70. Kreisel G. Observations of popular discussions on foundations // Axiomatic set theory. Proc. Symposia in Pure Math.— Providence; Amer. Math. Soc., 1971.— V. 1.— P. 183—190.
71. **Levy A.** Basic set theory.— Berlin a. o.: Springer, 1979.— 391 p.
72. **Lutz R., Goze M.** Nonstandard analysis. A practical guide with applications.— Berlin a. o.: Springer, 1981.— 261 p.— (Lecture notes in math.; 881).
73. **Mochover M., Hirschfeld J.** Lectures on non-standard analysis.— Berlin a. o.: Springer, 1969.— 79 p.— (Lecture notes in math.; 94).
74. **Nelson E.** Internal set theory. A new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc.— 1977.— V. 83, N 6.— P. 1165—1198.
75. **Nonstandard analysis.** Recent developments.— Berlin a. o.: Springer, 1983.— 213 p.— (Lecture notes in math.; 983).
76. **Robinson A.** Non-standard analysis.— Amsterdam — London: North-Holland, 1970.— 293 p.
77. **Robinson A.** The metaphysics of the calculus // Problems in the Philosophy of Mathematics.— Amsterdam: North-Holland, 1967.— V. 1.— P. 28—46.
78. **Stroyan K. D., Bayod J. M.** Foundations of infinitesimal stochastic analysis.— Amsterdam a. o.: North-Holland, 1986.— 478 p.
79. **Stroyan K. D., Luxemburg W. A. J.** Introduction to the theory of infinitesimals.— N. Y. a. o.: Academic Press, 1976.— 326 p.
80. **Westfall R.** Never at rest. A bibliography of Isaak Newton.— Cambrige: Cambrige Univ. Press, 1982.— 908 p.
81. **Zivaljevic R.** Infinitesimals, microsimplexes and elementary homology theory // Amer. Math. Monthly.— 1986.— V. 93, N 7.— P. 540—544.

В. Г. МАЗЬЯ, С. В. ПОБОРЧИЙ

СЛЕДЫ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ С ПИКОМ

Посвящается Ю. Г. Решетняку

Согласно теореме Гальярдо [1] граничные значения функций из пространства Соболева $W_p^1(\Omega)$, $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, образуют пространство $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$, если $1<p<\infty$, а поверхность $\partial\Omega$ липшицева. При наличии вершины внешнего или внутреннего пика на границе области эта закономерность нарушается. В случае плоской области с пиком на границе описание пространства следов на $\partial\Omega$ функций из $W_p^1(\Omega)$ получено в статьях [2, 3]. В работе [4] охарактеризованы граничные значения функций из $W_2^1(\Omega)$, где Ω — многомерная область с пиком на границе. Отметим, что использованный в [4] метод основан на преобразовании Фурье и к случаю произвольного p неприменим. В настоящей работе дается описание пространства граничных значений функций из $W_p^1(\Omega)$, $p\in(1, \infty)$, для области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 3$, с вершиной внешнего или внутреннего пика на $\partial\Omega$.

Норма $\|\cdot\|_{W_p^1(\Omega)}$ порождает норму следа как элемента фактор-пространства $W_p^1(\Omega)/\mathring{W}_p^1(\Omega)$. В доказанных далее теоремах упомянутой фактор-норме ставится в соответствие эквивалентная ей, определяемая явно норма функции на границе области. Последняя может быть записана в виде

$$\|qf\|_{L_p(\partial\Omega)}+\left(\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\partial\Omega} Q(x,\xi)\,|f(x)-f(\xi)|^p\frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}\right)^{1/p}, \tag{0.1}$$

где f — функция на $\partial\Omega$, q и Q — некоторые неотрицательные весовые функции, зависящие от заострения пика в окрестности его вершины, а ds_x, ds_ξ — элементы площади поверхности на $\partial\Omega$.

Опишем более подробно полученные в работе результаты на примере n-мерного пика $\Omega=\{x\in\mathbf{R}^n\colon x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2<\varphi(x_n)^2,\ x_n\in(0, 1)\}$. Не стремясь к общности, предположим, что φ — возрастающая функция класса $C^1[0, 1]$, удовлетворяющая условию $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$. Тогда для того, чтобы определенная на $\partial\Omega$ функция f с носителем в малой окрестности вершины пика была следом некоторой функции из $W_p^1(\Omega)$, необходима и достаточна конечность нормы (0.1), где $0\leqslant q(x)\leqslant \leqslant \varphi(x_n)^{1/p}$, а $Q(x, \xi)=1$, если $|x_n-\xi_n|<\max\{\varphi(x_n), \varphi(\xi_n)\}$, $x_n, \xi_n \in \in(0, 1)$ и $Q(x, \xi)=0$ в остальных случаях. При этом норма (0.1) эквивалентна фактор-норме $\inf\left\{\|u\|_{W_p^1(\Omega)}: u\in W_p^1(\Omega),\ u\,|\,\partial\Omega=f\right\}$. Необходимым и достаточным условием принадлежности указанной функции f пространству следов на $\partial\Omega$ функций класса $W_p^1(\mathbf{R}^n\diagdown\overline{\Omega})$ является конечность нормы (0.1) где

$$q(x)=\begin{cases}\varphi(x_n)^{(1-p)/p} & \text{при}\quad p<n-1,\\ \varphi(x_n)^{(2-n)/p} & \text{при}\quad p>n-1,\\ (\varphi(x_n)\,|\log\varphi(x_n)\,|)^{(1-p)/p} & \text{при}\quad p=n-1,\end{cases}$$

а $Q(x, \xi)\neq 0$ только если $x_n, \xi_n\in(0, 1)$. На таких парах $x, \xi\in\partial\Omega$ весовая функция Q определяется следующим образом:

$$Q(x, \xi)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad p<n-1,\\ 1+(r^2\varphi(x_n)^{-1}\,\varphi(\xi_n)^{-1})^{n-2}, & \text{если}\quad p>n-1,\\ 1+\dfrac{\left(r^2\varphi(x_n)^{-1}\,\varphi(\xi_n)^{-1}\right)^{p-1}}{(\log(1+r/m))^p}, & \text{если}\quad p=n-1.\end{cases}$$

Здесь $r=|x-\xi|$, $m=\min\{\varphi(x_n), \varphi(\xi_n)\}$. Введенная так норма (0.1) оказывается эквивалентной фактор-норме $\inf\left\{\|u\|_{W_p^1(\mathbf{R}^n\diagdown\overline{\Omega})}: u\in W_p^1(\mathbf{R}^n\diagdown\overline{\Omega}),\ u\,|\,\partial\Omega=f\right\}$. Отметим, что при $p=n-1$ на функцию φ, описывающую заострение пика, накладывается дополнительное ограничение $\varphi'(t)= =O(\varphi(t)/t)$.

§ 1. Внешние пики

Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$, $n\geqslant 3$, с компактной связной границей $\partial\Omega$. Предположим, что $O\in\partial\Omega$ и что $\partial\Omega\diagdown\{O\}$ — поверхность класса $C^{0,1}$, т. е. поверхность, которая локально может быть определена в некоторой декартовой системе координат с помощью липшицевой функции. Поместим в точку O начало декартовых координат $x=(y, z)$, $y\in\mathbf{R}^{n-1}$, $z\in\mathbf{R}^1$. Пусть φ — строго возрастающая функция класса $C^{0,1}([0, 1])$, которая удовлетворяет условиям $\varphi(0)=0$, $\varphi(t)<t$ при $t\in(0, 1]$ и $\varphi'(z)=o(z)$ при $z\to+0$. Пусть еще ω — $(n-1)$-мерная область с компактным замыканием и границей γ класса $C^{0,1}$.

Определение 1.1. Точка O называется *вершиной пика, направленного во внешность области* Ω, если существует такая окрестность U этой точки, что $U\cap\Omega=\{x\colon z\in(0, 1),\ y/\varphi(z)\in\omega\}$.

Определение 1.2. Точка O называется *вершиной пика, направленного внутрь* Ω, если существует такая окрестность U точки O, что $U\diagdown\overline{\Omega}= \{x\colon z\in(0, 1),\ y/\varphi(z)\in\omega\}$.

В дальнейшем будем для определенности считать, что множество $\overline{\omega}$ содержится в $(n-1)$-мерном шаре $B(O, 1)$ и будем предполагать односвязность области ω.

Пусть $W_p^1(\Omega)$ — соболевское пространство функций в области Ω, снабженное нормой

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)}=\|u\|_{L_p(\Omega)}+\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)},$$

где ∇u — градиент функции u. Обозначим через $TW_p^1(\Omega)$ пространство следов $u|\partial\Omega$ функций $u \in W_p^1(\Omega)$ и положим

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega)} = \inf\left\{\|u\|_{W_p^1(\Omega)}: u \in W_p^1(\Omega), u \mid \partial\Omega = f\right\}.$$

Условимся через c, c_1, c_2, ... обозначать положительные постоянные, зависящие лишь от n, p и области Ω. Положительные величины a, b будем называть *эквивалентными* ($a \sim b$), если $c_1 \leqslant a/b \leqslant c_2$.

Основным результатом настоящего параграфа является следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть O — вершина пика, направленного во внешность Ω и $p \in (1, \infty)$. Справедливо соотношение*

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega)} \sim \left(\int\limits_{U\cap\partial\Omega} \varphi(z)\,|f(x)|^p ds_x + \|f\|^p_{L_p(\sigma)} + \iint\limits_{\substack{x,\xi\in U\cap\partial\Omega:\\ |\zeta - z| < M(z,\zeta)}} |f(x) - \right.$$

$$\left. - f(\xi)|^p \frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}} + \int\limits_\sigma\int\limits_\sigma |f(x) - f(\xi)|^p \frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}\right)^{1/p}, \qquad (1.1)$$

где $x = (y, z)$, $\xi = (\eta, \zeta)$, ds — элемент площади поверхности на $\partial\Omega$, $M(z, \zeta) = \max\{\varphi(z), \varphi(\zeta)\}$, а σ — такая связная поверхность класса $C^{0,1}$, что $\sigma \subset \partial\Omega\backslash\{O\}$ и $\sigma \supset \partial\Omega\backslash U$. Соотношение (1.1) останется верным, если в его правой части опустить интеграл по $U \cap \partial\Omega$.

Доказательству теоремы 1.1 предпошлем два вспомогательных утверждения.

Пусть σ — $(n-1)$-мерная связная поверхность в $\mathbf{R}^n$ класса $C^{0,1}$ и $p > 1$. Положим

$$[g]_\sigma = \left(\int\limits_\sigma\int\limits_\sigma |g(x) - g(\xi)|^p \frac{d\sigma_x d\sigma_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}\right)^{1/p},$$
$$\|g\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)} = \|g\|_{L_p(\sigma)} + [g]_\sigma. \qquad (1.2)$$

Лемма 1.1. *Пусть G — область в $\mathbf{R}^n$ с компактным замыканием и границей ∂G класса $C^{0,1}$, $\varepsilon \in (0, 1]$, $G_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^n: x/\varepsilon \in G\}$ и S_ε — любая связная компонента ∂G_ε. Пусть еще $v \in W_p^1(G_\varepsilon)$ и $v \mid S_\varepsilon = g$. Тогда справедливы оценки*

$$\varepsilon^{1/p}\|g\|_{L_p(S_\varepsilon)} \leqslant c\|v\|_{W_p^1(G_\varepsilon)}, \quad [g]_{S_\varepsilon} \leqslant c_1\|\nabla v\|_{L_p(G_\varepsilon)},$$

где постоянные c и c_1 зависят лишь от n, p, G.

Доказательство. Положим $S = \{x \in \mathbf{R}^n: \varepsilon x \in S_\varepsilon\}$. Из известного неравенства $\|u\|_{L_p(S)} \leqslant c\|u\|_{W_p^1(G)}$ при помощи замены переменной получаем, что

$$\varepsilon^{1/p}\|g\|_{L_p(S_\varepsilon)} \leqslant c\left(\|v\|_{L_p(G_\varepsilon)} + \varepsilon\|\nabla v\|_{L_p(G_\varepsilon)}\right).$$

Оценку $[g]_{S_\varepsilon} \leqslant c_1\|\nabla v\|_{L_p(G_\varepsilon)}$ достаточно установить для $\varepsilon = 1$, т. е. для области G и поверхности S. Введем среднее значение $\bar{g}$ функции g на S и воспользуемся теоремой Гальярдо [1] о следах функций из $W_p^1(G)$ и теоремой Соболева [5] об эквивалентных нормировках в $W_p^1(G)$:

$$[g]_S = [g - \bar{g}]_S \leqslant c\|v - \bar{g}\|_{W_p^1(G)} \leqslant c_1\|\nabla v\|_{L_p(G)}.$$

Доказательство леммы закончено.

Лемма 1.2. *Пусть S — ограниченная связная поверхность в $\mathbf{R}^n$ класса $C^{0,1}$ и существует линейный непрерывный оператор продолжения*

E: $W_p^{1-1/p}(S) \to W_p^1(\mathbf{R}^n)$. *Положим* $S_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^n,\ x/\varepsilon \in S\}$, *где* $\varepsilon \in (0, 1]$. *Тогда существует линейный непрерывный оператор продолжения* E_ε: $W_p^{1-1/p}(S_\varepsilon) \to W_p^1(\mathbf{R}^n)$, *для которого верна оценка*

$$\varepsilon^{-1} \| E_\varepsilon (g - \bar{g}) \|_{L_p(\mathbf{R}^n)} + \| \nabla E_\varepsilon (g - \bar{g}) \|_{L_p(\mathbf{R}^n)} \leqslant c [g]_{S_\varepsilon}.$$

Здесь $g \in W_p^{1-1/p}(S_\varepsilon)$, $\bar{g}$ — *среднее значение функции* g *на поверхности* S_ε, *а* $c = c(n, p, S)$.

Доказательство. Пусть Φ: $\mathbf{R}^n \ni x \to \varepsilon x$. Введем оператор продолжения «с растяжением» E_ε: E_ε: $W_p^{1-1/p}(S_\varepsilon) \to W_p^1(\mathbf{R}^n)$, заданный формулой $E_\varepsilon g = (E(g \circ \Phi)) \circ \Phi^{-1}$. Из определения E_ε получаем

$$\varepsilon^{-1} \| E_\varepsilon g \|_{L_p(\mathbf{R}^n)} + \| \nabla (E_\varepsilon g) \|_{L_p(\mathbf{R}^n)} \leqslant c \left(\varepsilon^{1/p-1} \| g \|_{L_p(S_\varepsilon)} + [g]_{S_\varepsilon} \right).$$

Проверим, что E_ε — требуемый оператор. Имеем

$$\varepsilon^{-1} \| E_\varepsilon (g - \bar{g}) \|_{L_p(\mathbf{R}^n)} + \| \nabla (E_\varepsilon (g - \bar{g})) \|_{L_p(\mathbf{R}^n)} \leqslant$$
$$\leqslant c \left(\varepsilon^{1/p-1} \| g - \bar{g} \|_{L_p(S_\varepsilon)} + [g]_{S_\varepsilon} \right).$$

Для окончания доказательства леммы остается установить, что

$$\| g - \bar{g} \|_{L_p(S_\varepsilon)} \leqslant c \varepsilon^{1-1/p} [g]_{S_\varepsilon}. \tag{1.3}$$

В самом деле,

$$\| g - \bar{g} \|^p_{L_p(S_\varepsilon)} \leqslant | S_\varepsilon |^p \int_{S_\varepsilon} ds_x \left| \int_{S_\varepsilon} (g(x) - g(\xi))\, ds_\xi \right|^p \leqslant$$
$$\leqslant | S_\varepsilon |^{-1} (\operatorname{diam} S_\varepsilon)^{n+p-2} [g]^p_{S_\varepsilon} \leqslant c \varepsilon^{p-1} [g]^p_{S_\varepsilon},$$

где $|S|$ и $|S_\varepsilon|$ — площади поверхностей S и S_ε. Доказательство леммы закончено.

Доказательство теоремы 1.1. Начнем с проверки оценок для следа функции. Пусть $u \in W_p^1(\Omega)$, $u | \partial\Omega = f$. Тогда по теореме Гальярдо [1]

$$\| f \|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)} \leqslant c \| u \|_{W_p^1(\Omega)}. \tag{1.4}$$

Далее, не ограничивая общности, будем считать, что

$$U \cap \partial\Omega = \{x\colon\ z \in (0,\ 1),\ \ y/\varphi(z) \in \gamma\} \cup \{O\}, \tag{1.5}$$

где U — окрестность из определения 1.1. В силу леммы 1.1 при почти всех $z \in (0, 1)$ справедливо неравенство

$$\varphi(z) \| f(\cdot, z) \|^p_{L_p(\Gamma_z)} \leqslant c \| u(\cdot, z) \|^p_{W_p^1(\Omega_z)},$$

в котором Γ_z и Ω_z — сечения плоскостью $z = \mathrm{const}$ поверхности $U \cap \partial\Omega$ и области $U \cap \Omega$ соответственно. Интегрируя последнее неравенство по $z \in (0, 1)$, получим

$$\int_{U \cap \partial\Omega} \varphi(z) | f(x) |^p ds_x \leqslant c \| u \|^p_{W_p^1(U \cap \Omega)}. \tag{1.6}$$

Положим $\Gamma = U \cap \partial\Omega$,

$$\| f \|_\Gamma = \left(\iint_{\{x, \xi \in \Gamma\colon\ |\zeta - z| < M(z, \zeta)\}} | f(x) - f(\xi) |^p \frac{ds_x ds_\xi}{| x - \xi |^{n+p-2}} \right)^{1/p} \tag{1.7}$$

и проверим оценку

$$\| f \|_\Gamma \leqslant c \| \nabla u \|_{L_p(U \cap \Omega)}. \tag{1.8}$$

Пусть

$$I(f)=\left(\iint\limits_{\{x,\xi\in\Gamma:\,|\zeta-z|<\varphi(z)\}}|f(x)-f(\xi)|^p\frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}\right)^{1/p}.$$

Заметим, что $|f|_\Gamma\leqslant 2I(f)$, поэтому оценка (1.8) вытекает из неравенства $I(f)\leqslant c\|\nabla u\|_{L_p(U\cap\Omega)}$. Установим последнее.

Построим последовательность $\{z_k\}_{k\geqslant 1}$ по правилу $z_{k+1}=z_k-2\varphi(z_k)$, $k\geqslant 1$. Положим еще $z_0=1$, а число $z_1\in(0,\ 1)$ выберем столь малым, чтобы выполнялись включения $(z-\varphi(z),\ z+\varphi(z))\subset(z_{k+2},\ z_{k-1})$ при $z\in(z_{k+1},\ z_k)$ и $k\geqslant 1$. Отметим, что $z_k\searrow 0, z_{k+1}z_k^{-1}\to 1$, $\varphi(z_{k+1}\varphi(z_k)^{-1}\to 1$. Пусть $\Gamma(z)=\{\xi\in\Gamma\colon\ |\zeta-z|<\varphi(z)\}$ при $z\in(0,\ 1)$ и $\Gamma_k'=\{x\in\Gamma\colon\ z\in\in(z_{k+1},z_k)\}$, $k\geqslant 0$. Положим $a=\min\{z-\varphi(z)\colon z\in[z_1,\ \ 1]\}$, $\Gamma_0=\{x\in\in\Gamma\colon a<z<1\}$ и $\Gamma_k=\{x\in\Gamma\colon z\in(z_{k+2},\ z_{k-1})\}$, $k\geqslant 1$. Тогда $\Gamma_k'\subset\Gamma_k$ при $k\geqslant 0$ и $\Gamma(z)\subset\Gamma_k$ при $z\in(z_{k+1},\ z_k)$, $k\geqslant 0$. Отсюда вытекает, что

$$I(f)^p=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\Gamma_k'}ds_x\int\limits_{\Gamma(z)}|f(x)-f(\xi)|^p\frac{ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}[f]^p_{\Gamma_k}.$$

Пусть $\Omega_k=\{x\in U\cap\Omega\colon\ z\in(z_{k+2},\ z_{k-1})\}$, $k\geqslant 1, \Omega_0=\{x\in U\cap\Omega\colon\ a<z<1\}$. По лемме 1.1

$$[f]^p_{\Gamma_k}\leqslant c\|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega_k)},\quad k\geqslant 0.$$

Суммируя по $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и принимая во внимание конечность кратности покрытия $\{\Omega_k\}$, получим, что $I(f)\leqslant c\|\nabla u\|_{L_p(U\cap\Omega)}$. Итак, справедливо неравенство (1.8).

Пусть $|||f|||$ — норма функции f, определенная правой частью (1.1). Из (1.4), (1.6), (1.8) следует, что $|||f|||\leqslant c\|f\|_{TW_p^1(\Omega)}$. Для проверки обратного неравенства построим линейный оператор $f\to Ef$ такой, что $\|Ef\|_{W_p^1(\Omega)}\leqslant c|||f|||$ и $Ef|\partial\Omega=f$ для всех функций f с конечной нормой $|||f|||$.

Рассмотрим на $\partial\Omega$ гладкую срезающую функцию ψ с носителем в Γ, для которой $\psi=1$ в окрестности $\partial\Omega\backslash\sigma$. Тогда $\operatorname{supp}(1-\psi)\subset\sigma$ и $\|(1-\psi)f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)}\leqslant c\|f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)}$. По теореме Гальярдо [1] существует такая функция $v\in W_p^1(\Omega)$, что $v|\partial\Omega=(1-\psi)f$ и верна оценка

$$\|v\|_{W_p^1(\Omega)}\leqslant c\|f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)}.\tag{1.9}$$

При этом оператор $f\to v$ линеен. Таким образом, дело сводится к продолжению функции ψf внутрь Ω.

Считая, что $\psi(x)$ зависит только от z при $x\in\Gamma$, проверим оценку

$$|\psi f|_\Gamma\leqslant c(\|f\|_{L_p(\sigma\cap\Gamma)}+|f|_\Gamma),\tag{1.10}$$

в которой $|\cdot|_\Gamma$ — полунорма определенная равенством (1.7). Имеем

$$c|\psi f|^p_\Gamma\leqslant|f|^p_\Gamma+\int\limits_\Gamma|f(\xi)|^p ds_\xi\int\limits_{T(\zeta)}|\psi(z)-\psi(\zeta)|^p\frac{ds_x}{|x-\xi|^{n+p-2}},\tag{1.11}$$

где $T(\zeta)=\{x\in\Gamma\colon\ \zeta-\varphi(\zeta)<z<\zeta\}$. Оценим второе слагаемое в правой части (1.11). Заметим, что если $\xi\notin\sigma$ и $\zeta>z$, то $\psi(\zeta)=\psi(z)=1$, и внутренний интеграл по множеству $T(\zeta)$ равен нулю. Если же $\xi=(\eta,\ \zeta)\in\in\sigma\cap\Gamma$, то

$$\int\limits_{T(\zeta)}|\psi(z)-\psi(\zeta)|^p|x-\xi|^{2-n-p}ds_x\leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_{\zeta-\varphi(\zeta)}^{\zeta}dz\int\limits_{\gamma}((\zeta-z)/\varphi(z)+|\theta-\eta/\varphi(z)|)^{2-n}d\gamma_\theta.$$

Здесь $d\gamma$ — элемент $(n-2)$-мерной площади на γ. После замены $\theta=\eta/\varphi(z)+\varphi(z)^{-1}(\zeta-z)\theta'$ в последнем интеграле по γ, оценим его сверху положительной постоянной, не зависящей от z, η, ζ. Итак, второе слагаемое в правой части (1.11) не превосходит $c\|f\|^p_{L_p(\sigma\cap\Gamma)}$. Отсюда вытекает (1.10).

Для окончания доказательства теоремы остается продолжить внутрь Ω такую функцию $f\in L_{p,\,\mathrm{loc}}(\Gamma\backslash\{O\})$, для которой $|f|_\Gamma<\infty$ и $\operatorname{supp}(f)\subset\{x\in\Gamma\colon z<\varepsilon\}$, где $\varepsilon\in(0,\ 1)$ — фиксированное число, не зависящее от f. Построим линейный оператор $f\to\mathscr{E}f$ со следующими свойствами:

$$\|\mathscr{E}f\|_{W^1_p(\Omega\cap U)}\leqslant c|f|_\Gamma, \tag{1.12}$$

$\mathscr{E}f|\Gamma=f$ и $(\mathscr{E}f)(y,\ z)=0$ в окрестности $z=1$. Определим последовательность $\{t_k\}_{k\geqslant 0}$ по правилу: $t_0=1$, $t_{k+1}=t_k-\lambda\varphi(t_k)$, где $\lambda=\min\{1/6,\ (1-\varepsilon)/2,\ \left(2\|\varphi'\|_{L_\infty(0,1)}\right)^{-1}\}$. Полагая для краткости $\varphi_k=\varphi(t_k)$, отметим, что $t_2\geqslant\varepsilon$, $t_k\searrow 0$, $t_{k+1}t_k^{-1}\to 1$, $\varphi_{k+1}\varphi_k^{-1}\to 1$. Кроме того,

$$\varphi_k-\varphi_{k+1}=\int\limits_{t_{k+1}}^{t_k}\varphi'(t)\,dt\leqslant\lambda\varphi_k\|\varphi'\|_{L_\infty(0,1)}\leqslant\varphi_k/2$$

и, значит, $\varphi_k\leqslant 2\varphi_{k+1}$ при $k\geqslant 0$. Отсюда вытекает, что

$$t_{k-1}-t_{k+1}=\lambda\varphi_{k-1}+\lambda\varphi_k\leqslant 6\lambda\varphi_{k+1}\leqslant\varphi_{k+1},$$

следовательно,

$$(t_{k+1},\ t_{k-1})\subset(z-\varphi(z),\ z+\varphi(z)),\quad k\geqslant 1, \tag{1.13}$$

если $z\in(t_{k+1},\ t_{k-1})$.

Пусть $S_k=\{x\in\Gamma\colon\ z\in(t_{k+1},\ t_{k-1})\}$, $f_k=f|S_k$ и $\bar f_k$ — среднее значение f на поверхности S_k, $k\geqslant 1$. По теореме Гальярдо [1] и лемме 1.2 существует такой оператор продолжения $\mathscr{E}_k$: $W_p^{1-1/p}(S_k)\to W_p^1(\mathbf{R}^n)$, что

$$\varphi_k^{-1}\|\mathscr{E}_k(f_k-\bar f_k)\|_{L_p(\mathbf{R}^n)}+\|\nabla\mathscr{E}_k(f_k-\bar f_k)\|_{L_p(\mathbf{R}^n)}\leqslant c\,[f]_{S_k}. \tag{1.14}$$

Обозначим через $\{\mu_k\}_{k\geqslant 1}$ набор гладких на $\mathbf{R}$ функций, для которых $\operatorname{supp}(\mu_k)\subset(t_{k+1},\ t_k)$, $|\mu_k'(z)|\leqslant c\varphi_k^{-1}$, $z\in\mathbf{R}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_k(z)=1$ при $z\in(0,\ t_1]$. Положим

$$(\mathscr{E}f)(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\bar f_k\mu_k(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(z)\left(\mathscr{E}_k(f_k-\bar f_k)\right)(x) \tag{1.15}$$

при $x=(y,\ z)\in U\cap\Omega$ и проверим, что $\mathscr{E}$ — требуемый оператор продолжения.

В самом деле, $\mathscr{E}f|\Gamma=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_kf=f$, так как $\operatorname{supp}(f)\subset\{x\in\Gamma\colon\ z\leqslant t_2\}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_k(z)=1$ при $z\in(0,\ t_1]$. Кроме того, из определения $\mathscr{E}$ следует, что $(\mathscr{E}f)(x)=0$ при $z>\min\{t_1,\ \varepsilon+\varphi(\varepsilon)\}$.

Проверим оценку (1.12). Положим $G_k=\{x\in U\cap\Omega\colon\ z\in(t_{k+1},\ t_k)\}$, $k\geqslant 1$, и обозначим через u_1 и u_2 соответственно первое и второе слагаемое в правой части (1.15). Тогда $u_1|G_k=\bar f_{k+1}+(\bar f_k-\bar f_{k+1})\mu_k$ и

$$\|\nabla u_1\|^p_{L_p(G_k)}\leqslant c\varphi_k^{n-p}|\bar f_k-\bar f_{k+1}|^p\leqslant$$
$$\leqslant c_1\sum_{i=k}^{k+1}\varphi_i^{1-p}\|f-\bar f_i\|^p_{L_p(S_i)}\leqslant c_2\sum_{i=k}^{k+1}[f]^p_{S_i}. \tag{1.16}$$

Здесь на последнем шаге мы использовали неравенство $[f]^p_{S_i} \geqslant c\varphi_i^{1-p} \| f - \bar{f}_i \|^p_{L_p(S_i)}$, которое проверяется так же, как и неравенство (1.3) в лемме 1.2. Обратимся к оценке $\| \nabla u_2 \|_{L_p(G_k)}$. С помощью (1.14) найдем, что

$$\| \nabla u_2 \|^p_{L_p(G_k)} \leqslant c \sum_{i=k}^{k+1} \varphi_i^{-p} \| \mathscr{E}_i (f_i - \bar{f}_i) \|^p_{L_p(\mathbf{R}^n)} + \\ + c \sum_{i=k}^{k+1} \| \nabla \mathscr{E}_i (f_i - \bar{f}_i) \|^p_{L_p(\mathbf{R}_n)} \leqslant c_1 \sum_{i=k}^{k+1} [f]^p_{S_i}. \tag{1.17}$$

Суммируя (1.16) и (1.17) по $k \geqslant 1$, получим

$$\| \nabla (\mathscr{E} f) \|^p_{Lp(U \cap \Omega)} \leqslant c \sum_{i=1}^{\infty} [f]^p_{S_i}.$$

В силу (1.13) последняя сумма не превосходит

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{S_i} ds_x \int_{\{\xi \in \Gamma:\, |\zeta - z| < M(z,\zeta)\}} | f(x) - f(\xi) |^p \, | x - \xi |^{2-n-p} \, ds_\xi. \tag{1.18}$$

Поскольку кратность покрытия $\{S_i\}$ конечна, то сумма (1.18) мажорируется величиной $c | f |^p_\Gamma$, где $| \cdot |_\Gamma$ — полунорма, определенная равенством (1.7).

Для завершения доказательства оценки (1.12) установим в области $U \cap \Omega$ неравенство Фридрихса

$$\| u \|_{L_p(U \cap \Omega)} \leqslant c \| \nabla u \|_{L_p(U \cap \Omega)}, \tag{1.19}$$

если $u(x) = 0$ в окрестности $z = 1$. В самом деле, при почти всех $Y \in \omega$ функция $(0, 1) \ni t \to u(\varphi(t) Y, t)$ абсолютно непрерывна и

$$| u(y, z) |^p = \left| \int_z^1 \frac{\partial}{\partial t} [u(\varphi(t) Y, t)] \, dt \right|^p \leqslant c \int_z^1 | (\nabla u)(\varphi(t) Y, t) |^p \, dt, \tag{1.20}$$

где $y = \varphi(z) Y$. Интегрируя (1.20) по переменным y, z и меняя порядок интегрирования по переменным z, t, приходим к (1.19).

Возможность отбросить в правой части (1.1) интеграл по $U \cap \partial\Omega$ вытекает из неравенств (1.6), (1.8) и (1.12), в которых следует положить $u = \mathscr{E}(\psi f)$ и заменить f на ψf, а также из оценки (1.10). Доказательство теоремы закончено.

Замечание 1.1. Формула (1.15) определяет оператор продолжения с поверхности Γ в область $G = \{x \in \mathbf{R}^n:\ z \in (0, 1),\ |y| < \varphi(z)\}$. При этом справедлива оценка

$$\| \mathscr{E} f \|_{W^1_p(G)} \leqslant c | f |_\Gamma.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно в неравенствах (1.16), (1.17) положить $G_k = \{x \in G:\ z \in (t_{k+1}, t_k)\}$.

Следствие 1.1. *В условиях теоремы* 1.1 *имеет место соотношение*

$$\inf \{ \| \nabla u \|_{L_p(\Omega)}:\ u \in L^1_p(\Omega), u \,|\, \partial\Omega = f \} \sim [f]_\sigma + | f |_\Gamma, \tag{1.21}$$

где $\Gamma = \partial\Omega \cap U$, $[f]_\sigma$ *и* $| f |_\Gamma$ — *полунормы, определенные равенствами* (1.2) *и* (1.7).

Доказательство. Пусть $u \in L^1_p(\Omega)$, $u | \partial\Omega = f$, и пусть Ω' — такая ограниченная подобласть Ω с границей $\partial\Omega'$ класса $C^{0,1}$, что $\partial\Omega' \supset \sigma$. Тогда по лемме 1.1 верно неравенство $[f]_\sigma \leqslant c \| \nabla u \|_{L_p(\Omega')}$. Кроме того, справедлива оценка (1.8). Отсюда вытекает, что отношение левой части (1.21) к правой ограничено снизу. Для доказательства ограниченности указанного отношения сверху рассмотрим оператор продолжения $g \to Eg$

с границы $\partial\Omega$ внутрь Ω, для которого

$$\|Eg\|_{W_p^1(\Omega)} \leqslant c\left(\|g\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)} + |g|_\Gamma\right).$$

Обозначим через $\bar{f}$ среднее значение f на поверхности σ и положим $u = \bar{f} + E(f - \bar{f})$. Тогда

$$c\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant [f]_\sigma + |f|_\Gamma + \|f - \bar{f}\|_{L_p(\sigma)} \leqslant c_1([f]_\sigma + |f|_\Gamma).$$

Соотношение (1.21) доказано.

Замечание 1.2. Если Ω — область с внешним пиком, а $\partial\Omega$ — несвязная поверхность, то утверждение теоремы 1.1 останется верным, если $\partial\Omega$ заменить на компоненту связности $\partial\Omega$, содержащую вершину пика. Это же замечание относится и к последующим теоремам о следах для области с внутренним пиком, доказанным в § 3, 4.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Будем использовать обозначения, введенные в § 1. Начнем с некоторых неравенств, содержащих малый параметр ε.

Лемма 2.1. *Пусть* $\varepsilon \in (0, 1/2)$, $\omega_\varepsilon = \{y \in \mathbf{R}^{n-1}: y/\varepsilon \in \omega\}$, $\omega_\varepsilon^{(e)} = \{y \in \mathbf{R}^{n-1}, |y| < 1, y \notin \bar{\omega}_\varepsilon\}$. *Если* $v \in W_p^1(\omega_\varepsilon^{(e)})$, $v \neq 0$, *то*

$$c\frac{\|v\|^p_{L_p(\partial\omega_\varepsilon)}}{\|v\|^p_{W_p^1(\omega_\varepsilon^{(e)})}} \leqslant \begin{cases} \varepsilon^{p-1} & \text{при } p < n-1, \\ (\varepsilon|\log\varepsilon|)^{p-1} & \text{при } p = n-1, \\ \varepsilon^{n-2} & \text{при } p > n-1, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $c = c(n, p, \omega)$.

Доказательство. Пусть B — единичный открытый шар в $\mathbf{R}^{n-1}$ с центром в начале координат и $B_\varepsilon = \{y \in \mathbf{R}^{n-1}: |y| < \varepsilon\}$. Из известного неравенства

$$c\|u\|_{L_p(\partial\omega)} \leqslant \|u\|_{L_p(\partial B)} + \|\nabla u\|_{L_p(B\setminus\bar{\omega})}$$

при помощи замены переменной выводим оценку

$$c\|v\|^p_{L_p(\partial\omega_\varepsilon)} \leqslant \|v\|^p_{L_p(\partial B_\varepsilon)} + \varepsilon^{p-1}\|\nabla v\|^p_{L_p(B_\varepsilon\setminus\bar{\omega}_\varepsilon)}.$$

Отсюда следует, что лемму достаточно доказать для случая $\omega = B$. Итак, пусть $v \in W_p^1(B\setminus B_\varepsilon)$, $v|\partial B = 0$. Переходя к сферическим координатам $y = (\rho, \theta)$, получим

$$|v(\varepsilon, \theta)|^p \leqslant \left(\int_\varepsilon^1 |v_\rho(\rho, \theta)|\,d\rho\right)^p \leqslant \left(\int_\varepsilon^1 \rho^{(p+1-n)/(p-1)-1}\,d\rho\right)^{p-1} \int_\varepsilon^1 |v_\rho(\rho, \theta)|^p \rho^{n-2}\,d\rho.$$

Интегрируя по сфере S^{n-2}, находим, что

$$c\varepsilon^{2-n}\|v\|^p_{L_p(\partial B_\varepsilon)} \leqslant A\|\nabla v\|^p_{L_p(B\setminus\bar{B}_\varepsilon)},$$

где $A = \max\{1, \varepsilon^{p+1-n}\}$ при $p \neq n-1$ и $A = \log\varepsilon|^{p-1}$ при $p = n-1$. Отсюда следует (2.1). Лемма доказана.

Пусть φ — функция, фигурирующая в определении вершины пика. Положим $G = \{x \in \mathbf{R}^n: z \in (0, 1), |y| < \varphi(z)\}$, $S = \{x \in \mathbf{R}^n: z \in (0, 1), |y| = \varphi(z)\}$, $\Gamma = \{x \in \mathbf{R}^n: z \in (0, 1), y/\varphi(z) \in \gamma\}$.

Лемма 2.2. *Пусть* $v \in W_p^1(G)$, $\lambda(x) = (\varphi(z)|\log\varphi(z)|)^{1/p-1}$. *Справедлива оценка*

$$\|\lambda v\|_{L_p(S)} \leqslant c(\|\lambda v\|_{L_p(\Gamma)} + \|\nabla v\|_{L_p(G)}),$$

где $c = c(n, p, \varphi, \gamma)$.

Доказательство. Обозначим через G_z, S_z и Γ_z сечения области G и поверхностей S и Γ плоскостью $z = \text{const}$. Тогда при почти всех

$z \in (0, 1)$ верна оценка

$$c\|v(\cdot, z)\|^p_{L_p(S_z)} \leqslant \|v(\cdot, z)\|^p_{L_p(\Gamma_z)} + \varphi(z)^{p-1}\|\nabla v(\cdot, z)\|^p_{L_p(G_z)}.$$

Умножая последнее неравенство на λ^p и интегрируя по $z \in (0, 1)$, приходим к утверждению леммы.

Для функции f, заданной на поверхности S, определим полунормы

$$\{f\}_S = \left(\int\limits_H\int |f(x) - f(\xi)|^p (\varphi(z)\varphi(\zeta))^{2-n} \frac{ds_x\, ds_\xi}{|\zeta - z|^{p+2-n}}\right)^{1/p}, \tag{2.2}$$

$$\langle f\rangle_S = \left(\int\limits_H\int \frac{|f(x) - f(\xi)|^p (\varphi(z)\varphi(\zeta))^{2-n} ds_x\, ds_\xi}{|\zeta - z|(\log(1 + |\zeta - z|/m(z, \zeta)))^p}\right)^{1/p}, \tag{2.3}$$

где $H = \{(x, \xi)\colon x, \xi \in S, |\zeta - z| > M(z, \zeta)\}$, $M(z, \zeta)$ и $m(z, \zeta)$ — соответственно большее и меньшее из чисел $\varphi(z)$, $\varphi(\zeta)$. Аналогичные полунормы $\{f\}_\Gamma$, $\langle f\rangle_\Gamma$ определим и для функции, заданной на поверхности Г.

Лемма 2.3. *Пусть* $v \in W^1_p(G)$. *Тогда справедливы оценки*

$$\{v\}_\Gamma \leqslant c(\{v\}_S + \|\nabla v\|_{L_p(G)}), \quad p > n - 1, \tag{2.4}$$

$$\langle v\rangle_\Gamma \leqslant c(\langle v\rangle_S + \|\nabla v\|_{L_p(G)}), \quad p = n - 1, \tag{2.5}$$

где $c = c(n, p, \varphi, \gamma)$. *Верны также оценки, которые получаются, если в* (2.4), (2.5) *поменять местами* Г *и* S.

Доказательство. Так как область $\omega \subset \mathbf{R}^{n-1}$ есть объединение конечного числа областей, звездных относительно шара, то достаточно установить оценки (2.4) и (2.5) для случая, когда поверхность $\partial\omega = \gamma$ допускает явное задание $\rho = \psi(\theta)$ в сферических координатах $y = (\rho, \theta)$ с центром в некоторой точке из ω. При этом функция $\theta \to \psi(\theta)$ удовлетворяет условию Липшица на сфере S^{n-2}. Пусть $\rho = \chi(\theta)$ — уравнение сферы $\{y \in \mathbf{R}^{n-1}\colon |y| = 1\}$ в тех же сферических координатах. Тогда, полагая $x = (\varphi(z)\psi(\theta), \theta, z)$, $\xi = (\varphi(\zeta)\psi(\alpha), \alpha, \zeta)$, $\alpha, \theta \in S^{n-2}$, найдем, что

$$\begin{aligned}|v(x) - v(\xi)| \leqslant{}& |v(\varphi(z)\psi(\theta), \theta, z) - v(\varphi(z)\chi(\theta), \theta, z)| + \\ &+ |v(\varphi(z)\chi(\theta), \theta, z) - v(\varphi(\zeta)\chi(\alpha), \alpha, \zeta)| + \\ &+ |v(\varphi(\zeta)\chi(\alpha), \alpha, \zeta) - v(\varphi(\zeta)\psi(\alpha), \alpha, \zeta)|.\end{aligned}$$

Отсюда выводится оценка

$$c\{v\}^p_\Gamma \leqslant \{v\}^p_S + \int\limits_H\int (\varphi(z)\varphi(\zeta))^{2-n}\left|\int\limits_{\varphi(z)\psi(\theta)}^{\varphi(z)\chi(\theta)} v_\rho(\rho, \theta, z)\, d\rho\right|^p \frac{d\Gamma_x\, d\Gamma_\xi}{|\zeta - z|^{p+2-n}}.$$

Интеграл в правой части последнего неравенства не превосходит

$$c\int\limits_{\{z,\zeta\in(0,1)\colon |\zeta - z| > M(z,\zeta)\}}\int |\zeta - z|^{n-p-2}\varphi(z)^{p+1-n}\, dz\, d\zeta \times$$
$$\times \int\limits_{S^{n-2}} d\theta \int\limits_{\varphi(z)\psi(\theta)}^{\varphi(z)\chi(\theta)} |v_\rho(\rho, \theta, z)|^p \rho^{n-2}\, d\rho,$$

что мажорируется величиной

$$c\int\limits_0^1 \|\nabla v(\cdot, z)\|^p_{L_p(G_z)}\varphi(z)^{p+1-n}\, dz \int\limits_{L(z)} |\zeta - z|^{n-p-2}\, d\zeta, \tag{2.6}$$

где $G_z = \{y \in \mathbf{R}^{n-1}\colon |y| < \varphi(z)\}$ и $L(z) = \{\zeta \in (0, 1)\colon |\zeta - z| > M(z, \zeta)\}$. Далее имеем

$$\int\limits_{L(z)} |\zeta - z|^{n-2-p}\, d\zeta \leqslant \int\limits_{|h| > \varphi(z)} |h|^{n-2-p}\, dh \leqslant c\varphi(z)^{n-1-p}, \tag{2.7}$$

и выражение (2.6) не больше, чем $c\|\nabla v\|^p_{L_p(G)}$. Неравенство (2.4) доказано.

Обратимся к оценке (2.5). Рассуждая аналогично предыдущему, получим, что

$$c\,\langle v\rangle^p_\Gamma \leqslant \langle v\rangle^p_S + \int_0^1 \|\nabla v(\cdot, z)\|^p_{L_p(G_z)}\,dz \int_{L(z)} \frac{(\log(1+|\zeta-z|/m(z,\zeta)))^{-p}\,d\zeta}{|\zeta-z|}. \quad (2.8)$$

Внутренний интеграл по множеству $L(z)$ не превосходит интеграла

$$\int_{|h|>\varphi(z)} |h|^{-1}(\log(1+|h|/\varphi(z)))^{-p}\,dh,$$

который ограничен равномерно относительно $z\in(0,\ 1)$. Отсюда и из (2.8) вытекает (2.5).

Оценки, которые получаются, если в (2.4) и (2.5) поменять местами Γ и S, доказываются аналогично (2.4), (2.5) с использованием того факта, что локально сфера S^{n-2} есть билипшицев образ подобласти γ.

В следующей лемме изучаются свойства среднего значения функции на сечении поверхности S плоскостью $z=\mathrm{const}$.

Пусть f — функция, определенная на поверхности S. Положим

$$\bar f(z) = s_n^{-1}\int_{S^{n-2}} f(\varphi(z)\theta, z)\,d\theta, \quad (2.9)$$

где s_n — площадь сферы S^{n-2}.

Лемма 2.4. *Пусть* $\varepsilon\in(0,\ 1)$, $f\in L_{p,\,\mathrm{loc}}(S)$, $p\in(1,\ \infty)$ *и* $f(x)=0$ *при* $z>\varepsilon$. *Справедливы оценки*

$$\int_S \varphi(z)^{1-p}|f(x)-\bar f(z)|^p\,ds_x \leqslant c\,|f|^p_S, \quad (2.10)$$

$$\left(\iint_{\{x,\xi\in S:\ |\zeta-z|<M(z,\zeta)\}} |\bar f(z)-\bar f(\zeta)|^p \frac{ds_x\,ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}\right)^{1/p} \leqslant c\,|f|_S, \quad (2.11)$$

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{|\bar f(z)-\bar f(\zeta)|^p\,dz\,d\zeta}{(m(z,\zeta)+|\zeta-z|)^{2-n}|\zeta-z|^p} \leqslant c\,(|f|_S+\{f\}_S)^p,\quad p>n-1, \quad (2.12)$$

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{(m(z,\zeta)+|\zeta-z|)^{-1}|\bar f(z)-\bar f(\zeta)|^p\,dz\,d\zeta}{(\log(1+|\zeta-z|/m(z,\zeta)))^p} \leqslant c\,(|f|_S+\langle f\rangle_S)^p,\ p=n-1, \quad (2.13)$$

где $|f|_S$ — *полунорма, определенная формулой* (1.7) *на поверхности* S, $c=c(n,\ p,\ \varphi,\ \varepsilon)$, *а остальные обозначения те же, что и в лемме* 2.3.

Доказательство. Начнем с оценки (2.10). Полагая $x=(\varphi(z)\theta,\ z)$, $\theta\in S^{n-2}$ и $S_z=\{y\in\mathbf{R}^{n-1}:\ |y|=\varphi(z)\}$, найдем, что

$$c\int_S \varphi(z)^{1-p}|f(x)-\bar f(z)|^p\,ds_x \leqslant \int_0^1 \varphi(z)^{n-p-1}dz \int_{S^{n-2}} d\theta \int_{S^{n-2}} |f(\varphi(z)\theta, z) -$$

$$- f(\varphi(z)\alpha, z)|^p\,d\alpha \leqslant c_1\int_0^1 dz \int_{S_z}\int_{S_z} \frac{|f(y,z)-f(\eta,z)|^p}{|y-\eta|^{n+p-3}}\,dS_z(y)\,dS_z(\eta). \quad (2.14)$$

Заметим, что если $|f|_S<\infty$, то по теореме 1.1 функция f является следом на поверхности S некоторой функции $v\in W^1_p(G)$, причем $\|v\|_{W^1_p(G)}\leqslant c\,|f|_S$. По лемме 1.1 при почти всех $z\in(0,\ 1)$ интеграл по множеству $S_z\times S_z$

в правой части (2.14) не превосходит

$$c \int\limits_{|y|<\varphi(z)} |\nabla_y v(y, z)|^p\, dy.$$

Таким образом, правая часть неравенства (2.14) не больше, чем $c\|\nabla v\|^p_{L_p(G)}$, что мажорируется величиной $c|f|^p_S$. Оценка (2.10) доказана.

Обратимся к (2.11). Обозначая левую часть (2.11) через $|\bar{f}|_S$ и полагая $T = \{(z, \zeta) : z, \zeta \in (0, 1),\ |\zeta - z| < M(z, \zeta)\}$, получим, что

$$|\bar{f}|^p_S \leqslant c \int\limits_T\int |\bar{f}(z) - \bar{f}(\zeta)|^p (\varphi(z)\varphi(\zeta))^{n-2}\, dz\, d\zeta \times$$

$$\times \int\limits_{S^{n-2}} d\theta \int\limits_{S^{n-2}} (|\zeta - z| + |\varphi(z)\theta - \varphi(\zeta)\alpha|)^{2-n-p}\, d\alpha.$$

Сделаем во внутреннем интеграле по сфере S^{n-2} замену $\alpha = \varphi(z)\varphi(\zeta)^{-1}\theta + |\zeta - z|\varphi(\zeta)^{-1}\beta$. В результате найдем

$$|\bar{f}|^p_S \leqslant c \int\limits_T\int |\bar{f}(z) - \bar{f}(\zeta)|^p |\zeta - z|^{-p} M(z, \zeta)^{n-2}\, dz\, d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \int\limits_{\{|\zeta - z| < \varphi(z)\}}\int M(z, \zeta)^{n-2} |\zeta - z|^{-p}\, dz\, d\zeta \int\limits_{S^{n-2}} |f(\varphi(z)\theta, z) - f(\varphi(\zeta)\theta, \zeta)|^p\, d\theta. \tag{2.15}$$

Здесь на последнем шаге использовано включение $T \subset \{z, \zeta \in (0, 1): |\zeta - z| < \varphi(z)\} \cup \{z, \zeta \in (0, 1): |\zeta - z| < \varphi(\zeta)\}$.

Пусть $v \in W^1_p(G)$, $v\,|\,S = f$ и $\|v\|_{W^1_p(G)} \leqslant c|f|_S$. Проверим, что правая часть в (2.15) не превосходит $c\|v\|^p_{W^1_p(G)}$. Так же как и при доказательстве оценки (1.8) в теореме 1.1, построим последовательность $\{z_k\}_{k\geqslant 0}$ со следующими свойствами: $z_0 = 1$, $z_k \searrow 0$, $\varphi(z_{k+1})\varphi(z_k)^{-1} \to 1$, $z_k - z_{k+1} \sim \varphi(z_k)$, $(z - \varphi(z), z + \varphi(z)) \subset (z_{k+2}, z_{k-1})$ при $z \in (z_{k+1}, z_k)$ и $k \geqslant 1$. Положим $\Delta_k = (z_{k+2}, z_{k-1})$, $k \geqslant 1$ и $\Delta_0 = (a, 1)$, где $a = \min\{z - \varphi(z): z \in [z_1, 1]\}$. Тогда правая часть в (2.15) не больше, чем

$$c \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(z_k)^{n-2} \int\limits_{\Delta_k}\int\limits_{\Delta_k} |\zeta - z|^{-p}\, dz\, d\zeta \int\limits_{S^{n-2}} |f(\varphi(z)\theta, z) - f(\varphi(\zeta)\theta, \zeta)|^p\, d\theta. \tag{2.16}$$

При фиксированном $\theta \in S^{n-2}$ положим

$$\Pi^{(\theta)}_k = \{x \in \mathbf{R}^n:\ z \in \Delta_k,\ |y|^{-1} y = \theta,\ \varphi(z)/2 < |y| < \varphi(z)\}.$$

Множество $\Pi^{(\theta)}_k$ можно рассматривать как двумерное сечение области $G_k = \{x \in \mathbf{R}^n:\ z \in \Delta_k,\ \varphi(z)/2 < |y| < \varphi(z)\}$ плоскостью $\theta = \mathrm{const}$. Положим $\rho = |y|$. Тогда в плоскости (ρ, z) множество $\Pi^{(\theta)}_k$ есть область вида $\{(\rho, z):\ z \in \Delta_k,\ \varphi(z)/2 < \rho < \varphi(z)\}$. Заметим, что $\operatorname{diam} \Pi^{(\theta)}_k \sim \varphi(z_k)$ и при почти всех $\theta \in S^{n-2}$ верно включение $v\,|\,\Pi^{(\theta)}_k \in W^1_p(\Pi^{(\theta)}_k)$. Применяя лемму 1.1, найдем, что

$$\int\limits_{\Delta_k}\int\limits_{\Delta_k} |f(\varphi(z)\theta, z) - f(\varphi(\zeta)\theta, \zeta)|^p |\zeta - z|^{-p}\, dz\, d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant c \int\limits_{\Delta_k} dz \int\limits_{\varphi(z)/2}^{\varphi(z)} (|v_z|^p + |v_\rho|^p)\, d\rho,$$

откуда выводим, что общий член суммы (2.16) не больше, чем $c\|\nabla v\|^p_{L_p(G_k)}$. Таким образом, сумма (2.16) не превосходит $c\|\nabla v\|^p_{L_p(G)}$, и неравенство

(2.11) доказано. Попутно установлена оценка

$$\iint\limits_{\{z,\zeta\in(0,1):\ |\zeta-z|<M(z,\zeta)\}} |\bar f(z)-\bar f(\zeta)|^p|\zeta-z|^{-p}M(z,\zeta)^{n-2}\,dz\,d\zeta\leqslant c|f|^p_S. \quad (2.17)$$

Для доказательства неравенства (2.12) заметим, что его левая часть не превосходит суммы

$$c\iint\limits_{\{z,\zeta\in(0,1):\ |\zeta-z|<M(z,\zeta)\}} |\bar f(z)-(\zeta)|^p|\zeta-z|^{-p}M(z,\zeta)^{n-2}\,dz\,d\zeta+$$

$$+c\iint\limits_{\{z,\zeta\in(0,1):\ |\zeta-z|>M(z,\zeta)\}} |\bar f(z)-\bar f(\zeta)|^p|\zeta-z|^{n-2-p}\,dz\,d\zeta. \quad (2.18)$$

Для первого слагаемого в (2.18) верна оценка (2.17). Второе слагаемое не превосходит

$$c\iint\limits_{|\zeta-z|>M(z,\zeta)}|\zeta-z|^{n-2-p}\,dz\,d\zeta\int\limits_{S^{n-2}}|f(\varphi(z)\theta,z)-f(\varphi(\zeta)\theta,\zeta)|^p\,d\theta,$$

что мажорируется величиной

$$c\iint\limits_{|\zeta-z|>M(z,\zeta)}|\zeta-z|^{n-2-p}\,dz\,d\zeta\int\limits_{S^{n-2}}d\theta\int\limits_{S^{n-2}}|f(\varphi(z)\theta,z)-f(\varphi(z)\alpha,z)|^p\,d\alpha+c\{f\}^p_S. \quad (2.19)$$

В силу (2.7) первое слагаемое в (2.19) не больше, чем

$$c\int\limits_0^1 dz\int\limits_{S_z}\int\limits_{S_z}\frac{|f(y,z)-f(\eta,z)|^p}{|y-\eta|^{n+p-3}}\,dS_z(y)\,dS_z(\eta), \quad (2.20)$$

а величина (2.20), как было показано при выводе (2.10), не превосходит $c|f|^p_S$. Итак, второе слагаемое в (2.18) не больше $c(|f|_S+\{f\}_S)^p$.Отсюда вытекает (2.12).

Обратимся к (2.13). Так же как и при выводе (2.12), разобьем интеграл в левой части (2.13) на два: по множеству $\{z,\zeta\in(0,1):\ |\zeta-z|<M(z,\zeta)\}$ и по множеству $\{z,\zeta\in(0,1):\ |\zeta-z|>M(z,\zeta)\}$. В первом случае имеем $\varphi(z)\sim\varphi(\zeta)$ и $\log(1+|\zeta-z|/m(z,\zeta))\sim|\zeta-z|(m(z,\zeta))^{-1}$. Поэтому подынтегральная функция не превосходит $c|\bar f(z)-\bar f(\zeta)|^p|\zeta-z|^{-p}M(z,\zeta)^{n-2}$, и здесь верна оценка (2.17). Во втором случае, рассуждая так же, как и при выводе оценки для второго слагаемого в (2.18), получим, что

$$c\iint\limits_{|\zeta-z|>M(z,\zeta)}\frac{|\bar f(z)-\bar f(\zeta)|^p|\zeta-z|^{-1}\,dz\,d\zeta}{(\log(1+|\zeta-z|/m(z,\zeta)))^p}\leqslant$$

$$\leqslant\langle f\rangle^p_S+\iint\limits_{|\zeta-z|>M(z,\zeta)}|\zeta-z|^{-1}(\log(1+|\zeta-z|/m(z,\zeta)))^{-p}\,dz\,d\zeta\times$$

$$\times\int\limits_{S^{n-2}}\int\limits_{S^{n-2}}|f(\varphi(z)\theta,z)-f(\varphi(z)\alpha,z)|^p\,d\theta\,d\alpha. \quad (2.21)$$

Так как интеграл

$$\iint\limits_{\{\zeta\in(0,1):\ |\zeta-z|>M(z,\zeta)\}}|\zeta-z|^{-1}(\log(1+|\zeta-z|/m(z,\zeta)))^{-p}\,d\zeta$$

ограничен равномерно относительно $z\in(0,1)$, то второе слагаемое в правой части (2.21) не больше величины (2.20), которая, в свою очередь, не превосходит $c|f|^p_S$. Оценка (2.13) и лемма доказаны.

В следующей лемме строится оператор продолжения с границы пика на $\mathbf{R}^n$.

Лемма 2.5. *Пусть* $\varepsilon \in (0, 1)$, f — *функция, определенная на поверхности* Γ, $f(x) = 0$ *при* $z > \varepsilon$. *Существует линейный оператор продолжения* E *с поверхности* Γ *на* $\mathbf{R}^n$, *для которого верна оценка*

$$c \| Ef \|^p_{W^1_p(\mathbf{R}^n)} \leqslant | f |^p_\Gamma + \int\limits_\Gamma \varphi(z)^{1-p} | f(x) |^p \, ds_x, \tag{2.22}$$

где $c = c(n, p, \varphi, \gamma, \varepsilon)$, $a | \cdot |_\Gamma$ — *полунорма* (1.7). *Кроме того,* $\operatorname{supp}(Ef) \subset \{x \in \mathbf{R}^n\colon z \in [0, \varepsilon + \varphi(\varepsilon)],\ |y| \leqslant 8\varphi(z)\}$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{t_k\}_{k \geqslant 0}$, определенную в теореме 1.1 при построении оператора продолжения (1.15). Пусть $\varphi_k = \varphi(t_k)$, S_k, f_k, $\bar f_k$, μ_k, $\mathscr{E}_k$ имеют тот же смысл, что и в (1.15). Введем еще при $k \geqslant 1$ на полуоси $[0, \infty)$ такую гладкую функцию χ_k, что $\chi_k(t) = 1$, если $t \in [0, \varphi_{k-1}]$, $\chi_k(t) = 0$, если $t \geqslant 2\varphi_{k-1}$ и $|\chi_k'(t)| \leqslant c\varphi_k^{-1}$. Положим $\sigma_k(x) = \mu_k(z)\ \chi_k(|y|)$,

$$Ef = \sum_{k=1}^{\infty} \bar f_k \sigma_k + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \mathscr{E}_k (f_k - \bar f_k) \tag{2.23}$$

и проверим, что E — требуемый оператор продолжения с поверхности Γ на $\mathbf{R}^n$.

Так же как и для оператора (1.15), обосновывается равенство $Ef | \Gamma = f$. Кроме того, из определения $\{t_k\}$ и E следует включение $\operatorname{supp}(Ef) \subset \{x \in \mathbf{R}^n\colon z \in [0, \varepsilon + \varphi(\varepsilon)],\ |y| \leqslant 8\varphi(z)\}$.

Обозначим через u_1 и u_2 соответственно первое и второе слагаемое в правой части (2.23). Кратность пересечения носителей σ_k конечна, поэтому

$$\| \nabla u_1 \|^p_{L_p(\mathbf{R}^n)} \leqslant c \sum_{k=1}^{\infty} | \bar f_k |^p \| \nabla \sigma_k \|^p_{L_p(\mathbf{R}^n)}.$$

Поскольку $\| \nabla \sigma_k \|^p_{L_p(\mathbf{R}^n)} \leqslant c\varphi_k^{n-p}$, последняя сумма не превосходит

$$c \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{S_k} | f(x) |^p \varphi(z)^{1-p} \, ds_x,$$

что не больше

$$c \int\limits_\Gamma | f(x) |^p \varphi(q)^{1-p} \, ds_x.$$

Далее при помощи (1.14) найдем:

$$\| \nabla u_2 \|^p_{L_p(\mathbf{R}^n)} \leqslant c \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{-p} \| \mathscr{E}_k (f_k - \bar f_k) \|^p_{L_p(\mathbf{R}^n)} +$$
$$+ c \sum_{k=1}^{\infty} \| \nabla \mathscr{E}_k (f_k - \bar f_k) \|^p_{L_p(\mathbf{R}^n)} \leqslant c_1 \sum_{k=1}^{\infty} [f]^p_{S_k}.$$

В силу (1.13) последняя сумма не превосходит (1.18), а сумма (1.18) мажорируется величиной $c | f |^p_\Gamma$. Итак, доказано, что

$$c \| \nabla (Ef) \|^p_{L_p(\mathbf{R}^n)} \leqslant | f |^p_\Gamma + \int\limits_\Gamma \varphi(z)^{1-p} | f(x) |^p \, ds_x.$$

Теперь (2.22) следует из неравенства Фридрихса: $\| Ef \|_{L_p(\mathbf{R}^n)} \leqslant c \| \nabla (Ef) \|_{L_p(\mathbf{R}^n)}$. Лемма доказана.

Замечание 2.1. В последней лемме поверхность Γ можно заменить на S.

§ 3. Внутренние пики, $p \neq n-1$

Начнем со случая $p < n-1$. Здесь пространство следов $TW_p^1(\Omega)$ описывается следующей теоремой.

Теорема 3.1. *Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$ с вершиной внутреннего пика на границе и $1 < p < n-1$. Справедливо соотношение*

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega)} \sim \left(\int\limits_{U\cap\partial\Omega} \varphi(z)^{1-p} |f(x)|^p ds_x + \int\limits_{\partial\Omega\setminus U} |f(x)|^p ds_x + \right.$$

$$\left. + \iint\limits_{\{x,\xi\in\partial\Omega\}} |f(x) - f(\xi)|^p |x-\xi|^{2-n-p} ds_x ds_\xi \right)^{1/p}, \tag{3.1}$$

где U — окрестность из определения 1.2, $x=(y, z)$, а ds — элемент площади поверхности на $\partial\Omega$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $U = \{x \in \mathbf{R}^n\colon z \in (-1, 1),\ |y| < 1\}$ и что верно равенство (1.5), правую часть которого, как и выше, обозначаем через Γ. Положим еще $V = \{x \in U\colon z > 0\}$.

Пусть $u \in W_p^1(\Omega)$, $u|\partial\Omega = f$. Тогда по лемме 2.1 при почти всех $z \in (0, 1)$ верна оценка

$$\varphi(z)^{1-p} \|f(\cdot, z)\|^p_{L_p(\Gamma_z)} \leqslant c \|u(\cdot, z)\|^p_{W_p^1(V_z)}, \tag{3.2}$$

где Γ_z и V_z — сечения плоскостью $z = \mathrm{const}$ поверхности Γ и области $V \cap \Omega$ соответственно. Интегрируя (3.2) по $z \in (0, 1)$, находим, что

$$\int\limits_\Gamma \varphi(z)^{1-p} |f(x)|^p ds_x \leqslant c \|u\|^p_{W_p^1(V\cap\Omega)}. \tag{3.3}$$

Пусть $|f|_\Gamma$ — полунорма (1.7). Так же как и (1.8), доказывается оценка

$$|f|_\Gamma \leqslant c \|\nabla u\|_{L_p(V\cap\Omega)}. \tag{3.4}$$

Установим неравенство

$$\iint\limits_{\{x,\xi\in\Gamma:\,|\zeta-z|>M(z,\zeta)\}} |f(x) - f(\xi)|^p |x-\xi|^{2-n-p} ds_x ds_\xi \leqslant c \|u\|^p_{W_p^1(\Omega\cap V)}, \tag{3.5}$$

где $x = (y, z)$, $\xi = (\eta, \zeta)$ и $M(z, \zeta) = \max\{\varphi(z), \varphi(\zeta)\}$. В самом деле, левая часть (3.5) не больше, чем

$$c \int\limits_\Gamma |f(x)|^p ds_x \int\limits_{\{\zeta\in(0,1):\,|\zeta-z|>M(z,\zeta)\}} \varphi(\zeta)^{n-2} |\zeta - z|^{2-n-p} d\zeta,$$

а последний интеграл по множеству $\{\zeta \in (0, 1)\colon |\zeta - z| > M(z, \zeta)\}$ не превосходит $c\varphi(z)^{1-p}$. Отсюда и из (3.3) вытекает (3.5). Объединяя (3.4) и (3.5), находим, что

$$[f]_\Gamma \leqslant c \|u\|_{W_p^1(V\cap\Omega)}, \tag{3.6}$$

где $[f]_\Gamma$ — полунорма, определенная равенством (1.2).

Зафиксируем число $\varepsilon \in (0, 1)$ и положим

$$\sigma = \partial\Omega \setminus \{x \in \Gamma\colon z \leqslant \varepsilon/2\}. \tag{3.7}$$

По теореме Гальярдо [1] верна оценка

$$\|f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)} \leqslant c \|u\|_{W_p^1(\Omega)}, \tag{3.8}$$

которая вместе с (3.3) и (3.6) приводит к неравенству

$$\|f\|_{W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)} \leqslant c \|u\|_{W_p^1(\Omega)}. \tag{3.9}$$

Обозначим через $|||f|||$ норму в правой части (3.1). Из (3.3) и (3.9) следует, что $|||f||| \leqslant c\|f\|_{TW_p^1(\Omega)}$. Установим обратное неравенство.

Продолжим функцию f с конечной нормой $|||f|||$ внутрь Ω так, чтобы для продолжения u была верна оценка $\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \leqslant c|||f|||$ и оператор $f \to u$ был линейным. Как и в доказательстве теоремы 1.1 введем гладкую срезку ψ с носителем в Γ, $\psi = 1$ в окрестности $\partial\Omega\backslash\sigma$. Возможность продолжить функцию $(1-\psi)f$ внутрь Ω обосновывается при помощи теоремы Гальярдо [1], и для этого продолжения верна оценка (1.9). Можно считать, что $\psi(x)$ зависит только от z при $x \in \Gamma$ и $\psi(x) = 0$ при $z \geqslant \varepsilon$, где ε — параметр из (3.7). Тогда справедлива оценка (1.10), и, следовательно, дело сводится к продолжению внутрь Ω такой функции f, что $\operatorname{supp}(f) \subset \{x \in \Gamma\colon z < \varepsilon\}$ и

$$|f|_\Gamma^p + \int_\Gamma \varphi(z)^{1-p} |f(x)|^p \, ds_x < \infty.$$

Требуемый оператор продолжения $f \to Ef$ построен в лемме 2.5. При этом за счет выбора параметра ε в (3.7) можно добиться включения $\operatorname{supp}(Ef) \subset U$. Соотношение (3.1) доказано.

Следствие 3.1. *В условиях теоремы* 3.1 *соотношение* (3.1) *останется верным, если в правой его части опустить величину* $\|f\|^p_{L_p(\partial\Omega\setminus U)}$.

Доказательство. Сохраняя обозначения, использованные в доказательстве теоремы, положим

$$\|f\| = [f]_{\partial\Omega} + \left(\int_\Gamma \varphi(z)^{1-p} |f(x)|^p \, ds_x\right)^{1/p}.$$

Пусть $\|f\| < \infty$ и $\bar{f}$ — среднее значение f на поверхности Γ. Тогда

$$\|f - \bar{f}\|^p_{L_p(\partial\Omega)} \leqslant |\Gamma|^{-1} \int_{\partial\Omega} ds_x \int_\Gamma |f(x) - f(\xi)|^p \, ds_\xi \leqslant c\,[f]^p_{\partial\Omega},$$

где $|\Gamma|$ — площадь поверхности Γ. Кроме того, верна оценка

$$\int_\Gamma \varphi(z)^{1-p} |f(x) - \bar{f}|^p \, ds_x \leqslant c \int_\Gamma \varphi(z)^{1-p} |f(x)|^p \, ds_x.$$

Отсюда следует, что $|||f - \bar{f}||| \leqslant c\|f\|$, где $|||\cdot|||$ — норма, определяемая правой частью (3.1). Пусть $F\colon TW_p^1(\Omega) \to W_p^1(\Omega)$ — ограниченный оператор продолжения. Положим $u = \bar{f} + F(f - \bar{f})$. Ясно, что $u|\partial\Omega = f$ и для ограниченной области Ω верна оценка

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \leqslant c(|\bar{f}| + |||f - \bar{f}|||) \leqslant c_1\|f\|.$$

В силу (3.9) имеем $\|f\|_{L_p(\partial\Omega)} \leqslant c\|f\|$. Для неограниченной области Ω последнее неравенство получается, если функцию u умножить на гладкую финитную срезку, равную единице на $\partial\Omega$. Следствие доказано.

Перейдем к изучению пространства следов функций из $W_p^1(\Omega)$ в случае $p > n - 1$. Предварительно установим следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть* $g \in L_{p,\mathrm{loc}}(0, \infty)$, $p \in (1, \infty)$, $g(z) = 0$ *при* $z > 1/2$; K — *гладкая, финитная на промежутке* (1/4, 1/2) *функция, интеграл от которой равен* 1, *а* φ — *функция, фигурирующая в определении* 1.2. *Положим* $D = \{x \in \mathbf{R}^n,\ z \in (0, 1,\ \varphi(z) < |y| < 1\}$ *и*

$$(Tg)(x) = \int_{1/4}^{1/2} K(t)\, g(z + (|y| - \varphi(z))\,t)\, dt, \quad x \in D.$$

Тогда справедлива оценка

$$\|\nabla(Tg)\|_{L_p(D)} \leqslant c\left(\int_0^1\int_0^1 \frac{|g(z) - g(\zeta)|^p \, dz\, d\zeta}{(m(z, \zeta) + |\zeta - z|)^{2-n}|\zeta - z|^p}\right)^{1/p}, \tag{3.10}$$

где $m(z, \zeta) = \min\{\varphi(z), \varphi(\zeta)\}$. *Кроме того, при* $z \in (0, 1)$ *верно равенство* $Tg|_{|y|=\varphi(z)} = g(z)$.

Доказательство. Положим $\rho = |y|$, $\delta = \rho - \varphi(z)$, $v = Tg$, $L(t) = tK(t)$. Имеем

$$v_\rho = -\delta^{-1} \int_{1/4}^{1/2} L'(t)\, g(z + \delta t)\, dt,$$

$$v_z = \delta^{-1} \int_{1/4}^{1/2} (\varphi'(z) L'(t) - K'(t))\, g(z + \delta t)\, dt.$$

Таким образом,

$$|(\nabla v)(x)| \leqslant c \int_{1/4}^{1/2} |g(z + \delta t) - g(z)|\, \delta^{-1}\, dt, \quad x \in D,$$

и, значит,

$$\|\nabla v\|^p_{L_p(D)} \leqslant c \int_0^1 dz \int_{\varphi(z)}^1 \rho^{n-2}\, d\rho \left(\int_{1/4}^{1/2} |g(z + \delta t) - g(z)|\, \delta^{-1}\, dt \right)^p.$$

Применяя неравенство Минковского, найдем, что

$$\|\nabla v\|_{L_p(D)} \leqslant c \int_{1/4}^{1/2} dt \left(\int_0^1 dz \int_{\varphi(z)}^1 \frac{|g(z + \delta t) - g(z)|^p}{\rho^{2-n} \delta^p}\, d\rho \right)^{1/p}.$$

После замены переменной $\rho = \varphi(z) + ht^{-1}$ во внутреннем интеграле придем к оценке

$$\|\nabla v\|_{L_p(D)} \leqslant c \left(\int_0^1 dz \int_0^{(1-\varphi(z))/2} \frac{|g(z + h) - g(z)|^p}{h^p (h + \varphi(z))^{2-n}}\, dh \right)^{1/p},$$

правая часть которой не превосходит правой части в (3.10).

Для окончания доказательства леммы осталось установить равенство $v_{|y|=\varphi(z)} = g(z)$ при почти всех $z \in (0, 1)$. Полагая $g_\varepsilon(z) = v|_{\rho=\varphi(z)+\varepsilon}$ при $\varepsilon > 0$, заметим, что

$$\int_a^1 |g_\varepsilon(z) - g(z)|^p\, dz \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

при любом достаточно малом $a > 0$. Отсюда вытекает требуемое равенство. Лемма доказана.

Теорема 3.2. *Пусть* O — *вершина пика, направленного внутрь области* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *и* $n - 1 < p < \infty$. *Тогда верно соотношение*

$$\|f\|_{TW^1_p(\Omega)} \sim \left(\int_{\partial\Omega \cap U} \varphi(z)^{2-n} |f(x)|^p\, ds_x + \int_{\partial\Omega \setminus U} |f(x)|^p\, ds_x + \right.$$
$$+ \iint_{\{x, \xi \in U \cap \partial\Omega:\, r > M(z,\zeta)\}} |f(x) - f(\xi)|^p\, r^{n-2-p} (\varphi(z)\varphi(\zeta))^{2-n}\, ds_x\, ds_\xi +$$
$$\left. + \iint_{\{x, \xi \in \partial\Omega\}} |f(x) - f(\xi)|^p\, r^{2-n-p}\, ds_x\, ds_\xi \right)^{1/p}, \qquad (3.11)$$

где U — *окрестность из определения* 1.2, $r = |x - \xi|$, *а остальные обозначения — те же, что и в теореме* 1.1.

Доказательство. Так же как и в теореме 3.1, не ограничивая общности, будем считать, что окрестность U точки O есть цилиндр $\{x \in \mathbf{R}^n:\ z \in (-1, 1),\ |y| < 1\}$ и что верно равенство (1.5), правую часть которого будем обозначать через Γ.

Для функции f, определенной на поверхности Γ, установим соотношение

$$\int\limits_{\{x,\xi\in\Gamma: r>M(z,\zeta)\}} |f(x)-f(\xi)|^p r^{n-2-p}(\varphi(z)\varphi(\zeta))^{2-n}\,ds_x\,ds_\xi + \\ + [f]_\Gamma^p \sim \{f\}_\Gamma^p + |f|_\Gamma^p, \tag{3.12}$$

где $[f]_\Gamma$, $\{f\}_\Gamma$ и $|f|_\Gamma$ — полунормы (1.2), (2.2) и (1.7) соответственно. В самом деле, если $|\zeta-z|>M(z,\zeta)$, то $|\zeta-z|\sim r$ и отношение левой части (3.12) к правой ограничено снизу. Заметим далее, что $r\sim\varphi(z)\sim\varphi(\zeta)$ при $M(z,\zeta)<r<3M(z,\zeta)$, поэтому левая часть (3.12) эквивалентна величине

$$\iint\limits_{\{x,\xi\in\Gamma: r>3M(z,\zeta)\}} |f(x)-f(\xi)|^p(\varphi(z)\varphi(\zeta))^{2-n}\frac{ds_x\,ps_\xi}{r^{p+2-n}} + [f]_\Gamma^p. \tag{3.13}$$

Если $r>3M(z,\zeta)$, то $|\zeta-z|>3M(z,\zeta)-|y-\eta|>M(z,\zeta)$, и первое слагаемое в (3.13) не больше $\{f\}_\Gamma^p$. Кроме того, $r^{2-n-p}\leqslant$ $\leqslant|\zeta-z|^{n-2-p}(\varphi(z)\varphi(\zeta))^{2-n}$ при $|\zeta-z|>M(z,\zeta)$, поэтому

$$[f]_\Gamma^p = \iint\limits_{\{x,\xi\in\Gamma: |\zeta-z|>M(z,\zeta)\}} |f(x)-f(\xi)|^p r^{2-n-p}\,ds_x\,ds_\xi + |f|_\Gamma^p \leqslant \{f\}_\Gamma^p + |f|_\Gamma^p,$$

и соотношение (3.12) доказано. Из (3.12) вытекает эквивалентность нормы в правой части (3.11) норме

$$|||f||| = \|f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)} + |f|_\Gamma + \{f\}_\Gamma + \left(\int\limits_\Gamma \varphi(z)^{2-n}|f(x)|^p\,ds_x\right)^{1/p}, \tag{3.14}$$

где σ — поверхность (3.7).

Пусть $u\in W_p^1(\Omega)$, $u|\partial\Omega=f$. Проверим оценку $|||f|||\leqslant c\|u\|_{W_p^1(\Omega)}$. Полагая $V=\{x\in U:\ z>0\}$, заметим, что установленные в ходе доказательства теоремы 3.1 оценки (3.4) и (3.8) остаются в силе. Неравенство

$$\int\limits_\Gamma \varphi(z)^{2-n}|f(x)|^p\,ds_x \leqslant c\|u\|^p_{W_p^1(\Omega\cap V)}$$

выводится так же, как и (3.3), при помощи леммы 2.1. Из теоремы 1.1, оценок (3.4) и (3.8) вытекает, что функция f является следом некоторой функции, принадлежащей $W_p^1(\mathbf{R}^n\setminus\bar\Omega)$, поэтому можно считать, что $u\in W_p^1(\mathbf{R}^n)$ и $\|u\|_{W_p^1(\mathbf{R}^n)}\leqslant c\|u\|_{W_p^1(\Omega)}$.

Установим неравенство

$$\{f\}_\Gamma \leqslant c\|u\|_{W_p^1(\Omega)}. \tag{3.15}$$

В силу леммы 2.3 достаточно проверить (3.15) для случая, когда $\Gamma=$ $=\{x\in\mathbf{R}^n:\ z\in(0,1),\ |y|=\varphi(z)\}$. Полагая $K(z,\zeta)=|\zeta-z|^{n-2-p}$, $x=$ $=(\varphi(z)\theta,z)$, $\xi=(\varphi(\zeta)\alpha,\zeta)$ и $L=\{(z,\zeta):\ z,\zeta\in(0,1),\ |\zeta-z|>$ $>M(z,\zeta)\}$, найдем, что

$$c\iint\limits_{\{x,\xi\in\Gamma: |\zeta-z|>M(z,\zeta)\}} |f(x)-f(\xi)|^p(\varphi(z)\varphi(\zeta))^{2-n}K(z,\zeta)\,ds_x\,ds_\xi \leqslant \\ \leqslant \iint\limits_L K(z,\zeta)\,dz\,d\zeta \int\limits_{S^{n-2}}\int\limits_{S^{n-2}} |f(\varphi(\zeta)\alpha,\zeta)-f(\varphi(\zeta)\theta,\zeta)|^p\,d\alpha\,d\theta + \\ + \int\limits_{S^{n-2}} d\theta \iint\limits_L |f(\varphi(z)\theta,z)-f(\varphi(\zeta)\theta,\zeta)|^p K(z,\zeta)\,dz\,d\zeta. \tag{3.16}$$

Принимая во внимание неравенство (2.7), найдем, что первое слагаемое в правой части (3.16) не больше, чем

$$c\int_0^1 d\zeta \int_{\Gamma_\zeta}\int_{\Gamma_\zeta} \frac{|f(y,\zeta)-f(\eta,\zeta)|^p}{|y-\eta|^{n+p-3}}\,d\Gamma_\zeta(y)\,d\Gamma_\zeta(\eta), \tag{3.17}$$

где $\Gamma_\zeta=\{\eta\in\mathbf{R}^{n-1}\colon |\eta|=\varphi(\zeta)\}$. В силу леммы 1.1 интеграл по множеству $\Gamma_\zeta\times\Gamma_\zeta$ при почти всех $\zeta\in(0,1)$ не превосходит $c\|u\,n(\cdot,\zeta)\|^p_{L_p(\mathbf{R}^{n-1})}$, и выражение (3.17) мажорируется величиной $c\|u\|^p_{W^1_p(\Omega)}$.

Введем в $\mathbf{R}^{n-1}$ сферические координаты $y=(\rho,\theta)$. Тогда

$$c\,|f(\varphi(z)\theta,z)-f(\varphi(\zeta)\theta,\zeta)|^p\leqslant\left(\int_{\varphi(z)}^{|\zeta-z|}|u_\rho(\rho,\theta,z)|\,d\rho\right)^p+$$

$$+\left|\int_z^\zeta u_t(|\zeta-z|,\theta,t)\,dt\right|^p+\left(\int_{\varphi(\zeta)}^{|\zeta-z|}|u_\rho(\rho,\omega,\zeta)|\,d\rho\right)^p.$$

Таким образом, второе слагаемое в правой части (3.16) не больше $c(I_1+I_2)$, где

$$I_1=\int_{S^{n-2}}d\theta\iint_L K(z,\zeta)\,dz\,d\zeta\left(\int_{\varphi(z)}^{|\zeta-z|}|u_\rho(\rho,\theta,z)|\,d\rho\right)^p, \tag{3.18}$$

$$I_2=\int_{S^{n-2}}d\theta\iint_L K(z,\zeta)\,dz\,d\zeta\left|\int_z^\zeta u_t(|\zeta-z|,\theta,t)\,dt\right|^p. \tag{3.19}$$

Имеем

$$I_1\leqslant c\int_{S^{n-2}}d\theta\int_0^1 dz\int_{\varphi(z)}h^{n-2-p}\,dh\left(\int_{\varphi(z)}^h|u_\theta(\rho,\theta,z)|\,d\rho\right)^p$$

и после применения неравенства Харди найдем, что

$$I_1\leqslant c\int_{S^{n-2}}d\theta\int_0^1 dz\int_{\varphi(z)}^1|u_\rho(\rho,\theta,z)|^p\,\rho^{n-2}\,d\rho\leqslant c_1\|u\|^p_{W^1_p(\Omega)}.$$

Обратимся к оценке I_2. Здесь имеем

$$I_2\leqslant c\int_{S^{n-2}}d\theta\int_0^1 dz\int_0^{z-\varphi(z)}(z-\zeta)^{n-2-p}\,d\zeta\left(\int_\zeta^z|u_t(z-\zeta,\theta,t)|\,dt\right)^p\leqslant$$

$$\leqslant c_1\int_{S^{n-2}}d\theta\int_0^1\int_{\varphi(z)}^z h^{n-2}\,dh\int_0^1|u_z(h,\theta,z-\tau h)|^p\,d\tau. \tag{3.20}$$

Расширим пределы интегрирования по z до $\mathbf{R}$, по h — до промежутка $(0,1)$ и поменяем порядок интегрирования. В результате

$$I_2\leqslant c_1\int_{S^{n-2}}d\theta\int_0^1 h^{n-2}\,dh\int_{-\infty}^{\infty}|u_z(h,\theta,z)|^p dz\leqslant c_2\|\nabla u\|^p_{L_p(\mathbf{R}^n)}\leqslant c_3\|u\|^p_{W^1_p(\Omega)}. \tag{3.21}$$

Итак, оба слагаемых в правой части (3.16) не превосходят $c\|u\|^p_{W^1_p(\Omega)}$, и оценка (3.15) доказана. Вместе с тем установлено неравенство $|||f|||\leqslant c\|f\|_{TW^1_p(\Omega)}$, где $|||\cdot|||$ — норма (3.14).

Для проверки обратного неравенства построим линейный оператор продолжения $f \to Ff$ с границы $\partial\Omega$ внутрь области Ω так, чтобы была верна оценка $\|Ff\|_{W_p^1(\Omega)} \leqslant c |||f|||$ для любой функции f с конечной нормой $|||f|||$. При помощи гладкой срезки ψ с носителем в Γ, $\psi = 1$ в окрестности $\partial\Omega\backslash\sigma$, где σ — поверхность (3.7), дело сводится к продолжению функции ψf внутрь Ω. Пусть ε — параметр из (3.7). Можно считать, что $\psi(x)$ зависит только от z при $x \in \Gamma$ и $\psi(x) = 0$ при $z \geqslant \varepsilon$. Имеем

$$c\{\psi f\}_\Gamma^p \leqslant \{f\}_\Gamma^p + \int_\Gamma \frac{|f(x)|^p}{\varphi(z)^{n-2}} ds_x \int_0^1 \frac{|\psi(z) - \psi(\zeta)|^p}{|\zeta - z|^{p+2-n}} d\zeta.$$

Так как интеграл по промежутку $(0, 1)$ ограничен равномерно относительно $z \in (0, 1)$, то верна оценка

$$c\{\psi f\}_\Gamma^p \leqslant \{f\}_\Gamma^p + \int_\Gamma \varphi(z)^{2-n} |f(x)|^p ds_x.$$

Из этой оценки и неравенства (1.10) вытекает, что для доказательства теоремы достаточно продолжить с границы $\partial\Omega$ внутрь Ω функцию f, для которой $|f|_\Gamma + \{f\}_\Gamma < \infty$ и $\operatorname{supp}(f) \subset \{x \in \Gamma\colon z < \varepsilon\}$.

Пусть $u(x) = (\mathscr{E}f)(x)$, $x \in G$, где $\mathscr{E}$ — оператор (1.15), а $G = \{x \in \mathbf{R}^n\colon z \in (0, 1), |y| < \varphi(z)\}$. Как было установлено в ходе доказательства теоремы 1.1 (см. также замечание 1.1), верны соотношения $u \in W_p^1(G)$, $u|\Gamma = f$ и

$$\|u\|_{W_p^1(G)} \leqslant c|f|_\Gamma. \tag{3.22}$$

Положим $S = \{x \in \mathbf{R}^n\colon z \in (0, 1), |y| = \varphi(z)\}$, $g = u|S$. Применяя лемму 2.3, найдем, что

$$\{g\}_S \leqslant c(\|\nabla u\|_{L_p(G)} + \{f\}_\Gamma) \leqslant c_1(|f|_\Gamma + \{f\}_\Gamma).$$

Кроме того, по теореме 1.1 верна оценка $|g|_S \leqslant c\|u\|_{W_p^1(G)}$, в которой $|\cdot|_S$ — полунорма (1.7) на поверхности S. Таким образом, справедливо неравенство

$$|g|_S + \{g\}_S \leqslant c(|f|_\Gamma + \{f\}_\Gamma). \tag{3.23}$$

Поскольку оператор (1.15) удовлетворяет условию $(\mathscr{E}f)(x) = 0$ при $z > \varepsilon + \varphi(\varepsilon)$, то можно считать, что $g(x) = 0$ при $z > 1/2$. Для окончания доказательства теоремы 3.2 остается продолжить функцию g с поверхности S во внешность области G.

Пусть $\bar{g}(z)$ — среднее значение (2.9) функции g, E — оператор продолжения с поверхности S на $\mathbf{R}^n$, построенный в лемме 2.5, а T — оператор, определенный в лемме 3.1. Положим

$$u(x) = (T\bar{g})(x) + (E(g - \bar{g}))(x), \quad x \in V\backslash\bar{G}.$$

Применяя леммы 3.1 и 2.5, найдем, что $u|S = g$ и

$$c\|\nabla u\|_{L_p(V\backslash G)}^p \leqslant \int_0^1\int_0^1 \frac{|\bar{g}(z) - \bar{g}(\zeta)|^p dz\, d\zeta}{(m(z, \zeta) + |\zeta - z|)^{2-n}|\zeta - z|^p} +$$
$$+ \int_S \varphi(z)^{1-p}|g(x) - \bar{g}(z)|^p ds_x + |g - \bar{g}|_S^p.$$

По лемме 2.4 правая часть последнего неравенства не превосходит $c(|g|_S + \{g\}_S)^p$. Кроме того, $u(x) = 0$ в окрестности $z = 1$, и значит,

$$\|u\|_{L_p(V\backslash\bar{G})} \leqslant \|\nabla u\|_{L_p(V\backslash\bar{G})} \leqslant c_1(|g|_S + \{g\}_S). \tag{3.24}$$

Объединяя (3.22) — (3.24), получаем оценку $\|u\|_{W_p^1(V)} \leqslant c\,(|f|_\Gamma + \{f\}_\Gamma)$.

Продолжим функцию u четным образом из области V в окрестность U, а затем умножим это продолжение на гладкую срезку с носителем в U, равную 1 на множестве $\{x \in \mathbf{R}^n\colon |z| \leqslant \varepsilon,\ |y| \leqslant \varphi(\varepsilon)\}$. В результате построим линейный оператор продолжения $f \to v$ с $\partial\Omega$ на $\mathbf{R}^n$, определенный на функциях f с носителем в множестве $\{x \in \Gamma\colon z < \varepsilon\}$ и удовлетворяющий условию $\|v\|_{W_p^1(\mathbf{R}^n)} \leqslant c\,(|f|_\Gamma + \{f\}_\Gamma)$. Соотношение (3.11) доказано.

Следствие 3.2. *В условиях теоремы* 3.2 *соотношение* (3.11) *останется верным, если в правой его части сумму интегралов по* $\partial\Omega \cap U$ *и* $\partial\Omega \setminus U$ *заменить на* $\|f\|^p_{L_p(\Pi)}$, *где* Π — *любая связная поверхность класса* $C^{0,1}$, *содержащаяся в* $\partial\Omega$.

Доказательство. Для функции f, определенной на $\partial\Omega$, положим

$$\langle\langle f\rangle\rangle = [f]_{\partial\Omega} + \left(\iint\limits_{\{x,\xi\in\Gamma:\, r > M(z,\zeta)\}} |f(x) - f(\xi)|^p\, r^{n-2-p}\, (\varphi(z)\,\varphi(\zeta))^{2-n}\, ds_x\, ds_\xi\right)^{1/p},$$

где $\Gamma = \partial\Omega \cap U$, $[f]_{\partial\Omega}$ — полунорма (1.2), а остальные обозначения — те же, что и в формулировке теоремы 3.2.

Пусть $\|f\|_{L_p(\Pi)} + \langle\langle f\rangle\rangle < \infty$ и $\bar f$ — среднее значение функции f на поверхности Γ. Тогда

$$\int\limits_\Gamma |f(x) - \bar f|^p\, \varphi(z)^{2-n}\, ds_x \leqslant c \int\limits_\Gamma \int\limits_\Gamma |f(x) - f(\xi)|^p\, \varphi(z)^{2-n}\, ds_x\, ds_\xi. \tag{3.25}$$

Последний интеграл разобьем на два: по множеству $\{x,\ \xi \in \Gamma\colon r < M(z,\ \zeta)\}$ и по множеству $\{x,\ \xi \in \Gamma\colon r > M(z,\ \zeta)\}$. В первом случае $\varphi(z) \sim \varphi(\zeta)$, поэтому $\varphi(z)^{2-n} \leqslant cr^{2-n-p}$, а во втором случае $\varphi(z)^{2-n} \leqslant cr^{n-2-p}(\varphi(z)\varphi(\zeta))^{2-n}$. Отсюда и из (3.25) вытекает оценка

$$\int\limits_\Gamma |f(x) - \bar f|^p\, \varphi(z)^{2-n}\, ds_x \leqslant c\,\langle\langle f\rangle\rangle^p. \tag{3.26}$$

Отметим еще, что справедливо неравенство

$$\|f - \bar f\|_{L_p(\partial\Omega)} \leqslant c\,[f]_{\partial\Omega}. \tag{3.27}$$

Из (3.26), (3.27) и (3.11) выводим оценку $\|f - \bar f\|_{TW_p^1(\Omega)} \leqslant c\,\langle\langle f\rangle\rangle$.

Пусть $F\colon TW_p^1(\Omega) \to W_p^1(\Omega)$ — непрерывный оператор продолжения и $u = \bar f + F(f - \bar f)$. Тогда $u|\partial\Omega = f$ и верна оценка $\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant c\,\langle\langle f\rangle\rangle$. Предположим, что Ω — ограниченная область. Так как она удовлетворяет условию конуса, то по теореме об эквивалентных нормировках в $W_p^1(\Omega)$ (см. [5. 7]) получаем

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \leqslant c\,(\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{L_p(\Pi)}), \tag{3.28}$$

и, значит,

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \leqslant c\,(\|f\|_{L_p(\Pi)} + \langle\langle f\rangle\rangle). \tag{3.29}$$

Из последнего неравенства и соотношения (3.11) выводим оценку

$$\int\limits_\Gamma \varphi(z)^{2-n} |f(x)|^p\, ds_x + \|f\|^p_{L_p(\partial\Omega)} \leqslant c\,(\|f\|_{L_p(\Pi)} + \langle\langle f\rangle\rangle)^p. \tag{3.30}$$

В случае неограниченной области Ω в неравенствах (3.28), (3.29) нужно заменить Ω на $B(O,\ R) \cap \Omega$, где $B(O,\ R)$ — шар, содержащий $\partial\Omega$. Тогда снова получим (3.30). Следствие доказано.

§ 4. Внутренние пики, $p = n - 1$

Основным результатом настоящего параграфа является следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть O — вершина пика, направленного внутрь области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $p = n - 1$, а функция φ, фигурирующая в определении 1.2, удовлетворяет дополнительному условию $\varphi'(z) \leqslant c(\varphi(z)/z)$ для почти всех $z \in (0, 1)$. Тогда*

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega)} \sim \left(\int\limits_{U \cap \partial\Omega} (\varphi(z) \,|\log \varphi(z)|)^{1-p} |f(x)|^p \, ds_x + \right.$$

$$+ \int\limits_{\partial\Omega \setminus U} |f(x)|^p \, ds_x + \iint\limits_{\{x, \xi \in \partial\Omega\}} |f(x) - f(\xi)|^p r^{2-n-p} \, ds_x \, ds_\xi +$$

$$\left. + \iint\limits_{\{x, \xi \in \partial\Omega \cap U : r > M(z, \zeta)\}} (\varphi(z)\varphi(\zeta))^{2-n} \frac{|f(x) - f(\xi)|^p \, ds_x \, ds_\xi}{r\,(\log(1 + r/m(z, \zeta)))^p} \right)^{1/p}, \qquad (4.1)$$

где $m(z, \zeta) = \min\{\varphi(z), \varphi(\zeta)\}$, а остальные обозначения те же, что и в теореме 3.2.

Доказательству теоремы предпошлем два вспомогательных утверждения. Начнем с неравенств типа Харди.

Лемма 4.1. *Пусть $0 < a < b \leqslant \infty$, $p \in (1, \infty)$ и функция v абсолютно непрерывна на промежутке (a, b). Если $v(b) = 0$, то*

$$\int\limits_a^b |v(t)|^p t^{-1} \, dt \leqslant c(p) \int\limits_a^b |v'(t)|^p t^{p-1} (\log(a^{-1}t))^p \, dt.$$

Если $v(a) = 0$, то

$$\int\limits_a^b \frac{|v(t)|^p}{(\log(t/a))^p} \frac{dt}{t} \leqslant c(p) \int\limits_a^b |v'(t)|^p t^{p-1} \, dt.$$

Доказательство. Замена переменной $\log(t/a) = \tau$ приводит к хорошо известным неравенствам Харди.

Лемма 4.2. *Пусть $g \in L_{p,\mathrm{loc}}(0, \infty)$, $g(z) = 0$ при $z > 1/2$; φ — возрастающая функция класса $C^{0,1}([0, 1])$, которая удовлетворяет условиям $\varphi(z) = o(z)$ при $z \to +0$, $\varphi'(z) = O(\varphi(z)/z)$, $\varphi(z) < z$, $z \in (0, 1]$. Положим $D = \{x = (y, z) \in \mathbf{R}^n \colon z \in (0, 1), \varphi(z) < |y| < z\}$ и*

$$(Tg)(x) = \log\left(\frac{|y|}{\varphi(z)}\right) \int\limits_0^\infty \frac{g(z + h) \, dh}{(|y| + h)(\log((|y| + h)/\varphi(z)))^2}$$

при $x \in D$. Тогда справедлива оценка

$$\|Tg\|_{W_p^1(D)} \leqslant cI(g), \qquad (4.2)$$

где $p = n - 1$,

$$I(g) = \left(\int\limits_0^1 |g(z)|^p |\log \varphi(z)|^{1-p} \, dz + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{|g(z) - g(\zeta)|^p (m(z, \zeta) + |\zeta - z|)^{-1} \, dz \, d\zeta}{(\log(1 + |\zeta - z|/m(z, \zeta)))^p} \right)^{1/p},$$

$m(z, \zeta) = \min\{\varphi(z), \varphi(\zeta)\}$. Кроме того, если $I(g) < \infty$, то при почти всех $z \in (0, 1)$ верно равенство $Tg|_{|y| = \varphi(z)} = g(z)$.

Доказательство. Положим $v = Tg$, $\rho = |y|$, $\Delta_h g(z) = g(z+h) - g(z)$, $h > 0$. Так как

$$v(y, z) = g(z) + \log\left(\frac{\rho}{\varphi(z)}\right)\int_0^\infty \frac{\Delta_h g(z)\,dh}{(\rho+h)(\log((\rho+h)/\varphi(z)))^2}, \tag{4.3}$$

то

$$|v_\rho| \leqslant \frac{3}{\rho}\int_0^\infty \frac{|\Delta_h g(z)|\,dh}{(\rho+h)(\log((\rho+h)/\varphi(z)))^2} + \int_0^\infty \frac{|\Delta_h g(z)|\,dh}{(\rho+h)^2\log((\rho+h)/\varphi(z))}.$$

Из последнего неравенства вытекает оценка

$$\|v_\rho\|^p_{L_p(D)} \leqslant c\sum_{k=1}^n I_k,$$

где

$$I_1 = \int_0^{1/2} dz\int_{\varphi(z)}^z (\log(\rho/\varphi(z)))^{-p}\frac{d\rho}{\rho}\left(\int_0^{\rho-\varphi(z)} P(h, z)\,dh\right)^p,$$

$$I_2 = \int_0^{1/2} dz\int_{\varphi(z)}^z \frac{d\rho}{\rho}\left(\int_{\rho-\varphi(z)}^{z-\varphi(z)} \frac{P(h, z)\,dh}{\log(1+h/\varphi(z))}\right)^p,$$

$$I_3 = \int_0^{1/2} \log(z/\varphi(z))\,dz\left(\int_{z-\varphi(z)}^\infty \frac{P(h, z)\,dh}{\log(1+h/\varphi(z))}\right)^p,$$

$$I_4 = \int_0^{1/2} dz\int_{\varphi(z)}^z \rho^{p-1}\,d\rho\left(\int_0^\infty \frac{|\Delta_h g(z)|\,dh}{(\rho+h)^2\log((\rho+h)/\varphi(z))}\right)^p, \tag{4.4}$$

$$P(h, z) = |\Delta_h g(z)|\,((h+\varphi(z))\log(1+h/\varphi(z)))^{-1}.$$

Для оценки I_1 применим лемму 4.1. Найдем тогда, что

$$cI_1 \leqslant \int_0^{1/2} dz\int_{\varphi(z)}^z \frac{|\Delta_{\rho-\varphi(z)}g(z)|^p}{(\log(\rho/\varphi(z)))^p}\frac{d\rho}{\rho} = \int_0^{1/2} dz\int_0^{z-\varphi(z)} Q(h, z)\,dh \leqslant I(g)^p.$$

Здесь

$$Q(h, z) = \frac{|\Delta_h g(z)|^p}{(h+\varphi(z))(\log(1+h/\varphi(z)))^p}.$$

Аналогично для I_2 при помощи леммы 4.1 получим неравенство $I_2 \leqslant cI(g)^p$.

Применяя неравенство Гельдера к интегралу по промежутку $(z-\varphi(z), \infty)$, оценим I_3 следующим образом:

$$I_3 \leqslant \int_0^{1/2} \log(z/\varphi(z))\,dz\int_{z-\varphi(z)}^\infty Q(h, z)\,dh \times$$

$$\times\left(\int_{z-\varphi(z)}^\infty (h+\varphi(z))^{-1}(\log(1+h/\varphi(z)))^{p/(1-p)}\,dh\right)^{p-1} \leqslant c\int_0^{1/2} dz\int_{z-\varphi(z)}^\infty Q(h, z)dh.$$

Замечая, что

$$\int_{1/2}^\infty Q(h, z)\,dh \leqslant c\,|g(z)|^p\,|\log\varphi(z)|^{1-p},$$

приходим к неравенству $I_3 \leqslant cI(g)^p$.

Обратимся к оценке I_4. Имеем

$$\int\limits_{\varphi(z)}^{z} \rho^{p-1}\, d\rho \left(\int\limits_0^{\rho} \frac{|\Delta_h g(z)|\, dh}{(\rho+h)^2 \log((\rho+h)/\varphi(z))} \right)^p \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\varphi(z)}^{z} \rho^{-2}\, d\rho \int\limits_0^{\rho} (h+\varphi(z))\, Q(h, z)\, dh. \qquad (4.5)$$

Интегрируя по частям, найдем, что

$$\int\limits_{\varphi(z)}^{z} \frac{d\rho}{\rho^2} \int\limits_0^{\rho} (h+\varphi(z))\, Q(h, z)\, dh \leqslant \int\limits_{\varphi(z)}^{z} \left(1 + h^{-1}\varphi(z)\right) Q(h, z)\, dh +$$

$$+ \left| \left(\rho^{-1} \int\limits_0^{\rho} (h+\varphi(z))\, Q(h, z)\, dh \right) \Bigg|_{\rho=\varphi(z)}^{\rho=z} \right| \leqslant c \int\limits_0^{z} Q(h, z)\, dh. \qquad (4.6)$$

Далее, используя неравенство Харди, получим

$$\int\limits_{\varphi(z)}^{z} \rho^{p-1}\, d\rho \left(\int\limits_{\rho}^{z} \frac{|\Delta_h g(z)|\, dh}{(h+\varphi(z))^2 \log(1 + h/\varphi(z))} \right)^p \leqslant c \int\limits_{\varphi(z)}^{z} Q(h, z)\, dh. \qquad (4.7)$$

Оценим теперь величину

$$J(z) = \int\limits_{\varphi(z)}^{z} \rho^{p-1}\, d\rho \left(\int\limits_{z}^{\infty} \frac{|\Delta_h g(z)|\, dh}{(h+\varphi(z))^2 \log(1 + h/\varphi(z))} \right)^p. \qquad (4.8)$$

Применяя к интегралу по промежутку (z, ∞) неравенство Гельдера, находим

$$J(z) \leqslant c z^p \int\limits_z^{\infty} Q(h, z)\, dh \left(\int\limits_z^{\infty} (h+\varphi(z))^{(2p-1)/(1-p)}\, dh \right)^{p-1} \leqslant c_1 \int\limits_z^{\infty} Q(h, z)\, dh,$$

откуда

$$cJ(z) \leqslant \int\limits_z^{1/2} Q(h, z)\, dh + |g(z)|^p\, |\log \varphi(z)|^{1-p}. \qquad (4.9)$$

Из (4.4) — (4.9) вытекает, что $I_4 \leqslant cI(g)^p$. Итак, доказана оценка $\|v_\rho\|_{L_p(D)} \leqslant cI(g)$.

Проверим неравенство

$$\|v_z\|_{L_p(D)} \leqslant cI(g). \qquad (4.10)$$

Положим $f(\rho, h, z) = (\rho+h)^{-1}(\log((\rho+h)/\varphi(z)))^{-2}$. Ясно, что

$$v_z = \frac{\partial}{\partial z} \left(\log\left(\frac{\rho}{\varphi(z)} \right) \int\limits_z^{\infty} f(\rho, \zeta - z, z)\, g(\zeta)\, d\zeta \right).$$

При помощи соотношений

$$\frac{\partial}{\partial z}(f(\rho, \zeta - z, z)) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(f(\rho, \zeta - z, z)) =$$

$$= 2\varphi'(z)\, f(\rho, \zeta - z, z)\, (\varphi(z) \log((\rho + \zeta - z)/\varphi(z)))^{-1},$$

$$(\rho \log(\rho/\varphi(z)))^{-1} = -\log(\rho/\varphi(z)) \int\limits_z^{\infty} \frac{\partial}{\partial \zeta} f(\rho, \zeta - z, z)\, d\zeta,$$

а также равенства

$$\int\limits_z^\infty f(\rho, \zeta - z, z)\, d\zeta = 2 \log\left(\frac{\rho}{\varphi(z)}\right) \int\limits_z^\infty \frac{f(\rho, \zeta - z, z)\, d\zeta}{\log((\rho + \zeta - z)/\varphi(z))}$$

производная v_z приводится к виду

$$v_z = 2\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \log\left(\frac{\rho}{\varphi(z)}\right) \int\limits_0^\infty \frac{\Delta_h g(z)\, dh}{(\rho + h)(\log((\rho + h)/\varphi(z)))^3} -$$

$$- \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \int\limits_0^\infty f(\rho, h, z)\, \Delta_h g(z)\, dh - \log\left(\frac{\rho}{\varphi(z)}\right) \int\limits_0^\infty f_\rho(\rho, h, z)\, \Delta_h g(z)\, dh.$$

Из последней формулы и неравенства $\varphi'(z) \leqslant c\varphi(z)/z$ вытекает оценка

$$|v_z| \leqslant c(\rho^{-1} + z^{-1}) \int\limits_0^\infty f(\rho, h, z)\, |\Delta_h g(z)|\, dh + c \int\limits_0^\infty \frac{|\Delta_h g(z)|\, dh}{(\rho + h)^2 \log((\rho + h)/\varphi(z))}.$$

Таким образом,

$$\| v_z \|^p_{L_p(D)} \leqslant c \sum_{k=1}^5 I_k,$$

где интегралы $I_1, \ldots, I_4$ определены выше, а

$$I_5 = \int\limits_0^{1/2} dz \int\limits_{\varphi(z)}^z \rho^{-1}\, d\rho \left(\int\limits_0^\infty f(\rho, h, z)\, |\Delta_h g(z)|\, dh \right)^p.$$

Заметим, что $I_5 \leqslant c(I_1 + I_2 + I_3)$. Вместе с доказанными ранее оценками $I_k \leqslant cI(g)^p$, $1 \leqslant k \leqslant 4$, отсюда выводится (4.10). Итак,

$$c \| \nabla v \|_{L_p(D)} \leqslant \| v_\rho \|_{L_p(D)} + \| v_z \|_{L_p(D)} \leqslant c_1 I(g).$$

Последнее неравенство вместе с неравенством Фридрихса приводят к (4.2).

Для окончания доказательства леммы остается установить, что $v|_{|y| = \varphi(z)} = g(z)$ при почти всех $z \in (0, 1)$. В самом деле, из формулы (4.3) и неравенства Гельдера вытекает оценка

$$|v(y, z) - g(z)|^p \leqslant c\left(\log\left(\frac{|y|}{\varphi(z)}\right)\right)^{p-1} \int\limits_0^\infty \frac{|\Delta_h g(z)|^p\, dh}{(h + \varphi(z))(\log(1 + h/\varphi(z)))^p},$$

где $\varphi(z) < |y| < z$. Так как последний интеграл конечен при почти всех $z \in (0, 1)$, то $v(y, z) \to g(z)$, если $|y| \to \varphi(z)$. Доказательство леммы закончено.

Доказательство теоремы 4.1. Так же как и в теоремах предыдущего параграфа, можно, не ограничивая общности, считать, что U есть цилиндр $\{x \in \mathbf{R}^n\colon z \in (-1, 1),\ |y| < 1\}$ и что верно равенство (1.5), правую часть которого, как и выше, будем обозначать через Γ.

Пусть f — функция, определенная на Γ, и $[f]_\Gamma$, $|f|_\Gamma$, $\langle f \rangle_\Gamma$ — полунормы (1.2), (1.7) и (2.3) соответственно. Аналогично тому, как доказывалось соотношение (3.12), выводится эквивалентность

$$\iint\limits_{\{x, \xi \in \Gamma\colon r > M(z, \zeta)\}} (\varphi(z)\varphi(\zeta))^{2-n} \frac{|f(x) - f(\xi)|^p\, ds_x\, ds_\xi}{r(\log(1 + r/m(z, \zeta)))^p} + [f]^p_\Gamma \sim |f|^p_\Gamma + \langle f \rangle^p_\Gamma.$$

Таким образом, норма в правой части (4.1) эквивалентна норме

$$|||f||| = \|f\|_\Gamma + \langle f\rangle_\Gamma + \|f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)} + \\ + \left(\int_\Gamma |f(x)|^p (\varphi(z)\,|\log\varphi(z)|)^{1-p}\, ds_x\right)^{1/p}, \tag{4.11}$$

где σ — поверхность (3.7).

Пусть $u \in W_p^1(\Omega)$, $u|\partial\Omega = f$. Проверим оценку $|||f||| \leqslant c\|u\|_{W_p^1(\Omega)}$. Полагая $V = \{x \in U\colon z > 0\}$, отметим, что установленные в ходе доказательства теоремы 3.1 неравенства (3.4) и (3.8) остаются в силе. Оценка

$$\int_\Gamma (\varphi(z)\,|\log\varphi(z)|)^{1-p}\,|f(x)|^p\, ds_x \leqslant c\|u\|^p_{W_p^1(V\cap\Omega)}$$

выводится так же, как и (3.3), при помощи леммы 2.1. Из неравенств (3.4), (3.8) и теоремы 1.1 вытекает, что функция f является следом некоторой функции из $W_p^1(\mathbf{R}_n\setminus\overline{\Omega})$. Таким образом, функцию u можно продолжить из области Ω на $\mathbf{R}^n$, причем $\|u\|_{W_p^1(\mathbf{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{W_p^1(\Omega)}$.

Проверим оценку

$$\langle f\rangle_\Gamma \leqslant c\|u\|_{W_p^1(\Omega)}. \tag{4.12}$$

По лемме 2.3 достаточно проверить (4.12) для случая, когда $\Gamma = \{x \in \mathbf{R}^n\colon z \in (0, 1),\ |y| = \varphi(z)\}$. Пусть $x = (\varphi(z)\theta, z)$, $\xi = (\varphi(\zeta)\alpha, \zeta)$, α, $\theta \in S^{n-2}$. Полагая для краткости $K(z, \zeta) = |\zeta - z|^{-1}(\log(1 + |\zeta - z|/m(z, \zeta)))^{-p}$ и $L = \{z, \zeta \in (0, 1)\colon |\zeta - z| > M(z, \zeta)\}$, получим оценку (3.16). Так как

$$\int_{\{z\in(0,1)\colon (z,\zeta)\in L\}} K(z,\zeta)\, dz \leqslant \int_{|h|>\varphi(\zeta)} |h|^{-1}(\log(1 + |h|/\varphi(\zeta)))^{-p}\, dh \leqslant c,$$

то первое слагаемое в правой части (3.16) мажорируется величиной (3.17), которая так же, как и в доказательстве теоремы 3.2, оценивается сверху через $c\|u\|^p_{W_p^1(\Omega)}$.

Введем в $\mathbf{R}^{n-1}$ сферические координаты $y = (\rho, \theta)$. Рассуждая как и в теореме 3.2, найдем, что второе слагаемое в правой части (3.16) не превосходит $c(I_1 + I_2)$, где I_1 и I_2 определяются формулами (3.18), (3.19). Имеем

$$I_1 \leqslant c\int_{S^{n-2}} d\theta \int_0^1 dz \left\{\int_{\varphi(z)}^1 P(h, z)\, dh \left(\int_{\varphi(z)}^h |u_\rho(\rho, \theta, z)|\, d\rho\right)^p\right\},$$

где $P(h, z) = h^{-1}(\log(h/\varphi(z)))^{-p}$. Применяя лемму 4.1 к интегралу в фигурных скобках, получаем

$$I_1 \leqslant c\int_{S^{n-2}} d\theta \int_0^1 dz \int_{\varphi(z)}^1 |u_\rho(\rho, \theta, z)|^p \rho^{p-1}\, d\rho \leqslant c_1\|u\|^p_{W_p^1(\Omega)}.$$

Обратимся к оценке I_2. Здесь имеем

$$I_2 \leqslant c\int_{S^{n-2}} d\theta \iint_L |\zeta - z|^{-1}\, dz\, d\zeta \left|\int_z^\zeta u_t(|\zeta - z|, \theta, t)\, dt\right|^p,$$

и, следовательно, верны оценки (3.20) и (3.21). Так, установлено неравенство (4.12) и вместе с ним неравенство $|||f||| \leqslant c\|f\|_{TW_p^1(\Omega)}$, где $|||\cdot|||$ — норма (4.11)

Для доказательства оценки $|||f|||\geqslant c\|f\|_{TW_p^1(\Omega)}$ построим линейный оператор $f\to Ff$ со следующими свойствами: $\|Ff\|_{W_p^1(\Omega)}\leqslant c\,|||f|||$ и $Ff|\partial\Omega=f$. Пусть σ — поверхность (3.7). При помощи гладкой срезки ψ с носителем в Γ, $\psi=1$ в окрестности $\partial\Omega\setminus\sigma$, задача сводится к продолжению функции ψf внутрь Ω. Можно считать, что $\psi(x)$ зависит только от z при $x\in\Gamma$ и $\psi(x)=0$ при $z\geqslant\varepsilon$, где ε — параметр из (3.7). Тогда

$$c\langle\psi f\rangle_\Gamma^p\leqslant\langle f\rangle_\Gamma^p+\int_\Gamma\frac{|f(x)|^p\,ds_x}{\varphi(z)^{n-2}}\int_0^{z-\varphi(z)}\frac{|\psi(z)-\psi(\zeta)|^p\,d\zeta}{(z-\zeta)(\log(1+(z-\zeta)/\varphi(\zeta)))^p}.\tag{4.13}$$

Поскольку $\psi(z)=1$ при $z\in(0,\varepsilon/2)$, то второе слагаемое в правой части (4.13) не превосходит $c\|f\|^p_{L_p(\sigma\cap\Gamma)}$. Кроме того, верна оценка (1.10), и значит,

$$\langle\psi f\rangle_\Gamma+|\psi f|_\Gamma\leqslant c\left(\langle f\rangle_\Gamma+|f|_\Gamma+\|f\|_{L_p(\sigma\cap\Gamma)}\right).$$

Из последнего неравенства вытекает, что для доказательства теоремы достаточно продолжить внутрь Ω функцию f, определенную на $\partial\Omega$, для которой $\operatorname{supp}(f)\subset\{x\in\Gamma\colon z<\varepsilon\}$ и конечна норма

$$\|f\|=\langle f\rangle_\Gamma+|f|_\Gamma+\left(\int_\Gamma(\varphi(z)\,|\log\varphi(z)|)^{1-p}\,|f(x)|^p\,ds_x\right)^{1/p}.\tag{4.14}$$

Как и в теореме 3.2, продолжим сначала функцию f с поверхности Γ в область $G=\{x\in\mathbf{R}^n\colon z\in(0,1),\ |y|<\varphi(z)\}$. Здесь продолжение u дается формулой $u(x)=(\mathscr{E}f)(x)$, где $\mathscr{E}$ — оператор (1.15). При этом верна оценка (3.22). Полагая $S=\{x\in\mathbf{R}^n\colon z\in(0,1),\ |y|=\varphi(z)\}$, $g=u|S$ и применяя леммы 2.2 и 2.3, найдем, что

$$\|\lambda g\|_{L_p(S)}+\langle g\rangle_S\leqslant c\left(|f|_\Gamma+\langle f\rangle_\Gamma+\|\lambda f\|_{L_p(\Gamma)}\right),\tag{4.15}$$

где $\lambda(x)=(\varphi(z)\,|\log\varphi(z)|)^{1/p-1}$. По теореме 1.1 верна оценка $|g|_S\leqslant c\|u\|_{W_p^1(G)}$, где $|g|_S$ — полунорма (1.7) на поверхности S, поэтому неравенство (4.15) останется верным, если в левой его части добавить слагаемое $|g|_S$. Продолжим функцию g с поверхности S во внешность области G.

Пусть E — оператор продолжения с поверхности S на $\mathbf{R}^n$, построенный в лемме 2.5, а $\bar g(z)$ — среднее значение (2.9) функции g. Поскольку $(\mathscr{E}f)(x)=0$ при $z>\varepsilon+\varphi(\varepsilon)$ (см. доказательство теоремы 1.1), то можно считать, что $\bar g(z)=0$ при $z>1/2$. Положим $u(x)=(T\bar g)(x)+(E(g-\bar g))(x)$, $x\in D$, где T и D — оператор и область, определенные в лемме 4.2. Применяя леммы 2.5 и 4.2, получаем, что $u|S=g$ и

$$c\|u\|^p_{W_p^1(D)}\leqslant\int_0^1|g(z)|^p\,|\log\varphi(z)|^{1-p}\,dz+\int_S|g(x)-\bar g(z)|^p\varphi(z)^{1-p}\,ds_x+$$
$$+\int_0^1\int_0^1\frac{|\bar g(z)-\bar g(\zeta)|^p\,(m(z,\zeta)+|\zeta-z|)^{-1}\,dz\,d\zeta}{(\log(1+|\zeta-z|/m(z,\zeta)))^p}+|g-\bar g|_S^p.\tag{4.16}$$

Используем теперь лемму 2.4 и неравенство

$$\int_0^1|\bar g(z)|^p\,|\log\varphi(z)|^{1-p}\,dz\leqslant c\|\lambda g\|^p_{L_p(S)},$$

где $\lambda(x)=(\varphi(z)\,|\log\varphi(z)|)^{1/p-1}$. В результате оценим сверху правую часть (4.16) выражением

$$c\left(|g|_S+\langle g\rangle_S+\|\lambda g\|_{L_p(S)}\right)^p.\tag{4.17}$$

В силу неравенства (4.15) (в левую часть которого добавлено слагаемое $|g|_S$) величина (4.17) не превосходит $c\|f\|^p$, где $\|\cdot\|$ — норма (4.14). Итак, для функции f с носителем в множестве $\{x \in \Gamma\colon z < \varepsilon\}$ и конечной нормой (4.14) построен линейный оператор $f \to u$ со следующими свойствами: $u|\Gamma = f$, $u \in W_p^1(\widehat{D})$ и $\|u\|_{W_p^1(\widehat{D})} \leqslant c\|f\|$. Здесь $\widehat{D} = \{x \in \mathbf{R}^n\colon z \in (0, 1), |y| < z\}$. Обозначим через χ гладкую функцию на $\mathbf{R}^n$ с носителем в U, равную единице на множестве $\{x \in \mathbf{R}^n\colon |z| \leqslant \varepsilon, |y| \leqslant \varphi(\varepsilon)\}$, а через $\mathscr{E}$ — линейный непрерывный оператор продолжения: $W_p^1(\widehat{D}) \to W_p^1(\mathbf{R}^n)$ (см., например, [6]). Тогда функция $\chi\mathscr{E}u$ есть требуемое продолжение функции f с поверхности $\partial\Omega$ на $\mathbf{R}^n$. Доказательство теоремы закончено.

Следствие 4.1. *В условиях теоремы* 4.1 *соотношение* (4.1) *останется верным, если в правой его части опустить величину* $\|f\|^p_{L_p(\partial\Omega\setminus U)}$.

Это утверждение обосновывается так же, как и следствие 3.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gagliardo E.** Caratterizzazionic delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi difunzioni in piu variabili // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova.— 1957.— V. 27.— P. 284—305.
2. **Яковлев Г. Н.** Граничные свойства класса $W_p^{(l)}$ в областях с угловыми точками // Докл. АН СССР.— 1961.— Т. 140, № 1.— С. 73—76.
3. **Яковлев Г. Н.** Задача Дирихле для области с нелипшицевой границей // Дифференц. уравнения.— 1965.— Т. 1, № 8.— С. 1085—1098.
4. **Мазья В. Г.** О функциях с конечным интегралом Дирихле в области с вершиной пика на границе // Зап. научн. семин. ЛОМИ/Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. Ленингр. отд-ние.— 1983.— Т. 126.— С. 117—137.
5. **Соболев С. Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Л., 1950.— 255 с.
6. **Стейн Н.** Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.— М.: Мир, 1973.— 342 с.
7. **Мазья В. Г.** Пространства С. Л. Соболева.— Л., 1985.— 416 с.

Л. В. САБИНИН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И КВАЗИГРУППЫ

Посвящается Ю. Г. Решетняку

В настоящей статье мы дадим краткий обзор идей, методов и результатов нового направления научных исследований на стыке алгебры и геометрии —«Нелинейной геометрической алгебры»— и сформулируем некоторые проблемы. Основные структуры, появляющиеся здесь, возникают из тонкого анализа алгебраических основ дифференциальной геометрии, в первую очередь геометрии аффинной связности. Эти структуры относятся к неассоциативной алгебре, и наиболее важные из них связаны с теорией луп и квазигрупп. Весьма примечательно, что между Эрлангенской программой Клейна теоретико-группового обоснования геометрии и программой Римана — Леви — Чивита — Вейля (геометрия аффинной связности) проходит идеологический барьер. Попытки Э. Картана и других математиков теоретико-групповым образом (хотя и в обобщенном смысле) истолковать теорию аффинной связности (G-структуры) не являются убедительными. Это — лишь попытка обойти трудности. Между тем использование неассоциативной алгебры, и в первую очередь квазигрупп, позволяет прийти к единой точке зрения на обе программы. Поразительное между прочим высказывание можно найти в заключительных строчках сочинения Н. И. Лобачевского «О началах геометрии» [1], вот оно: «Однако же можно предвидеть, что перемены