5. **Шарафутдинов В. А.** Задача интегральной геометрии для тензорных полей на евклидовом пространстве // Методы решения некорректных задач и проблемы геофизики: Сб. научн. тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычислительный центр.— Новосибирск, 1984.— С. 128—137.
6. **Шарафутдинов В. А.** Задача интегральной геометрии для обобщенных тензорных полей на $\mathbf{R}^n$ // Методы исследования неклассических задач математической физики: Сб. научн. тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычислительный центр.— Новосибирск, 1985.— С. 122—131.
7. **Шарафутдинов В. А.** Задача интегральной геометрии для обобщенных тензорных полей на $\mathbf{R}^n$ // Докл. АН СССР.— 1986.— Т. 286, № 2.— С. 305—307.
8. **Пестов Л. Н., Шарафутдинов В. А.** Интегральная геометрия тензорных полей на многообразии отрицательной кривизны // Там же.— 1987.— Т. 295, № 6.— С. 1318—1320.
9. **Шарафутдинов В. А.** О симметричных тензорных полях на римановом многообразии.— Новосибирск, 1984.— 48 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычислительный центр; № 539).
10. **Масленникова В. М., Боговский М. Е.** Аппроксимация потенциальных и соленоидальных векторных полей // Сиб. мат. журн.— 1983.— Т. 24, № 5.— С. 149—171.
11. **Соболев С. Л.** Плотность финитных функций в пространстве $W_p^{(l)}(E_n)$ // Там же.— 1963.— Т. 4, № 3.— С. 673—682.
12. **John F.** The ultrahyperbolic differential eguation with four independent variables // Duke Math. J.— 1938.— Т. 4. Р. 300—322.
13. **Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И.** Интегральная геометрия в аффинном и проективном пространстве // Современные проблемы математики.— М., 1980.— Т. 16.— С. 53—226.
14. **Львов И. В., Шарафутдинов В. А.** О тангенциальной компоненте тензорного поля // Сиб. мат. журн.— 1989.— Т. 30, № 5.
15. **Владимиров В. С.** Обобщенные функции в математической физике.— М.: Наука, 1976.
16. **Хермандер Л.** Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье.— М.: Мир, 1986.

Е. В. ШИКИН

ЗАДАЧА ИЗОМЕТРИЧЕСКОГО ПОГРУЖЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ МОНЖА — АМПЕРА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Шестидесятилетию
Юрия Григорьевича Решетняка
посвящается

В статье рассматривается задача регулярного изометрического погружения в трехмерное евклидово пространство E^3 двумерных римановых многообразий отрицательной кривизны, дается сопоставление двух подходов к построению в пространстве E^3 регулярных поверхностей, реализующих метрику, которую несут такие многообразия, приводятся результаты о регулярных изометрических погружениях в трехмерное евклидово пространство неограниченных областей на многообразиях типа плоскости Лобачевского, указывается способ построения гладкого решения в целом для некоторых классов уравнений Монжа — Ампера гиперболического типа.

Один из классических методов решения задачи регулярного изометрического погружения двумерных римановых многообразий в трехмерное евклидово пространство E^3, восходящий к Г. Дарбу, приводит к нелинейному дифференциальному уравнению с частными производными — уравнению типа Монжа — Ампера.

Другим известным методом решения задачи изометрического погружения является построение гладкого решения системы уравнений Петерсона — Кодацци и Гаусса.

Нас будет интересовать случай, когда кривизна заданного риманова многообразия отрицательна. В этом случае система уравнений Петерсона — Кодацци и Гаусса путем эквивалентных преобразований приводится к гиперболической системе двух квазилинейных уравнений первого порядка — основной системе уравнений теории поверхностей отрицательной кривизны в римановых инвариантах. А уравнение погружения Дарбу является нелинейным дифференциальным уравнением гиперболического типа и оказывается эквивалентным системе пяти квазилинейных уравнений первого порядка, существенной составной частью которой является та же основная система уравнений теории поверхностей отрицательной кривизны в римановых инвариантах.

Сведение задачи погружения к системе квазилинейных уравнений позволяет в целом ряде важных случаев доказывать возможность регулярного изометрического погружения в трехмерное евклидово пространство неограниченных во внутренней метрике многообразий отрицательной кривизны. Кроме того, установленная связь между задачей изометрического погружения многообразий отрицательной кривизны и уравнениями Монжа — Ампера гиперболического типа позволяет применить новые подходы к построению решения в целом для некоторых классов этих уравнений.

§ 1. Система уравнений погружения в римановых инвариантах

Одним из известных подходов к решению задачи регулярного изометрического погружения двумерного риманова многообразия в трехмерное евклидово пространство E^3 является классический метод, основанный на теореме О. Бонне (см., например, [1]). Этот метод состоит в следующем.

Пусть метрика многообразия задана на плоскости параметров xOy линейным элементом вида

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2 \tag{1.1}$$

(для определенности будем считать, что коэффициенты $E(x, y)$, $F(x, y)$ и $G(x, y)$ квадратичной формы (1.1) заданы на всей плоскости).

Требуется найти три функции $L(x, y)$, $M(x, y)$ и $N(x, y)$ так, чтобы дифференциальная форма

$$Ldx^2 + 2Mdxdy + Ndy^2$$

была второй квадратичной формой поверхности, реализующей метрику (1.1).

Как известно [1, 2], искомые функции L, M и N должны удовлетворять следующей системе уравнений: *Петерсона — Кодацци*

$$\begin{gathered}2(EG-F^2)(L_y-M_x)-(EN-2FM+GL)(E_y-F_x)+\\ +\begin{vmatrix} E & E_x & L\\ F & F_x & M\\ G & G_x & N\end{vmatrix}=0,\\ 2(EG-F^2)(M_y-N_x)-(EN-2FM+GL)(F_y-G_x)+\\ +\begin{vmatrix} E & E_y & L\\ F & F_y & M\\ G & G_y & N\end{vmatrix}=0\end{gathered} \tag{1.2}$$

и *Гаусса*

$$LN-M^2=K(EG-F^2) \tag{1.3}$$

(здесь K — кривизна метрики (1.1)).

Отыскав решение $L(x, y)$, $M(x, y)$, $N(x, y)$ системы (1.2) — (1.3), мы сможем однозначно (с точностью до положения в пространстве E^3) указать поверхность, для которой $Edx^2+2Fdxdy+Gdy^2$ будет первой, а $Ldx^2+2Mdxdy+Ndy^2$ — второй квадратичной формой [1].

Предположим, что кривизна K многообразия отрицательна. Подвергнем в этом случае систему уравнений (1.2), (1.3) Петерсона — Кодацци и Гаусса следующим преобразованиям [3—5].

Введем новые неизвестные функции r и s по формулам

$$r = -\frac{M + \sqrt{K(F^2 - EG)}}{N}, \qquad s = \frac{M - \sqrt{K(F^2 - EG)}}{N}. \tag{1.4}$$

Тогда система (1.2), (1.3) преобразуется в систему уравнений вида

$$\begin{aligned} r_x + s r_y &= \Phi(x, y, r, s), \\ s_x + r s_y &= \Phi(x, y, s, r), \end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$\Phi(x, y, r, s) = A_0 + A_1 r + A_2 s + A_3 r^2 + A_4 rs + A_5 r^2 s, \tag{1.6}$$

а функции A_j, $j = 0, \ldots, 5$, выражаются через коэффициенты E, F, G метрики (1.1) по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{E_x F - 2EF_x + EF_y}{2(EG - F^2)}, \\
A_1 &= \frac{K_x}{4K} + \frac{E_x G - EG_x - 2FF_x + 2E_y F}{2(EG - F^2)}, \\
A_2 &= -\frac{K_x}{4K} + \frac{E_y F - EG_x}{2(EG - F^2)}, \\
A_3 &= \frac{K_y}{4K} + \frac{E_y G - FG_x}{2(EG - F^2)}, \\
A_4 &= -\frac{K_y}{4K} + \frac{E_y G - EG_y + 2FF_x + 2FG_x}{2(EG - F^2)}, \\
A_5 &= \frac{2F_y G - FG_y + GG_x}{2(EG - F^2)}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Функции r и s называются *инвариантами Римана*. Поэтому систему (1.5) принято называть *основной системой уравнений теории поверхностей отрицательной кривизны в римановых инвариантах.*

Если найдено гладкое решение $r(x, y)$, $s(x, y)$ системы (1.5), удовлетворяющее условию $r(x, y) \neq s(x, y)$, то функции

$$\begin{gathered} L = \frac{2sr}{s - r}\sqrt{K(F^2 - EG)}, \quad M = -\frac{s + r}{s - r}\sqrt{K(F^2 - EG)}, \\ N = \frac{2}{s - r}\sqrt{K(F^2 - EG)} \end{gathered} \tag{1.8}$$

обратят все уравнения системы (1.2), (1.3) в тождества. Радиус-вектор поверхности, реализующей метрику (1.1), находится затем по функциям L, M и N обычным способом при помощи деривационных формул Гаусса — Вейнгартена [1—2].

Система (1.5) представляет собой систему квазилинейных уравнений гиперболического типа. Характеристиками этой системы являются интегральные кривые, определяемые дифференциальными уравнениями

$$\frac{dy}{dx} = r(x, y), \qquad \frac{dy}{dx} = s(x, y).$$

Если метрика (1.1) реализована посредством регулярной поверхности, то функции $r(x, y)$ и $s(x, y)$ суть угловые коэффициенты образов асимптотических линий на параметрической плоскости xOy.

Заметим также, что левые части уравнений системы (1.5) представляют собой полные производные функций $r(x, y)$ и $s(x, y)$ вдоль соответствующих характеристик этой системы.

§ 2. Уравнение Дарбу

Другим известным способом построения регулярной поверхности, реализующей заданную метрику, является метод, предложенный Г. Дарбу [6, с. 253—269].

Пусть метрика риманова многообразия задана на плоскости параметров xOy линейным элементом

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2. \tag{2.1}$$

Чтобы найти регулярную поверхность, на которой реализуется метрика (2.1), достаточно указать ее радиус-вектор, т. е. найти три функции $X(x, y)$, $Y(x, y)$ и $Z(x, y)$, удовлетворяющие соотношению

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = ds^2. \tag{2.2}$$

Для этого поступают следующим образом. Рассматривают дифференциальную квадратичную форму

$$ds^2 - dZ^2 = (E - P^2) dx^2 + 2(F - PQ) dx dy + (G - Q^2) dy^2 \tag{2.3}$$

(здесь $P = Z_x$, $Q = Z_y$) и накладывают на нее два естественных требования: форма $ds^2 - dZ^2$ должна быть положительно определенной и иметь нулевую кривизну.

Вычисляя кривизну квадратичной формы (2.3) и приравнивая ее к нулю, приходим к дифференциальному уравнению для неизвестной функции Z — уравнению Дарбу. Пользуясь обозначениями $R = Z_{xx}$, $S = Z_{xy}$, $T = Z_{yy}$, запишем это уравнение в следующей симметричной форме, предложенной Г. Дарбу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2R & P & Q \\ 2T & 4U + 4S^2 & 2F_y - G_x & G_y \\ P & E_x & E & F \\ Q & 2F_x - E_y & F & G \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2S & P & Q \\ 2S & 4S^2 & E_y & G_x \\ P & E_y & E & F \\ Q & G_x & F & G \end{vmatrix}, \tag{2.4}$$

где $U = -(1/2)E_{yy} + F_{xy} - (1/2)G_{xx}$. Полученное уравнение (2.4) является уравнением Монжа — Ампера для неизвестной функции Z. Прежде чем подвергнуть это уравнение дальнейшим преобразованиям, напомним некоторые понятия.

Уравнением Монжа — Ампера называется дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\mathscr{A} + \mathscr{B}R + \mathscr{C}S + \mathscr{D}T + \mathscr{E}(RT - S^2) = 0, \tag{2.5}$$

где функции $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ и $\mathscr{E}$ зависят от переменных x, y, Z, P и Q, причем $\mathscr{E} \neq 0$. Знак выражения

$$\Delta^2 = \mathscr{C}^2 - 4\mathscr{B}\mathscr{D} + 4\mathscr{A}\mathscr{E} \tag{2.6}$$

определяет тип уравнения (2.5). В случае, когда это выражение положительно, уравнение Монжа — Ампера является уравнением гиперболического типа [7].

Путем несложных вычислений можно убедиться в том, что полученное выше уравнение (2.4) действительно имеет структуру (2.5) и, следовательно, является уравнением Монжа — Ампера.

Не будем выписывать для коэффициентов $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ явных формул. Заметим только, что в случае, когда уравнение (2.5) является уравнением погружения, функции $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ и $\mathscr{E}$ обладают следующими свойствами: функции $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ зависят только от x, y, P и Q, причем $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ — линейные функции переменных P и Q, $\mathscr{A}$ — квадратичная функция переменных P и Q, а $\mathscr{E} = 4(EG - F^2) \neq 0$.

Если $Z(x, y)$ — решение уравнения Дарбу (2.4), то две другие компоненты $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ радиуса-вектора искомой поверхности можно определить квадратурами из дифференциального уравнения

$$dX^2+dY^2=ds^2-dZ^2$$

(см., например, [8, 9]).

Предположим, что кривизна заданного многообразия отрицательна и рассмотрим уравнение погружения Дарбу (2.5). В этом случае выражение (2.6) положительно [9]. Тем самым уравнение (2.5) будет иметь гиперболический тип. Так как $\mathscr{E}\neq 0$, то без ограничения общности и для простоты вычислений можно считать уравнение (2.5) пронормированным, т. е. $\mathscr{E}\equiv 1$.

Как известно (см., например, [7, с. 491—495], а также [10]), всякое уравнение Монжа — Ампера, имеющее гиперболический тип, путем введения характеристических переменных можно свести к системе пяти квазилинейных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций x, y, Z, P и Q. Мы тоже подвергнем уравнение (2.5) дальнейшим преобразованиям, однако поступим несколько по-иному.

Пусть коэффициенты $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ и $\mathscr{E}\equiv 1$ уравнения (2.5) являются гладкими функциями от x, y, P, Q и Z и $\Delta^2>0$. Запишем для уравнения (2.5) характеристическое соотношение. Оно имеет следующий вид [7, с. 492]:

$$(\mathscr{B}+T)\dot{y}^2-(\mathscr{C}-2S)\dot{y}\dot{x}+(\mathscr{D}+R)\dot{x}^2=0 \tag{2.7}$$

(точка обозначает дифференцирование по параметру). Будем предполагать, что $\mathscr{B}+T\neq 0$ и $\mathscr{D}+R\neq 0$. При условии $\Delta^2>0$ уравнение (2.7) имеет действительные различные корни. Разрешая уравнение (2.7) относительно $\dot{y}/\dot{x}$, получим

$$r=\frac{\mathscr{C}+\Delta-2S}{2(\mathscr{B}+T)},\qquad s=\frac{\mathscr{C}-\Delta-2S}{2(\mathscr{B}+T)}. \tag{2.8}$$

Выражая из соотношений (2.8) и из уравнения (2.5) R, S и T, приходим к следующим формулам:

$$\begin{aligned} R&=P_x=-\frac{\Delta sr}{s-r}-\mathscr{D},\\ S&=P_y=Q_x=\frac{\Delta}{2}\,\frac{s+r}{s-r}+\frac{\mathscr{C}}{2},\\ T&=Q_y=-\frac{\Delta}{s-r}-\mathscr{B}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Заменяя R, S и T в равенствах

$$R_y=S_x,\quad S_y=T_x \tag{2.10}$$

их выражениями (2.9), после довольно громоздких, но несложных вычислений приходим к системе двух дифференциальных уравнений первой степени относительно неизвестных функций r и s [11]:

$$\begin{aligned} r_x+sr_y&=\Phi_1,\\ s_x+rs_y&=\Phi_2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Функции Φ_1 и Φ_2 в общем случае зависят от семи переменных x, y, r, s, Z, P и Q. Если же уравнение Монжа — Ампера (2.5) является уравнением погружения Дарбу, то функции будут зависеть только от x, y, r и s, причем между этими функциями установится следующая связь:

$$\Phi_2(x,y,r,s)=\Phi_1(x,y,s,r).$$

Более того, функция $\Phi_1(x,y,r,s)$ будет иметь структуру многочлена по переменным r и s,

$$\Phi_1(x,y,r,s)=A_0+A_1r+A_2s+A_3r^2+A_4rs+A_5r^2s,$$

коэффициенты A_j, $j=0, \ldots, 5$, которого зависят только от x и y и выражаются через метрику (2.1) по формулам (1.7).

Тем самым, в случае, когда уравнения (2.5) являются уравнением погружения, система (2.11) принимает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
r_x + s r_y &= \Phi(x, y, r, s), \\
s_x + r s_y &= \Phi(x, y, s, r).
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

Уравнения для неизвестных P и Q

$$
\begin{aligned}
P_x + s P_y &= \frac{\mathscr{C} + \Delta}{2} s - \mathscr{D}_s, \\
Q_x + r Q_y &= \frac{\mathscr{C} + \Delta}{2} - \mathscr{B} r
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

легко вытекают из формул (2.9). Пятое соотношение

$$
Z_x + r Z_y = P + rQ \tag{2.14}
$$

является соотношением полосы.

Система (2.12)—(2.14) эквивалентна исходному уравнению Дарбу (2.5) в следующем смысле. Если $r(x, y)$, $s(x, y)$, $Z(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — решение этой системы с начальными данными, определенными через начальные данные для уравнения (2.5), и $r(x, y) \neq s(x, y)$, то $Z(x, y)$ является решением задачи Коши для уравнения (2.5).

Замечание. Полученная система пяти уравнений (2.12)—(2.14) имеет любопытную структуру. В уравнения (2.12) входят только неизвестные функции $r(x, y)$ и $s(x, y)$. Отыскав их (напомним, что условие $r(x, y) \neq s(x, y)$ должно быть обязательно выполнено), легко найти неизвестные $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — уравнения (2.13) интегрируются вдоль характеристик в квадратурах. А затем из уравнения (2.14) вычисляется $Z(x, y)$.

Отметим далее, что условия интегрируемости (2.10) приводят к основной системе уравнений теории поверхностей в римановых инвариантах, и метод Дарбу для многообразий отрицательной кривизны порождает те же дифференциальные соотношения (2.12), что и уравнения Петерсона — Кодацци и Гаусса. Три других уравнения (формулы (2.13) и (2.14)) служат для построения компоненты Z радиуса-вектора искомой поверхности; затем вычисляются X и Y. При подходе к решению задачи погружения через систему (1.2), (1.3) радиус-вектор строится при помощи деривационных формул по функциям L, M и N, определяемых соотношениями (1.8).

§ 3. Погружение неограниченных областей многообразий отрицательной кривизны в пространство E^3

Исследование задачи изометрического погружения в целом двумерных многообразий отрицательной кривизны восходит к Д. Гильберту. В известной работе [12] им была доказана непогружаемость плоскости Лобачевского в трехмерное евклидово пространство E^3 в виде регулярной поверхности. Позже Н. В. Ефимов [13, 14] существенно обобщил этот результат, установив, что регулярное изометрическое погружение в пространство E^3 полного гомеоморфного плоскости риманова многообразия возможно лишь при условии неотрицательности точной верхней грани кривизны его метрики. Отсюда, в частности, вытекает, что полные гомеоморфные плоскости двумерные многообразия с равномерно отделенной от нуля отрицательной кривизной не могут быть реализованы в пространстве E^3 в виде регулярных поверхностей.

Естественно возникший вопрос о том, какие области на многообразиях отрицательной кривизны можно регулярно и изометрично погрузить в трехмерное евклидово пространство, потребовал развития специального аналитического аппарата.

Существенное продвижение в решении задачи регулярных изометрических погружений в трехмерное евклидово пространство двумерных многообразий отрицательной кривизны связано с системой уравнений погружения (1.5), полученной Б. Л. Рождественским [5]. Прежде чем сформулировать геометрические результаты, полученные путем анализа решений этой системы уравнений, определим класс многообразий, которому в дальнейшем будет уделено основное внимание — многообразиям типа Л.

Многообразием типа Л называется полное гомеоморфное двумерной плоскости риманово многообразие, кривизна которого отделена от нуля отрицательной постоянной. Частным случаем многообразия типа Л является плоскость Лобачевского — полное гомеоморфное плоскости риманово многообразие, кривизна которого равна -1.

Обратимся сначала к первым результатам по погружениям, полученным при помощи основной системы уравнений для поверхностей отрицательной кривизны (1.5). Более двадцати лет назад Э. Г. Позняком [3—4] была доказана возможность регулярной реализации в пространстве E^3 произвольной ограниченной области и произвольной полосы постоянной ширины многообразия типа Л. Позже [15] было доказано, что если кривизна многообразия типа Л стремится на бесконечности к отрицательной постоянной, то любой орикруг этого многообразия можно регулярно и изометрично погрузить в трехмерное евклидово пространство E^3.

Опишем коротко общую схему метода, при помощи которого получены эти результаты. Пусть Ω — некоторая, вообще говоря, неограниченная односвязная область на многообразии типа Л. На этом многообразии вводится полугеодезическая система координат, естественным образом связанная со структурой заданной области Ω. Всегда можно добиться того, чтобы линейный элемент многообразия в построенных полугеодезических координатах имел вид

$$ds^2 = dx^2 + B^2(x, y)\,dy^2. \tag{3.1}$$

Ясно, что для линейного элемента (3.1) система уравнений погружения в римановых инвариантах (1.5) существенно упрощается. Имеем

$$\begin{aligned} r_x + sr_y &= -(r+s)\frac{B_x}{B} + \frac{r-s}{4}\left(\frac{K_x}{K} + r\frac{K_y}{K}\right) - rs\frac{B_y}{B} - r^2sBB_x, \\ s_x + rs_y &= -(s+r)\frac{B_x}{B} + \frac{s-r}{4}\left(\frac{K_x}{K} + s\frac{K_y}{K}\right) - sr\frac{B_y}{B} - s^2rBB_x. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Обозначим через ω область на плоскости параметров xOy, соответствующую заданной области Ω (для указанных выше случаев область ω совпадает либо с бесконечной полосой либо с полуплоскостью). Решение системы уравнений (3.2) в области ω ищется в следующей форме:

$$r = \varepsilon\sqrt{-K} + \varepsilon^2\rho, \quad s = -\varepsilon\sqrt{-K} + \varepsilon^2\sigma; \tag{3.3}$$

здесь ρ и σ — новые неизвестные функции, $\varepsilon > 0$ — малый числовой параметр.

Построив в области ω гладкое решение системы (3.2) указанной структуры (3.3), для которого всюду в области ω выполняются оценки $\rho = \mathcal{O}(\sqrt{-K})$, $\sigma = \mathcal{O}(\sqrt{-K})$, можно утверждать, что для любых достаточно малых значений параметра ε требуемое неравенство $r \neq s$ будет иметь место.

Применение основной системы уравнений теории поверхностей отрицательной кривизны в римановых инвариантах (3.2) позволило решить ряд новых задач и для многообразий постоянной отрицательной кривизны (в частности, для плоскости Лобачевского).

Для плоскости Лобачевского система уравнений погружения упрощается еще более. Например, для линейного элемента

$$ds^2 = dx^2 + \operatorname{ch}^2 x dy^2 \tag{3.4}$$

она принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} r_x + s r_y &= -(r+s)\operatorname{th} x - r^2 s \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x, \\ s_x + r s_y &= -(s+r)\operatorname{th} x - s^2 r \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Прежде чем сформулировать полученные в этом направлении результаты, следует заметить, что с каждым новым шагом отыскание неограниченных областей на плоскости Лобачевского, допускающих регулярную реализацию в пространстве E^3, осложняется тем более, что, как доказано Н. В. Ефимовым [16], полуплоскость Лобачевского в пространство E^3 регулярно и изометрично не погружается.

Опишем теперь те неограниченные области плоскости Лобачевского, которые могут быть реализованы в трехмерном евклидовом пространстве E^3 в виде регулярных поверхностей, прибегнув для этого к конформной интерпретации плоскости Лобачевского в круге (модель Пуанкаре). Это прежде всего *бесконечные многоугольники*. Будем называть так выпуклые множества на плоскости Лобачевского, граница которых состоит из конечного или счетного числа прямых, именуемых в последующем сторонами; при этом дополнительно предполагается, что никакая полуплоскость в таком множестве не содержится (см. [16]). Две стороны называются *соседними*, если они параллельны. Соседние стороны определяют бесконечно удаленную вершину бесконечного многоугольника (она лежит на абсолюте).

Задача решена полностью, если число вершин бесконечного выпуклого многоугольника конечно: всякий бесконечный выпуклый многоугольник с конечным числом вершин на абсолюте может быть регулярно и изометрично погружен в пространство E^3 [17]. Кроме того, найдены два разных класса бесконечных выпуклых многоугольников с бесконечным числом вершин на абсолюте, допускающие регулярную реализацию в пространстве E^3. Класс $\mathscr{M}_1$, состоящий из бесконечных выпуклых многоугольников, для каждого из которых можно указать орицикл такой, что точная нижняя грань длин ортогональных проекций сторон этого многоугольника на этот орицикл положительна. Класс $\mathscr{M}_2$ образуют бесконечные выпуклые многоугольники, обладающие следующим свойством: точная нижняя грань длин ортогональных проекций сторон рассматриваемого многоугольника на одну из его сторон положительна. Эти результаты получены Э. Г. Позняком [17] путем тонкого анализа свойств системы (3.5) и поведения асимптотических линий на поверхностях постоянной отрицательной кривизны.

Перейдем теперь к описанию результатов последних лет. В начале 80-х годов было обнаружено, что другой обширный класс неограниченных областей плоскости Лобачевского, которые могут быть регулярно и изометрично погружены в трехмерное евклидово пространство E^3, образуют так называемые расширяющиеся полосы.

Пусть l — произвольная прямая на плоскости Лобачевского и O — точка на l. Точка O разбивает прямую l на два луча l^+ и l^-. Введем на прямой l натуральный параметр — длину дуги τ, отсчитывая его от точки O так, чтобы точкам луча l^+ отвечали положительные значения параметра τ, а точкам луча l^- — отрицательные. Рассмотрим далее семейство прямых $\{l_\perp(\tau)\}$, ортогональных прямой l. На каждой прямой $l_\perp(\tau)$ по обе стороны от l отложим отрезки равной длины $d(\tau) > 0$. Множество точек, лежащих на всех построенных отрезках, назовем *полосой* Π_d *с базой* l. Полоса Π_d называется *расширяющейся*, если определяющая ее функция $d(\tau)$ является четной и на луче l^+ монотонно возрастает к бесконечности при $\tau \to +\infty$.

Первый результат по расширяющимся полосам был получен Ж. Кайдасовым [18]. Он показал, что существуют расширяющиеся полосы, которые допускают регулярное изометрическое погружение в пространство E^3. Правда, скорость, с которой функции $d(\tau)$, определяющие такие полосы, стремились к бесконечности, была весьма мала. Однако уже этот результат позволил расширить класс бесконечных выпуклых многоугольников плоскости Лобачевского, допускающих регулярную реализацию в пространстве E^3 [19].

Как уже отмечалось выше, каждое продвижение в отыскании некомпактных областей плоскости Лобачевского, допускающих регулярное изометрическое погружение в пространство E^3, требует изыскания новых подходов. Кайдасову удалось построить специальную вспомогательную функцию $f(y)>0$ и найти новое преобразование неизвестных функций r и s:

$$r=\frac{f(y)(1+\rho)}{\sqrt{1-f^2(y)\operatorname{sh}^2 x}},\quad s=-\frac{f(y)(1+\sigma)}{\sqrt{1-f^2(y)\operatorname{sh}^2 x}}.$$

Это позволило ему построить решение системы уравнений (3.5) в полосе вида $\{(x,\ y)\mid |x|\leqslant -\ln f(y)\}$. Структура функционального параметра довольна сложна. Отметим лишь, что областью определения функции $f(y)$ является вся числовая ось, график функции $f(y)$ имеет бесконечное число отрезков постоянства и при $|y|\to+\infty$

$$\frac{f'(y)}{f(y)}\to 0,\quad \frac{f''(y)}{f(y)}\to 0.$$

Наличие у функции $f(y)$ значительных участков постоянства оказывается весьма существенным при отыскании нового класса бесконечных выпуклых многоугольников плоскости Лобачевского, регулярно и изометрично погружающихся в пространство E^3.

В последующих работах [20, 21] условия на скорость изменения ширины полосы удалось сначала существенно ослабить, а затем и перенести полученные результаты на многообразия типа Л [22] (в отличие от результатов по погружению бесконечных выпуклых многоугольников [17, 19], где постоянство кривизны существенно используется при доказательстве). Понятие расширяющейся полосы на многообразии типа Л вводится вполне аналогично. В качестве базы полосы берется полная геодезическая.

Опишем коротко те рассуждения, которые позволили получить основной результат работы [22]. Сначала посредством формул

$$r=\xi(x,\ y)(1+\rho),\quad s=-\xi(x,\ y)(1+\sigma),\tag{3.6}$$

где
$$\xi(x,y)=\sqrt{-\frac{\varepsilon^2(y)K(x,y)}{1+\varepsilon^2(y)K(x,y)B^2(x,y)}},$$

$\varepsilon(y)=\exp(-\lambda\sqrt{y^2+a^2})$, вводятся новые неизвестные функции ρ и σ. После подстановки соотношений (3.6) в уравнения (3.2) и простых преобразований получается система квазилинейных дифференциальных уравнений для подлежащих определению функций ρ и σ. Эта система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}&\rho_x-\xi(x,\ y)(1+\sigma)\rho_y=\Psi_1(x,\ y,\ \rho,\ \sigma),\\&\sigma_x+\xi(x,\ y)(1+\rho)\sigma_y=\Psi_2(x,\ y,\ \rho,\ \sigma).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Выбирая по произвольно заданным положительным числам m и n параметры λ и a, всегда можно добиться того, что в расширяющейся полосе

$$\pi=\{(x,\ y)\mid |x|\leqslant m|y|+n\} \tag{3.8}$$

система уравнений (3.7) имеет гладкое решение $\rho(x, y)$, $\sigma(x, y)$ такое, что всюду в полосе π выполняются неравенства

$$|\rho(x,\ y)|<1, \quad |\sigma(x,\ y)|<1. \tag{3.9}$$

Из соотношений (3.6) и (3.9) уже легко вытекает, что $r(x, y)\neq s(x, y)$.

Тем самым расширяющаяся полоса П многообразия типа Л, соответствующая полосе (3.8), погружается в пространство E^3 в виде регулярной поверхности.

Известно [23], что многообразия типа Л так же, как и плоскость Лобачевского, можно взаимно однозначно и конформно отобразить на открытый круг, границу которого естественно назвать абсолютом. Поэтому результаты по погружению расширяющихся полос как на плоскости Лобачевского, так и на многообразиях типа Л, удобно описывать, прибегнув к этой конформной интерпретации. Так, например, из результатов работы [22] вытекает, что в пространство E^3 может быть регулярно и изометрично погружена любая выпуклая область многообразия типа Л, граница которой имеет с абсолютом ровно одну общую точку и в ней конечный порядок касания.

Для класса расширяющихся полос задача погружения решена полностью Д. В. Туницким. Окончательный результат формулируется так.

Любая расширяющаяся полоса на произвольном многообразии типа Л *реализуется в трехмерном евклидовом пространстве* E^3 *в виде регулярной поверхности* [24].

Мы не будем подробно описывать непростое доказательство этой теоремы. Укажем лишь преобразование переменных r и s, приводящее к сформулированному результату:

$$r=\varepsilon(y)\left(\sqrt{-K(x,\ y)}+g(x,\ y)\right)+\varepsilon^2(y)\rho,$$

$$s=-\varepsilon(y)\left(\sqrt{-K(x,\ y)}-g(x,\ y)\right)-\varepsilon^2(y)\sigma.$$

Здесь $\varepsilon(y)$ — положительная функция, скорость стремления которой к нулю при $|y|\to+\infty$ зависит от того, насколько быстро расширяется полоса, $g(x, y)$ — гладкое решение уравнения

$$g_x=-\varepsilon' g^2-2\frac{B_x}{B}-\varepsilon' K,$$

ρ и σ — новые неизвестные функции.

В обзоре [25] был поставлен вопрос о возможности регулярной реализации в пространстве E^3 выпуклых областей плоскости Лобачевского, а также и многообразий типа Л, граница которых в конформной модели имеет с абсолютом касание любого порядка. Для широкого класса таких неограниченных областей ответ положителен. Именно любая область на плоскость Лобачевского и на многообразии типа Л, граница которой в конформной модели имеет с абсолютом не более двух общих точек, допускает регулярное изометрическое погружение в трехмерное евклидово пространство E^3. В частности, в пространство E^3 погружается любой орикруг многообразия типа Л и выпуклая (во внутренней метрике) оболочка любых двух орикругов.

З а м е ч а н и е. Выше было указано несколько работ, посвященных отысканию на многообразиях типа Л неограниченных областей, допускающих регулярное изометрическое погружение в пространство E^3. Во всех рассматриваемых случаях система уравнений погружения (3.2) одна и та же. Однако области, в которых гладкое решение этой системы существует, каждый раз получались разными. Нетрудно понять, что структура найденных областей определялась главным образом выбором начальных условий (метод доказательства соответствующих теорем существования довольно стандартен). Однако мы всякий раз начинали описание хода рассуждений, приводящих к соответствующему результату, не с начальных условий, а с выбора подходящей замены неизвестных функций r и s на новые неизвестные функции ρ и σ. Все дело в том, что такая замена решает несколько вопросов:

1) по существу, она задает для системы уравнений (3.2) начальные условия — во всех случаях для новых неизвестных функций ρ и σ удобнее всего выбирать их нулевыми,

2) определяет структуру искомого решения — его главную часть во всей области существования решения,

3) хотя для новых переменных ρ и σ получаются более громоздкие уравнения, отвечать-то нужно уже на более простой вопрос — ограничено ли в интересующей нас области построенное решение.

В заключение этого параграфа несколько слов об условиях гладкости. Для получения всех сформулированных выше результатов по погружениям от многообразия типа Л достаточно потребовать, чтобы в окрестности каждой точки многообразия существовала полугеодезическая система координат (ξ, η) с геодезической базой, относительно которой кривизна K многообразия была бы C^2-гладкой функцией переменных ξ и η.

§ 4. Задача Коши для уравнения Монжа — Ампера гиперболического типа

Как уже отмечалось в § 2, любое уравнение Монжа — Ампера гиперболического типа сводится к системе (2.11), (2.13), (2.14) пяти квазилинейных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций r, s, Z, P, Q. В случае, когда уравнение Монжа — Ампера является уравнением погружения Дарбу, подсистема (2.11) принимает автономную форму (2.12), куда входят только неизвестные r и s и не входят неизвестные Z, P и Q.

Укажем еще один класс уравнений Монжа — Ампера, обладающих подобным свойством. Предположим, что коэффициенты $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ уравнения (2.5) зависят только от неизвестных x и y, и не зависят от Z, P и Q; напомним, что $\mathscr{E} \equiv 1$. Тогда получим уравнение вида

$$\mathscr{A}(x, y)+\mathscr{B}(x, y)R+\mathscr{C}(x, y)S+\mathscr{D}(x, y)T+RT-S^2=0. \qquad (4.1)$$

Условие гиперболичности (2.6) запишется так:

$$\Delta^2=\Delta^2(x, y)=\mathscr{C}^2-4\mathscr{B}\mathscr{D}+4\mathscr{A}>0. \qquad (4.2)$$

В этом случае уравнения подсистемы (2.11) запишутся в следующей форме:

$$\begin{aligned} r_x+sr_y&=(r-s)(a+br),\\ s_x+rs_y&=(r-s)(c+ds), \end{aligned} \qquad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} a=a(x, y)&=\frac{2\mathscr{D}_y+\mathscr{C}_x+\Delta_x}{2\Delta},\\ b=b(x, y)&=\frac{-2\mathscr{B}_x-\mathscr{C}_y+\Delta_y}{2\Delta},\\ c=c(x, y)&=\frac{2\mathscr{D}_y+\mathscr{C}_x-\Delta_x}{2\Delta},\\ d=d(x, y)&=\frac{-2\mathscr{B}_x-\mathscr{C}_y-\Delta_y}{2\Delta}. \end{aligned} \qquad (4.4)$$

Уравнения (2.13), (2.14) для трех других неизвестных P, Q и Z сохранят свой вид:

$$\begin{aligned} &P_x + sP_y = e + fs, \\ &Q_x + rQ_y = g + hr, \\ &Z_x + rZ_y = P + rQ, \end{aligned} \tag{4.5}$$

где

$$\begin{gathered} e = e(x, y) = -\mathscr{D}(x, y), \\ f = f(x, y) = \frac{\mathscr{C}(x, y) + \Delta(x, y)}{2} = g(x, y) = g, \\ h = h(x, y) = -\mathscr{B}(x, y). \end{gathered} \tag{4.6}$$

Как показано в работах [11, 26], совокупность уравнений Монжа — Ампера, для которых подобный эффект «расслаивания» системы уравнений (2.11), (2.13), (2.14) на автономные подсистемы имеет место, двумя приведенными классами — уравнениями погружения Дарбу (2.4) и уравнениями вида (4.1), по существу, исчерпывается.

О системе (2.12), которая возникает в ходе анализа свойств уравнения Дарбу (2.4), мы уже говорили в § 3. Обратимся теперь к уравнению (4.1). Предположим выполненными следующие условия.

А. Функции $\mathscr{A}(x, y)$, $\mathscr{B}(x, y)$, $\mathscr{C}(x, y)$, $\mathscr{D}(x, y)$ заданы на всей плоскости xOy.

Б. Являются на ней C^2 — ограниченными функциями по переменным x и y.

В. Величина $\Delta(x, y)$ равномерно отделена от нуля положительной постоянной.

Поставим для уравнения (4.1), коэффициенты $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ которого удовлетворяют условиям А—В, задачу Коши. Для чего зададим искомой функции $Z(x, y)$ на оси ординат Oy начальные условия

$$Z(0, y) = Z_0(y), \quad Z_x(0, y) = P_0(y), \tag{4.7}$$

наложив на функции Z_0 и P_0 следующие требования.

На оси Oy:

Г. Функция Z_0 является C^3-ограниченной.

Д. Функция P_0 является C^2-ограниченной.

Кроме того,

Е. Абсолютная величина суммы $\mathscr{B}(0, y) + Z_0''(y)$ равномерно отделена от нуля, т. е. ось Oy свободна.

Покажем, как получается оценка для ширины полосы $\pi_\mu = \{(x, y) \mid |x| \leqslant \mu, -\infty < y < +\infty\}$ плоскости xOy, в которой задача Коши (4.1), (4.7) при сформулированных условиях А—Е имеет решение, т. е. существует C^3-гладкая функция $Z(x, y)$, обращающая в тождество уравнение (4.1) и удовлетворяющая на оси Oy заданным условиям (4.7).

Для этого, следуя [11], достаточно оценить ширину полосы, в которой система (4.3), (4.5) имеет гладкое решение $r(x, y)$, $s(x, y)$, $Z(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$, принимающее на оси ординат начальные значения

$$\begin{gathered} r(0, y) = r_0(y) = \frac{\mathscr{C}(0, y) + \Delta(0, y) - 2P_0'(y)}{2\left(\mathscr{B}(0, y) + Z_0''(y)\right)}, \\ s(0, y) = s_0(y) = \frac{\mathscr{C}(0, y) - \Delta(0, y) - 2P_0'(y)}{2\left(\mathscr{B}(0, y) + Z_0''(y)\right)}, \\ Z(0, y) = Z_0(y), \quad P(0, y) = P_0(y), \quad Q(0, y) = Z_0'(y). \end{gathered} \tag{4.8}$$

Прежде всего отметим, что в области определенности решения системы (4.3), удовлетворяющего условиям (4.8), выполнено важное неравенство $r(x, y) \neq s(x, y)$. Это вытекает из того, что $r_0(y) \neq s_0(y)$ в силу условия $\Delta(0, y) > 0$ и из следующего представления для разности $r(x, y) - s(x, y)$:

$$r(x, y) - s(x, y) = (r_0(y) - s_0(y)) \times$$

$$\times \exp \int_0^x \left\{ \frac{\Delta_x}{\Delta} + (r + s) \frac{2\mathscr{B}_x + \mathscr{C}_y}{\Delta} + (s - r) \frac{\Delta_y}{\Delta} + s \right\} (\tau, y_I(\tau; x, y))\, d\tau,$$

где $y_I = y_I(\tau; x, y)$ — характеристика системы (4.3) — решение задачи Коши

$$\frac{dy_I}{d\tau} = s(\tau, y_I), \qquad y_I(x; x, y) = y, \tag{4.9}$$

которое в рассматриваемой области существует. Для получения нужной оценки прибегнем к помощи мажорирующей системы (см. [27, с. 62—65]), считая для простоты x положительным. В силу условий А—Е существуют положительные постоянные α, β, γ и δ, такие, что для функций (4.4) и (4.8) и для производных этих функций выполнены неравенства

$$|a|, |b|, |c|, |d| \leqslant \alpha; \quad |a_y|, |b_y|, |c_y|, |d_y| \leqslant \beta;$$

$$|r_0(y)|, |s_0(y)| \leqslant \gamma; \quad |r_0'(y)|, |s_0'(y)| \leqslant \delta.$$

Для рассматриваемой здесь системы уравнений (4.3), (4.5) мажорирующая система будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\bar r}{dx} = (\bar r + \bar s)(\alpha + \beta \bar r),\\
&\frac{d\bar s}{dx} = (\bar s + \bar r)(\alpha + \beta \bar s),\\
&\frac{d\bar p}{dx} = (\bar r + \bar s)(\alpha + \beta \bar r) + (\alpha + 2\beta \bar r + \beta \bar s)\, \bar p + (\alpha + \beta \bar r)\, \bar q + \bar p \bar q,\\
&\frac{d\bar q}{dx} = (\bar s + \bar r)(\alpha + \beta \bar s) + (\alpha + \beta \bar r + 2\beta \bar s)\, \bar q + (\alpha + \beta \bar s)\, \bar p + \bar q \bar p.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Составим для системы уравнений (4.10) следующую задачу Коши:

$$\bar r(0) = \bar s(0) = \gamma, \quad \bar p(0) = \bar q(0) = \delta. \tag{4.11}$$

Функции $\bar r(x)$ и $\bar s(x)$ можно выразить в квадратурах:

$$\bar r(x) = \bar s(x) = \frac{\alpha\gamma \exp(2\alpha x)}{\alpha + \beta\gamma - \beta \exp(2\alpha x)}.$$

Пусть $\varkappa$ — любое положительное число, подчиненное условию

$$\varkappa < \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{\alpha + \beta\gamma}{\beta\gamma}.$$

Положим $\tilde r = \bar r(\varkappa)$.

Теперь, после того, так функции $\bar r(x)$ и $\bar s(x)$ найдены, решение задачи (4.10), (4.11) сводится к задаче Коши для уравнения Рикатти

$$\begin{aligned}
&\frac{d\bar p}{dx} = 2\tilde r(\alpha + \beta \tilde r) + (2\alpha + 4\beta \tilde r)\, \bar p + \bar p^2,\\
&\bar p(0) = \delta.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Решение задачи (4.12) существует на отрезке $[0, \nu]$, длина которого определяется из условия

$$\nu < \int_\delta^{+\infty} \frac{dt}{\varepsilon_0 + 2\varepsilon_1 t + t^2},$$

где $\varepsilon_0 = 2\alpha\tilde{r} + 2\beta\tilde{r}^2$, $\varepsilon_1 = \alpha + 2\beta\tilde{r}$. Положим $\mu = \min\{\varkappa, \nu\}$. Тогда на отрезке $[0, \mu]$ существует решение задачи (4.12), а значит, и задачи (4.10), (4.11) для мажорирующей системы. Отсюда вытекает существование в полосе π_μ C^1-гладкого решения $r(x, y)$, $s(x, y)$, $Z(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ системы (4.3), (4.5) с начальными условиями (4.8). Найденная функция $Z(x, y)$ является C^3-гладким решением уравнения (4.1) с начальными условиями (4.7) в полосе $\pi_\mu = \{(x, y) \mid |x| \leqslant \mu, -\infty < y < \infty\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Погорелов А. В.** Дифференциальная геометрия.— М.: Наука, 1969.
2. **Бляшке В.** Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. Т. 1. Элементарная дифференциальная геометрия.— М.; Л.: ОНТИ, 1935.
3. **Позняк Э. Г.** О регулярной реализации в целом двумерных метрик отрицательной кривизны // Докл. АН СССР.— 1966.— Т. 170, № 4.— С. 786—789.
4. **Позняк Э. Г.** О регулярной реализации в целом двумерных метрик отрицательной кривизны // Укр. геометр. сб.— 1966.— Вып. 3.— С. 78—92.
5. **Рождественский Б. Л.** Система квазилинейных уравнений теории поверхностей // Докл. АН СССР.— 1962.— Т. 143, № 1.— С. 50—52.
6. **Darbous G.** Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calculus infinitésimal. P. 3.— Paris: Gauthier — Villars, 1894.
7. **Курант Р.** Уравнения с частными производными.— М.: Мир, 1964.
8. **Hartman P., Wintner A.** Gaussian curvature and local imbedding // Amer. J. math.— 1951.— V. 73.— P. 876—884.
9. **Шикин Е. В.** Об изометрическом погружении двумерных многообразий отрицательной кривизны методом Дарбу // Мат. заметки.— 1980.— Т. 27, № 5.— С. 779—794.
10. **Hartman P., Wintner A.** On hyperbolic partial differential equations // Amer. J. math.— 1952.— V. 74.— P. 834—864.
11. **Туницкий Д. В.** Системы в римановых инвариантах и уравнения Монжа — Ампера гиперболического типа: Деп. ВИНИТИ 16.07.87, № 5122 — В87.
12. **Гильберт Д.** Основания геометрии. Добавление V.— М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
13. **Ефимов Н. В.** Невозможность в трехмерном евклидовом пространстве полной регулярной поверхности с отрицательной верхней гранью гауссовой кривизны // Докл. АН СССР.— 1963.— Т. 150, № 6.— С. 1206—1209.
14. **Ефимов Н. В.** Поверхности с медленно изменяющейся отрицательной кривизной // Успехи мат. наук.— 1966.— Т. 21, № 5.— С. 3—58.
15. **Шикин Е. В.** Изометрические погружения в E^3 некомпактных областей неположительной кривизны // Мат. заметки.— 1979.— Т. 25, № 5.— С. 785—797.
16. **Ефимов Н. В.** Непогружаемость полуплоскости Лобачевского // Вестн. МГУ. Сер. мат. механ.— 1975.— Вып. 2.— С. 83—86.
17. **Позняк Э. Г.** Изометричное погружение в E^3 некоторых некомпактных частей плоскости Лобачевского // Мат. сб.— 1977.— Т. 102, № 1.— С. 3—12.
18. **Кайдасов Ж.** О регулярном изометрическом погружении в E^3 расширяющейся полосы плоскости Лобачевского // Исследования по теории поверхностей в римановых пространствах.— Л.: ЛГПИ, 1984.— С. 119—129.
19. **Кайдасов Ж.** О регулярном изометрическом погружении в E^3 одного класса бесконечных многоугольников плоскости Лобачевского: Деп. КазНИИНТИ 26.12.86, № 1488 — Ка — Д86.
20. **Кайдасов Ж., Шикин Е. В.** Об изометрическом погружении в E^3 выпуклой области плоскости Лобачевского, содержащей орикруга // Мат. заметки.— 1986.— Т. 39, № 4.— С. 612—617.
21. **Кайдасов Ж., Шикин Е. В.** Об изометрическом погружении в E^3 области плоскости Лобачевского, вмещающей орикруг // Вестн. МГУ. Сер. мат. мех.— 1986.— Вып. 5.— С. 79—81.
22. **Кайдасов Ж., Шикин Е. В.** Об изометрическом погружении в E^3 расширяющихся полос на многообразиях типа Л // Мат. заметки.— 1987.— Т. 42, № 6.— С. 842—853.
23. **Osserman R.** On the inequality $\Delta u \geqslant f(u)$ // Pacif. J. Math.— 1957.— V. 7, N 4.— P. 1641—1647.
24. **Туницкий Д. В.** О регулярном изометрическом погружении в E^3 неограниченных областей отрицательной кривизны // Мат. сб.— 1987.— Т. 134, № 1.— С. 119—134.
25. **Позняк Э. Г., Шикин Е. В.** Поверхности отрицательной кривизны // Алгебра. Топология. Геометрия (Итоги науки и техники).— М.: ВИНИТИ, 1974.— Т. 12.— С. 171—208.
26. **Шикин Е. В.** Об уравнениях изометрических погружений в трехмерное евклидово пространство двумерных многообразий отрицательной кривизны // Мат. заметки.— 1982.— Т. 31, № 4.— С. 601—612.
27. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.— М.: Наука, 1968.