СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Об основаниях** геометрии.— М.: ГИТТЛ, 1956.
2. **Сабинин Л. В.** Методы неассоциативной алгебры в дифференциальной геометрии // Основы дифференциальной геометрии/Кобаяси Ш., Номидзу К.— М.: Наука, 1981.— Т. I. Добавление.— С. 293—339.
3. **Сабинин Л. В.** К эквивалентности категорий луп и однородных пространств // Докл. АН СССР.— 1972.— Т. 205, № 3.— С. 533—536.
4. **Сабинин Л. В.** О геометрии луп // Мат. заметки.— 1972.— Т. 12, № 5.— С. 605.
5. **Kikkawa M.** On local loops in affine manifolds // J. Sci. Hiroshima Univ.— 1964.— V. 28.— P. 199—207.
6. **Сабинин Л. В.** О геометрии луп // Тез. 5-й конф. по современным проблемам дифференциальной геометрии, Самарканд, окт. 1972 г.— Самарканд, 1972.
7. **Сабинин Л. В.** Одули как новый подход к геометрии со связностью // Докл. АН СССР.— 1977.— Т. 233, № 5.— С. 800—803.
8. **Сабинин Л. В.** Касательные аффинные связности лупускулярных структур // Ткани и квазигруппы.— Калинин, 1986.— С. 86—89.
9. **Сабинин Л. В., Михеев П. О.** О дифференциальной геометрии луп Бола // Докл. АН СССР.— 1985.— Т. 281, № 5.— С. 1055—1057.
10. **Сабинин Л. В., Михеев П. О.** Теория гладких луп Бола.— М., 1985.
11. **Сабинин Л. В., Михеев П. О.** О локальных аналитических лупах и соответствующих им гипералгебрах // Матер. 9-й конф. молодых ученых: математика, физика, химия.: Деп. в ВИНИТИ, 25.09.86, № 6848 — В86.— С. 34—54.
12. **Сабинин Л. В., Михеев П. О.** Об инфинитезимальной теории локальных аналитических луп // Докл. АН СССР.— 1980.— Т. 279, № 4.— С. 801—804.
13. **Сабинин Л. В.** Дифференциальные уравнения гладких луп // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу.— М.: Изд-во МГУ, 1988.— Вып. 23.
14. **Сабинин Л. В.** Геометрические одули // Ткани и квазигруппы.— Калинин, 1987.
15. **Акивис М. А.** Дифференциальная геометрия тканей // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии.— М.: ВИНИТИ, 1983.— Т. 15.— С. 187—213.
16. **Акивис М. А., Герасименко С. А.** Многомерные ткани Боля // Там же.— М.: ВИНИТИ, 1986.— Т. 18.— С. 73—103.
17. **Batalin I. A.** Qasigroup construction and first ciass constraints // J. Math. Phys.— 1981.— V. 22.— P. 1837—1850.
18. **Нестеров А. И., Степаненко В. А.** О методах неассоциативной алгебры в геометрии и физике.— Красноярск, 1986.— 48 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т физики; № 400Ф).
19. **Белоусов В. Д.** Основы теории квазигрупп и луп.— М.: Наука, 1967.
20. **Феденко А. С.** Пространства с симметриями.— Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1977.
21. **Ковальский О.** Обобщенные симметрические пространства.— М.: Мир, 1984.
22. **Ledger A. J.** Espaces de Riemann symetriquess generalises // C. r. Acad. sci.— 1967.— V. 264.— P. 947—948.
23. **Сбитнева Л. В.** Совершенные S-структуры // Дифференциальная геометрия многообразий фигур.— Калинин: КГУ, 1979.— Вып. 10.— С. 97—103.
24. **Сбитнева Л. В.** Об алгебрах Ли совершенных S-пространств // Ткани и квазигруппы.— Калинин: КГУ, 1982.— С. 128—133.
25. **Nono J.** Sur les Familles Triple Locales de Transformations Locales de Lie // J. Sci. Hiroshima Univ.— 1961.— V. 25.— P. 357—366.
26. **Александров А. Д., Берестовский В. Н., Николаев И. Г.** Обобщенные римановы пространства // Успехи мат. наук.— 1986.— Т. 41, № 3.— С. 3—44.
27. **Матвеев О. А.** О многообразиях с геодезическими // Ткани и квазигруппы.— Калинин: КГУ, 1986.— С. 44—49.

В. А. ШАРАФУТДИНОВ

ЛУЧЕВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

Посвящается Ю. Г. Решетняку
к его шестидесятилетию

Лучевым преобразованием определенного на $\mathbf{R}^n$ симметричного тензорного поля $f=(f_{i_1\ldots i_m})$ называется функция $If(x, \xi)$, определяемая для $x\in\mathbf{R}^n$, $0\neq\xi\in\mathbf{R}^n$ равенством

$$If(x,\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{i_1\ldots i_m}(x+t\xi)\,\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_m}\,dt.$$

Название заимствовано из [1], где преобразование рассмотрено при $m=0$ (отметим, что английский оригинал этого термина «The X-ray transform» более точно отражает связь этого термина с задачами томографии). Лучевое преобразование представляет интерес с точки зрения томографии анизотропных сред и некоторых задач интегральной геометрии. Для него может быть развита теория, во многом аналогичная классической теории преобразования Радона [1, 2], с тем, однако, существенным отличием, что оператор I при $m>0$ имеет ненулевое ядро. Подробное исследование ядра I и тесно связанного с ним оператора Сен-Венана проведено в [3—7]. В настоящей работе приводятся описание образа, формула обращения и формула Планшереля для лучевого преобразования I.

§ 1. Лучевое преобразование и его связь с преобразованием Фурье

В этом параграфе мы сначала условимся о терминологии и обозначениях, относящихся к тензорной алгебре. Затем введем различные пространства тензорных полей и определим два основных дифференциальных оператора, необходимых для изучения лучевого преобразования: оператор внутреннего дифференцирования и дивергенцию. После этого определим лучевое преобразование и установим его связь с преобразованием Фурье.

В дальнейшем считаем $n\geqslant 2$. Для целого $m\geqslant 0$ обозначим $\mathbf{T}^m=\mathbf{T}^m(\mathbf{R}^n)$ комплексное векторное пространство всех $\mathbf{R}$ — линейных по каждому аргументу функций $\underbrace{\mathbf{R}^n\times\ldots\times\mathbf{R}^n}_{m}\to\mathbf{C}$, а через $\mathbf{S}^m=\mathbf{S}^m(\mathbf{R}^n)$ — подпространство $\mathbf{T}^m$, состоящее из симметричных по всем аргументам функций. Элементы $\mathbf{T}^m(\mathbf{S}^m)$ называются *тензорами* (*симметричными тензорами*) степени m на $\mathbf{R}^n$. Пусть σ: $\mathbf{T}^m\to\mathbf{S}^m$ — каноническая проекция (симметрирование), определяемая равенством

$$\sigma f(x_1,\ldots,x_m)=\frac{1}{m!}\sum_{\pi\in\Pi_m} f(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(m)}),\tag{1.1}$$

где суммирование ведется по множеству Π_m всех перестановок множества $\{1,\ldots,m\}$. Пространство $\mathbf{T}^1=\mathbf{S}^1$ отождествляем с $\mathbf{C}^n$ посредством равенства $(x+iy)(z)=\langle x,z\rangle+i\langle y,z\rangle$ для $x,y,z\in\mathbf{R}^n$; считаем также, что $\mathbf{T}^0=\mathbf{S}^0=\mathbf{C}$, $\mathbf{T}^m=\mathbf{S}^m=0$ при $m<0$.

Если $e_1,\ldots,e_n$ — ортонормированный базис в $\mathbf{R}^n$ (только такие базисы мы будем рассматривать), то числа $f_{i_1\ldots i_m}=f(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})$ называются *координатами* или *компонентами тензора* $f\in\mathbf{T}^m$ относительно данного базиса. Предполагая выбор базиса ясным из контекста, этот факт будем обозначать записью $f=(f_{i_1\ldots i_m})$. Тензор принадлежит $\mathbf{S}^m$ тогда и только тогда, когда его компоненты симметричны по всем индексам. Наряду с оператором (1.1) полной симметризации нам придется пользоваться симметризацией по части индексов, которая в координатах определяется равенством

$$\sigma(i_1\ldots i_p)f_{i_1\ldots i_m}=\frac{1}{p!}\sum_{\pi\in\Pi_p} f_{i_{\pi(1)}\ldots i_{\pi(p)}i_{p+1}\ldots i_m}.$$

Симметрирование по всем индексам тензора обозначаем без указания аргументов, т. е. через σ.

Скалярное произведение, определенное на $\mathbf{T}^m$ равенством $\langle f,g\rangle=f_{i_1\ldots i_m}\overline{g_{i_1\ldots i_m}}$ (черта означает комплексное сопряжение), очевидно, не зависит от выбора ортонормированного базиса. В этой формуле, как и всюду ниже, по повторяющимся в одном мономе индексам подразумевается суммирование от 1 до n.

Для $f \in S^k$, $g \in S^m$ через $fg \in S^{k+m}$ обозначаем симметричное произведение, определяемое равенством $fg = \sigma(f \otimes g)$, а через $f/g \in S^{k-m}$ — тензор, определяемый при $k \geqslant m$ равенством $(f/g)_{i_1 \ldots i_{k-m}} = f_{i_1 \ldots i_k} g_{i_{k-m+1} \ldots i_k}$; при $k < m$ полагаем $f/g = 0$. Для фиксированного $g \in S^m$ через i_g: $S^k \to S^{k+m}$, j_g: $S^k \to S^{k-m}$ обозначаем соответственно операторы умножения и деления на g, т. е. $i_g f = fg$, $j_g f = f/g$. Пусть $\delta = (\delta_{ij}) \in S^2$ — символ Кронекера, т. е. $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Операторы i_δ и j_δ будут играть особую роль, поэтому мы их выделим, положив $i = i_\delta$, $j = j_\delta$.

Для $f \in S^m$, $\xi \in \mathbf{R}^n$ справедливо равенство $\langle f, \xi^m \rangle = f_{i_1 \ldots i_m} \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_m}$ которым мы будем постоянно пользоваться для сокращения различных формул.

Для открытого множества $U \subseteq \mathbf{R}^n$ обозначим через $\mathscr{D}'(U)$ пространство распределений (обобщенных функций) на U.

Для произвольного пространства $\mathscr{A} \in \mathscr{D}'(U)$ положим $\mathscr{A}(S^m;\, U) = \mathscr{A} \otimes S^m$. Для $f \in \mathscr{A}(S^m;\, U)$ определены компоненты $f_{i_1 \ldots i_m} \in \mathscr{A}$, этот факт по-прежнему обозначаем записью $f = (f_{i_1 \ldots i_m})$. Элементы пространства $\mathscr{A}(S^m;\, U)$ называются *симметричными тензорными полями степени m на U с компонентами из $\mathscr{A}$*. Обозначение $\mathscr{A}(S^m;\, \mathbf{R}^n)$ сокращаем до $\mathscr{A}(S^m)$. По этой схеме определяются:

$C^\infty(S^m;\, U)$ — пространство гладких симметричных тензорных полей степени m на U,

$\mathscr{S}(S^m)$ — пространство гладких быстро убывающих полей на $\mathbf{R}^n$ ($\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ — пространство Шварца гладких на $\mathbf{R}^n$ функций, все производные которых быстро убывают на бесконечности),

$L_2(S^m)$ — пространство квадратично интегрируемых полей и др.

Скалярное произведение на $L_2(S^m)$ определим формулой

$$(f, g)_{L_2(S^m)} = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \langle f(x), g(x) \rangle\, dx. \tag{1.2}$$

Нижний индекс в этом обозначении будем опускать, если это не может привести к недоразумению.

Оператор внутреннего дифференцирования d: $C^\infty(S^m) \to C^\infty(S^{m+1})$ и дивергенция δ: $C^\infty(S^{m+1}) \to C^\infty(S^m)$ определяются в координатах равенствами

$$(df)_{i_1 \ldots i_{m+1}} = \sigma\left(\partial f_{i_1 \ldots i_m} / \partial x_{i_{m+1}}\right), \quad (\delta f)_{i_1 \ldots i_m} = \sum_{j=1}^{n} \partial f_{i_1 \ldots i_m j} / \partial x_j. \tag{1.3}$$

Это название — оператор внутреннего дифференцирования — было введено в [8] по аналогии с оператором внешнего дифференцирования на кососимметричных полях, который получается путем замены в (1.3) симметрирования на альтернирование. Легко видеть, что d и $-\delta$ формально сопряжены относительно скалярного произведения (1.2). Более того, для компактной области $G \subset \mathbf{R}^n$, ограниченной кусочно-гладкой гиперповерхностью ∂G и любых $f \in C^1(S^m;\, \overline{G})$, $g \in C^1(S^{m+1};\, \overline{G})$ справедлива формула Грина

$$\int\limits_G \left(\langle df, g \rangle + \langle f, \delta g \rangle\right) dx = \int\limits_{\partial G} \langle i_\nu f, g \rangle\, d\sigma, \tag{1.4}$$

в которой ν — единичный вектор внешней нормали к ∂G, $d\sigma$ — элемент площади на ∂G. Доказательство (1.4) приведено в [9].

Пусть $\mathbf{R}_0^n = \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. *Лучевым преобразованием поля* $f \in C^\infty(S^m)$ будем называть функцию If, определенную на $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_0^n$ равенством

$$If(x, \xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle f(x + t\xi), \xi^m \rangle\, dt \tag{1.5}$$

при условии, что интеграл сходится. Непосредственно из определения следует, что функция $\psi(x, \xi) = If$ однородна по второму аргументу:

$$\psi(x, t\xi) = \frac{t^m}{|t|}\psi(x, \xi) \quad (0 \neq t \in \mathbf{R}), \tag{1.6}$$

а по первому аргументу удовлетворяет тождеству

$$\psi(x + t\xi, \xi) = \psi(x, \xi) \quad (t \in \mathbf{R}), \tag{1.7}$$

которое означает, что она постоянна на прямой, проходящей через точку x в направлении ξ.

Пусть $T\Omega = \{(x, \xi) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n | \langle x, \xi\rangle = 0, |\xi| = 1\}$ — пространство касательного расслоения единичной сферы $\Omega = \{\xi \in \mathbf{R}^n | |\xi| = 1\}$ (здесь и далее $|f| = \langle f, f\rangle^{1/2}$). Из (1.6), (1.7) следует, что функция ψ восстанавливается по своему следу $\varphi = \psi|_{T\Omega}$ на $T\Omega$ по формуле

$$\psi(x, \xi) = |\xi|^{m-1}\varphi\left(x - \frac{\langle x, \xi\rangle}{|\xi|^2}\xi, \frac{\xi}{|\xi|}\right). \tag{1.8}$$

В разных параграфах этой работы лучевое преобразование If поля f трактуется по-разному: либо как функция на $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_0$, либо как функция на $T\Omega$. Какая из этих точек зрения принята в данный момент, будет ясно из контекста. В силу (1.8) эти точки зрения эквивалентны.

Отметим, что оператор I имеет ненулевое ядро. Действительно, если поле $v \in C^\infty(\mathbf{S}^{m-1})$ удовлетворяет условию $v(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, то

$$(I\,dv)(x, \xi) = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{d}{dt}\langle v(x + t\xi), \xi^{m-1}\rangle\,dt = 0.$$

При определенных условиях на поведение поля $f(x)$ на бесконечности справедливо обратное утверждение: из равенства $If = 0$ следует существование такого v, что $f = dv$. Так, например, в [4, 7] это утверждение доказано для финитных f. Ниже аналог этого утверждения будет установлен для $f \in L_2(\mathbf{S}^m)$.

Пусть $\mathscr{S}(T\Omega)$ — пространство гладких на $T\Omega$ функций $\varphi(x, \xi)$, все производные которых быстро убывают по первому аргументу. Преобразование Фурье F: $\varphi \to \widehat{\varphi}$, определенное на $\mathscr{S}(T\Omega)$ формулой

$$\widehat{\varphi}(y, \xi) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}}\int_{\xi^\perp}\varphi(x, \xi)\,e^{-i\langle y, x\rangle}\,dx \qquad ((y, \xi) \in T\Omega),$$

где $\xi^\perp = \{x \in \mathbf{R}^n | \langle x, \xi\rangle = 0\}$, dx — $(n-1)$-мерная мера Лебега на $\xi^\perp$, взаимно однозначно отображает $\mathscr{S}(T\Omega)$ на себя. Легко видеть, что для поля $f \in \mathscr{S}(\mathbf{S}^m)$ функция If принадлежит $\mathscr{S}(T\Omega)$. Тем самым определен оператор I: $\mathscr{S}(\mathbf{S}^m) \to \mathscr{S}(T\Omega)$.

Преобразование Фурье F: $\mathscr{S}(\mathbf{S}^m) \to \mathscr{S}(\mathbf{S}^m)$ определим покомпонентно, т. е. $(Ff)_{i_1\ldots i_m} = Ff_{i_1\ldots i_m}$. Для дальнейшего существенна связь между лучевым преобразованием и преобразованием Фурье, которая для $f \in \mathscr{S}(\mathbf{S}^m)$ выражается равенством

$$\widehat{If}(y, \xi) = (2\pi)^{1/2}\langle\widehat{f}(y), \xi^m\rangle \quad ((y, \xi) \in T\Omega). \tag{1.9}$$

Действительно, пусть $|\xi| = 1$. В интеграле

$$\langle\widehat{f}(y), \xi^m\rangle = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbf{R}^n}\langle f(x), \xi^m\rangle\,e^{-i\langle y, x\rangle}\,dx$$

сделаем замену переменной интегрирования в соответствии с равенством $x = x' + t\xi$, $x' \in \xi^\perp$. Тогда получим

$$\langle\widehat{f}(y), \xi^m\rangle = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\xi^\perp}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\langle f(x' + t\xi), \xi^m\rangle\,e^{-it\langle y, \xi\rangle}\,dt\right]e^{-i\langle y, x'\rangle}\,dx'.$$

Если $\langle y, \xi\rangle = 0$, т. е. $(y, \xi) \in T\Omega$, то предыдущее равенство дает

$$\langle \widehat{f}(y), \xi^m\rangle = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\xi^\perp} If(x, \xi)\, e^{-i\langle y, x\rangle}\, dx,$$

что совпадает с (1.9).

§ 2. Разложение тензорного поля на бездивергентную и потенциальную части

Поле $f \in C^\infty(\mathbf{S}^m)$ называется *потенциальным*, если оно представимо в виде $f = dv$ для некоторого $v \in C^\infty(\mathbf{S}^{m-1})$, такого, что $v(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Если f потенциально, то $If = 0$, как мы показали выше. Поэтому если мы сумеем найти подпространство $E \subset C^\infty(\mathbf{S}^m)$, которое не пересекается с пространством потенциальных полей и в сумме с ним дает все $C^\infty(\mathbf{S}^m)$, то оператор I будет однозначно определяться своим ограничением на E. Поскольку сопряженным к d является $-\delta$, то в качестве E естественно взять пространство *бездивергентных*, т. е. удовлетворяющих уравнению $\delta f = 0$, полей.

Хорошо известно, что векторное поле разлагается в сумму соленоидального (бездивергентного) и потенциального полей. Если поля рассматриваются в ограниченной области, то для единственности такого разложения достаточно потребовать, чтобы потенциал обращался в нуль на границе области. Если же поля рассматриваются на всем $\mathbf{R}^n$, то надо потребовать, чтобы оба слагаемых стремились к нулю на бесконечности. Оказывается, что этот результат справедлив для симметричных тензорных полей произвольной степени. Для случая ограниченной области он доказан в [8]. В этом параграфе мы установим его для полей, рассматриваемых на всем $\mathbf{R}^n$. Используемый метод доказательства основан на следующем замечании: если к соотношениям $g = f + dv$, $\delta f = 0$ применить преобразование Фурье, то они перейдут в уравнения $\widehat{g}(y) = \widehat{f}(y) + \sqrt{-1}\, i_y \widehat{v}(y)$, $j_y \widehat{f}(y) = 0$, которые легко разрешить относительно $\widehat{f}(y)$ и $\widehat{v}(y)$.

Лемма 2.1. *Для любых $g \in \mathbf{S}^m$ и $x \in \mathbf{R}^0_n$ существуют такие однозначно определенные $f \in \mathbf{S}^m$ и $v \in \mathbf{S}^{m-1}$, что*

$$g = f + i_x v, \quad j_x f = 0. \tag{2.1}$$

При этом f выражается через x и g по формуле

$$f_{i_1 \ldots i_m} = \lambda_{i_1 \ldots i_m j_1 \ldots j_m}(x)\, g_{j_1 \ldots j_m}, \tag{2.2}$$

в которой

$$\lambda_{i_1 \ldots i_m j_1 \ldots j_m}(x) = \left(\delta_{i_1 j_1} - x_{i_1} x_{j_1}/|x|^2\right) \ldots \left(\delta_{i_m j_m} - x_{i_m} x_{j_m}/|x|^2\right). \tag{2.3}$$

Если $\xi \in \mathbf{R}^n$ и $\langle x, \xi\rangle = 0$, то

$$\langle f, \xi^m\rangle = \langle g, \xi^m\rangle \qquad (\langle x, \xi\rangle = 0). \tag{2.4}$$

Доказательство. Операторы i_x: $\mathbf{S}^{m-1} \to \mathbf{S}^m$ и j_x: $\mathbf{S}^m \to \mathbf{S}^{m-1}$, как легко видеть, сопряжены и, следовательно, имеет место разложение $\mathbf{S}^m = \operatorname{Ker} j_x \oplus \operatorname{Im} i_x$, слагаемые которого ортогональны друг другу. Отсюда вытекает существование и единственность f и v, удовлетворяющих (2.1). Справедливость (2.2) станет очевидной, если в правой части равенства (2.3) раскрыть скобки и полученное выражение подставить в (2.2). Соотношение (2.4) следует из (2.2) и (2.3). Лемма доказана.

Если для поля $g \in C^\infty(\mathbf{S}^m; \mathbf{R}^n_0)$ разложение (2.1) осуществить при всех $x \in \mathbf{R}^n_0$, т. е.

$$g(x) = f(x) + i_x v(x), \quad j_x f(x) = 0, \tag{2.5}$$

то $f \in C^\infty(\mathbf{S}^m; \mathbf{R}^n_0)$, $v \in C^\infty(\mathbf{S}^{m-1}; \mathbf{R}^n_0)$, как видно из (2.2). Будем называть поля f и $i_x v$, удовлетворяющие (2.5), соответственно *тангенциальной* и *радиальной компонентами поля* g. Это название объясняется тем, что при $m=1$ вектор $f(x)$ касателен к сфере $|x| = \mathrm{const}$, а вектор $i_x v(x)$ параллелен x.

Теперь приведем теорему о разложении для поля $g \in \mathcal{S}(\mathbf{S}^m)$.

Теорема 2.1. *Для любого поля $g \in \mathcal{S}(\mathbf{S}^m)$ существуют такие однозначно определенные поля $f \in C^\infty(\mathbf{S}^m)$ и $v \in C^\infty(\mathbf{S}^{m-1})$, что*

$$g = f + dv, \quad \delta f = 0, \tag{2.6}$$

$$f(x) \to 0, \quad v(x) \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{2.7}$$

Эти поля удовлетворяют оценкам

$$\begin{gathered} |f(x)| \leqslant C(1+|x|)^{1-n}; \quad |v(x)| \leqslant C(1+|x|)^{2-n}; \\ |dv(x)| \leqslant C(1+|x|)^{1-n}. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Поля f и dv принадлежат $L_2(\mathbf{S}^m)$. Преобразование Фурье $\widehat{f}(y)$ поля $f(x)$ принадлежит $C^\infty(\widetilde{\mathbf{S}}^m; \mathbf{R}^n_0)$, ограничено на $\mathbf{R}^n$ и быстро убывает при $|y| \to \infty$.

Доказательство. Существование. Пусть $\widehat{g}(y)$ — преобразование Фурье поля $g(x)$. Согласно лемме 2.1 для любого $y \neq 0$ существуют такие однозначно определенные $\widehat{f}(y) \in \mathbf{S}^m$, $\widehat{v}(y) \in \mathbf{S}^{m-1}$, что

$$\widehat{g}(y) = \widehat{f}(y) + i_y \widehat{v}(y), \quad j_y \widehat{f}(y) = 0. \tag{2.9}$$

Исходя из (2.2), (2.3), индукцией по $|\alpha|$ убеждаемся в справедливости представлений

$$D^\alpha \widehat{f}_{i_1 \ldots i_m}(y) = |y|^{-2|\alpha|-m} \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} P_{\alpha\beta i_1 \ldots i_m j_1 \ldots j_m}(y)\, D^\beta \widehat{g}_{j_1 \ldots j_m}(y),$$

$$D^\alpha \widehat{v}_{i_1 \ldots i_{m-1}}(y) = |y|^{-2|\alpha|-m} \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} Q_{\alpha\beta i_1 \ldots i_{m-1} j_1 \ldots j_m}(y)\, D^\beta \widehat{g}_{j_1 \ldots j_m}(y),$$

в которых $P_{\alpha\beta i_1 \ldots i_m j_1 \ldots j_m}$ $(Q_{\alpha\beta i_1 \ldots i_{m-1} j_1 \ldots j_m})$ — однородные многочлены степени $2m + |\alpha| + |\beta|$ $(2m + |\alpha| + |\beta| - 1)$. Из этих представлений следует, что поля $\widehat{f}(y)$, $\widehat{v}(y)$ — гладкие на $\mathbf{R}^n_0$, быстро убывают при $|y| \to \infty$, а при $|y| \leqslant 1$ удовлетворяют оценкам

$$|D^\alpha \widehat{f}(y)| \leqslant C|y|^{-|\alpha|}, \quad |D^\alpha \widehat{v}(y)| \leqslant C|y|^{-|\alpha|-1}. \tag{2.10}$$

Следовательно, $\widehat{f}$, $i_y \widehat{v} \in L_2(\mathbf{S}^m)$. Из (2.10) вытекает, что поле $D^\alpha \widehat{f}$ $(D^\alpha \widehat{v})$ суммируемо на $\mathbf{R}^n$ при $|\alpha| \leqslant n-1$ $(|\alpha| \leqslant n-2)$.

Пусть $f(x) = \bar{F}[\widehat{f}(y)]$, $v(x) = \mathrm{i}\bar{F}[\widehat{v}(y)]$, где $\bar{F}$ — обратное преобразование Фурье. Тогда $f \in C^\infty(\mathbf{S}^m)$, $v \in C^\infty(\mathbf{S}^{m-1})$, поскольку поля $\widehat{f}(y)$, $\widehat{v}(y)$ быстро убывают при $|y| \to \infty$. Применяя $\bar{F}$ к (2.9), получаем (2.6). Соотношения (2.7) выполняются, так как $\widehat{f}(y)$, $\widehat{v}(y)$ суммируемы на $\mathbf{R}^n$. Оценки (2.8) имеют место ввиду установленной суммируемости $D^\alpha \widehat{f}(y)$, $D^\alpha \widehat{v}(y)$. Наконец, из того, что $\widehat{f}$, $i_y \widehat{v} \in L_2(\mathbf{S}^m)$, следует в силу теоремы Фурье — Планшереля, что f, $dv \in L_2(\mathbf{S}^m)$.

Единственность. Пусть $f \in C^\infty(\mathbf{S}^m)$, $v \in C^\infty(\mathbf{S}^{m-1})$ удовлетворяют (2.7) и соотношениям $f + dv = 0$, $\delta f = 0$. В частности, $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{S}^m)$, $v \in \mathcal{S}'(\mathbf{S}^{m-1})$, где $\mathcal{S}'$ — пространство умеренных распределений на $\mathbf{R}^n$, и поэтому определены их Фурье-образы $\widehat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbf{S}^m)$, $\widehat{v} \in \mathcal{S}'(\mathbf{S}^{m-1})$. Применяя преобразование Фурье к равенствам $f + dv = 0$, $\delta f = 0$, получаем $\widehat{f}(y) + i_y \widehat{v}(y) = 0$, $j_y \widehat{f}(y) = 0$. Отсюда с помощью леммы 2.1 убеждаемся, что $\widehat{f}\,\big|_{\mathbf{R}^n_0} = \widehat{v}\,\big|_{\mathbf{R}^n_0} = 0$, т. е. носитель этих распределений сосредоточен в нуле. Следовательно, каждая из компонент этих распределений есть конечная линейная комбинация производных δ-функции. Поэтому ввиду (2.7) $f \equiv v \equiv 0$. Теорема доказана.

Поля f и dv, удовлетворяющие (2.6), (2.7), будем называть соответственно *бездивергентной* и *потенциальной частью поля* g.

Нам понадобится еще один вариант теоремы о разложении. Чтобы его сформулировать, приведем сначала два определения. Пусть

$K(\mathbf{S}^m)$ — замыкание в $L_2(\mathbf{S}^m)$ множества тех $f \in C^\infty(\mathbf{S}^m) \cap L_2(\mathbf{S}^m)$, которые удовлетворяют уравнению $\delta f = 0$ и оценке $|f(x)| \leqslant C(1+|x|)^{1-n}$,

$D(\mathbf{S}^m)$ — замыкание в $L_2(\mathbf{S}^m)$ множества тех $f \in L_2(\mathbf{S}^m)$, которые представимы в виде $f = dv$ для некоторого $v \in C^\infty(\mathbf{S}^{m-1})$, удовлетворяющего условию $v(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$.

Теорема 2.2. *Имеет место разложение*

$$L_2(\mathbf{S}^m) = K(\mathbf{S}^m) \oplus D(\mathbf{S}^m), \tag{2.11}$$

слагаемые которого ортогональны друг другу.

Согласно этой теореме любое поле $f \in L_2(\mathbf{S}^m)$ единственным образом представимо в виде $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in K(\mathbf{S}^m)$, $f_2 \in D(\mathbf{S}^m)$. Будем называть f_1 *бездивергентной*, а f_2 *потенциальной* частью поля f.

В связи с приведенным определением пространств $K(\mathbf{S}^m)$ и $D(\mathbf{S}^m)$ сделаем следующее замечание, которое читатель при желании может пропустить без ущерба для понимания дальнейшего. Пусть $D'(\mathbf{S}^m)$ — замыкание в $L_2(\mathbf{S}^m)$ множества $\{dv \mid v \in C_0^\infty(\mathbf{S}^{m-1})\}$; $D''(\mathbf{S}^m) = \{f \in L_2(\mathbf{S}^m) \mid f = dv,\ v \in \mathcal{D}'(\mathbf{S}^{m-1})\}$; $K'(\mathbf{S}^m)$ — замыкание в $L_2(\mathbf{S}^m)$ множества $\{f \in C_0^\infty(\mathbf{S}^m) \mid \delta f = 0\}$; $K''(\mathbf{S}^m) = \left\{f \in L_2(\mathbf{S}^m) \mid (f, dv)_{L_2(\mathbf{S}^m)} = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbf{S}^{m-1})\right\}$. Очевидно, что $K'(\mathbf{S}^m) \subset K(\mathbf{S}^m) \subset K''(\mathbf{S}^m)$; $D'(\mathbf{S}^m) \subset D(\mathbf{S}^m) \subset D''(\mathbf{S}^m)$. На самом деле все эти включения являются равенствами, т. е.

$$K'(\mathbf{S}^m) = K(\mathbf{S}^m) = K''(\mathbf{S}^m); \quad D'(\mathbf{S}^m) = D(\mathbf{S}^m) = D''(\mathbf{S}^m). \tag{2.12}$$

Для $m = 1$ равенства (2.12), как заметили В. Н. Масленникова и М. Е. Боговский [10], следуют из одного результата С. Л. Соболева [11]. Примерно так же (2.12) доказывается для произвольного m. В силу (2.12) приведенные определения пространств $K'(\mathbf{S}^m)$, $D'(\mathbf{S}^m)$ можно считать эквивалентными (и более простыми) определениями $K(\mathbf{S}^m)$, $D(\mathbf{S}^m)$. Однако мы далее не будем пользоваться этим утверждением, поскольку для целей настоящей работы наиболее подходящим является определение $K(\mathbf{S}^m)$ и $D(\mathbf{S}^m)$, приведенное перед формулировкой теоремы 2.2.

Доказательство теоремы 2.2. Установим сначала, что слагаемые разложения (2.11) ортогональны друг другу. Пусть $f \in K(\mathbf{S}^m)$, $g \in D(\mathbf{S}^m)$, тогда найдутся такие $f_k \in C^\infty(\mathbf{S}^m) \cap L_2(\mathbf{S}^m)$ и $v_k \in C^\infty(\mathbf{S}^{m-1})$ $(k = 1, 2, \ldots)$, что $\delta f_k = 0$, $dv_k \in L_2(\mathbf{S}^m)$,

$$|f_k(x)| \leqslant C_k(1+|x|)^{1-n}, \quad v_k(x) \to 0 \text{ при } |x| \to \infty \tag{2.13}$$

и $f_k \to f$, $dv_k \to g$ при $k \to \infty$. Положив в (1.4) $f = f_k$, $g = dv_k$, $G = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| \leqslant A\}$, получим

$$\int\limits_{|x| \leqslant A} \langle f_k, dv_k \rangle \, dx = \int\limits_{|x| = A} \langle f_k, i_\nu v_k \rangle \, d\sigma.$$

Правая часть этого равенства стремится к нулю при $A \to \infty$, как видно из (2.13). Поэтому, перейдя к пределу по $A \to \infty$, получим $(f_k, dv_k)_{L_2(\mathbf{S}^m)} = 0$. Перейдя в последнем равенстве к пределу по $k \to \infty$, убедимся, что $(f, g)_{L_2(\mathbf{S}^m)} = 0$.

Установим теперь, что любой $g \in L_2(\mathbf{S}^m)$ представим в виде суммы двух элементов из $K(\mathbf{S}^m)$ и $D(\mathbf{S}^m)$ соответственно. Для этого выберем последовательность $g_k \in \mathcal{S}(\mathbf{S}^m)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся к g в $L_2(\mathbf{S}^m)$

при $k \to \infty$. Согласно теореме 2.1 для каждого k возможно представление $g_k = f_k + dv_k$, где $f_k \in C^\infty(\mathbf{S}^m) \cap L_2(\mathbf{S}^m)$, $v_k \in C^\infty(\mathbf{S}^{m-1})$, $\delta f_k = 0$, $dv_k \in L_2(\mathbf{S}^m)$ и выполнено (2.13). Покажем, что последовательности f_k и dv_k фундаментальны в $L_2(\mathbf{S}^m)$. Действительно, $g_k - g_l = (f_k - f_l) + d(v_k - v_l)$ при любых k, l. Слагаемые из правой части последнего равенства ортогональны друг другу и, следовательно, $\|g_k - g_l\|^2 = \|f_k - f_l\|^2 + \|dv_k - dv_l\|^2$. В силу этого равенства и фундаментальности g_k последовательности f_k, dv_k фундаментальны и потому сходятся к некоторым элементам f, $h \in L_2(\mathbf{S}^m)$ соответственно. Из перечисленных свойств f_k, v_k вытекает, что $f \in K(\mathbf{S}^m)$, $h \in D(\mathbf{S}^m)$. Переходя в равенстве $g_k = f_k + dv_k$ к пределу по $k \to \infty$, получаем $g = f + h$. Теорема доказана.

§ 3. Описание образа лучевого преобразования

Теорема 3.1. *Пусть $n \geqslant 3$. Для того чтобы функция $\varphi(x, \xi) \in \mathscr{S}(T\Omega)$ была представима в виде $\varphi = If$ для некоторого поля $f \in \mathscr{S}(\mathbf{S}^m)$, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:*

1) $\varphi(x, -\xi) = (-1)^m \varphi(x, \xi)$;

2) *определенная на $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_0^n$ равенством* (1.8) *функция $\psi(x, \xi)$ должна удовлетворять уравнениям* ($1 \leqslant i_1, j_1, \ldots, i_{m+1}, j_{m+1} \leqslant n$)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_{i_1}\partial \xi_{j_1}} - \frac{\partial^2}{\partial x_{j_1}\partial \xi_{i_1}}\right) \cdots \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{i_{m+1}}\partial \xi_{j_{m+1}}} - \frac{\partial^2}{\partial x_{j_{m+1}}\partial \xi_{i_{m+1}}}\right)\psi = 0. \quad (3.1)$$

В случае $n = 3$, $m = 0$ этот результат, по существу, принадлежит Йону [12], поэтому уравнения (3.1) называются *условиями Йона*. При $m = 0$ теорема 3.1 является частным случаем одного из результатов работы [13].

Доказательство. Необходимость. Первое условие следует из (1.6). Докажем необходимость второго. Функция ψ, определенная по $\varphi = If$ формулой (1.8), будет удовлетворять соотношению (1.5), дифференцируя которое получим

$$\frac{\partial^2 \psi(x, \xi)}{\partial x_i \partial \xi_j} = \int_{-\infty}^{\infty} t \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + t\xi), \xi^m \right\rangle dt +$$

$$+ m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_{i_1 \ldots i_{m-1} j}}{\partial x_i}(x + t\xi)\, \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_{m-1}}\, dt.$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства симметрично по i, j. Следовательно, если мы определим поле $g_{ij} \in \mathscr{S}(\mathbf{S}^{m-1})$, положив

$$(g_{ij})_{i_1 \ldots i_{m-1}} = m\left(\frac{\partial f_{i_1 \ldots i_{m-1} j}}{\partial x_i} - \frac{\partial f_{i_1 \ldots i_{m-1} i}}{\partial x_j}\right),$$

то

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial \xi_j} - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_i}\right)\psi(x, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle g_{ij}(x + t\xi), \xi^{m-1}\rangle\, dt. \quad (3.2)$$

Теперь справедливость (3.1) легко доказать индукцией по m. Действительно, при $m = 0$ $g_{ij} = 0$ и (3.1) следует из (3.2). Согласно предположению индукции

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_{i_1}\partial \xi_{j_1}} - \frac{\partial^2}{\partial x_{j_1}\partial \xi_{i_1}}\right) \cdots \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{i_m}\partial \xi_{j_m}} - \frac{\partial^2}{\partial x_{j_m}\partial \xi_{i_m}}\right)\psi_{i_{m+1} j_{m+1}} = 0, \quad (3.3)$$

где

$$\psi_{ij}(x, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle g_{ij}(x + t\xi), \xi^{m-1}\rangle\, dt.$$

Сравнивая последнее равенство с (3.2), видим, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_{i_{m+1}}\partial \xi_{j_{m+1}}}-\frac{\partial^2}{\partial x_{j_{m+1}}\partial \xi_{i_{m+1}}}\right)\psi=\psi_{i_{m+1}j_{m+1}}. \qquad (3.4)$$

Из (3.3) и (3.4) следует (3.1).

Доказательство достаточности в теореме 3.1 основано на сформулированной ниже теореме 3.2, которую мы называем теоремой о тангенциальной компоненте. Доказательство теоремы 3.2 приводится в [14]. Чтобы пояснить смысл этой теоремы, вернемся к ситуации леммы 2.1. Пусть $g\in C^\infty(\mathbf{S}^m;\mathbf{R}_0^n)$, f и v — соответственно тангенциальная и радиальная компоненты поля g, удовлетворяющие (2.5). Поля $f(x)$ и $v(x)$, как правило, имеют особенность в точке $x=0$, даже если поле $g(x)$ гладкое при $x=0$. В связи с этим возникает вопрос: пусть имеется поле $f\in C^\infty(\mathbf{S}^m;\mathbf{R}_0^n)$, удовлетворяющее условию $j_x f(x)=0$; каким еще дополнительным условием оно должно удовлетворять, чтобы существовало гладкое на всем $\mathbf{R}^n$ поле, тангенциальной компонентой которого является f? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 3.2. *Пусть $n\geqslant 3$, $m\geqslant 0$ — целые; $f\in C^\infty(\mathbf{S}^m;\mathbf{R}_0^n)$ удовлетворяет условию $j_x f(x)=0$. Если существует такая функция $\varphi\in C^\infty(T\Omega)$, что*

$$\langle f(x),\ \xi^m\rangle=\varphi(x,\ \xi)\qquad((x,\ \xi)\in T\Omega,\ x\neq 0),$$

то найдутся $g\in C^\infty(\mathbf{S}^m)$, $v\in C^\infty(\mathbf{S}^m;\mathbf{R}_0^n)$, для которых справедливо (2.5). При этом поле $v(x)$ может быть выбрано так, что $v(x)=0$ при $|x|\geqslant\varepsilon$ для любого $\varepsilon>0$.

Лемма 3.1. *Пусть функция $\varphi\in\mathscr{S}(T\Omega)$ удовлетворяет условиям 1, 2 теоремы 3.1, $\widehat{\varphi}\in\mathscr{S}(T\Omega)$ — ее преобразование Фурье. Тогда существует такое поле $\widehat{f}\in C^\infty(\mathbf{S}^m;\mathbf{R}_0^n)$, что*

1) $j_y\widehat{f}(y)=0$ $(y\in\mathbf{R}_0^n)$;

2) *функции* $\widehat{f}_{i_1\ldots i_m}(y)$ *и все их производные быстро убывают при* $|y|\to\infty$;

3) $\langle\widehat{f}(y),\ \xi^m\rangle=\widehat{\varphi}(y,\ \xi)\qquad((y,\ \xi)\in T\Omega,\ y\neq 0)$.

Доказательство этой леммы приведем позже, а пока с помощью теоремы 3.2 и леммы 3.1 завершим доказательство теоремы 3.1.

Достаточность (в теореме 3.1). Пусть $\widehat{f}\in C^\infty(\mathbf{S}^m;\mathbf{R}_0^n)$ — поле, существование которого утверждает лемма 3.1. Воспользовавшись теоремой 3.2, найдем поле $\widehat{g}\in\mathscr{S}(\mathbf{S}^m)$, для которого $\widehat{f}$ является тангенциальной компонентой, т. е. $\widehat{g}(y)=\widehat{f}(y)+i_y\widehat{v}(y)$ $(y\in\mathbf{R}_0^n)$, где $\widehat{v}\in C^\infty(\mathbf{S}^{m-1};\mathbf{R}_0^n)$ и $\widehat{v}(y)=0$ при $|y|\geqslant 1$. Согласно лемме 2.1

$$\langle\widehat{g}(y),\ \xi^m\rangle=\widehat{\varphi}(y,\ \xi)\qquad((y,\ \xi)\in T\Omega). \qquad (3.5)$$

Найдем поле $g\in\mathscr{S}(\mathbf{S}^m)$, преобразованием Фурье которого служит $\widehat{g}$. Докажем, что $Ig=(2\pi)^{1/2}\varphi$ и тем самым завершим доказательство теоремы 3.1. Для этого вспомним, что ввиду (1.9) $2\pi^{1/2}\langle g(y),\ \xi^m\rangle=\widehat{Ig}(y,\ \xi)$ $((y,\ \xi)\in T\Omega)$. Сравнивая это равенство с (3.5), видим, что $\widehat{Ig}=(2\pi)^{1/2}\widehat{\varphi}$. Поскольку преобразование Фурье взаимно однозначно на $\mathscr{S}(T\Omega)$, то $Ig=(2\pi)^{1/2}\varphi$, и теорема 3.1 доказана.

Доказательство леммы 3.1. Пусть функция $\varphi\in\mathscr{S}(T\Omega)$ удовлетворяет условиям 1, 2 теоремы 3.1, $\widehat{\varphi}\in\mathscr{S}(T\Omega)$ — ее преобразование Фурье. Из условия 1 следует, что

$$\widehat{\varphi}(y,\ -\xi)=(-1)^m\widehat{\varphi}(y,\ \xi). \qquad (3.6)$$

Определим функцию $\widehat{\psi}\in C^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_0^n)$ равенством

$$\widehat{\psi}(y,\xi)=|\xi|^m\widehat{\varphi}\left(y-\frac{\langle y,\xi\rangle}{|\xi|^2}\xi,\ \frac{\xi}{|\xi|}\right). \qquad (3.7)$$

Из (3.6), (3.7) вытекают следующие свойства этой функции:

$$\widehat{\psi}(y, t\xi) = t^m \widehat{\psi}(y, \xi) \qquad (0 \neq t \in \mathbf{R}), \tag{3.8}$$

$$\widehat{\psi}(y + t\xi, \xi) = \widehat{\psi}(y, \xi) \qquad (t \in \mathbf{R}). \tag{3.9}$$

Пусть $\psi(x, \xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_0^n)$ — функция, определенная по φ равенством (1.8); она обладает свойствами (1.6), (1.7). Установим связь между ψ и $\widehat{\psi}$ и, в частности, выразим условия Йона (3.1) через $\widehat{\psi}$. Из (3.7), (1.8) и определения преобразования Фурье на $\mathscr{S}(T\Omega)$ получим

$$\widehat{\psi}(y, \xi) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} |\xi| \int_{\xi^\perp} \psi(x, \xi) e^{-i\langle y, x\rangle} dx.$$

Обращая преобразование Фурье на $\xi^\perp$, имеем

$$\psi(x, \xi) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} |\xi|^{-1} \int_{\xi^\perp} \widehat{\psi}(y, \xi) e^{i\langle x, y\rangle} dy.$$

Используя δ-функцию Дирака, запишем $\psi(x, \xi)$ в виде n-мерного интеграла:

$$\psi(x, \xi) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} \widehat{\psi}(y, \xi) \delta(\langle y, \xi\rangle) e^{i\langle x, y\rangle} dy.$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$\frac{\partial^2 \psi(x, \xi)}{\partial x_j \partial \xi_k} = i(2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} y_j \frac{\partial \widehat{\psi}(y, \xi)}{\partial \xi_k} \delta(\langle y, \xi\rangle) e^{i\langle x, y\rangle} dy +$$
$$+ i(2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} y_j y_k \widehat{\psi}(y, \xi) \delta'(\langle y, \xi\rangle) e^{i\langle x, y\rangle} dy.$$

Замечаем, что второй интеграл в правой части симметричен по k, j и, следовательно, обратится в нуль при альтернировании по этим индексам. Произведя это альтернирование и возвращаясь к интегрированию по $\xi^\perp$, будем иметь

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_k} - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial \xi_j}\right) \psi(x, \xi) =$$
$$= i(2\pi)^{\frac{1-n}{2}} |\xi|^{-1} \int_{\xi^\perp} \left(y_j \frac{\partial}{\partial \xi_k} - y_k \frac{\partial}{\partial \xi_j}\right) \widehat{\psi}(y, \xi) e^{i\langle x, y\rangle} dy.$$

Итерируя этот результат и используя взаимную однозначность преобразования Фурье на $\xi^\perp$, убедимся, что уравнения Йона (3.1) эквивалентны следующим:

$$\left(y_{i_1} \frac{\partial}{\partial \xi_{j_1}} - y_{j_1} \frac{\partial}{\partial \xi_{i_1}}\right) \cdots \left(y_{i_{m+1}} \frac{\partial}{\partial \xi_{j_{m+1}}} - y_{j_{m+1}} \frac{\partial}{\partial \xi_{i_{m+1}}}\right) \widehat{\psi}(y, \xi) = 0$$
$$((y, \xi) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_0^n). \tag{3.10}$$

Уравнения (3.10) являются системой (переопределенной) с постоянными коэффициентами относительно функции $\widehat{\psi}_y(\xi) = \widehat{\psi}(y, \xi)$, в которую y входит в качестве параметра. Отметим, что при $y = 0$ эта система вырождается, а при $y \neq 0$ можно найти ее общее решение, как показывает следующая

Лемма 3.2. *Пусть* $y\in\mathbf{R}_0^n\ (n\geqslant 3)$. *Общее решение системы*

$$\left(y_{i_1}\frac{\partial}{\partial\xi_{j_1}}-y_{j_1}\frac{\partial}{\partial\xi_{i_1}}\right)\cdots\left(y_{i_{m+1}}\frac{\partial}{\partial\xi_{j_{m+1}}}-y_{j_{m+1}}\frac{\partial}{\partial\xi_{i_{m+1}}}\right)u(\xi)=0\quad(\xi\in\mathbf{R}_0^n)\tag{3.11}$$

имеет вид

$$u(\xi)=\sum_{k=0}^{m}u_{i_1\ldots i_k}(\langle y,\xi\rangle)\,\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k},\tag{3.12}$$

где $u_{i_1\ldots i_k}(s)\quad(s\in\mathbf{R})$ — *произвольные функции.*

Доказательство этой леммы приведем позже, а пока с ее помощью продолжим доказательство леммы 3.1.

Поскольку $\widehat{\psi}$ удовлетворяет системе (3.10), применяя лемму 3.2 и учитывая однородность (3.8) этой функции, получим

$$\widehat{\psi}(y,\xi)=\sum_{k=0}^{m}v_{i_1\ldots i_k}(y,\langle y,\xi\rangle)\,\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k},\tag{3.13}$$

где функции $v_{i_1\ldots i_k}(y,s)$ удовлетворяют следующему условию однородности:

$$v_{i_1\ldots i_k}(y,ts)=t^{m-k}v_{i_1\ldots i_k}(y,s)\quad\left(s,t\in\mathbf{R};\ y\in\mathbf{R}_0^n\right).$$

В частности, $v_{i_1\ldots i_k}(y,0)=0$, если $m\neq k$. Поэтому, положив $\widehat{g}_{i_1\ldots i_m}(y)=$ $=v_{i_1\ldots i_m}(y,0)$, из (3.13) получим

$$\widehat{\varphi}(y,\xi)=\widehat{g}_{i_1\ldots i_m}(y)\,\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_m}\quad((y,\xi)\in T\Omega,\ y\neq 0).$$

Итак, мы установили для произвольного $y\in\mathbf{R}_0^n$ существование такого тензора $\widehat{g}(y)\in\mathbf{S}^m$, что

$$\langle\widehat{g}(y),\ \xi^m\rangle=\widehat{\varphi}(y,\ \xi)\qquad((y,\ \xi)\in T\Omega,\ y\neq 0),\tag{3.14}$$

В силу леммы 2.1 для каждого $y\in\mathbf{R}_0^n$ существует такой тензор $\widehat{f}(y)\in\mathbf{S}^m$, что

$$j_y\widehat{f}(y)=0\quad(y\in\mathbf{R}_0^n),$$

$$\langle\widehat{f}(y),\ \xi^m\rangle=\widehat{\varphi}(y,\ \xi)\quad((y,\ \xi)\in T\Omega,\ y\neq 0).$$

Теперь для завершения доказательства леммы 3.1 остается применить следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Пусть* $\varphi\in\mathcal{S}(T\Omega)$ *и для каждого* $x\in\mathbf{R}_0^n$ *определен такой тензор* $f(x)\in\mathbf{S}^m$, *что*

$$j_xf(x)=0\quad(x\in\mathbf{R}_0^n),\tag{3.15}$$

$$\langle f(x),\ \xi^m\rangle=\varphi(x,\ \xi)\qquad((x,\ \xi)\in T\Omega,\ x\neq 0).\tag{3.16}$$

Тогда $f\in C^\infty(\mathbf{S}^m;\mathbf{R}_0^n)$ *и функции* $f_{i_1\ldots i_m}(x)$ *быстро убывают вместе с производными при* $|x|\to\infty$, *т. е. для любого числа* $k\geqslant 0$ *и любого мультииндекса* α

$$\sup_{|x|\geqslant 1}\{|x|^k\,|D^\alpha f_{i_1\ldots i_m}(x)|\}<\infty.\tag{3.17}$$

Доказательство леммы 3.3. Для $(x,\xi)\in\mathbf{R}_0^n\times\mathbf{R}^n$ обозначим через $P_x\xi$ ортогональную проекцию вектора ξ на $x^\perp$. Если $x\neq$ $\neq t\xi\ (t\in\mathbf{R})$, то $P_x\xi\neq 0$ и, следовательно, функция $\psi(x,\ \xi)=|P_x\xi|^m\varphi(x,$ $P_x\xi/|P_x\xi|)$ принадлежит $C^\infty(U)$, где $U=\{(x,\xi)\in\mathbf{R}_0^n\times\mathbf{R}_0^n\,|\,x\neq t\xi\}$. Ввиду условия $\varphi \in \mathcal{S}(\tilde{T}\Omega)$

$$\sup_{\substack{(x,\xi)\in T\Omega\\ |x|\geqslant 1}} \{|x|^k |D_x^\alpha D_\xi^\beta \psi(x,\xi)|\} < \infty \tag{3.18}$$

для любых $k \geqslant 0$ и α, β.

Из (3.15), (3.16) получаем при $(x, \xi) \in U$

$$\langle f(x), \xi^m \rangle = \langle f(x), (P_x\xi)^m \rangle = |P_x\xi|^m \varphi\left(x, \frac{P_x\xi}{|P_x\xi|}\right) = \psi(x, \xi).$$

Поскольку правая часть этих равенств гладкая на U, то и левая тоже гладкая на U. Отсюда вытекает, что $f \in C^\infty(\mathbf{S}^m; \mathbf{R}_0^n)$ и справедливы равенства

$$f_{i_1\ldots i_m}(x) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \psi(x,\xi)}{\partial \xi_{i_1} \ldots \partial \xi_{i_m}} \quad ((x, \xi) \in U). \tag{3.19}$$

Из (3.18), (3.19) следует (3.17). Лемма доказана.

Доказательство леммы 3.2 будем вести индукцией по m. При $m = -1$ лемма выполняется тривиальным образом. Пусть утверждение справедливо при $m < l$ и $u(\xi)$ $(\xi \in \mathbf{R}_0^n)$ удовлетворяет (3.11) при $m = l$. Тогда функции $u_{ij} = (y_i\partial/\partial\xi_j - y_j\partial/\partial\xi_i)u$ удовлетворяют (3.11) при $m = l - 1$ и, в силу предположения индукции,

$$\left(y_i \frac{\partial}{\partial \xi_j} - y_j \frac{\partial}{\partial \xi_i}\right) u(\xi) = \sum_{k=0}^{l-1} u_{ij,i_1\ldots i_k}(\langle y, \xi\rangle)\, \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k}. \tag{3.20}$$

Обозначим $\lambda = |y|^2 > 0$ и дополним вектор y до ортогонального базиса пространства $\mathbf{R}^n$. Пусть $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$ $(i = 1, \ldots, n)$ — этот базис, так что $x_{1j} = y_j$, $x_{ip}x_{jp} = \delta_{ij}\lambda$. Перейдем в (3.20) к новым независимым переменным $\eta_i = x_{ij}\xi_j$. Формулы обратного перехода имеют вид $\xi_i = x_{ji}\eta_j/\lambda$. Если положить $u(\xi) = v(\eta)$, то уравнения (3.20) в новых переменных будут выглядеть так:

$$(x_{1i}x_{pj} - x_{1j}x_{pi}) \frac{\partial v(\eta)}{\partial \eta_p} = \sum_{k=0}^{l-1} v_{ij,i_1\ldots i_k}(\eta_1)\, x_{j_1 i_1} \ldots x_{j_k i_k} \eta_{j_1} \ldots \eta_{j_k}.$$

Умножим последнее равенство на $x_{1i}x_{sj}$ $(s > 1)$ и просуммируем по i, j. Тогда в силу соотношения $x_{1i}x_{sj}(x_{1i}x_{pj} - x_{1j}x_{pi}) = \lambda^2\delta_{sp}$ получим

$$\frac{\partial v(\eta)}{\partial \eta_s} = \sum_{k=0}^{l-1} x_{1i}x_{sj} v_{ij,i_1\ldots i_k}(\eta_1)\, x_{j_1 i_1} \ldots x_{j_k i_k} \eta_{j_1} \ldots \eta_{j_k}.$$

Правая часть этого равенства является многочленом степени не более $l - 1$ от переменных $\eta_2, \ldots, \eta_n$ с коэффициентами, зависящими от η_1, т. е. это равенство можно переписать в виде

$$\frac{\partial v(\eta)}{\partial \eta_s} = \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{j_1,\ldots,j_k=2}^{n} v_{s,j_1\ldots j_k}(\eta_1)\, \eta_{j_1} \ldots \eta_{j_k} \quad (s > 1). \tag{3.21}$$

Воспользуемся следующим утверждением: если функция $v(\eta')$ $(\eta' = (\eta_2, \ldots, \eta_n)$, $n \geqslant 3)$ определена на $\mathbf{R}_0^{n-1}$ и каждая частная производная $\partial v/\partial \eta_s$ $(s > 1)$ есть полином степени не выше $l - 1$, то сама $v(\eta')$ есть полином степени не выше l. Согласно этому утверждению из (3.21) следует, что

$$v(\eta) = \sum_{k=0}^{l} \sum_{j_1,\ldots,j_k=2}^{n} u_{j_1\ldots j_k}(\eta_1)\, \eta_{j_1} \ldots \eta_{j_k}.$$

Возвращаясь к переменным ξ, приходим к (3.12). Лемма доказана.

§ 4. Интегральные моменты функции Ig

Мы приступаем к выводу формул обращения лучевого преобразования, которым посвящены этот и три последующих параграфа. В силу нетривиальности ядра оператора I задача его обращения не может пониматься буквально и нуждается в уточнении. Здесь, по мнению автора, возможны два различных подхода. Первый подсказан теоремой о разложении и приводит к следующей постановке: зная функцию Ig, найти бездивергентную часть поля g. Второй связан с найденной в [4, 7] полной системой локальных линейных функционалов поля g, определяемых по функции Ig. В указанных работах был определен дифференциальный оператор W: $C^\infty(\mathbf{S}^m) \to C^\infty(\mathbf{S}^m \otimes \mathbf{S}^m)$, названный *оператором Сен-Венана*, и показано, что соотношение $Ig = 0$ эквивалентно равенству $Wg = 0$. Поэтому вторая возможная формулировка задачи обращения оператора I звучит следующим образом: выразить Wg через Ig.

Определим оператор μ^m: $C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_0) \to C^\infty(\mathbf{S}^m)$, который сопоставляет функции $\varphi(x, \xi)$ ее интегральные моменты порядка m по второму аргументу:

$$(\mu^m\varphi)_{i_1\ldots i_m}(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_\Omega \xi_{i_1}\ldots\xi_{i_m}\varphi(x, \xi)\,d\xi.$$

Здесь, напоминаем, Ω — единичная сфера в $\mathbf{R}^n$, $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — объем Ω, $d\xi$ — угловая мера на Ω.

Если функция $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\xi_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = 0, \tag{4.1}$$

то поле $\mu^m\varphi$ имеет нулевую дивергенцию: $\delta(\mu^m\varphi) = 0$. Действительно,

$$(\delta\mu^m\varphi)_{i_1\ldots i_{m-1}} = \partial(\mu^m\varphi)_{i_1\ldots i_{m-1}j}/\partial x_j = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_\Omega \xi_{i_1}\ldots\xi_{i_{m-1}}(\xi_j\partial\varphi/\partial x_j)\,\partial\xi = 0.$$

Для $g \in \mathcal{S}(\mathbf{S}^m)$ функция $\varphi = Ig$ удовлетворяет (4.1), что следует из (1.5). Поэтому поле $\mu^m Ig$ имеет нулевую дивергенцию для любого $g \in \mathcal{S}(\mathbf{S}^m)$.

Вычислим композицию $\mu^m I$, где $I: \mathcal{S}(\mathbf{S}^m) \to C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n_0)$ — лучевое преобразование. Для $g \in \mathcal{S}(\mathbf{S}^m)$ имеем

$$(\mu^m Ig)_{i_1\ldots i_m}(x) = \frac{2}{\omega_n}\int\limits_\Omega \xi_{i_1}\ldots\xi_{i_m}\left[\int\limits_0^\infty \langle g(x + t\xi), \xi^m\rangle\,dt\right]d\xi.$$

Сделав в этом интеграле замену переменных интегрирования в соответствии с равенством $x + t\xi = x'$, получим

$$(\mu^m Ig)_{i_1\ldots i_m} = \frac{2}{\omega_n}g_{j_1\ldots j_m} * \frac{x_{i_1}\ldots x_{i_m}x_{j_1}\ldots x_{j_m}}{|x|^{2m+n-1}}. \tag{4.2}$$

Применение к равенству (4.2) преобразования Фурье нуждается в обосновании. Согласно условию первый множитель из правой части этого равенства принадлежит $\mathcal{S}$. Второй множитель является локально суммируемой на $\mathbf{R}^n$ функцией, ограниченной при $|x| \geqslant 1$ и, следовательно, может рассматриваться как элемент пространства $\mathcal{S}'$. Известно [15], что для $u \in \mathcal{S}$, $v \in \mathcal{S}'$ свертка $u * v$ определена и принадлежит пространству мультипликаторов θ_M, состоящего из гладких на $\mathbf{R}^n$ функций, каждая производная которых растет не быстрее некоторого полинома. В этом случае применимо обычное правило $\widehat{u * v} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{u}\hat{v}$. Поэтому из (4.2) следует, что

$$F\left[(\mu^m Ig)_{i_1\ldots i_m}\right] = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\,\frac{2}{\omega_n}\,\widehat{g}_{j_1\ldots j_m}F\left[\frac{x_{i_1}\ldots x_{i_m}x_{j_1}\ldots x_{j_m}}{|x|^{2m+n-1}}\right]. \tag{4.3}$$

Произведение, стоящее в правой части, пока понимается как произведение функции из $\mathcal{S}$ на обобщенную функцию из $\mathcal{S}'$. Позже мы увидим, что второй множитель является локально суммируемой функцией, и, следовательно, это произведение можно понимать в обычном смысле. Вычисляя второй множитель по обычным правилам действия с преобразованием Фурье [1], получаем

$$F\left[(\mu^m Ig)_{i_1\ldots i_m}\right] =$$
$$= \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)}\,\widehat{g}_{j_1\ldots j_m}(y)\,\partial_{i_1\ldots i_m j_1\ldots j_m}|y|^{2m-1}, \tag{4.4}$$

где $\partial_{i_1\ldots i_k} = \partial^k/\partial y_{i_1}\ldots\partial y_{i_k}$. Для $y \in \mathbf{R}_0^n$ положим $e_i(y) = y_i/|y|$. Тензорное поле $\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{S}^2;\mathbf{R}_0^n)$ определим равенством $\varepsilon_{ij}(y) = \delta_{ij} - e_i(y)e_j(y)$.

Доказательство следующей леммы, которое мы не приводим, легко проводится индукцией по m с помощью формулы Лейбница.

Лемма 4.1. *Для целого $m \geqslant 0$*

$$\partial^{2m}|y|^{2m-1} = ((2m-1)!!)^2|y|^{-1}\varepsilon^m(y)$$

или в координатной записи

$$\partial_{i_1\ldots i_{2m}}|y|^{2m-1} = ((2m-1)!!)^2|y|^{-1}\sigma\left(\varepsilon_{i_1i_2}\ldots\varepsilon_{i_{2m-1}i_{2m}}\right).$$

Здесь принято обозначение $k!! = k(k-2)(k-4)\ldots$, причем считается, что $(-1)!! = 1$.

С помощью леммы 4.1 равенство (4.4) переписывается в виде

$$(\mu^m Ig)^\wedge(y) = b(m,n)|y|^{-1}\varepsilon^m(y)/\widehat{g}(y), \tag{4.5}$$

где

$$b(m,n) = (-1)^m\frac{((2m-1)!!)^2}{2^{2m-1}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)}.$$

Поскольку поле $|y|^{-1}\varepsilon^m(y)$ локально суммируемо, то произведение, стоящее в правой части равенства (4.5), а следовательно и исходного равенства (4.3), можно понимать поточечно.

Оценим поведение поля $\mu^m Ig(x)$ при $|x|\to\infty$. Для этого заметим, что из (4.5) вытекает возможность представления

$$\left(D^\alpha(\mu^m Ig)^\wedge\right)_{i_1\ldots i_m}(y) = |y|^{-2m-1}\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|}P_{\alpha\beta i_1\ldots i_m j_1\ldots j_m}(y)\,D^\beta\widehat{g}_{j_1\ldots j_m}(y),$$

где $P_{\alpha\beta i_1\ldots i_m}$ — однородный многочлен степени $2m+|\alpha|+|\beta|$. Отсюда следует, что $D^\alpha(\mu^m Ig)^\wedge$ быстро убывает при $|y|\to\infty$, а при $|y|\leqslant 1$ удовлетворяет оценке $|D^\alpha(\mu^m Ig)^\wedge(y)| \leqslant C|y|^{-|\alpha|-1}$. Следовательно, поле $D^\alpha(\mu^m Ig)^\wedge$ суммируемо на $\mathbf{R}^n$ при $|\alpha|\leqslant n-2$. Таким образом, доказана

Теорема 4.1. *Для $g\in\mathcal{S}(\mathbf{S}^m)$ поле $\mu^m Ig$ принадлежит $C^\infty(\mathbf{S}^m)$, стремится к нулю при $|x|\to\infty$, удовлетворяет оценке $|\mu^m Ig(x)| \leqslant C(1+|x|)^{2-n}$ и имеет нулевую дивергенцию: $\delta\mu^m Ig = 0$.*

§ 5. Формула обращения лучевого преобразования

Пусть $g \in \mathscr{S}(\mathrm{S}^m)$ и

$$g = f + dv, \quad \delta f = 0 \tag{5.1}$$

— разложение поля g на бездивергентную и потенциальную части, существующее в силу теоремы 2.1. Применяя преобразование Фурье к равенствам (5.1), имеем

$$\widehat{g}(y) = \widehat{f}(y) + \mathrm{i} i_y \widehat{v}(y), \quad j_y \widehat{f}(y) = 0. \tag{5.2}$$

Подставив (5.2) в (4.5), получим

$$(\mu^m Ig)^\wedge(y) = b(m,\ n)\,|y|^{-1}\varepsilon^m(y)/\widehat{f}(y) + \sqrt{-1}\,b(m,\ n)\,|y|^{-1}\varepsilon^m(y)/i_y\widehat{v}(y). \tag{5.3}$$

Согласно теореме 2.1 поля $\widehat{f}(y)$ и $i_y\widehat{v}(y)$ ограничены на $\mathbf{R}^n$, поэтому оба слагаемых из правой части (5.3) локально суммируемы, и это равенство можно понимать поточечно. Покажем, что второе слагаемое равно нулю. Действительно, выражение

$$(\varepsilon^m/i_y\widehat{v})_{i_1\ldots i_m} = \{\sigma\,[(\delta_{i_1j_1} - e_{i_1}e_{j_1})\ldots(\delta_{i_mj_m} - e_{i_m}e_{j_m})]\}\,\{\sigma\,(y_{j_1}\widehat{v}_{j_2\ldots j_m})\}$$

является суммой, каждое слагаемое которой содержит множитель вида $(\delta_{ij} - e_ie_j)\,y_j = 0$. Следовательно, (5.3) переписывается следующим образом:

$$b\,(m,\ n)\,\varepsilon^m\,(y)/\widehat{f}\,(y) = |\,y\,|\,(\mu^m Ig)^\wedge\,(y). \tag{5.4}$$

Согласно теореме 4.1 $\delta\mu^m Ig = 0$. Применяя к этому равенству преобразование Фурье, получаем $j_y\,(\mu^m Ig)^\wedge\,(y) = 0$. Поэтому уравнение (5.4), рассматриваемое как система линейных алгебраических уравнений относительно компонент поля $\widehat{f}(y)$, однозначно разрешимо, как показывает следующая

Теорема 5.1. *Пусть* $y \in \mathbf{R}^n_0$, $\varepsilon = \varepsilon\,(y)$, $g \in \mathrm{S}^m$ $(m \geqslant 0)$. *Уравнение*

$$\varepsilon^m/f = g \tag{5.5}$$

имеет решение $f \in \mathrm{S}^m$ *тогда и только тогда, когда правая часть удовлетворяет условию*

$$j_y g = 0. \tag{5.6}$$

В этом случае уравнение (5.5) *имеет единственное решение, удовлетворяющее условию*

$$j_y f = 0, \tag{5.7}$$

которое выражается через правую часть по формуле

$$f = \frac{(2m)!}{2^m m!}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{(-1)^k}{2^k k!\,(m-2k)!}\,\frac{n+2m-1}{(n+2m-1)\,(n+2m-3)\ldots(n+2m-2k-1)}\,\varepsilon^k\,(j^k g), \tag{5.8}$$

где $[m/2]$ — *целая часть числа* $m/2$.

Доказательство этой теоремы приведем в следующем разделе, а пока с ее помощью выведем формулу обращения для лучевого преобразования.

Применяя теорему 5.1 к уравнению (5.4), получим равенство

$$\widehat{f}\,(y) = |\,y\,|\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} c_k\,(i_\varepsilon)^k\,j^k\widehat{h}, \tag{5.9}$$

в котором мы для краткости обозначили $h=\mu^m Ig$ и (напомним, что $(-1)!!=1$)

$$c_k=(-1)^k\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\,(n-3)!!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,\frac{(n+2m-2k-3)!!}{2^k k!\,(m-2k)!}. \tag{5.10}$$

Поскольку оператор j чисто алгебраический (не зависит от y), то он перестановочен с преобразованием Фурье F, т. е. (5.9) можно переписать в виде

$$F[f]=|y|\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} c_k (i_\varepsilon)^k F\left[j^k h\right]. \tag{5.11}$$

Найдем оператор, Фурье-образом которого является i_ε. Так как $i_\varepsilon=i-(i_y)^2/|y|^2$, $iF=Fi$, $i_yF=\mathrm{i}Fd$, то

$$i_\varepsilon F=Fi+|y|^{-2}Fd^2. \tag{5.12}$$

Как известно,

$$|y|^{-2}F=-F\Delta^{-1}, \tag{5.13}$$

где Δ^{-1} — оператор свертки с фундаментальным решением уравнения Лапласа: $\Delta^{-1}u=u*E$,

$$E(x)=\begin{cases}-\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{4\pi^2}|x|^{2-n} & \text{при} \quad n\geqslant 3,\\ (2\pi)^{-1}\ln|x| & \text{при} \quad n=2.\end{cases}$$

Подставив (5.12), (5.13) в (5.11), получим

$$F[f]=|y|F\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} c_k\left(i-\Delta^{-1}d^2\right)^k j^k h. \tag{5.14}$$

Как известно, $|y|F=F(-\Delta)^{1/2}$, где $(-\Delta)^{1/2}u=-\pi^{-(n+1)/2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\times u*|x|^{-n-1}$. Поэтому из (5.14) вытекает следующая окончательная формула:

$$f=(-\Delta)^{1/2}\left[\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} c_k\left(i-\Delta^{-1}d^2\right)^k j^k\right]h.$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 5.2. *Для любого поля* $g\in\mathcal{S}(\mathrm{S}^m)$, *если* $g=f+dv$, $\delta f=0$ — *разложение, существующее в силу теоремы* 2.1, *то бездивергентная часть* f *поля* g *восстанавливается из функции* Ig *согласно формуле*

$$f=(-\Delta)^{1/2}\left[\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} c_k\left(i-\Delta^{-1}d^2\right)^k j^k\right]\mu^m Ig, \tag{5.15}$$

в которой коэффициенты c_k задаются формулами (5.10).

Сделаем замечание, касающееся области определения оператора $A=(-\Delta)^{1/2}\sum c_k\left(i-\Delta^{-1}d^2\right)^k j^k$. Обозначим через $\mathcal{A}$ пространство тех обобщенных функций из $\mathcal{S}'$, преобразование Фурье которых суммируемо в некоторой окрестности точки $y=0$, а через $\mathcal{A}(\mathrm{S}^m)$ — пространство тензорных полей, компоненты которых принадлежат $\mathcal{A}$. Как видно из

(5.9), оператор A определен на $\mathscr{A}(\mathbf{S}^m)$ и отображает это пространство в себя. Для $g \in \mathscr{S}(\mathbf{S}^m)$ поле $\mu^m Ig$ принадлежит $\mathscr{A}(\mathbf{S}^m)$, что следует из (4.5).

Пусть W: $C^\infty(\mathbf{S}^m) \to C^\infty(\mathbf{S}^m \otimes \mathbf{S}^m)$ — оператор Сен-Венана, определенный в [4]. Как показано в [4], $Wdv = 0$ для любого $v \in C^\infty(\mathbf{S}^{m-1})$, поэтому из (5.1) следует, что

$$Wg = Wf. \tag{5.16}$$

Операторы i, d, Δ перестановочны между собой, что легко проверяется вычислением в координатах. Поэтому (5.15) можно переписать в виде

$$f = (-\Delta)^{1/2}\left(\sum_k c_k i^k j^k\right)\mu^m Ig + du, \tag{5.17}$$

где

$$u = \left(\Delta^{-1/2}d\right)\left[\sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(\Delta^{-1}d^2\right)^{s-1} \sum_{k=s}^{\left[\frac{m}{2}\right]} a_{ks} i^{k-s} j^k\right]\mu^m Ig \tag{5.18}$$

с некоторыми коэффициентами a_{ks}. Применяя преобразование Фурье к (5.18) и используя (5.5), убедимся, что поле $\widehat{u}(y)$ суммируемо на $\mathbf{R}^n$ и быстро убывает при $|y| \to \infty$. Следовательно, $u \in C^\infty(\mathbf{S}^{m-1})$. Применяя оператор W к равенству (5.17) и учитывая (5.16), приходим к следующему утверждению.

Теорема 5.3. *Для* $g \in \mathscr{S}(\mathbf{S}^m)$ *справедливо равенство*

$$Wg = W(-\Delta)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} c_k i^k j^k\right)\mu^m Ig. \tag{5.19}$$

Теоремы 5.2 и 5.3 дают ответы на приведенные в начале § 4 два варианта вопроса об обращении оператора I.

§ 6. Доказательство теоремы 5.1

Зафиксируем $0 \neq y \in \mathbf{R}^n$, напомним, что $e_i = y_i/|y|$, $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} - e_i e_j$. Установим небходимость условия (5.6) для разрешимости уравнения (5.5). Действительно, пусть уравнение (5.5) имеет решение $f \in \mathbf{S}^m$, тогда

$$(j_y g)_{i_1 \ldots i_{m-1}} = y_{i_m}(\varepsilon^m/f)_{i_1 \ldots i_m} =$$
$$= y_{i_m}\sigma\left[\left(\delta_{i_1 j_1} - e_{i_1}e_{j_1}\right) \ldots \left(\delta_{i_m j_m} - e_{i_m}e_{j_m}\right) f_{j_1 \ldots j_m}\right].$$

Правая часть этих равенств является суммой, каждое слагаемое которой содержит множитель вида $y_{i_m}\left(\delta_{i_m j_k} - e_{i_m}e_{j_k}\right) = 0$.

Аналогичное рассуждение показывает, что при выполнении условия (5.6) справедливы равенства $j_y(\varepsilon^k(j^k g)) = 0$ и, следовательно, (5.7) вытекает из (5.8).

Таким образом, операторы A: $f \to g$, B: $g \to f$, определяемые равенствами (5.5), (5.8), переводят пространство $\mathbf{S}_y^m = \{f \in \mathbf{S}^m \mid j_y f = 0\}$ в себя. Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить, что BA является тождественным отображением пространства $\mathbf{S}_y^m$, т. е. доказать справедливость на $\mathbf{S}_y^m$ тождества, которое получается из (5.8) заменой g на ε^m/f. Доказательство разобьем на несколько лемм.

Лемма 6.1. *Для* $f \in \mathbf{S}_y^m$ *справедливо равенство*

$$\varepsilon^m/f = \frac{2^m (m!)^3}{(2m)!} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{1}{2^{2k}(k!)^2(m-2k)!}\,\varepsilon^k\left(j^k f\right). \tag{6.1}$$

Доказательство. Выберем в $\mathbf{R}^n$ такой ортонормированный базис, чтобы $y=(0, \ldots, 0, y_n)$. В этой системе координат $e_i=\delta_{in}$, $\varepsilon_{ij}=\delta_{ij}$, если $1 \leqslant i$, $j \leqslant n-1$; $\varepsilon_{ij}=0$, если $i=n$ или $j=n$. Условие (5.7) перепишется так: $f_{ni_2\ldots i_m}=0$. Таким образом, у каждого из тензоров, входящих в равенство (6.1), каждая компонента, в число индексов которой входит n, равна нулю. Следовательно, при доказательстве этого равенства мы можем действовать таким образом, будто n-я координата отсутствует. Соответственно этому условимся греческими буквами обозначать индексы, изменяющиеся от 1 до $n-1$. В случае повторения такого индекса в мономе подразумевается суммирование по нему от 1 до $n-1$.

Докажем справедливость равенства

$$(\varepsilon^m)_{\alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\ldots\beta_m}=\frac{2^m (m!)^3}{(2m)!}\sigma(\alpha_1\ldots\alpha_m)\sigma(\beta_1\ldots\beta_m)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{2^{-2k}(k!)^{-2}}{(m-2k)!}\delta_{\alpha_1\alpha_2}\ldots\delta_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}}\delta_{\beta_1\beta_2}\ldots\delta_{\beta_{2k-1}\beta_{2k}}\delta_{\alpha_{2k+1}\beta_{2k+1}}\ldots\delta_{\alpha_m\beta_m}. \quad (6.2)$$

Действительно, если ввести обозначение $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_{2m})=(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m)$, то

$$(\varepsilon^m)_{\alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\ldots\beta_m}=\frac{1}{(2m)!}\sum_{\pi\in\Pi_{2m}}\delta_{\gamma_{\pi(1)}\gamma_{\pi(2)}}\ldots\delta_{\gamma_{\pi(2m-1)}\gamma_{\pi(2m)}}, \quad (6.3)$$

где Π_{2m} — группа всех перестановок множества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m\}=\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{2m}\}$, состоящего из $2m$ различных символов $\alpha_1, \ldots, \beta_m$ (а не их числовых значений). Каждую перестановку будем записывать в виде упорядоченной последовательности пар: $\pi=((\gamma_{\pi(1)}, \gamma_{\pi(2)}), \ldots, (\gamma_{\pi(2m-1)}, \gamma_{\pi(2m)}))$. Введем на множестве Π_{2m} отношение эквивалентности, считая π_1 и π_2 эквивалентными, если они могут быть получены друг из друга путем перестановки между собой элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, перестановки между собой элементов $\beta_1, \ldots, \beta_m$, перестановки пар и перестановки элементов в каждой паре. Из этого определения вытекает следующий более простой критерий: две перестановки эквивалентны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое количество пар вида (α_i, α_j). Следовательно, число классов эквивалентности равно $[m/2]$. Пусть $\Pi_{2m}=\bigcup_k B_k$ — разбиение Π_{2m} на классы, где через B_k обозначен класс эквивалентности перестановки

$$\pi_k=((\alpha_1, \alpha_2), \ldots, (\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}), (\beta_1, \beta_2), \ldots, (\beta_{2k-1}, \beta_{2k}),$$
$$(\alpha_{2k+1}, \beta_{2k+1}), \ldots, (\alpha_m, \beta_m)).$$

Сгруппировав в сумме из правой части (5.3) слагаемые, соответствующие эквивалентным перестановкам, получим

$$(\varepsilon^m)_{\alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\ldots\beta_m}=\frac{1}{(2m)!}\sigma(\alpha_1\ldots\alpha_m)\sigma(\beta_1\ldots\beta_m)\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}c_{km}\times$$
$$\times\delta_{\alpha_1\alpha_2}\ldots\delta_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}}\delta_{\beta_1\beta_2}\ldots\delta_{\beta_{2k-1}\beta_{2k}}\delta_{\alpha_{2k+1}\beta_{2k+1}}\ldots\delta_{\alpha_m\beta_m}, \quad (6.4)$$

где c_{km} — количество элементов множества B_k. Подсчитаем это число следующим образом. Из m элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ надо выбрать $2k$ элементов, которые входят в пары (α_i, α_j); это можно сделать $\binom{m}{2k}$ способами. Аналогично $\binom{m}{2k}$ способами выбираются те из $\beta_1, \ldots, \beta_m$, которые входят в пары (β_i, β_j); k пар (α_i, α_j) можно расположить на m местах $\binom{m}{k}$ способами. На оставшихся $m-k$ местах k пар (β_i, β_j) можно расположить $\binom{m-k}{k}$ способами. Выбранные $2k$ элементов α_i можно расположить в выбранных парах $(2k)!$ способами. Аналогично выбранные $2k$ элементов β_i можно расположить в выбранных парах $(2k)!$ способами. Оставшиеся $m-2k$ элементов α_i и $m-2k$ элементов β_i располагаются в пары вида (α_i, β_j) $2^{m-2k}((m-2k)!)^2$ способами. В итоге получим выражение

$$c_{km} = \binom{m}{2k}^2 \binom{m}{k} \binom{m-k}{k} ((2k)!)^2\, 2^{m-2k} ((m-2k)!)^2 = \frac{(m!)^3\, 2^{m-2k}}{(k!)^2\,(m-2k)!},$$

подставив которое в (6.4), придем к (6.2).

С помощью (6.2) доказательство леммы завершается просто:

$$(\varepsilon^m/f)_{\alpha_1\ldots\alpha_m} = (\varepsilon^m)_{\alpha_1\ldots\alpha_m\beta_1\ldots\beta_m} f_{\beta_1\ldots\beta_m} = \sigma(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \sum_k c_{km} \times$$
$$\times\, \delta_{\alpha_1\alpha_2} \ldots \delta_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} \delta_{\beta_1\beta_2} \ldots \delta_{\beta_{2k-1}\beta_{2k}} \delta_{\alpha_{2k+1}\beta_{2k+1}} \ldots \delta_{\alpha_m\beta_m} f_{\beta_1\ldots\beta_m} =$$
$$= \sigma(\alpha_1 \ldots \alpha_m) \sum_k c_{km} \delta_{\alpha_1\alpha_2} \ldots \delta_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}} f_{\beta_1\beta_1\ldots\beta_k\beta_k\alpha_{2k+1}\ldots\alpha_m} =$$
$$= \left[\sum_k c_{km} \varepsilon^k (j^k f)\right]_{\alpha_1\ldots\alpha_m}.$$

Лемма доказана.

Лемма 6.2. $j\varepsilon^k = \frac{n+2k-3}{2k-1}\, \varepsilon^{k-1}$.

Доказательство. Выберем систему координат как при доказательстве леммы 6.1. Тогда

$$(\varepsilon^k)_{\alpha_1\ldots\alpha_{2k-2}\beta\gamma} = \frac{1}{(2k)!}\, \sigma(\alpha_1 \ldots \alpha_{2k-2}) \times$$
$$\times \left(c_1 \delta_{\alpha_1\alpha_2} \ldots \delta_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}} \delta_{\beta\gamma} + c_2 \delta_{\alpha_1\beta} \delta_{\alpha_2\gamma} \delta_{\alpha_3\alpha_4} \ldots \delta_{\alpha_{2k-3}\alpha_{2k-2}}\right). \tag{6.5}$$

Здесь через c_1 обозначено число перестановок множества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2k-2}, \beta, \gamma\}$, в которых β и γ стоят в одной паре, а через c_2 — число остальных перестановок. Эти числа легко находятся с помощью соображений, аналогичных приведенным при доказательстве леммы 6.1: $c_1 = (2k)!/(2k-1)$; $c_2 = (2k-2)(2k)!/(2k-1)$. Подставим эти значения в (6.5). Положив затем в (6.5) $\gamma = \beta$ и произведя суммирование по β, придем к утверждению леммы. Следующие две леммы легко доказываются прямым вычислением в координатах.

Лемма 6.3. *Для* $u \in \mathrm{S}^m$, $v \in \mathrm{S}^l$ *справедливо равенство*

$$j(uv) = \frac{m(m-1)}{(m+l)(m+l-1)}(ju)v + \frac{2ml}{(m+l)(m+l-1)}u \wedge v + \frac{l(l-1)}{(m+l)(m+l-1)}u(jv),$$

где через $u \wedge v$ *обозначен тензор из* S^{m+l-2}, *определяемый равенством* $(u \wedge v)_{i_1\ldots i_{m+l-2}} = \sigma\left(u_{i_1\ldots i_{m-1}j} v_{i_m\ldots i_{m+l-2}j}\right)$.

Лемма 6.4. *Для* $u \in \mathrm{S}_y^m$ *справедливо равенство* $\varepsilon^k \wedge u = \varepsilon^{k-1} u$.

Лемма 6.5. *Для* $f \in \mathrm{S}_y^m$ *и* $0 \leqslant l \leqslant [m/2]$ *справедливо равенство*

$$j^l(\varepsilon^m/f) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]-l} c_{kl}^m \varepsilon^k \left(j^{l+k} f\right), \tag{6.6}$$

в котором

$$c_{kl}^m = \frac{2^m (m!)^2}{(2m)!} \frac{(m-2l)!}{2^{2k+l} k!\,(k+l)!\,(m-2k-2l)!} \times$$
$$\times\, \frac{(n+2m-1)(n+2m-3)\ldots(n+2m-2l-1)}{n+2m-1}. \tag{6.7}$$

Доказательство будем вести индукцией по l. Для $l=0$ утверждение совпадает с леммой 6.1. Пусть (6.6), (6.7) справедливы для $l=p<[m/2]$. Применяя оператор j к равенству (6.6), получим

$$j^{p+1}(\varepsilon^m/f)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]-p} c_{pk}^m j\left(\varepsilon^k\left(j^{p+k}f\right)\right). \tag{6.8}$$

Согласно леммам 6.2—6.4

$$j\left(\varepsilon^k\left(j^{p+k}f\right)\right)=\frac{1}{(m-2p)(m-2p-1)}\times$$
$$\times\left[2k(n+2m-4p-2k-3)\varepsilon^{k-1}\left(j^{p+k}f\right)+(m-2p-2k)(m-2p-2k-1)\times\right.$$
$$\left.\times\,\varepsilon^k\left(j^{p+k+1}f\right)\right].$$

Подставляя это выражение в (6.8), придем к равенству (6.6) при $l=$ $=p+1$, в котором

$$c_{p+1,k}^m=\frac{1}{(m-2p)(m-2p-1)}\left[2(k+1)(n+2m-4p-2k-5)c_{p,k+1}^m+\right.$$
$$\left.+(m-2p-2k)(m-2p-2k-1)c_{pk}^m\right].$$

Подставив в последнее равенство значения $c_{p,k+1}^m$, c_{pk}^m из (6.7), убедимся в справедливости (6.7) при $l=p+1$. Лемма доказана.

Лемма 6.6. *Для* $f\in \mathrm{S}_y^m$ *и* $0\leqslant l\leqslant [m/2]$ *справедливо равенство*

$$j^{\left[\frac{m}{2}\right]-l}f=\sum_{k=0}^{l}(-1)^k b_{lk}^m\varepsilon^k\left(j^{\left[\frac{m}{2}\right]-l+k}(\varepsilon^m/f)\right), \tag{6.9}$$

в котором

$$b_{lk}^m=\frac{(2m)!}{2^m(m!)^2}\,\frac{2^{\left[\frac{m}{2}\right]-l-k}\left(\left[\frac{m}{2}\right]-l\right)!\,(2l+\varkappa_m)!}{k!\,(2l-2k+\varkappa_m)!}\times$$
$$\times\frac{n+2m+1}{(n+2m-1)(n+2m-3)\ldots(n+m+\varkappa_m+2l-2k-1)}, \tag{6.10}$$

$$\varkappa_m=m-2[m/2]=\begin{cases}0, & \text{*если* } m \text{ *четно*},\\ 1, & \text{*если* } m \text{ *нечетно*}.\end{cases}$$

Доказательство будем вести индукцией по l. При $l=0$ утверждение следует из леммы 6.5, в которой надо положить $l=[m/2]$. Пусть утверждение справедливо при всех l, удовлетворяющих неравенствам $0\leqslant l<p\leqslant[m/2]$. Положив в (6.6) $l=[m/2]-p$, получим

$$j^{\left[\frac{m}{2}\right]-p}f=\left(c^m_{\left[\frac{m}{2}\right]-p,0}\right)^{-1}\left\{j^{\left[\frac{m}{2}\right]-p}(\varepsilon^m/f)-\sum_{k=1}^{p}c^m_{\left[\frac{m}{2}\right]-p,k}\,\varepsilon^k\left(j^{\left[\frac{m}{2}\right]-p+k}f\right)\right\}. \tag{6.11}$$

Согласно предположению индукции при $1\leqslant k\leqslant p$

$$j^{\left[\frac{m}{2}\right]-p+k}f=\sum_{s=0}^{p-k}(-1)^s b^m_{p-k,s}\varepsilon^s\left(j^{\left[\frac{m}{2}\right]-p+k+s}(\varepsilon^m/f)\right).$$

Подставив это выражение в (6.11), после простых преобразований придем к равенству (6.9) при $l=p$, в котором $(1\leqslant k\leqslant p)$

$$b_{p0}^m=\left(c^m_{\left[\frac{m}{2}\right]-p,0}\right)^{-1};\quad b_{pk}^m=-b_{p0}^m\sum_{t=1}^{k}(-1)^t b^m_{p-t,k-t}c^m_{\left[\frac{m}{2}\right]-p,t}. \tag{6.12}$$

Подставив в (6.12) значения $c\left[\frac{m}{2}\right]_{-p,t}^{m}$ из (6.7) и значения $b_{p-t,k-t}^{m}$ из индуктивного предположения (6.10), убедимся в справедливости (6.10) при $l=p$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5.1. Положив в (6.9), (6.10) $l=[m/2]$, получим равенство (5.8), в котором g заменено на ε^m/f. Как отмечено в начале параграфа, это равенство доказывает теорему.

§ 7. Перенесение результатов на обобщенные тензорные поля с компактными носителями

Пусть $\mathscr{D}$ — пространство гладких финитных функций на $\mathbf{R}^n$, $\mathscr{E}'$ — пространство финитных обобщенных функций на $\mathbf{R}^n$. Здесь мы вкратце опишем, как основные определения и результаты, полученные выше для $\mathscr{S}(\mathbf{S}^m)$, переносятся на пространство $\mathscr{E}'(\mathbf{S}^m)$. Доказательства, которые мы не приводим, основаны на том, что $\mathscr{D}(\mathbf{S}^m)$ плотно в пространствах $\mathscr{S}(\mathbf{S}^m)$ и $\mathscr{E}'(\mathbf{S}^m)$ (снабженных соответствующими топологиями).

Прежде всего, лучевое преобразование I: $\mathscr{D}(\mathbf{S}^m)\to C^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_0^n)$ по непрерывности единственным образом продолжается до оператора $I:\mathscr{E}'(\mathbf{S}^m)\to\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_0^n)$. Подробности этой конструкции см. в [7]. Аналогичным образом оператор μ^m: $C^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_0^n)\to C^\infty(\mathbf{S}^m)$ имеет единственное непрерывное продолжение μ^m: $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_0^n)\to\mathscr{D}'(\mathbf{S}^m)$.

Будем говорить, что *поле* $u\in\mathscr{S}'(\mathbf{S}^m)$ *стремится к нулю на бесконечности*, если вне некоторого компакта $u(x)$ непрерывно и $u(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$. Теорема о разложении остается справедливой для $g\in\mathscr{E}'(\mathbf{S}^m)$ в следующей редакции.

Теорема 7.1. *Для* $g\in\mathscr{E}'(\mathbf{S}^m)$ *существуют однозначно определенные поля* $f\in\mathscr{S}'(\mathbf{S}^m)$ и $v\in\mathscr{S}'(\mathbf{S}^{m-1})$, *стремящиеся к нулю на бесконечности и удовлетворяющие* (2.6). *Поля* f *и* v *являются гладкими вне* supp g *и вне некоторого компакта удовлетворяют оценкам* (2.8).

Для $g\in\mathscr{E}'(\mathbf{S}^m)$ остается справедливым равенство (4.5), из которого следует, что $\mu^m Ig$ принадлежит пространству $\mathscr{A}(\mathbf{S}^m)$, введенному после формулировки теоремы 5.2. Следовательно, для $g\in\mathscr{E}'(\mathbf{S}^m)$ правые части равенств (5.15) и (5.19) определены и принадлежат $\mathscr{A}(\mathbf{S}^m)\subset\mathscr{S}'(\mathbf{S}^m)$. Теперь теоремы 5.2 и 5.3 переносятся буквально на случай $g\in\mathscr{E}'(\mathbf{S}^m)$

§ 8. Формула Планшереля для лучевого преобразования

Классическая формула Планшереля утверждает, что преобразование Фурье является изометрией пространства $L_2(\mathbf{R}^n)$. Ю. Г. Решетняк получил формулу, выражающую $\|f\|_{L_2(\mathbf{R}^n)}$ через норму $\|\mathscr{R}f\|_H$ преобразования Радона $\mathscr{R}f$ функции f, где $\|\cdot\|_H$ — некоторая специальная норма на пространстве функций, определенных на множестве гиперплоскостей. Эта формула, которая авторами книг [1, 2] была названа формулой Планшереля для преобразования Радона, позволяет распространить $\mathscr{R}$ на $L_2(\mathbf{R}^n)$. В этом параграфе мы получим аналогичный результат для лучевого преобразования симметричных тензорных полей.

Через $H(T\Omega)$ обозначим гильбертово пространство, получающееся пополнением $\mathscr{S}(T\Omega)$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$(\varphi,\psi)_{H(T\Omega)}=(2\pi)^{-1}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\xi\perp}|y|\,\widehat{\varphi}(y,\xi)\,\overline{\widehat{\psi}}(y,\xi)\,dy\,d\xi, \tag{8.1}$$

где $\varphi\to\widehat{\varphi}$ — преобразование Фурье на $\mathscr{S}(T\Omega)$, определенное в § 1.

Теорема 8.1. *Лучевое преобразование* I: $\mathscr{S}(\mathbf{S}^m)\to\mathscr{S}(T\Omega)$ *единственным образом продолжается до непрерывного оператора* I: $L_2(\mathbf{S}^m)\to$

$\to H(T\Omega)$. *Ядро этого оператора совпадает со вторым слагаемым разложения* (2.11). *Для* g^1, $g^2 \in L_2(\mathbf{S}^m)$ *справедлива формула Планшереля*

$$(Ig^1, Ig^2)_{H(T\Omega)} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} a_k \left(j^k P g^1, j^k P g^2\right)_{L_2(\mathbf{S}^{m-2k})}, \tag{8.2}$$

в которой $[m/2]$ — *целая часть* $m/2$, *коэффициенты* a_k *задаются равенствами*

$$a_k = a_k(m, n) = \frac{2^{m+1}\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{(2m)!\,\Gamma\left(m+\frac{n-1}{2}\right)} \frac{1}{2^{2k}(k!)^2(m-2k)!}, \tag{8.3}$$

P: $L_2(\mathbf{S}^m) \to K(\mathbf{S}^m)$ — *ортогональная проекция на первое слагаемое разложения* (2.11).

Доказательство этой теоремы разобьем на несколько лемм.

Лемма 8.1. *Пусть* $g^\alpha \in \mathcal{S}(\mathbf{S}^m)$ $(\alpha = 1, 2)$, f^α — *бездивергентная часть поля* g^α, $\widehat{f}^\alpha$ — *преобразование Фурье поля* f^α. *Тогда справедливо равенство*

$$(Ig^1, Ig^2)_{H(T\Omega)} = \int_\Omega \int_{\xi^\perp} |y| \langle \widehat{f}^1(y), \xi^m\rangle \langle \overline{\widehat{f}^2}(y), \xi^m\rangle\, dy\, d\xi. \tag{8.4}$$

Доказательство. Заметим, во-первых, что интеграл из правой части этого равенства сходится в силу указанных в теореме 2.1 свойств полей $\widehat{f}^\alpha$. Ввиду (8.1) и (1.9)

$$(Ig^1, Ig^2)_{H(T\Omega)} = (2\pi)^{-1} \int_\Omega \int_{\xi^\perp} |y|\, \widehat{Ig^1}(y, \xi)\, \overline{\widehat{Ig^2}}(y, \xi)\, dy\, d\xi =$$
$$= \int_\Omega \int_{\xi^\perp} |y| \langle \widehat{g}^1(y), \xi^m\rangle \langle \overline{\widehat{g}^2}(y), \xi^m\rangle\, dy\, d\xi. \tag{8.5}$$

Согласно последнему утверждению леммы 2.1 поля $\widehat{g}^\alpha$ и $\widehat{f}^\alpha$ связаны соотношением

$$\langle \widehat{g}^\alpha(y), \xi^m\rangle = \langle \widehat{f}^\alpha(y), \xi^m\rangle \quad ((y, \xi) \in T\Omega). \tag{8.6}$$

Подставив (8.6) в правую часть равенства (8.5), придем к (8.4). Лемма доказана.

Лемма 8.2. *Пусть* $\varphi(x, \xi)$ — *непрерывная функция на* $T\Omega$, *достаточно быстро убывающая по переменной* x. *Тогда справедливо равенство*

$$\int_\Omega \int_{\xi^\perp} \varphi(x, \xi)\, dx\, d\xi = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{|x|} \int_{\Omega \cap x^\perp} \varphi(x, \xi)\, d'\xi\, dx, \tag{8.7}$$

в правой части которого $d'\xi$ *обозначает* $(n-2)$*-мерную угловую меру на* $\Omega \cap x^\perp$.

Доказательство. Пусть $\psi(x, \xi)$ — какое-нибудь непрерывное продолжение $\varphi(x, \xi)$ на $\mathbf{R}^n \times \Omega$. С помощью δ-функции Дирака заменим внутренний интеграл в левой части (8.7) интегрированием по $\mathbf{R}^n$, а затем переставим пределы интегрирования. Тогда получим

$$\int_\Omega \int_{\xi^\perp} \varphi(x, \xi)\, dx\, d\xi = \int_\Omega \int_{\mathbf{R}^n} \psi(x, \xi)\, \delta(\langle x, \xi\rangle)\, dx\, d\xi = \int_{\mathbf{R}^n} \int_\Omega \psi(x, \xi)\, \delta(\langle x, \xi\rangle)\, d\xi\, dx.$$

Согласно теореме 6.1.5 [16], $\delta(\langle x, \xi\rangle)\, d\xi = d'\xi / |x|$. Поэтому

$$\int_\Omega \int_{\xi^\perp} \varphi(x, \xi)\, dx\, d\xi = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{|x|} \int_{\Omega \cap x^\perp} \psi(x, \xi)\, d'\xi\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{|x|} \int_{\Omega \cap x^\perp} \varphi(x, \xi)\, d'\xi\, dx.$$

Лемма доказана.

Определим поле $\varepsilon \in C^\infty(\mathrm{S}^2; \mathbf{R}_0^n)$, положив $\varepsilon_{ij}(x) = \delta_{ij} - x_i x_j/|x|^2$. Пусть $\varepsilon^m \in C^\infty(\mathrm{S}^{2m}; \mathbf{R}_0^n)$ — m-я симметричная степень тензора ε.

Лемма 8.3. *Для* $0 \neq x \in \mathbf{R}^n$

$$\int\limits_{\Omega\cap x^\perp} \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_{2m}}\, d'\xi = \frac{2\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(m+\frac{n-1}{2}\right)} \varepsilon^m_{i_1\ldots i_{2m}}(x). \tag{8.8}$$

Доказательство. Как левая, так и правая часть равенства (8.8) не зависят от $|x|$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $|x| = 1$. Заметим, что для справедливости равенства $f = g$ двух симметричных тензоров $f = (f_{i_1\ldots i_m})$ и $g = (g_{i_1\ldots i_m})$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\eta \in \mathbf{R}^n$ $f_{i_1\ldots i_m}\eta_{i_1}\ldots\eta_{i_m} = g_{i_1\ldots i_m}\eta_{i_1}\ldots\eta_{i_m}$. Применяя это правило, видим, что для доказательства (8.8) достаточно установить, что для любого $\eta \in \mathbf{R}^n$

$$\eta_{i_1}\ldots\eta_{i_{2m}} \int\limits_{\Omega\cap x^\perp} \xi_{i_1}\ldots\xi_{i_{2m}}\, d'\xi = \frac{2\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(m+\frac{n-1}{2}\right)} \varepsilon^m_{i_1\ldots i_{2m}}(x)\, \eta_{i_1}\ldots\eta_{i_{2m}}. \tag{8.9}$$

Из определения тензора ε^m легко получить, что при $|x| = 1$

$$\varepsilon^m_{i_1\ldots i_{2m}}(x)\,\eta_{i_1}\ldots\eta_{i_{2m}} = |\eta - \langle\eta, x\rangle x|^{2m}. \tag{8.10}$$

С другой стороны, если временно обозначить левую часть равенства (8.9) через $a(x, \eta)$, то

$$a(x, \eta) = \int\limits_{\Omega\cap x^\perp} \langle\xi, \eta\rangle^{2m}\, d'\xi = |\eta - \langle x, \eta\rangle x|^{2m} \int\limits_{\Omega\cap x^\perp} \langle\xi, \eta'\rangle^{2m}\, d'\xi, \tag{8.11}$$

где введено обозначение

$$\eta' = \eta'(x, \eta) = \frac{\eta - \langle x, \eta\rangle x}{|\eta - \langle x, \eta\rangle x|}.$$

Заметим, что $\eta' \in \Omega \cap x^\perp$. Как легко видеть, интеграл

$$\int\limits_{\Omega\cap x^\perp} \langle\xi, \eta'\rangle^{2m}\, d'\xi$$

не зависит от выбора вектора $\eta' \in \Omega \cap x^\perp$ и равен

$$\int\limits_{\Omega\cap x^\perp} \langle\xi, \eta'\rangle^{2m}\, d'\xi = \int\limits_{\Omega^{n-2}} \xi_1^{2m}\, d'\xi = 2\,\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(m+\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Подставляя это выражение в (8.11), а затем (8.10) и (8.11) в (8.9), убеждаемся в справедливости леммы.

Пусть $\delta = (\delta_{ij}) \in \mathrm{S}^2$ — символ Кронекера, $\delta^m \in \mathrm{S}^{2m}$ — m-я симметричная степень тензора δ.

Лемма 8.4. *Формула Планшереля* (8.2) *справедлива для* $g^\alpha \in \mathcal{S}(\mathrm{S}^m)$ $(\alpha = 1, 2)$.

Доказательство. Пусть $f^\alpha = Pg^\alpha$. Пользуясь леммой 8.2, переставим в утверждении (8.4) леммы 8.1 порядок интегрирования:

$$(Ig^1, Ig^2)_{H(T\Omega)} = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}^1_{i_1\ldots i_m}(y)\,\overline{\widehat{f}^2_{j_1\ldots j_m}}(y)\left[\int\limits_{\Omega\cap y^\perp} \xi_{i_1}\ldots\xi_{i_m}\xi_{j_1}\ldots\xi_{j_m}\, d'\xi\right] dy.$$

Подставляя сюда значение внутреннего интеграла из леммы 8.3, имеем

$$(Ig^1, Ig^2)_{H(T\Omega)} = \frac{2\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\frac{n-1}{2}\right)} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}^1_{i_1\ldots i_m}(y)\widehat{f}^2_{j_1\ldots j_m}(y)\,\varepsilon^m_{i_1\ldots i_m j_1\ldots j_m}(y)dy. \quad (8.12)$$

В силу условия $\delta f^\alpha = 0$ справедливы соотношения $y_j\widehat{f}^\alpha_{ji_2\ldots i_m}(y) = 0$. Поэтому тензор ε^m в (8.12) можно заменить на δ^m. Повторив рассуждения, приведшие нас к (6.2), убедимся в справедливости равенства

$$(\delta^m)_{i_1\ldots i_m j_1\ldots j_m} = \frac{2^m(m!)^3}{(m)!}\,\sigma(i_1\ldots i_m)\,\sigma(j_1\ldots j_m)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{1}{2^{2k}(k!)^2(m-2k)!}\,\delta_{i_1i_2}\ldots\delta_{i_{2k-1}i_{2k}}\delta_{j_1j_2}\ldots\delta_{j_{2k-1}j_{2k}}\delta_{i_{2k+1}j_{2k+1}}\ldots\delta_{i_mj_m}.$$

Подставив это выражение вместо $\varepsilon^m_{i_1\ldots j_m}$ в (8.12), получим (коэффициенты a_k определяются формулами (8.3))

$$(Ig^1, Ig^2)_{H(T\Omega)} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} a_k \int\limits_{\mathbf{R}^n} \widehat{f}^1_{i_1\ldots i_m}(y)\overline{\widehat{f}^2_{j_1\ldots j_m}}(y)\times$$

$$\times\,\delta_{i_1i_2}\ldots\delta_{i_{2k-1}i_{2k}}\delta_{j_1j_2}\ldots\delta_{j_{2k-1}j_{2k}}\delta_{i_{2k+1}j_{2k+1}}\ldots\delta_{i_mj_m}\,dy =$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} a_k\left(j^k\widehat{f}^1, j^k\widehat{f}^2\right)_{L_2(\mathbf{S}^{m-2k})}.$$

Поскольку оператор j чисто алгебраический, он перестановочен с преобразованием Фурье. Воспользовавшись формулой Планшереля для преобразования Фурье $(\widehat{u}, \widehat{v})_{L_2(\mathbf{S}^k)} = (u, v)_{L_2(\mathbf{S}^k)}$, окончательно получим

$$(Ig^1, Ig^2)_{H(T\Omega)} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} a_k\left(j^kf^1, j^kf^2\right)_{L_2(\mathbf{S}^{m-2k})}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 8.1. Единственность непрерывного продолжения на $L_2(\mathbf{S}^m)$ оператора I: $\mathcal{S}(\mathbf{S}^m)\to H(T\Omega)$ следует из плотности $\mathcal{S}(\mathbf{S}^m)$ в $L_2(\mathbf{S}^m)$. Докажем существование такого продолжения. Пусть $g\in L_2(\mathbf{S}^m)$, выберем последовательность $g_k\in\mathcal{S}(\mathbf{S}^m)$ ($k = 1, 2, \ldots$), сходящуюся к g в $L_2(\mathbf{S}^m)$. Согласно лемме 8.4 последовательность Ig_k фундаментальная в $H(T\Omega)$ и, следовательно, существует такое $\varphi\in H(T\Omega)$, что $Ig_k\to\varphi$. Полагаем $Ig=\varphi$. Легко проверяется, что φ не зависит от выбора последовательности g_k и для определенного таким образом оператора I: $L_2(\mathbf{S}^m)\to H(T\Omega)$ справедлива формула Планшереля (8.2). Из этой формулы следует непрерывность I и то, что ядро I совпадает со вторым слагаемым разложения (2.11). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хелгасон С.** Преобразование Радона.— М.: Мир, 1983.
2. **Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.** Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений.— М.: Физматгиз, 1962.
3. **Шарафутдинов В. А.** Задача интегральной геометрии для тензорных полей и уравнение Сен-Венана // Докл. АН СССР.— 1981.— Т. 261, № 5.— С. 1066—1069.
4. **Шарафутдинов В. А.** Задача интегральной геометрии для тензорных полей и уравнение Сен-Венана // Сиб. мат. журн.— 1983.— Т. 24, № 6.— С. 176—187.

5. **Шарафутдинов В. А.** Задача интегральной геометрии для тензорных полей на евклидовом пространстве // Методы решения некорректных задач и проблемы геофизики: Сб. научн. тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычислительный центр.— Новосибирск, 1984.— С. 128—137.
6. **Шарафутдинов В. А.** Задача интегральной геометрии для обобщенных тензорных полей на $\mathbf{R}^n$ // Методы исследования неклассических задач математической физики: Сб. научн. тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычислительный центр.— Новосибирск, 1985.— С. 122—131.
7. **Шарафутдинов В. А.** Задача интегральной геометрии для обобщенных тензорных полей на $\mathbf{R}^n$ // Докл. АН СССР.— 1986.— Т. 286, № 2.— С. 305—307.
8. **Пестов Л. Н., Шарафутдинов В. А.** Интегральная геометрия тензорных полей на многообразии отрицательной кривизны // Там же.— 1987.— Т. 295, № 6.— С. 1318—1320.
9. **Шарафутдинов В. А.** О симметричных тензорных полях на римановом многообразии.— Новосибирск, 1984.— 48 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычислительный центр; № 539).
10. **Масленникова В. М., Боговский М. Е.** Аппроксимация потенциальных и соленоидальных векторных полей // Сиб. мат. журн.— 1983.— Т. 24, № 5.— С. 149—171.
11. **Соболев С. Л.** Плотность финитных функций в пространстве $W_p^{(l)}(E_n)$ // Там же.— 1963.— Т. 4, № 3.— С. 673—682.
12. **John F.** The ultrahyperbolic differential eguation with four independent variables // Duke Math. J.— 1938.— Т. 4. Р. 300—322.
13. **Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И.** Интегральная геометрия в аффинном и проективном пространстве // Современные проблемы математики.— М., 1980.— Т. 16.— С. 53—226.
14. **Львов И. В., Шарафутдинов В. А.** О тангенциальной компоненте тензорного поля // Сиб. мат. журн.— 1989.— Т. 30, № 5.
15. **Владимиров В. С.** Обобщенные функции в математической физике.— М.: Наука, 1976.
16. **Хермандер Л.** Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье.— М.: Мир, 1986.

Е. В. ШИКИН

ЗАДАЧА ИЗОМЕТРИЧЕСКОГО ПОГРУЖЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ МОНЖА — АМПЕРА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Шестидесятилетию
Юрия Григорьевича Решетняка
посвящается

В статье рассматривается задача регулярного изометрического погружения в трехмерное евклидово пространство E^3 двумерных римановых многообразий отрицательной кривизны, дается сопоставление двух подходов к построению в пространстве E^3 регулярных поверхностей, реализующих метрику, которую несут такие многообразия, приводятся результаты о регулярных изометрических погружениях в трехмерное евклидово пространство неограниченных областей на многообразиях типа плоскости Лобачевского, указывается способ построения гладкого решения в целом для некоторых классов уравнений Монжа — Ампера гиперболического типа.

Один из классических методов решения задачи регулярного изометрического погружения двумерных римановых многообразий в трехмерное евклидово пространство E^3, восходящий к Г. Дарбу, приводит к нелинейному дифференциальному уравнению с частными производными — уравнению типа Монжа — Ампера.

Другим известным методом решения задачи изометрического погружения является построение гладкого решения системы уравнений Петерсона — Кодацци и Гаусса.

Нас будет интересовать случай, когда кривизна заданного риманова многообразия отрицательна. В этом случае система уравнений Петерсона — Кодацци и Гаусса путем эквивалентных преобразований приводится к гиперболической системе двух квазилинейных уравнений первого порядка — основной системе уравнений теории поверхностей отрицательной кривизны в римановых инвариантах. А уравнение погружения Дар-