr{M}(X', Y)$ по норме $|\cdot|_\infty$, т. е. $f \in \overline{\mathscr{M}}(X', Y)$ тогда и только тогда, когда существуют последовательность функций $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathscr{M}(X', Y)$ и регулятор $b \in F^+$ такие, что $|f - f_n|_\infty \leqslant n^{-1} b$. Теперь по непрерывности в такой норме мы можем определить интеграл по мере μ' от любой функции $f \in \overline{\mathscr{M}}(X', Y)$ с сохранением вышеприведенной нормативной оценки.

Обозначим через $\overline{\mathscr{M}}(X \times X')$ пространство вещественных функций на $X \times X'$, являющихся равномерными пределами функций h на $X \times X'$, представимых в виде $h = \sum_{i=1}^{n} g_i g_i'$, где g_i: $X \to \mathbf{R}$ и g_i': $X' \to \mathbf{R}$ — ограниченные измеримые по Борелю функции. Для любого $t' \in X'$ функция $h(\cdot, t')$ измерима по Борелю, и поэтому существует интеграл

$$\int h(\cdot, t')\, d\mu = f(t') = \sum_{i=1}^{n} y_i g_i'(t'),$$

где $y_i = \int g_i d\mu$ $(i = 1, \ldots, n)$. Значит, $\int h d\mu \in \mathscr{M}(X', Y)$ и

$$\int \left(\int h d\mu \right) \times d\mu' = \sum_{i=1}^{n} \left(\int g_i d\mu \right) \times \left(\int g_i' d\mu' \right) = \int h d(\mu \otimes \mu').$$

Переходя в этих равенствах к соответствующим r-пределам, мы получаем следующую теорему Фубини.

Теорема 11. *Пусть* $h \in \overline{\mathscr{M}}(X \times X')$. *Тогда*

$$\int h d\mu \in \overline{\mathscr{M}}(X, Y), \quad \int h d\mu' \in \overline{\mathscr{M}}(X, Y')$$

и

$$\int \left(\int h d\mu \right) \times d\mu' = \int h d(\mu \otimes \mu') = \int d\mu \times \left(\int h d\mu' \right).$$

Класс функций $\overline{\mathscr{M}}(X \times X')$ не очень широк, но когда пространства X и X' компактны, имеет место включение $C(X \times X') \subset \mathscr{M}(X \times X')$. Оказывается, что в общем виде для произвольных ограниченных измеримых на $X \times X'$ функций теорема Фубини просто не верна.

П р и м е р 4. Пусть $X = X' = [0, 1]$, $Y = F = Y' = F' = M[0, 1]$ — пространство всех классов эквивалентности по лебеговой мере борелевских ограниченных функций на $[0, 1]$. Для любого борелевского $A \subset [0, 1]$

полагаем $\mu(A) = [\varkappa_A]$ — класс эквивалентности, содержащий характеристическую функцию $\varkappa_A$. В качестве операции умножения в $M[0, 1]$ рассмотрим обычное умножение функций. Тогда, очевидно,

$$\mu \otimes \mu(A \otimes B) = [\chi_{A \cap B}] \quad (A, B \in \mathscr{B}_{[0,1]}).$$

Пусть Δ — диагональ квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$, $\Delta := \{(t, t) \colon t \in [0, 1]\}$. Полагаем $P(t, u) = t$. Теперь можно в явном виде выписать меру $\mu \otimes \mu$, а именно:

$$(\mu \otimes \mu)(C) = \mu(P(\Delta \cap C)) = [\chi_{P(\Delta \cap C)}]$$

для любого борелевского $C \subset [0, 1] \times [0, 1]$. Тогда

$$(\mu \otimes \mu)(\Delta) = 1 = \int \chi_\Delta d(\mu \otimes \mu).$$

Но для любого фиксированного $t' \in [0, 1]$

$$\int \chi_\Delta(\cdot, t')\, d\mu = \mu(\{t'\}) = 0.$$

Значит, при любом разумном определении интеграла от функций f: $[0, 1] \to M[0, 1]$ мы должны будем иметь

$$\int \left(\int \chi_\Delta d\mu \right) d\mu = 0 \neq \int \chi_\Delta d(\mu \otimes \mu).$$

Этот пример показывает, что теорема Фубини для функции $\varkappa_\Delta$ в принципе не может выполняться.

Итак, теорема Фубини нарушается уже в случае K-пространств. Причина этого заключена в наличии делителей нуля для умножения в K-пространстве. С другой стороны, в случае $F = F' = \mathbf{R}$ для тензорного произведения банаховозначных мер с теоремой Фубини все обстоит благополучно (см. [4—6]).

§ 6. Бесконечное произведение мер

Пусть $(Z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ — последовательность полных по Чеху пространств. Обозначаем $\mathscr{Z}_n := \mathscr{B}_{Z_n}$. Будем считать, что в K-пространстве F выделена порядковая единица $\mathbb{1}$, превращающая F в обобщенное полуупорядоченное кольцо, см. [15]. Рассмотрим последовательность положительных мер λ_n: $\mathscr{Z}_n \to F$ таких, что $\lambda_n(Z_n) = \mathbb{1}$ $(n \in \mathbf{N})$. Используя кольцевое умножение в F, можно определить последовательность мер $\mu_n := \lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_n$: $\mathscr{B}_n \to F$, где $\mathscr{B}_n := \mathscr{B}_{X_n}$, $X_n := \prod_{k=1}^{n} Z_k$. Последовательность мер $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ согласована. Проективный предел $\mu := \varinjlim \mu_n$ будем называть *бесконечным произведением мер* $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ и обозначать $\mu = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \lambda_n$. Из теорем 2 и 3 сразу вытекает

Теорема 12. *Для любых последовательностей $(Z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ полных по Чеху пространств и последовательности положительных квазирадоновых мер λ_n: $\mathscr{Z}_n \to F$ таких, что $\lambda_n(Z_n) = \mathbb{1}$ $(n \in \mathbf{N})$, существует бесконечное произведение $\mu = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \lambda_n$, являющееся единственной квазирегулярной мерой на борелевской σ-алгебре $\mathscr{B}_\infty$ пространства $X_\infty := \prod_{n=1}^{\infty} Z_n$ такой, что*

$$\mu(\pi_n^{-1}(B_1 \times \ldots \times B)_n) = \lambda_1(B_1) \cdot \ldots \cdot \lambda_n(B_n),$$

где $B_k \in \mathscr{Z}_k$ ($k := 1, \ldots, n$, $n \in \mathbf{N}$). *Если на F выполняется закон слабой (σ, ∞)-дистрибутивности, то все меры μ, λ_n $(n \in \mathbf{N})$ будут радоновыми.*

Пусть X — топологическое пространство и $\mathbf{B}$ — полная булева алгебра. *Спектральной мерой на* $\mathscr{B}_X$ называется любой σ-гомоморфизм из $\mathscr{B}_X$ в $\mathbf{B}$. Если в K-пространстве F выделена порядковая единица $\mathbf{1}$, *то спектральной мерой* λ *в* F будем называть любую σ-аддитивную меру на $\mathscr{B}_X$, принимающую значения в базе $\mathfrak{C}(\mathbf{1})$ K-пространства F такую, что $\lambda(X) = \mathbf{1}$. Непосредственно из теоремы 12 получаем

Следствие 6. *Для любой последовательности λ_n: $\mathscr{Z}_n \to \mathbf{B}$ квазирадоновых спектральных мер, заданных на борелевских σ-алгебрах полных по Чеху пространств существует единственное бесконечное произведение $\mu = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \lambda_n$, являющееся квазирегулярной спектральной мерой из $\mathscr{B}_\infty$ в $\mathbf{B}$. Если на $\mathbf{B}$ выполняется закон слабой (σ, ∞)-дистрибутивности, то все меры μ, λ_n $(n \in \mathbf{N})$ квазирадоновы.*

Теорема 13. *Пусть на булевой алгебре $\mathbf{B}$ не выполняется закон слабой (σ, ∞)-дистрибутивности. Тогда существует последовательность $(Z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ локально компактных топологических пространств и последовательность квазирадоновых мер λ_n: $\mathscr{Z}_n \to \mathbf{B}$ $(n \in \mathbf{N})$ таких, что их бесконечное произведение $\mu = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ не является квазирадоновой мерой.*

$\lhd$ Пусть j: $\mathbf{B} \to \mathfrak{B}(Q)$ — канонический изоморфизм $\mathbf{B}$ на алгебру всех открыто-замкнутых подмножеств стоуновского компакта Q. Из [24] (лемма 2.3) следует существование в Q последовательности $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ замкнутых нигде не плотных подмножеств такой, что $\mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=1}^{n} U_n\right)$ содержит непустое открыто-замкнутое подмножество V. Полагаем $Z_n := Q \setminus U_n$. Для любого борелевского подмножества $B \subset Z_n$ существует единственное множество $V_B \in \mathfrak{B}(Q)$ такое, что $V_B \Delta B$ является множеством первой категории в Q. Полагая $\lambda_n(B) := j^{-1}(V_B)$, получим квазирадонову меру λ_n: $\mathscr{Z}_n \to \mathbf{B}$. Таким образом, определена последовательность $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ квазирадоновых мер. Пусть $\mu := \bigotimes_{n=1}^{\infty} \lambda_n$. Если компакт K содержится в $X_\infty := \prod_{n=1}^{\infty} Z_n$, то существуют компакты $K_n \subset Z_n$ такие, что $K \subset \prod_{n=1}^{\infty} K_n$. Тогда

$$0 \leqslant \mu(K) \leqslant \mu\left(\prod_{n=1}^{n} K_n\right) = \inf_n \lambda_n(K_n) = \inf_n j^{-1}(\mathrm{int}\, K_n) =$$

$$= j^{-1}\left(\mathrm{int} \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right) \leqslant j^{-1}(Q \setminus V) = \mathbf{1} - j^{-1}(V).$$

В частности,

$$\sup\{\mu(K):\ K \in \mathscr{K}_{X_\infty}\} \leqslant \mathbf{1} - j^{-1}(V) < \mathbf{1}.$$

Значит, мера μ не квазирадонова. $\rhd$

Следствие 7. *Для K-пространства F с фиксированной порядковой единицей $\mathbf{1}$ эквивалентны следующие условия:*

(1) *на F выполняется закон слабой (σ, ∞)-дистрибутивности;*

(2) *для любых о-полного K-нормированного пространства Y с F-значной нормой, системы $\left(X_n, \pi_n^{n+1}\right)$ полных по Чеху топологических пространств и последовательности согласованных квазирадоновых мер*

μ_n: $\mathscr{B}_n \to Y$ их проективный предел $\overleftarrow{\lim\limits_n}\, \mu_n$ является квазирадоновой мерой на $\mathscr{B}_\infty$;

(3) *для любых последовательности (Z_n) локально компактных пространств и последовательности квазирадоновых спектральных мер λ_n: $\mathscr{Z}_n \to F$ их бесконечное произведение $\bigotimes\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ является квазирадоновой мерой на $\mathscr{B}_\infty$.*

Из следствий 4 и 6 сразу получается

Следствие 8. *Пусть* $\mathbf{B}$ — *σ-полная булева алгебра. Тогда для любой последовательности спектральных мер λ_n: $\mathscr{B}_\mathbf{R} \to \mathbf{B}$ существует бесконечное произведение $\bigotimes\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n$, являющееся спектральной мерой на борелевской σ-алгебре пространства* $\mathbf{R}^\mathbf{N}$.

Теорема 14. *Пусть* $\mathbf{B}$ — *σ-полная булева алгебра. Эквивалентны следующие условия:*

(1) *на* $\mathbf{B}$ *выполняется закон слабой σ-дистрибутивности;*

(2) *для любой последовательности спектральных мер λ_n: $\mathscr{B}_\mathbf{R} \to \mathbf{B}$ бесконечное произведение $\bigotimes\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ является квазирадоновой спектральной мерой на борелевской σ-алгебре пространства* $\mathbf{R}^\mathbf{N}$.

◁ Если выполняется (1), то (2) сразу получается из следствий 4 и 6. Допустим, что на $\mathbf{B}$ закон слабой σ-дистрибутивности нарушается.

Пусть j: $\mathbf{B} \to \mathfrak{B}(Q)$ — канонический изоморфизм $\mathbf{B}$ на алгебру всех открыто-замкнутых подмножеств стоуновского компакта Q. Аналогично доказательству предыдущей теоремы, существует в Q последовательность $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ замкнутых нигде не плотных G_δ-подмножеств такая, что $\mathrm{cl}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n\right)$ содержит непустое открыто-замкнутое подмножество V. Пусть $U_n = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} U_{n,k}$ $(U_{n,k} \in \mathfrak{B}(Q);\ n,\ k \in \mathbf{N})$. Рассмотрим на Q новую топологию $\mathscr{T}_0$, базу которой составляют всевозможные конечные пересечения множеств V, $U_{n,k}$ $(n,\ k \in \mathbf{N})$ и их дополнений. Топология $\mathscr{T}_0$ удовлетворяет аксиоме регулярности (для любой точки $q \in Q$ существует база $\mathscr{T}_0$-замкнутых окрестностей). Пусть $\overline{Q}$ — разбиение на замыкания одноточечных подмножеств в Q и π: $Q \to \overline{Q}$ — каноническое проектирование Q на $\overline{Q}$. Рассмотрим на $\overline{Q}$ фактор-топологию топологии $\mathscr{T}_0$. Пространство $\overline{Q}$ является регулярным со счетной базой из открыто-замкнутых подмножеств. По теореме Александрова существует гомеоморфизм φ: $\overline{Q} \to S$ пространства $\overline{Q}$ на замкнутое подмножество S канторова множества $\{0,\ 1\}^\omega$. Поэтому можно считать, что композиция $\psi := \varphi \circ \pi$ действует из Q в $\mathbf{R}$ и $\psi(Q) = S$. Для любого бэровского подмножества $B \subset Q$ существует единственное открыто-замкнутое подмножество $U_B \in \mathfrak{B}(Q)$ такое, что $B \Delta U_B$ — множество первой категории в Q. Отображение $B \to U_B$ порождает σ-гомоморфизм h: $\mathscr{B}_Q^0 \to \mathfrak{B}(Q)$, ядром которого является класс всех бэровских множеств из Q первой категории. Для любых $n \in \mathbf{N}$ и $A \in \mathscr{B}_\mathbf{R}$ полагаем

$$\sigma_n(A) := j^{-1} \circ h(\psi^{-1}((S \setminus \psi(U_n)) \cap A)).$$

Таким образом, мы получаем последовательность спектральных мер σ_n: $\mathscr{B}_\mathbf{R} \to \mathbf{B}$. Для любого $n \in \mathbf{N}$ множество $W_n = (-2,\ 2) \setminus \psi(U_n)$ открыто, поэтому оно представляется счетным объединением непересекающихся открытых интервалов $(a_{i,n},\ b_{i,n})$, $i \in \mathbf{N}$ (возможно пустых). Для любых $i \in \mathbf{N}$ и $t \in (a_{i,n},\ b_{i,n})$ полагаем

$$\gamma_n(t) = (\mathrm{tg}((2t - a_{i,n} - b_{i,n})/(b_{i,n} - a_{i,n})),\ i).$$

Отображение γ_n является гомеоморфизмом множества W_n на замкнутое подмножество $\mathbf{R}^2$. Спектральная мера $\lambda_n = \sigma_n \circ \gamma_n^{-1}$ представляется в виде произведения двух спектральных мер $\lambda_{i,n}$: $\mathscr{B}_{\mathbf{R}} \to \mathbf{B}$ $(i = 1, 2)$. Покажем, что мера $\mu = \bigotimes_{n=1}^{\infty} (\lambda_{1,n} \otimes \lambda_{2,n})$ не квазирадонова. Пусть компакт K содержится в $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Существует последовательность компактов $K_n \subset \mathbf{R}$ такая, что $K \subset \prod_{n=1}^{\infty} (K_n \times K_n)$. Тогда $\mu(K) \leqslant \bigwedge_{n=1}^{\infty} \lambda_n \quad (K_n \times K_n) = \sigma_n \circ$ $\circ \gamma_n^{-1}(K_n \times K_n) = j^{-1}\left(\operatorname{int} \bigcap_{n=1}^{n} \psi^{-1} (S \cap \gamma_n^{-1}(K_n \times K_n))\right) \leqslant 1 - j^{-1} (V) < 1$. Значит, спектральная мера μ не квазирадонова. $\triangleright$

§ 7. Элементы измеримого функционального исчисления в K_σ-пространстве

Пусть $\mathbf{B}$ — σ-полная булева алгебра. *Разложением единицы в* $\mathbf{B}$ называется семейство $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}} \subset \mathbf{B}$ со следующими свойствами:

(1) $e_\alpha \leqslant e_\beta$ при $\alpha \leqslant \beta$,

(2) $\sup_\alpha e_\alpha = 1, \quad \inf_\alpha e_\alpha = 0$;

(3) $e_\beta = \sup_{\alpha<\beta} e_\alpha \, (\beta \in \mathbf{R})$.

Теорема 15. *Для любого разложения единицы* $(e_\alpha) \subset \mathbf{B}$ *существует единственная спектральная мера* μ: $\mathscr{B}_{\mathbf{R}} \to \mathbf{B}$ *такая, что* $\mu((-\infty, \alpha)) = e_\alpha$ $(\alpha \in \mathbf{R})$.

$\triangleleft$ Рассмотрим алгебру $\mathscr{A}$ подмножеств из $\overline{\mathbf{R}}$, порожденную всеми интервалами $[\alpha, \beta)$ $(\alpha \in \overline{\mathbf{R}}, \beta \in \overline{\mathbf{R}})$. Пусть $e_{-\infty} := 0$, $e_{+\infty} := 1$. Полагая $\lambda([\alpha, \beta)) := e_\beta - e_\alpha (\alpha \in \overline{\mathbf{R}}, \beta \in \overline{\mathbf{R}}, \alpha < \beta)$, получаем меру λ: $\mathscr{A} \to \mathbf{B}$. Можно считать, что $\mathbf{B}$ является базой некоторого K_σ-пространства F. Легко проверяется, что λ удовлетворяет условиям плотности (1), (2) из определения 1. Применяя теорему 1, мы получаем продолжение $\bar{\lambda}$ до спектральной меры $\bar{\mu}$: $\mathscr{B}_{\overline{\mathbf{R}}} \to \mathbf{B}$. Так как, очевидно, $\bar{\mu}(\{+\infty\}) = \bar{\mu}(\{-\infty\}) = 0$, то мера μ, являющаяся сужением $\bar{\mu}$ на $\mathscr{B}_{\mathbf{R}}$, будет требуемой. $\triangleright$

Замечание 5. Тот факт, что любое разложение единицы однозначно определяет борелевскую спектральную меру на вещественной прямой, известен давно (см., например, [25]). В [25] отмечается, что такую спектральную меру можно получить методом продолжения Каратеодори. В действительности это не так. Д. А. Владимировым [26] установлено, что для полной булевой алгебры счетного типа продолжение по Каратеодори возможно тогда и только тогда, когда эта алгебра регулярна. (Для полных булевых алгебр счетного типа условие регулярности равносильно справедливости закона слабой σ-дистрибутивности (см. [27, с. 232]).) В [28] теорема 15 выводится из других соображений. Отметим также, что в [29] выведены некоторые факты измеримого функционального исчисления при условии, что для базы $\mathbf{B}$ рассматриваемого K-пространства верна теорема 15. Следовательно, основные результаты из [29] справедливы без всяких ограничений.

Пусть E — расширенное K-пространство и $x \in E$. Спектральная характеристика $(e_\alpha^x)_{\alpha \in \mathbf{R}}$, являясь разложением единицы в базе $\mathfrak{E}(E)$, продолжается по теореме 15 до спектральной меры μ_x: $\mathscr{B}_{\mathbf{R}} \to E$. Обозначим через $\mathscr{M}(X)$ пространство всех измеримых по Борелю функций из топологического пространства X в $\mathbf{R}$. Отображение $f \mapsto \widehat{x}(f)$, определяемое формулой

$$\widehat{x}(f) := \int f d\mu_x \quad (f \in \mathscr{M}(\mathbf{R})),$$

является σ-гомоморфизмом из $\mathscr{M}(\mathbf{R})$ в E. Элементы $f(x) := \widehat{x}(f)$ $(f \in \mathscr{M}(\mathbf{R}))$ называются *измеримыми функциями от* x. Для функции $\mathrm{id}\colon \alpha \mapsto \alpha$ $(\alpha \in \mathbf{R})$ имеет место $\mathrm{id}(x) = x$. Это сразу следует из теоремы Фрейденталя и очевидного равенства

$$\int \mathrm{id}\, d\mu_x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha de_\alpha^x.$$

Здесь интеграл в правой части понимается, как обычный интеграл Римана по разложению единицы, см. [15]. Следовательно, для любого полинома $P(\alpha) := \sum\limits_{k=0}^{n} c_k \alpha^k$ $(c_k \in \mathbf{R},\ k := 1, \ldots, n)$ имеем $P(x) = c_0 + c_1 x + \ldots$ $\ldots + c_n x^n$. Множество $E[x] := \widehat{x}(\mathscr{M}(\mathbf{R}))$ всевозможных измеримых функций от элемента $x \in E$ образует K_σ-подпространство в E. Для любой функции $f \in \mathscr{M}(\mathbf{R})$ равенство $\widehat{x}(f) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mu_x(\{\alpha\colon f(\alpha) \neq 0\}) = 0$. Это значит, что существует секвенциально o-непрерывный изоморфизм K_σ-пространств $\mathscr{M}(\mathbf{R})/\mu_x^{-1}(0)$ и $E[x]$, осуществляемый факторизацией отображения $\widehat{x}$.

Рассмотрим теперь случай, когда F — произвольное K_σ-пространство с единицей. Для любых $x \in F$ и функции $f \in \mathscr{M}(\mathbf{R})$ в максимальном расширении $E := mF$ пространства F определен элемент $f(x)$. Если $f(x) \in F$, то будем говорить, что *в F определена функция f от элемента* $x \in F$. По этому определению множество $F[x]$ всех измеримых функций от $x \in F$ совпадает с $E[x] \cap F$. Множество всех $f \in \mathscr{M}(\mathbf{R})$, для которых определены функции $f(x)$, обозначаем через $\mathscr{M}_\mathbf{R}(x, F)$. Понятно, что $\mathscr{M}_\mathbf{R}(x, F) = \widehat{x}^{-1}[F]$ образует фундамент в $\mathscr{M}(\mathbf{R})$, содержащий функцию, равную единице.

Теорема 16. *Для любого K_σ-пространства F с единицей и для любого $x \in F$ элемент $y \in F$ является функцией от x тогда и только тогда, когда образ меры μ_y содержится в образе меры* μ_x:

$$y \in F[x] \Leftrightarrow \mu_y(\mathscr{B}_\mathbf{R}) \subset \mu_x(\mathscr{B}_\mathbf{R}).$$

В [15] можно найти доказательство теоремы 16 для специальных K-пространств, полученное В. И. Соболевым. Указанный факт в настоящее время без особых затруднений выводится для произвольных K-пространств, если воспользоваться теоремой 15.

Теорема 17. *Для любых K_σ-пространства F с порядковой единицей и счетной последовательности $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset F$ существуют элемент $x \in F$ и счетная последовательность $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathscr{M}_\mathbf{R}(x, F)$ такие, что* $x_n = f_n(x)$ $(n \in \mathbf{N})$.

$\lhd$ Пусть μ_n — спектральная мера элемента x_n. По следствию 8 существует бесконечное произведение $\mu = \bigotimes\limits_{n=1}^{\infty} \mu_n$. В [30, с. 187—189] построен борелевский изоморфизм h пространств $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^\mathbf{N}$. Полагаем $\bar{\mu} = \mu \circ h^{-1}$. Мера μ спектральная. Определим элемент $y = \int \mathrm{id}\, d\bar{\mu} \in mF$. Имеем $\bar{\mu} = \mu_y$. Так как $\mu_n(\mathscr{B}_\mathbf{R}) \subset \mu(\mathscr{B}_{\mathbf{R}^\mathbf{N}}) = \mu_y(\mathscr{B}_\mathbf{R})$ $(n \in \mathbf{N})$, то по теореме 16 $x_n = g_n(y)$ $(n \in \mathbf{N})$ для подходящей последовательности функций $(g_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathscr{M}(\mathbf{R})$. Пусть $x = \mathrm{arctg}(y)$ и $f_n = g_n \circ \mathrm{tg}$ $(n \in \mathbf{N})$. Тогда $x \in F$ и $x_n = f_n(x)$ $(n \in \mathbf{N})$. $\rhd$

Из приведенных выше рассуждений без труда выводится следующий результат о борелевском функциональном исчислении последовательности элементов K-пространства.

Теорема 18. *Пусть E — расширенное K-пространство с фиксированной единицей 1 и $\mathfrak{x} := (x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ — последовательность элементов E. Тогда существует и притом единственный секвенциально o-непрерывный ре-*

шеточный и кольцевой гомоморфизм $\hat{\imath}$: $\mathscr{M}(\mathbf{R}^N)\to E$ *такой, что* $\hat{\imath}(\pi_k)=$ $=x_k$ $(k\in\mathbf{N})$, *где* π_k — *проекция* $\mathbf{R}^N$ *на* k-*ю координату. Образ* $\hat{\imath}(\mathscr{M}(\mathbf{R}^N))$ *является секвенциально о-замкнутым подкольцом (и подрешеткой) в* E.

Положим $\|x\|_e:=\inf\{\lambda>0\colon\ |x|\leqslant\lambda e\}$. Через $\mathscr{M}_\infty(X)$ обозначим множество всех ограниченных борелевских функций на X. Непосредственно из теоремы 17 вытекает

Следствие 9. *Пусть* E — *произвольное* K-*пространство. Предположим, что последовательность* $\imath:=(x_k)_{k\in\mathbf{N}}\subset E$ *содержится в идеале, порожденном элементом* $e\in E^+$ *и* $\|x_k\|_e\leqslant a_k$ $(k\in\mathbf{N})$. *Тогда существует и притом единственный секвенциально о-непрерывный линейный и решеточный гомоморфизм* $\hat{\imath}$: $\mathscr{M}_\infty\left(\prod\limits_{k=1}^{\infty}[-a_k,a_k]\right)\to E$ *такой, что* $\hat{\imath}(\pi_k)=x_k$ $(k\in\mathbf{N})$.

Замечание 6. Теорема 18 позволяет, в частности, определить борелевскую функцию от последовательности коммутирующих самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, как это сделано, например, в [10, 31].

Так же как и выше, можно ввести функциональное исчисление несчетных наборов элементов K-пространства. В самом деле, ввиду следствия 6 существует несчетное произведение спектральных мер, определенное на бэровской σ-алгебре подмножеств произведения прямых. Интегрирование же бэровских функций по такому произведению мер приводит к упомянутому функциональному исчислению. Однако всякая бэровская функция зависит только от определяемого ею счетного поднабора элементов. Стало быть в этой ситуации все сводится к счетному случаю. Принципиально иной результат получается, если рассматриваемый несчетный набор содержится в идеале, порожденном одним элементом, ибо в этом случае применима теорема 8.

Теорема 19. *Пусть* E — *некоторое* K-*пространство и* $\imath\in E^{\mathrm{A}}$ — *такой элемент, что множество* $\{\imath(\alpha)\colon\ \alpha\in\mathrm{A}\}$ *погружается в идеал, порожденный одним элементом* $e\in E^+$, *причем* $\|\imath(\alpha)\|_e\leqslant a(\alpha)$ $(\alpha\in\mathrm{A})$. *Тогда существует секвенциально о-непрерывный линейный и решеточный гомоморфизм* $\hat{\imath}$: $\mathscr{M}_\infty\left(\prod\limits_{\alpha\in\mathrm{A}}[-a(\alpha),a(\alpha)]\right)\to E$ *такой, что* $\imath(\pi_\alpha)=\imath(\alpha)$ $(\alpha\in\mathrm{A})$, $\hat{\imath}(\mathrm{id})=e$ *и*

$$\sup_{\xi\in\Sigma}\hat{\imath}(f_\xi)=\hat{\imath}\left(\sup_{\xi\in\Sigma}f_\xi\right)$$

для любой возрастающей равномерно ограниченной направленности непрерывных функций $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$.

Укажем еще одно интересное следствие теоремы 17.

Теорема 20. *На* K_σ-*пространстве* E *выполняется закон слабой* σ-*дистрибутивности в том и только в том случае, когда при любом* $x\in E$ *этот закон выполняется на булевой фактор-алгебре борелевских подмножеств вещественной прямой по модулю множеств* μ_x-*нулевой меры.*

$\lhd$ Необходимость вытекает из существования изоморфизма между K_σ-пространствами $E[x]$ и $\mathscr{M}(\mathbf{R})/\mu_x^{-1}(0)$. Докажем достаточность. Возьмем ограниченную двойную последовательность $(h_{m,n})_{m,n\in\mathbf{N}}\subset E$ и допустим, что для любого $m\in\mathbf{N}$ последовательность $(h_{m,n})$ убывает к нулю при $n\to\infty$. По теореме 17 существует элемент $x\in E$ и последовательность функций $(f_{m,n})\subset\mathscr{M}(\mathbf{R})$ такие, что $h_{m,n}=f_{m,n}(x)$ $(m,\ n\in\mathbf{N})$. Остается заметить, что K_σ-пространства $E[x]$ и $\mathscr{M}(\mathbf{R})/\mu_x^{-1}(0)$ изоморфны и на $\mathscr{M}(\mathbf{R})/\mu_x^{-1}(0)$ требуемый закон выполняется. $\rhd$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Duchoň M., Kluvanek I.** Inductive tensor product of vector-valued measures // Mat. casop.— 1967.— V. 17, N 2.— P. 108—112.
2. **Duchoň M.** On the projective tensor product of vector-valued measures // Ibid.— 1967.— V. 17, N 2.— P. 113—120.
3. **Kluvanek I.** On the product of vector measures // J. Austral. Math. Soc.— 1973.— V. 15, N 1.— P. 22—26.
4. **Bandyopadhyay U. K.** On products of vector measures // Ibid.— 1975.— V. 19, N 1.— P. 91—96.
5. **Debiève C.** Produit de mesures à valeurs vectorielles. Théorème de Fublni // Ann. Soc. Sci. Bruxelles.— 1973.— Ser. I, V. 87.— P. 67—76.
6. **Swartz C.** The product of vector-valued measures // Bull. Austral. Math. Soc.— 1973.— V. 8, N 3.— P. 359—366.
7. **Wright J. D. M.** Product of vector measures // Quart. J. Math.— 1973.— V. 24, N 94.— P. 189—206.
8. **Riečan B.** On the product of vector measures with values in in semiordered spaces // Mat. casop.— 1971.— V. 21, N 2.— P. 167—173.
9. **Порошкин А. Г.** О функциях множества со значениями в булевой алгебре // Изв. вузов. Математика.— 1973.— Т. 131, № 4.— С. 87—98.
10. **Самойленко Ю. С.** Спектральная теория наборов самосопряженных операторов.— Киев: Наук. думка, 1984.
11. **Senšel P.** About the Kolmogorov's theorem // Acta Math. Univ. Comen.— 1982.— V. 40—41.— P. 45—49.
12. **Riečan J.** On projective limits of small sytems // Ibid.— 1984.— V. 44—45.— P. 203—213.
13. **Riečan J.** On the Kolmogorov consistency theorem for Riesz space valued measures // Ibid.— 1986.— V. 48—49.— P. 173—180.
14. **Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.** Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.— М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
15. **Вулих Б. З.** Введение в теорию полуупорядоченных пространств.— М.: Физматгиз, 1961.
16. **Кусраев А. Г.** Векторная двойственность и ее приложения.— Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1985.
17. **Wright J. D. M.** Stone-algebra-valued measures and integrals // Proc. London Math. Soc.— 1969.— V. 19, N 1.— P. 107—122.
18. **Wright J. D. M.** The measure extension problem for vector lattices // Ann. Inst. Fourier.— 1971.— T. 21, N 4.— S. 65—85.
19. **Panchapagesan T. V., Palled Sh.-V.** On vector lattice-valued measures — I // Math. Slovaca.— 1983.— V. 33, N 3.— P. 269—292.
20. **Харизашвили А. Б.** Топологические аспекты теории меры.— Киев: Наук. думка, 1984.
21. **Waterhouse W. C.** An empty inverse limit // Proc. Amer. Math. Soc.— 1972.— V. 36.— P. 618.
22. **Партасарати К.** Введение в теорию вероятностей и теорию меры.— М.: Мир, 1983.
23. **Каш Ф.** Модули и кольца.— М.: Наука, 1981.
24. **Wright J. D. M.** An algebraic characterization of vector lattices with the Borel regularity property // J. London Math. Soc.— 1973.— V. 7, N 2.— P. 277—285.
25. **Соболев В. И.** О полуупорядоченной мере множеств, измеримых функциях и некоторых абстрактных интегралах // Докл. АН СССР.— 1953.— Т. 91, № 1.— С. 23—26.
26. **Владимиров Д. А.** О счетной аддитивности булевой меры // Вестн. ЛГУ.— 1961, № 19, вып. 4.— С. 5—15.
27. **Владимиров Д. А.** Булевы алгебры.— М.: Наука, 1969.
28. **Wright J. D. M.** Vector lattice measures on locally compact spaces // Math. Z.— 1971.— B. 120, N 3.— P. 193—203.
29. **Порошкин А. Г.** О полуупорядоченных пространствах нормальных операторов // Учен. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена. Алгебра и анализ.— Л., 1972.— Ч. 2.— С. 294—330.
30. **Плеснер А. И., Рохлин В. А.** Спектральная теория линейных операторов // Успехи мат. наук.— 1946.— Т. 1, № 1.— С. 71—191.
31. **Березанский Ю. М.** Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев: Наук. думка, 1978.