С. К. ГОДУНОВ

КРИТЕРИИ СХОДИМОСТИ ОРТОГОНАЛЬНО-СТЕПЕННЫХ МЕТОДОВ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА МАТРИЦ

§ 1. ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель настоящей работы — подытожить результаты ранее проведенных исследований об условиях, обеспечивающих сходимость ортогонально-степенных методов выделения инвариантных подпространств. Мы сознательно оставляем в стороне хорошо зарекомендовавшее себя использование сдвигов при расчете индивидуальных собственных значений и сосредоточиваемся на стандартных процессах ортогонализации последовательных итераций, ориентированных на получение полного базиса или ортогонального проектора для инвариантного пространства любой размерности, отвечающего части спектра, которая лежит внутри того или иного круга.

Достаточно полное исследование интересующего нас вопроса проведено в выполненной под моим руководством диссертации Раззакова [1]. Содержание ее изложено в [2, 3]. В этой работе были выработаны два существенных критерия, величина которых влияет на скорость сходимости ортогонального степенного метода и QR-алгоритма.

Первый из них оценивает степень разделения спектра на две части при помощи граничной окружности, а второй характеризует взаимное расположение базиса выделяемого инвариантного подпространства и того координатного базиса, в котором записана исследуемая матрица.

В последнее время нам удалось выработать новый, несколько более сложный вариант ортогонально-степенного метода. Скорость сходимости его определяется только разделением спектра и не зависит от выбора того или иного координатного базиса [4]. Здесь же для численной характеристики степени разделения спектра матрицы A окружностью радиуса ρ с центром в начале координат комплексной плоскости предложен критерий $\omega = \omega\left(\frac{1}{\rho} A\right)$, аналогичный критерию Раззакова, но отличающийся от него тем, что он легче поддается вычислению. В [4] все рассмотрения проведены при $\rho = 1$. Мы и теперь будем придерживаться того же ограничения, которое на самом деле никак не сказывается на общности результата.

Приведены новый вариант доказательства сходимости метода из [4], отличающийся от использованного в оригинальной работе, и близкое к этому варианту исследование ортогонально-степенного метода. Для данного метода и QR-алгоритма, эквивалентных между собой, если не учитывать влияния погрешности округления, скорость сходимости определяется не только значением ω, но еще и величиной параметра l, аналогичной второму параметру из работы Раззакова. Опять же l предпочтителен, так как его проще рассчитать. Такой расчет для конкретных матриц может быть использован при анализе причин медленной сходимости во время тех или иных вычислительных процессов.

Мы не приводим здесь оценки влияния погрешностей округления. Такое исследование для конкретного алгоритма, реализованного на конкретной ЭВМ, реально выполнимо лишь после того, как будут окончательно выбраны параметры, характеризующие существенные свойства решаемой задачи. Параметры ω, l могут рассматриваться в качестве возможных вариантов. Настоящую работу, так же как и цитированное выше исследование Раззакова, можно рассматривать в качестве одного из этапов дискуссии, предшествующей окончательному выбору характеристик спектральной задачи.

§ 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Пусть R_1, R_2 — две квадратные матрицы одинакового размера, хотя бы одна из которых невырождена, и пусть M_1, M_2 — некоторые прямоугольные матрицы одинакового размера с числом столбцов, равным числу строк у R_i, такие, что столбцы каждой из M_1, M_2 ортогональны между собой и нормированы, т. е.

$$M_1^* M_1 = I, M_2^* M_2 = I.$$

Ясно, что это возможно лишь в случае, если у M_i число строк не меньше числа столбцов.

Лемма 1. *Если*

$$M_1 R_1 = M_2 R_2,$$

то существует такая унитарная $W(W^* W = W W^* = I)$, *что*

$$M_1 = M_2 W, \quad M_2 = M_1 W^*.$$

Доказательство. Пусть R_1 невырождена. Заметив, что

$$R_1 = M_1^* M_1 R_1 = M_1^* M_2 R_2, \; R_2 = M_2^* M_2 R_2 = M_2^* M_1 R_1,$$

устанавливаем, что R_2 и $M_1^* M_2$ тоже невырождены. Далее из равенств

$$R_1 = M_1^* M_2 R_2 = M_1^* M_2 \left(M_2^* M_1 \right) R_1,$$
$$M_1^* M_2 \left(M_2^* M_1 \right) = I$$

следует, что, введя обозначение $W = M_1^* M_2$, будем иметь

$$W W^* = I, \; W W^* W = W,$$
$$W^* W = W^{-1} W W^* W = W^{-1} W = I.$$

Иными словами, W унитарна,

$$R_1 = W R_2, \; R_2 = W^* R_1.$$

Так как R_1, R_2 невырождены, то из

$$M_1 W R_2 = M_1 R_1 = M_2 R_2$$

следует, что

$$M_1 W = M_2, \; M_2 = M_1 W^*.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если хотя бы одна из квадратных* $N \times N$ *матриц* R_1, R_2 *невырождена, а* $N \times N$ *матрицы* P_1, P_2, Q_1, Q_2 *связаны соотношениями*

$$P_1^* P_1 + Q_1^* Q_1 = I,$$
$$P_2^* P_2 + Q_2^* Q_2 = I,$$

то равенство

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} R_1 = \begin{bmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} R_2$$

влечет за собой существование такой $N \times N$ *унитарной матрицы* W, *что*

$$P_1 W = P_2, \quad P_1 P_1^* = P_2 P_2^*,$$
$$Q_1 W = Q_2, \quad Q_1 Q_1^* = Q_2 Q_2^*.$$

Эта лемма является непосредственным следствием предыдущей. Действительно, положив

$$M_1 = \begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{bmatrix}, \ M_2 = \begin{bmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

и применив лемму 1, найдем, что существует унитарная W, при которой

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} W = \begin{bmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix}.$$

Это равенство эквивалентно доказываемому утверждению.

Лемма 3. *Если U унитарна: $U^*U = UU^* = I$, а квадратные $N \times N$ матрицы A, A_0, P, Q, P_0, Q_0, R, R_0 связаны равенствами*

$$A = U^*A_0U,$$

$$\begin{bmatrix} A^n \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} R, \quad \begin{bmatrix} A_0^n \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} R_0,$$

$$P^*P + Q^*Q = I, \ P_0^*P_0 + Q_0^*Q_0 = I,$$

то существует унитарная $W(W^*W = WW^* = I)$ такая, что

$$P = U^*P_0W, \ Q = U^*Q_0W.$$

Вследствие этого

$$PP^* = U^*P_0P_0^*U, \ QQ^* = U^*Q_0Q_0^*U.$$

Начиная доказательство, заметим, что из

$$I = QR, \ I = Q_0R_0$$

следует невырожденность R, R_0. Далее

$$\begin{bmatrix} A^n \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^*A_0^n \\ U^* \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} U^*P_0 \\ U^*Q_0 \end{bmatrix} R_0U,$$

$$[U^*P_0]^* [U^*P_0] + [U^*Q_0]^* [U^*Q_0] = P_0^*UU^*P_0 + Q_0^*UU^*Q_0 =$$
$$= P_0^*P_0 + Q_0^*Q_0 = I,$$

$$\begin{bmatrix} U^*P_0 \\ U^*Q_0 \end{bmatrix} \cdot [R_0U] = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} R.$$

Применяя лемму 2, приходим к утверждению:

$$U^*P_0W = P, \ U^*Q_0W = Q$$

с некоторой унитарной W. Лемма 3 доказана.

§ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССА РАСЧЕТА КРУГОВОЙ ДИХОТОМИИ

Предложенный в [4] вычислительный процесс выявления дихотомии спектра у матрицы A состоит в последовательном определении P_j, W_j из следующих соотношений: $(j = 2, 3, 4, \ldots)$,

$$\begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} R_1, \quad \begin{bmatrix} AP_{j-1} \\ Q_{j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_j \\ Q_j \end{bmatrix} R_j,$$

в которых R_j — верхние треугольные,

$$P_1^*P_1 + Q_1^*Q_1 = P_j^*P_j + Q_j^+Q_j = I.$$

Эти соотношения приводят (для любого n) к представлению

$$\begin{bmatrix} A^n \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n \\ Q_n \end{bmatrix} R_nR_{n-1} \ldots R_2R_1 = \begin{bmatrix} P_n \\ Q_n \end{bmatrix} R^{(n)}.$$

Предположим, что A не имеет собственных значений по модулю, равных 1, причем внутри единичного круга лежит $N_0 \geqslant 1$, а вне его $N_\infty \geqslant 1$ точек спектра. Каждая считается с учетом кратности $(N = N_0 + N_\infty)$. В этом случае $N \times N$ матрицу A представим в следующей канонической форме:

$$A = U^* \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & -L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix} U,$$

где U унитарна, спектр B лежит вне, а спектр C внутри единичного круга (см., например, [4]). Для степеней A аналогичное представление имеет вид

$$A^n = U^* \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & -L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^n & 0 \\ 0 & C^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix} U.$$

Положим

$$A_0^n = \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & -L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^n & 0 \\ 0 & C^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix}$$

и определим P_{n_0}, Q_{n_0} с помощью какого-либо разложения

$$\begin{bmatrix} A_0^n \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{n_0} \\ Q_{n_0} \end{bmatrix} R_0^{(n)},$$

в котором $P_{n_0}^* P_{n_0} + Q_{n_0}^* Q_{n_0}$. Тогда по лемме 3 из § 2 можно ручаться, что

$$P_n = U^* P_{n_0} W_n, \quad P_n P_n^* = U^* P_{n_0} P_{n_0}^* U,$$
$$Q_n = U^* Q_{n_0} W_n, \quad Q_n Q_n^* = U^* Q_{n_0} Q_{n_0}^* U,$$

где U унитарна. Используя описанное представление, покажем, что при $n \to \infty$ $P_n P_n^*$ и $Q_n Q_n^*$ стремятся к проекционным операторам инвариантных подпространств A, отвечающих соответственно собственным значениям внутри и вне единичного круга.

Начнем с непосредственной проверки справедливости равенств

$$\begin{bmatrix} A_0^n \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^n & -LC^n \\ 0 & C^n \\ I_{N_\infty} & -L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} B^n & -LC^n \\ 0 & C^n \\ I_{N_\infty} & -L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & -LC^n \\ 0 & C^n \\ B^{-n} & -L \\ 0 & I_{n_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^n & 0 \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix}.$$

Легко понять, что при $n \to \infty$ матрицы B^{-n}, C^n стремятся к нулевым и

$$\begin{bmatrix} I_{N_\infty} & -LC^n \\ 0 & C^n \\ B^{-n} & -L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что

$$\begin{bmatrix} I_{N_\infty} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & 0 \\ 0 & I_{N_0} + L^*L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & 0 \\ 0 & (I_{N_0} + L^*L)^{1/2} \end{bmatrix}^2,$$

где

$$R_0^{(n)} = [\widehat{P}_{n_0}^* \widehat{P}_{n_0} + \widehat{Q}_{n_0}^* \widehat{Q}_{n_0}]^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & 0 \\ 0 & (I_{N_0} + L^*L)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^n & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix}.$$

С помощью леммы 3 из § 2 заключаем, что при $n \to \infty$

$$P_n P_n^* = U^* P_{n_0} P_{n_0}^* U \to U^* \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U = \Pi_\infty,$$

$$Q_n Q_n^* = U^* Q_{n_0} Q_{n_0}^* U \to U^* \begin{bmatrix} L(I_{N_0} + L^*L)^{-1} L^* & -L(I_{N_0} + L^*L)^{-1} \\ -(I_{N_0} + L^*L)^{-1} L^* & (I_{N_0} + L^*L)^{-1} \end{bmatrix} U = \Pi_0.$$

Непосредственной выкладкой проверяется:

$$\Pi_\infty = \Pi_\infty^*,\ \Pi_0 = \Pi_0^*,\ \Pi_\infty = \Pi_\infty^2,\ \Pi_0 = \Pi_0^2,$$

откуда следует, что Π_0, Π_∞ являются ортогональными проекционными операторами. Из формул

$$\Pi_\infty f = U^* \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U f,$$

$$\Pi_0 f - U^* \begin{bmatrix} -L & 0 \\ I_{N_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I_{N_0} + L^*L)^{-1} L^* & (I_{N_0} + L^*L)^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U f$$

видно, что $\Pi_\infty f$, $\Pi_0 f$ проектируют вектор f в линейные оболочки столбцов матриц.

Поэтому если положить

$$\begin{bmatrix} I_{N_\infty} & -LC^n \\ 0 & C^n \\ B^{-n} & -L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & 0 \\ 0 & (I_{N_0} + L^*L)^{-1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{P}_{n_0} \\ \widehat{Q}_{n_0} \end{bmatrix},$$

то при $n \to \infty$

$$\widehat{P}_{n_0}^* \widehat{P}_{n_0} + \widehat{Q}_n^* \widehat{Q}_{n_0} \to I_N,$$

$$\widehat{P}_{n_0} \to \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \widehat{Q}_{n_0} \to \begin{bmatrix} 0 & -L(I_{N_0} + L^*L)^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & (I_{N_0} + L^*L)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, к тем же пределам, что и $\widehat{P}_{n_0}$, $\widehat{Q}_{n_0}$, стремятся соответственно и

$$P_{n_0} = \widehat{P}_{n_0} [\widehat{P}_{n_0}^* \widehat{P}_{n_0} + \widehat{Q}_{n_0}^* \widehat{Q}_{n_0}]^{-\frac{1}{2}},$$

$$Q_{n_0} = \widehat{Q}_{n_0} [\widehat{P}_{n_0}^* \widehat{P}_{n_0} + \widehat{Q}_{n_0}^* \widehat{Q}_{n_0}]^{-\frac{1}{2}},$$

при этом

$$P_{n_0}^* P_{n_0} + Q_{n_0}^* Q_{n_0} = I_N,$$

$$\begin{bmatrix} A_0^n \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{n_0} \\ Q_{n_0} \end{bmatrix} R_0^{(n)},$$

где

$$R_0^{(n)} = [\widehat{P}_{n_0}^* \widehat{P}_{n_0} + \widehat{Q}_{n_0}^* \widehat{Q}_{n_0}]^{1/2} \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & 0 \\ 0 & (I_{N_0} + L^*L)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^n & 0 \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix}.$$

С помощью леммы 3 из § 2 делаем вывод, что при $n \to \infty$

$$P_n P_n^* = U^* P_{n_0} P_{n_0}^* U \to U^* \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U = \Pi_\infty,$$

$$Q_n Q_n^* = U^* Q_{n_0} Q_{n_0}^* U \to U^* \begin{bmatrix} L (I_{N_0} + L^*L)^{-1} L^* & -L (I_{N_0} + L^*L)^{-1} \\ -(I_{N_0} + L^*L)^{-1} L^* & (I_{N_0} + L^*L)^{-1} \end{bmatrix} U = \Pi_0.$$

Непосредственной выкладкой проверяется:

$$\Pi_\infty = \Pi_\infty^*, \ \Pi_0 = \Pi_0^*, \ \Pi_\infty = \Pi_\infty^2, \ \Pi_0 = \Pi_0^2,$$

откуда следует, что Π_0, Π_∞ являются ортогональными проекционными операторами. Из формул

$$\Pi_\infty f = U^* \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U f,$$

$$\Pi_0 f = U^* \begin{bmatrix} -L & 0 \\ I_{N_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I_{N_0} + L^*L)^{-1} L^* & (I_{N_0} + L^*L)^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U f$$

следует, что $\Pi_\infty f$, $\Pi_0 f$ проектируют вектор f в линейные оболочки столбцов матриц

$$U^* \begin{bmatrix} I_{N_\infty} \\ 0 \end{bmatrix}, \ U^* \begin{bmatrix} -L \\ I_{N_0} \end{bmatrix},$$

т. е. в инвариантные подпространства, отвечающие собственным значениям A соответственно вне и внутри единичного круга. Отсюда ранги проекторов Π_∞, Π_0 равны соответственно N_∞ и N_0, вследствие чего

$$\operatorname{tr} \Pi_\infty = N_\infty, \ \operatorname{tr} \Pi_0 = N_0.$$

Скорость стремления $P_n P_n^* \to \Pi_\infty$, $Q_n Q_n^* \to \Pi_0$ характеризуется, очевидно, скоростью убывания $\|B^{-n}\|$, $\|C^n\|$ и величиной $\|L\|$. Не будем проводить аккуратно оценки $\|P_n P_n^* - \Pi_\infty\|$, $\|Q_n Q_n^* - \Pi_0\|$, чтобы не заслонять громоздкой, но принципиально простой выкладкой идею намеченного сейчас обоснования предложенного в [4] процесса. В самой работе [4] такое обоснование сделано из других соображений. Напомним, что при этом был использован параметр $\omega(A) = \|H\|$, где

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [A^* - e^{-i\theta} I]^{-1} [A - e^{i\theta} I]^{-1} d\theta,$$

через который $\|L\|$, $\|B^{-n}\|$, $\|C^n\|$ оцениваются с помощью неравенств

$$1 + \|L\|^2 \leqslant \omega(A),$$

$$\|B^{-n}\| \leqslant \sqrt{\omega(A)} \exp\{-(n+1)/(2[\omega(A) + 1])\},$$

$$\|C^n\| \leqslant \sqrt{\omega(A)} \exp\{-n/(2[\omega(A) + 1])\}.$$

Последние два неравенства в [4] не приводились, но там были получены оценки матриц $G_{\pm k}$:

$$\|G_n\| \leqslant \sqrt{\omega(A)} \exp\left\{-\left(\left|n-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)\Big/(2[\omega(A)+1])\right\},$$

входящих в разностную матрицу Грина. С их помощью без труда видно, что $(n > 0)$

$$\|B^{-n}\| \leqslant \left\| U^* \begin{bmatrix} -B^n & -B^{-n}L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U \right\| = \|G_{-n}\|,$$

$$\|C^n\| \leqslant \left\| U^* \begin{bmatrix} 0 & -LC^n \\ 0 & C^n \end{bmatrix} U \right\| = \|G_n\|.$$

§ 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ОРТОГОНАЛЬНО-СТЕПЕННОГО МЕТОДА

Широко распространенный вариант ортогонально-степенного метода состоит в последовательном определении квадратных матриц Q_j с помощью следующих последовательных разложений произведений AQ_{j-1} на множители: $(j = 2, 3, 4, \ldots)$,

$$A = Q_1 R_1, \; AQ_{j-1} = Q_j R_j.$$

При этом R_j — верхние треугольные матрицы, а столбцы Q_j ортонормированы $Q_j^* Q_j = I$. Будем в дальнейшем интересоваться только первыми N_∞ столбцами матриц Q_j. За образованными из них прямоугольными матрицами сохраним обозначения Q_j, так же как и обозначение R_j за верхним главным минором первоначальной R_j.

Теперь мы должны считать, что R_j определяются так:

$$Q_1 R_1 = A \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & \ddots & 1 \\ \hdashline & 0 & \end{bmatrix} \equiv A \begin{bmatrix} I_{N_\infty} \\ 0 \end{bmatrix} \Big\} N_0 = N - N_\infty \text{ строк},$$

$$AQ_{j-1} = Q_j R_j, \; Q_j^* Q_j = I_{N_\infty}.$$

Так же как и в § 3, предположим, что

$$A = U^* \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & -L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix} U$$

с унитарной U. Предположения при B и C те же самые, что и в § 3. Спектр B лежит полностью вне, а спектр C внутри единичного круга. Легко проверить, что

$$A^n \begin{bmatrix} I_{N_\infty} \\ 0 \end{bmatrix} = Q_n R_n R_{n-1} \ldots R_2 R_1 \equiv Q_n R^{(n)},$$

т. е.

$$Q_n R^{(n)} = A^n \begin{bmatrix} I_{N_\infty} \\ 0 \end{bmatrix} = U^* \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & -L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^n & 0 \\ 0 & C^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix} U \begin{bmatrix} I_{N_\infty} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Обозначим через X, Y «компоненты» прямоугольной матрицы

$$U = \begin{bmatrix} I_{N_\infty} \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}}_{N_\infty \text{ столбцов}} \begin{matrix} \} N_\infty \text{ строк} \\ \} N_0 \text{ строк} \end{matrix}$$

При этом

$$\begin{bmatrix} I_{N_\infty} & L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix} U \begin{bmatrix} I_{N_\infty} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X + LY \\ Y \end{bmatrix},$$

$$Q_n R^{(n)} = U^* \begin{bmatrix} B^n (X + LY) - LC^n Y \\ C^n Y \end{bmatrix} =$$

$$= U^* \begin{bmatrix} I_{N_\infty} - LC^n Y (X + LY)^{-1} B^{-n} \\ C^n Y (X + LY)^{-1} B^{-n} \end{bmatrix} B^n (X + LY).$$

Обозначив

$$\widehat{Q}_n = \begin{bmatrix} I_{N_\infty} - LC^n Y (X + LY)^{-1} B^{-n} \\ C^n Y (X + LY)^{-1} B^{-n} \end{bmatrix},$$

видим, что если $X + LY$ невырождена, то при $n \to \infty$

$$\widehat{Q}_n \to U^* \begin{bmatrix} I_{N_\infty} \\ 0 \end{bmatrix},$$

а скорость этого стремления оценивается через $\|B^{-n}\|$, $\|C^n\|$, $l = \|Y(X + LY)^{-1}\|$, $\|L\|$, т. е. через l, $\omega(A)$. Ясно также, что $\widehat{Q}_n^* \widehat{Q}_n \to I_{N_\infty}$. Положив

$$Q_{n_0} = \widehat{Q}_n [\widehat{Q}_n^* \widehat{Q}_n]^{-\frac{1}{2}},$$

будем иметь

$$Q_{n_0} \to U^* \begin{bmatrix} I_{N_\infty} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q_{n_0}^* Q_{n_0} = I_{N_\infty}, \quad Q_n R^{(n)} = Q_{n_0} R^{(n,0)},$$

где

$$R^{(n,0)} = [\widehat{Q}_n^* \widehat{Q}_n]^{\frac{1}{2}} B^n (X + LY)$$

невырождена, если $X + LY$ невырождена, т. е. если $\|(X + LY)^{-1}\|$ конечна. По лемме 1 из § 2 существует такая унитарная W_n, при которой $Q_n = Q_{n_0} W_n$. Так как столбцы Q_{n_0} стремятся к столбцам матрицы $U^* \begin{bmatrix} I_{N_\infty} \\ 0 \end{bmatrix}$, образующим базис в инвариантном пространстве, отвечающем точкам спектра A, лежащим вне единичного круга, то при достаточно большом n столбцы Q_n тоже можно рассматривать как достаточно аккуратно определенный базис указанного подпространства. Появившийся в наших оценках параметр $l = \|Y(X + LY)^{-1}\|$ характеризует расположение координатного подпространства, образованного первыми N_∞ ортами, т. е. столбцами матрицы $\begin{bmatrix} I_{N_\infty} \\ 0 \end{bmatrix}$ по отношению к инвариантным подпространствам.

Несколько изменим исходное предположение о матрице. Будем считать, что в представлении

$$A = U^* \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & -L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{N_\infty} & L \\ 0 & I_{N_0} \end{bmatrix} U$$

спектр B лежит полностью вне круга радиуса ρ, а спектр C — полностью внутри этого круга, при этом ρ совсем не обязательно равно единице.

Осуществляя ортогонально-степенной метод по схеме:

$$A = Q_1 R_1, \quad AQ_{j-1} = Q_j R_j \quad (j = 2, 3, 4, \ldots)$$

и опять предполагая столбцы Q_j ортонормированными, а R_j верхними треугольными, заметим, что Q_j не изменятся, если A заменить на $\frac{1}{\rho}A$. Только придется R_j заменить на $\frac{1}{\rho}R_j$. Проведенное выше рассуждение, примененное к рассматриваемому сейчас случаю, показывает, что первые N_∞ столбцов матриц Q_j с ростом j все точнее и точнее можно рассматривать в качестве приближенного базиса инвариантного для A подпространства, отвечающего собственным числам, лежащим вне круга радиуса ρ. Степень приближения оценивается через j, $\omega\left(\frac{1}{\rho}A\right)$, l.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Раззаков Ш. И.** Квалифицированные оценки скорости сходимости ортогонального степенного метода Воеводина для произвольных матриц: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07.— Новосибирск, 1984.— 15 с.
2. **Раззаков Ш. И.** Квалифицированные оценки скорости сходимости ортогонально-степенного метода Воеводина для произвольных матриц.— Новосибирск, 1983.— 36 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычисл. центр).
3. **Костин В. И., Раззаков Ш. И.** О сходимости ортогонально-степенного метода расчета спектра // Тр. Ин-та математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 6: Вычислительные методы линейной алгебры.— С. 55—84.
4. **Булгаков А. Я., Годунов С. К.** Круговая дихотомия матричного спектра.— Новосибирск, 1987.— 32 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 5).

А. Я. БУЛГАКОВ

ОБОСНОВАНИЕ ГАРАНТИРОВАННОЙ ТОЧНОСТИ ВЫДЕЛЕНИЯ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ МАТРИЦ

ВВЕДЕНИЕ

В работе изучается проблема гарантированной точности в задаче выделения максимальных инвариантных подпространств $\mathscr{L}_+(A)$ и $\mathscr{L}_-(A)$, отвечающих собственным значениям $N\times N$ матрицы A, расположенным строго в левой и правой полуплоскостях соответственно.

Применение ЭВМ для решения задач линейной алгебры требует учета структуры разрядной сетки, используемой для представления чисел в машине. Эта структура диктует принцип «неопределенности», в силу которого каждое число, вектор и матрица, хранящиеся в машине или участвующие в промежуточных вычислениях, неотличимы от достаточно близких к ним. Детальное рассмотрение основных вопросов, возникающих при решении на ЭВМ задач линейной алгебры, с учетом разрядности машины можно найти в [1—8]. Для характеристики разрядной сетки ЭВМ, как правило, используются две машинные постоянные. Обозначим их, следуя [1], через ε_1 и ε_2 такие, что модуль любого машинного числа заключен между пределами $\rho_{\min}$, $\rho_{\max}$ ($\varepsilon_2 \approx \rho_{\min} \leqslant 2\varepsilon_2$, $2/\varepsilon_2 \approx \rho_{\max} \geqslant$ $\geqslant 1/\varepsilon_2$) и между машинными числами 1 и $1+\varepsilon_1$ нет других машинных чисел. Например, для БЭСМ-6 $\varepsilon_1 \approx 0.2_{10}{-}11$ и $\varepsilon_2 \approx 0.2_{10}{-}18$, а для машин серии ЕС, если рассматривать числа удвоенного формата, имеем $\varepsilon_1 \approx 0.2_{10}{-}14$, $\varepsilon_2 \approx 0.1_{10}{-}72$.

Хорошо известны примеры матриц, при возмущении элементов которых собственные значения существенно изменяются, даже если возмущение столь мало, что оно не отражается на машинном представлении элементов матрицы, так как лежит за пределами точности, допу-