и опять предполагая столбцы Q_j ортонормированными, а R_j верхними треугольными, заметим, что Q_j не изменятся, если A заменить на $\frac{1}{\rho} A$. Только придется R_j заменить на $\frac{1}{\rho} R_j$. Проведенное выше рассуждение, примененное к рассматриваемому сейчас случаю, показывает, что первые N_∞ столбцов матриц Q_j с ростом j все точнее и точнее можно рассматривать в качестве приближенного базиса инвариантного для A подпространства, отвечающего собственным числам, лежащим вне круга радиуса ρ. Степень приближения оценивается через j, $\omega\left(\frac{1}{\rho} A\right)$, l.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Раззаков Ш. И.** Квалифицированные оценки скорости сходимости ортогонального степенного метода Воеводина для произвольных матриц: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07.— Новосибирск, 1984.— 15 с.
2. **Раззаков Ш. И.** Квалифицированные оценки скорости сходимости ортогонально-степенного метода Воеводина для произвольных матриц.— Новосибирск, 1983.— 36 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычисл. центр).
3. **Костин В. И., Раззаков Ш. И.** О сходимости ортогонально-степенного метода расчета спектра // Тр. Ин-та математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 6: Вычислительные методы линейной алгебры.— С. 55—84.
4. **Булгаков А. Я., Годунов С. К.** Круговая дихотомия матричного спектра.— Новосибирск, 1987.— 32 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 5).

А. Я. БУЛГАКОВ

ОБОСНОВАНИЕ ГАРАНТИРОВАННОЙ ТОЧНОСТИ ВЫДЕЛЕНИЯ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ МАТРИЦ

ВВЕДЕНИЕ

В работе изучается проблема гарантированной точности в задаче выделения максимальных инвариантных подпространств $\mathscr{L}_+(A)$ и $\mathscr{L}_-(A)$, отвечающих собственным значениям $N \times N$ матрицы A, расположенным строго в левой и правой полуплоскостях соответственно.

Применение ЭВМ для решения задач линейной алгебры требует учета структуры разрядной сетки, используемой для представления чисел в машине. Эта структура диктует принцип «неопределенности», в силу которого каждое число, вектор и матрица, хранящиеся в машине или участвующие в промежуточных вычислениях, неотличимы от достаточно близких к ним. Детальное рассмотрение основных вопросов, возникающих при решении на ЭВМ задач линейной алгебры, с учетом разрядности машины можно найти в [1—8]. Для характеристики разрядной сетки ЭВМ, как правило, используются две машинные постоянные. Обозначим их, следуя [1], через ε_1 и ε_2 такие, что модуль любого машинного числа заключен между пределами $\rho_{\min}$, $\rho_{\max}$ ($\varepsilon_2 \approx \rho_{\min} \leqslant 2\varepsilon_2$, $2/\varepsilon_2 \approx \rho_{\max} \geqslant 1/\varepsilon_2$) и между машинными числами 1 и $1+\varepsilon_1$ нет других машинных чисел. Например, для БЭСМ-6 $\varepsilon_1 \approx 0.2_{10}{-11}$ и $\varepsilon_2 \approx 0.2_{10}{-18}$, а для машин серии ЕС, если рассматривать числа удвоенного формата, имеем $\varepsilon_1 \approx 0.2_{10}{-14}$, $\varepsilon_2 \approx 0.1_{10}{-72}$.

Хорошо известны примеры матриц, при возмущении элементов которых собственные значения существенно изменяются, даже если возмущение столь мало, что оно не отражается на машинном представлении элементов матрицы, так как лежит за пределами точности, допускаемой разрядной сеткой ЭВМ. При этом в некоторых случаях весьма малые возмущения изменяют даже размерность подпространств $\mathscr{L}_+(A)$ и $\mathscr{L}_-(A)$.

Вот один типичный пример. Двухпараметрическое семейство матриц $A_\omega(L)$ двадцать первого порядка:

$$A_\omega(L) = \begin{bmatrix} -20 & L\left(-20-\frac{1}{2}\right) & & & & & \\ 0 & -19 & L\left(-19-\frac{1}{2}\right) & & & 0 & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & & \\ \vdots & & & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & & & -2 & L\left(-2-\frac{1}{2}\right) & \\ \omega & & & & & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

имеет характеристическое уравнение

$$(1-\lambda)\left[\prod_{j=1}^{20}(-j-\lambda) - \frac{2}{3}\,\omega L^{19}\prod_{j=1}^{20}\left(-j-\frac{1}{2}\right)\right] = 0.$$

Если взять $\omega_0 = \frac{3}{2}L^{-19}$ (при $L=4$ имеем $\omega_0 = 3\cdot 2^{-39}$, при $L = 10$ — $\omega_0 = 1.5_{10}{-}19$), то

$$\lambda_1\left(A_{\omega_0}(L)\right) = 1,\ \lambda_2\left(A_{\omega_0}(L)\right) = 0.5$$

являются собственными значениями матрицы $A_{\omega_0}(L)$ и, значит, размерность $\mathscr{L}_-\left(A_{\omega_0}(L)\right)$ не меньше 2, в то время как размерность $\mathscr{L}_-(A_0(L))$ равна 1. Элементы матриц $A_{\omega_0}(L)$ и $A_0(L)$ отличаются не больше, чем на величину $|\omega_0| = \left|\frac{3}{2}L^{-19}\right|$, которую выбором L можно сделать какой угодно малой (при $L = 10$ $\omega_0 = 1.5_{10}-19$).

Примеры таких матриц хорошо известны (см. [2, 9]). Они связаны с «неустойчивостью проблемы собственных значений» (см. [9], гл. 4, § 41). В [9] предложено в качестве меры устойчивости отдельного собственного значения матрицы A использовать величину «коэффициента перекоса», связанную с собственными векторами матриц A и A^*, отвечающими λ. В случае слишком большого значения «коэффициента перекоса» задача определения его собственного значения плохо обусловлена. Поскольку алгоритм расчета «коэффициента перекоса» предложен не был, то он, на наш взгляд, и не используется в качестве меры устойчивости собственных значений в конкретных расчетах.

Наличие таких примеров привело, в частности, к развитию алгоритмов, вычисляющих базисы в инвариантных подпространствах $\mathscr{L}_+(A)$ и $\mathscr{L}_-(A)$ без предварительного вычисления отдельных собственных значений. Для этой цели были приспособлены QR-алгоритм (см. [10]), ортогонально-степенной метод (см. [11, 12]) и специально разработан метод сигнум-функций (см. [13, 17]). Причем методы сигнум-функций в принципе предназначены лишь для вычисления проекторов на максимальные инвариантные подпространства матрицы. По-видимому, в приложениях только и нужна, как правило, информация об этих подпространствах. В данном случае на первый план выступает проблема их устойчивого вычисления.

Приведенный пример показывает, что для устойчивого определения подпространств $\mathscr{L}_+(A)$ и $\mathscr{L}_-(A)$ необходимо «хорошее» разделение матричного спектра на две непересекающиеся части мнимой осью. (Если спектр матрицы A делится на две непересекающиеся части мнимой осью, то говорят о дихотомии спектра мнимой осью. В качестве меры дихотомии спектра A довольно часто используют расстояние спектра до мнимой оси. Наш пример показывает, что такая мера дихотомии A в общем случае неприменима.) Из рассмотренного примера видно, что термин «хорошее» разделение спектра требует уточнения.

Как уже отмечалось, при расчетах на ЭВМ мы вынуждены считаться с тем, что вместо матрицы A имеем дело лишь с близкой матрицей $\tilde{A}$, про которую известно, что $\|A-\tilde{A}\|$ не превосходит относительной точности задания элементов матрицы A. Следовательно, вместо дискретного спектра матрицы A имеем дело с ее «ε-спектром». Вот два наиболее употребимых, эквивалентных друг другу определения «ε-спектра» (см. [18, 19]):

а) λ принадлежит «ε-спектру» матрицы A тогда и только тогда, когда $\|(A-\lambda I)^{-1}\| \geqslant 1/(\varepsilon\|A\|)$;

б) λ принадлежит «ε-спектру» матрицы A тогда и только тогда, когда существует матрица Δ такая, что $\|\Delta\| < \varepsilon\|A\|$ и λ является собственным значением матрицы $A+\Delta$.

Наличие понятия «ε-спектра» позволяет уточнить термин «хорошее» деление спектра мнимой осью. Будем говорить, что матричный спектр A делится хорошо мнимой осью, если мнимая ось не пересекается с «ε-спектром» матрицы при достаточно больших $\varepsilon\|A\|$.

Рассмотренный ранее пример показывает, что «ε-спектр» может иногда даже при очень малых ε заполнять достаточно большие области на комплексной плоскости. Именно это обстоятельство требует введения параметра дихотомии матричного спектра мнимой осью, по величине которого можно было бы судить о том, разделяет ли мнимая ось «ε-спектр» матрицы на две непересекающиеся части и насколько большим допускается значение ε, при котором еще гарантировано такое разделение.

Подобная ситуация сложилась в свое время и в задаче решения линейной системы алгебраических уравнений

$$Lx = f. \tag{1}$$

Имевшийся классический критерий разрешимости (1) при любой правой части f (неравенство $\det L \neq 0$) оказался слишком чувствительным к малым возмущениям матрицы L. Это утверждение хорошо иллюстрируется семейством матриц размера 25×25 (см. [2], с. 72):

$$L_\omega = \begin{bmatrix} -1 & 10 & & & & & \\ 0 & -1 & 10 & & \text{\Large 0} & & \\ 0 & & -1 & 10 & & & \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & \text{\Large 0} & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & & -1 & 10 \\ \omega & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Так как характеристический полином матрицы L_ω имеет вид

$$(-1-\lambda)^{25} + 10^{24}\omega = 0,$$

то при $\omega_0 = 10^{-24}$ матрица L_{ω_0} будет вырожденной, т. е. $\det L_{\omega_0} = 0$, в то время как $\det L_0 = -1$. (Матрицы L_0 и L_{ω_0}, например на машине БЭСМ-6, неотличимы.) Это обстоятельство привело к новым критериям разрешимости уравнения $Lx = f$ (см., например, [6, 7]), наиболее удачным из которых оказался критерий, использующий величину $\mu(L) = \|L\|\|L^{-1}\|$ (число обусловленности матрицы L). Ее чувствительность к малым возмущениям характеризуется утверждением: если $\mu(L) < \infty$ и $\|L_0\|/\|L\| < 1/(2\mu)$, то

$$|\mu(L+L_0)-\mu(L)| < 4\mu^2(L)\frac{\|L_0\|}{\|L\|},$$

Выработанный критерий позволил организовать машинное вычисление решения (1) (см., например, [1]) так, что в процессе расчета определяется число обусловленности $\mu(L)$, на основании которого делается заключение о возможности решения задачи на ЭВМ с определенной разрядностью. Если $\mu(L)\varepsilon_1 \ll 1$, то выдается приближенное решение (1) с указанием гарантированной оценки погрешности. Иначе процесс прекращается и указывается, что данная система не может быть решена на машине, характеризующейся константами ε_1 и ε_2.

Такая организация алгоритма, по-видимому, должна стать стандартной при численном решении задач линейной алгебры. Первый из рассмотренных примеров показал, что создание аналогично организованной программы для решения вопроса о том, делит ли мнимая ось спектр матрицы A на две непересекающиеся части (проблема дихотомии матричного спектра мнимой осью), в общем случае не представляется возможным. Прежде чем приступать к разработке стандартных алгоритмов решения проблем дихотомии спектра A мнимой осью, необходимо сначала выработать новые критерии дихотомии такие, чтобы они допускали организацию расчета, подобную описанной выше схеме решения систем линейных алгебраических уравнений.

В работе в качестве такого критерия берется параметр дихотомии спектра мнимой осью $\varkappa(A)$: если имеет смысл интеграл

$$H=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(A^*+izI)^{-1}(A-izI)^{-1}\,dz,$$

то $\varkappa(A)=2\|A\|\|H\|$, в противном случае $\varkappa(A)=\infty$. Этот параметр введен С. К. Годуновым [20] *). Там же сформулирована общая схема вычисления проекторов на $\mathscr{L}_+(A)$ и $\mathscr{L}_-(A)$, а также схема расчета параметра $\varkappa(A)$. Эти результаты являются развитием исследования, связанного с численным выяснением: лежат ли все собственные значения A в левой полуплоскости (проблема Гурвица) (см. [21—25]). В случае гурвицевой A матрица H является решением классического матричного уравнения Ляпунова $A^*H+HA+I=0$, I — единичная $N\times N$ матрица. При этом в схеме численного исследования гурвицевости A матричное уравнение Ляпунова играет принципиальное значение, оно используется для апостериорного контроля результатов расчета.

В работе проводится анализ влияния ошибок округления в схеме расчета проекторов на $\mathscr{L}_+(A)$ и $\mathscr{L}_-(A)$, а также сформулирована система матричных уравнений, обобщающая матричное уравнение Ляпунова для негурвицевых матриц. Здесь же доказана теорема непрерывности решений этой системы для матриц A с не слишком большой величиной $\varkappa(A)$ ($\varkappa(A) < \varkappa^*$, где $\varkappa^*$ — некоторое пороговое значение, связанное с разрядностью ЭВМ). Эта теорема используется для апостериорного контроля результатов расчета.

В заключение приношу искреннюю благодарность С. К. Годунову за постоянное внимание к работе автора, а также О. П. Кирилюку, В. И. Костину, С. В. Кузнецову и А. Н. Малышеву за полезные обсуждения.

---

*) В работе [20] для матрицы H использовалось другое эквивалентное интегральное представление.

Глава 1

ОЦЕНКА МАТРИЦЫ ГРИНА, ТЕОРЕМЫ НЕПРЕРЫВНОСТИ МАТРИЦЫ ГРИНА И ПАРАМЕТРА ДИХОТОМИИ

Введение

В работе [20] предложен параметр дихотомии спектра матрицы $A(\varkappa(A))$, конечный тогда и только тогда, когда у матрицы A нет собственных значений на мнимой оси. В своем определении он существенно использует матрицу Грина $G(t, A)$, для которой в [20] выведена оценка

$$\|G(t, A)\| \leqslant \varkappa(A) \exp\left\{-|t| \frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\}, \quad -\infty < t < \infty.$$

В § 1 уточняется эта оценка, т. е. доказывается, что коэффициент $\varkappa(A)$ перед экспонентой можно заменить на $\sqrt{\varkappa(A)}$. В § 2 напоминается вывод известного интегрального представления для матрицы $G(t, A)$ и аналогичного представления матрицы $H_{(A)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G^*(t, A)\, G(t, A)\, dt$:

$$G(t, A) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (izI - A)^{-1} e^{izt}\, dz,$$

$$H_{(A)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (izI + A^*)^{-1} (A - izI)^{-1}\, dz,$$

которые используются в § 4 при выводе теоремы непрерывности параметра $\varkappa(A)$ и матрицы $G(t, A)$.

Теорема 1. *Если $\varkappa(A) < \infty$ и*

$$\frac{\|B\|}{\|A\|} < \frac{1}{100 \cdot \varkappa(A)},$$

то $A + B$ также конечна и справедливы неравенства

$$|\varkappa(A + B) - \varkappa(A)| \leqslant 36\varkappa^2(A) \|B\| / \|A\|,$$

$$\|G(t, A + B) - G(t, A)\| \leqslant 12\varkappa^2(A) \exp\left\{-|t| \frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\} \frac{\|B\|}{\|A\|},$$

$$\|H_{(A)} - H_{(A+B)}\| \leqslant 38\varkappa(A) \|H_{(A)}\| \|B\| / \|A\|.$$

При доказательстве теоремы используется оценка

$$\sigma_1(A - izI) \geqslant \frac{1}{14.2} \frac{\|A\|}{\varkappa(A)}, \qquad -\infty < z < \infty,$$

при $\varkappa(A) < \infty$, составляющая содержание основной леммы § 3. Здесь же получено неравенство

$$\varkappa(A) \leqslant 2\theta^2(A),$$

где $\theta(A) = \max\limits_{-\infty < z < \infty} \|(A - izI)^{-1}\| \|A\|$ — параметр, конечный в том и только том случае, когда у матрицы A нет собственных значений на мнимой оси. Полученные неравенства обеспечивают следующую связь параметров $\varkappa(A)$ и $\theta(A)$: $\theta(A) 12/(100\pi) < \varkappa(A) < 2\theta^2(A)$.

В § 5 рассматриваются две краевые задачи.

Первая —

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \mathscr{A} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}, \quad \mathscr{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$$

с граничными условиями

$$X(0)-Y(0)=0,\ Y(T)-X(T)=I\quad (T>0).$$

Вторая —

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\widetilde{X}(t)\\ \widetilde{Y}(t)\end{pmatrix}=[\mathscr{A}+\mathscr{B}(t)]\begin{pmatrix}\widetilde{X}(t)\\ \widetilde{Y}(t)\end{pmatrix},\quad \mathscr{B}(t)=\begin{pmatrix}\mathscr{B}_{11}(t) & \mathscr{B}_{12}(t)\\ \mathscr{B}_{21}(t) & \mathscr{B}_{22}(t)\end{pmatrix},$$

$\mathscr{B}(t)$ — возмущающаяся матрица, зависящая от времени, граничные условия:

$$\widetilde{X}(0)-\widetilde{Y}(0)=0,\ \widetilde{Y}(T)-\widetilde{X}(T)=I.$$

И для решений этих краевых задач доказана

Теорема 2. *Пусть A — экспоненциально дихотомичная матрица ($\varkappa(A)<\infty$) и для матрицы $\mathscr{B}(t)$ имеет место оценка $\|\mathscr{B}(t)\|<\rho\|A\|$, $0\leqslant t\leqslant T$, где ρ удовлетворяет ограничениям $0<\rho<1/(4\varkappa^{3/2}(A))$. Тогда для решений указанных краевых задач верны оценки*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left\|\begin{pmatrix}\widetilde{X}(t)-X(t)\\ \widetilde{Y}(t)-Y(t)\end{pmatrix}\right\|\leqslant 8\varkappa^2(A)\,\rho.$$

§ 1. Оценка матрицы Грина

Здесь для матрицы Грина $G(t)=G(t,\ A)$ будет доказана оценка $(-\infty<t<\infty)$

$$\|G(t,\ A)\|\leqslant\sqrt{\varkappa(A)}\exp\{-|t|\|A\|/\varkappa(A)\},\tag{1.1}$$

где $\varkappa(A)$ — параметр дихотомии матрицы A.

Прежде чем переходить к доказательству (1.1), напомним некоторые свойства матрицы Грина $G(t,\ A)$.

Во-первых, $G(t,\ A)$ удовлетворяет системе

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}G(t,A)=AG(t,A)\quad\text{при}\quad |t|>0,\\ G(+0,\ A)-G(-0,\ A)=I,\\ G(-\infty,\ A)=G(+\infty,\ A)=0.\end{gathered}\tag{1.2}$$

Во-вторых, решение $x(t)$ системы

$$\frac{d}{dt}x=Ax+\delta(t)f\tag{1.3}$$

представляется формулой

$$x(t)=G(t,\ A)f.\tag{1.4}$$

В-третьих, с помощью $G(t,\ A)$ в [20] были определены матрицы

$$\begin{gathered}H^{(A)}=\int_{-\infty}^{\infty}G^*(t,A)\,G(t,A)\,dt,\\ H_+^{(A)}=\int_0^{\infty}G^*(t,A)\,G(t,A)\,dt,\quad H_-^{(A)}=\int_{-\infty}^{0}G^*(t,A)\,G(t,A)\,dt.\end{gathered}\tag{1.5}$$

Когда это не вызовет путаницы, будем использовать матрицы $H^{(A)}$, $H_+^{(A)}$, $H_-^{(A)}$, опуская индекс (A).

В-четвертых, матрицы Грина, соответствующие A и $-A$, связаны равенством

$$G(t,\ A)=G(-t,\ -A),\tag{1.6}$$

вследствие чего

$$H^{(A)}=H^{(-A)},\quad H_+^{(A)}=H_-^{(-A)},\quad H_-^{(A)}=H_+^{(-A)}.\tag{1.7}$$

В-пятых, справедливы тождества

$$
\begin{aligned}
&G(+0,\ A)G(t,\ A)=G(t,\ A)G(+0,\ A)=G(t,\ A),\ t>0,\\
&G(-0,\ A)G(t,\ A)=G(t,\ A)G(-0,\ A)=-G(t,\ A),\ t<0,\\
&G(+0,\ A)G(-0,\ A)=G(-0,\ A)G(+0,\ A)=0
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

и вытекающие из них равенства

$$
G^*(+0,\ A)H_+G(+0,\ A)=G^*(+0,\ A)\int_0^\infty G^*(t,\ A)G(t,\ A)\,dt\,G(+0,\ A)=
$$

$$
=\int_0^\infty [G(t,\ A)G(+0,\ A)]^*G(t,\ A)G(+0,\ A)\,dt=\int_0^\infty G^*(t,\ A)G(t,\ A)\,dt=H_+,
$$

$$
G^*(+0,\ A)H_+G(+0,\ A)=H_+. \tag{1.9}
$$

Точно так же обосновывается и то, что

$$
G^*(-0,\ A)H_-G(-0,\ A)=H_-. \tag{1.10}
$$

т. е.

В-шестых, матрицы H_+, H_-, H удовлетворяют следующим условиям уравнения Ляпунова:

$$
\begin{aligned}
&A^*H_++H_+A=-G^*(+0,\ A)G(+0,\ A),\\
&A^*H_-+H_-A=G^*(-0,\ A)G(-0,\ A),\\
&A^*H+HA=-G^*(+0,\ A)G(+0,\ A)+G^*(-0,\ A)G(-0,\ A).
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

В-седьмых, нетрудно проверить, что при $t>0$

$$
G(t,\ A)=e^{tA}G(+0)=G(+0)e^{tA},\ (G(+0)=G(+0,\ A)),
$$

а значит, если взять матрицу

$$
\widehat{G}(t,\ A)=e^{-tA}G(+0), \tag{1.12}
$$

то верно равенство

$$
\widehat{G}(t,\ A)G(t,\ A)=G(+0).
$$

Равенство (1.12) позволяет из $x(t)=G(t,\ A)f$, справедливого для решений (1.2), получить

$$
G(+0)f=\widehat{G}(t,\ A)x(t).
$$

Следовательно,

$$
\|G(+0)f\|=\|\widehat{G}(t,\ A)x(t)\|=\|e^{-tA}G(+0)x(t)\|\leqslant
$$

$$
\leqslant\|e^{-tA}\|\|G(+0)x(t)\|\leqslant e^{t\|A\|}\|G(+0)x(t)\|=e^{t\|A\|}\|G(t,\ A)f\|,
$$

а значит, нами получена оценка (при $t>0$)

$$
\|G(t,\ A)f\|=\|x(t)\|\geqslant e^{-t\|A\|}\|G(+0)f\|.
$$

Опираясь на выведенное неравенство, рассмотрим квадратичную форму $(H_+f,\ f)$

$$
(H_+f,\ f)=\left(\int_0^\infty G^*(t)G(t)\,dt\,f,\ f\right)=\int_0^\infty \|G(t,\ A)f\|^2\,dt\geqslant
$$

$$
\geqslant\int_0^\infty e^{-2t\|A\|}\|G(+0)f\|^2\,dt=\|G(+0)f\|^2/(2\|A\|).
$$

Таким образом, доказапо, что на произвольном векторе f выполнено неравенство

$$
(H_+f,\ f)\geqslant\|G(+0)f\|^2/(2\|A\|),
$$

т. е.

$$\min_{\|G(+0)f\|\neq 0} \frac{(H_+f,\ f)}{\|G(+0)f\|^2} \geqslant \frac{1}{2\|A\|}. \qquad (1.13)$$

Теперь можно перейти непосредственно к доказательству неравенства (1.1) — основного в данном параграфе.

Прежде всего продифференцируем квадратичную форму $(H_+x(t), x(t))$ на решениях системы (1.3) $(t>0)$:

$$\frac{d}{dt}(H_+x(t),\ x(t)) = ([A^*H_+ + H_+A]\,x(t),\ x(t)) =$$

$$= -(G^*(+0,\ A)\,G(+0,\ A)\,x(t),\ x(t)) \leqslant -(H_+G(+0)\,x,\ G(+0)\,x)/\lambda_N(H_+) =$$

$$= -(G^*(+0)\,H_+G(+0)\,x(t),\ x(t)/\lambda_N(H_+) = -(H_+x(t),\ x(t))/\lambda_N(H_+). \qquad (1.14)$$

При выводе (1.14) воспользуемся равенствами (1.5) и (1.9), а также тем, что $\lambda_N(H_+)$ — максимальное собственное значение неотрицательно определенной матрицы H_+.

Из (1.14) следует, что

$$(H_+x(t),\ x(t)) \leqslant (H_+x(0),\ x(0))\,e^{-t/\lambda_N(H_+)}. \qquad (1.15)$$

Поскольку $x(t) = G(t,\ A)f$, $x(+0) = G(+0)f$ и, значит, в силу равенства (1.9) получаем, что в правой части (1.15)

$$(H_+x(+0),\ x(+0)) = (H_+G(+0)f,\ G(+0)f) =$$

$$= (G^*(+0)H_+G(+0)f,\ f) = (H_+f,\ f) \leqslant \|f\|^2\lambda_N(H_+). \qquad (1.16)$$

Что же касается левой части неравенства (1.15), то, так как $x(t) = G(+0)x(t)$ (при $t>0$), в силу неравенства (1.13) имеем

$$(H_+x(t),\ x(t)) = (H_+G(+0)\,x(t),\ G(+0)\,x(t)) \geqslant \frac{\|G(+0)\,x(t)\|^2}{2\|A\|}. \qquad (1.17)$$

Из (1.15) — (1.17) получаем

$$\|G(+0)\,x(t)\| \leqslant 2\|A\|\,\lambda_N(H_+)\,e^{-t/\lambda_N(H_+)}\|f\|^2.$$

Если теперь

$$G(+0)x(t) = G(+0)G(t,\ A)f = G(t,\ A)f,$$

то из последнего неравенства следует оценка $(t>0)$

$$\|G(t,\ A)f\|^2 \leqslant 2\|A\|\|H_+\|\exp\left\{\frac{-2t\|A\|}{2\|A\|\|H_+\|}\right\}\|f\|^2.$$

Так как (1.17) справедлива при любом векторе f, то

$$\|G(t,\ A)\| \leqslant \sqrt{2\|A\|\|H_+\|}\exp\left\{-\frac{t\|A\|}{2\|A\|\|H_+\|}\right\}. \qquad (1.18)$$

Для вывода оценки (1.1) при $t<0$ достаточно рассмотреть ограниченные решения системы

$$\frac{d}{dt}\,y = -Ay - \delta(t)\,f$$

при $t>0$. Равенства (1.6) и (1.7) позволяют утверждать, что справедлива оценка $(t<0)$

$$\|G(t,\ A)\| \leqslant \sqrt{2\|A\|\|H_-\|}\exp\left\{\frac{-|t|\|A\|}{2\|A\|\|H_-\|}\right\}. \qquad (1.19)$$

Для получения оценки (1.1) из более грубых неравенств (1.18) и (1.19) напомним, что

$$\|H_+\| \leqslant \|H\|,\ \|H_-\| \leqslant \|H\|,\ \varkappa(A) = 2\|A\|\|H\|.$$

§ 2. Интегральные представления

В данном параграфе введем, предполагая, что у матрицы A нет собственных значений на мнимой оси, хорошо известное интегральное представление для матрицы Грина $G(t) = G(t, A)$ и соответствующее представление для матрицы $H = \int_{-\infty}^{\infty} G^*(t)\, G(t)\, dt$:

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (izI - A)^{-1} e^{izt}\, dz, \tag{2.1}$$

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (A^* + izI)^{-1} (A - izI)^{-1}\, dz. \tag{2.2}$$

Для вывода представлений (2.1), (2.2) воспользуемся преобразованием Фурье $\mathcal{F}$, заданным на функциях из $L_2 = L_2(-\infty, \infty)$ равенством

$$\mathcal{F}[f(t)](z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{izt}\, dt,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, т. е. в силу теоремы Планшереля (см. [28, с. 439]) последовательность

$$F_T(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{T} f(t)\, e^{izt}\, dt$$

сходится в метрике пространства L_2 к некоторому пределу $F(z)$ — функции из L_2. Функция $F(z)$ и берется в качестве $\mathcal{F}[f(t)](z)$. В L_2 определено также обратное преобразование Фурье

$$\mathcal{F}^{-1}[\varphi(z)](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)\, e^{-izt}\, dz.$$

Нам также потребуется следствие к теореме Планшереля (см. [28], с. 442): если $f_1(t)$, $f_2(t)$ из L_2, то верно равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{F}[f_1(t)](z)}\, \mathcal{F}[f_2(t)](z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(t)}\, f_2(t)\, dt.$$

Прежде всего докажем равенство, справедливое для всех вещественных z:

$$(izI - A)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} G(t)\, e^{-itz}\, dt. \tag{2.3}$$

В предыдущем параграфе для случая экспоненциально дихотомичной матрицы A выведена оценка матрицы Грина

$$\|G(t, A)\| \leqslant \sqrt{\varkappa(A)}\, e^{-|t|\|A\|/\varkappa(A)}, \tag{2.4}$$

матричная функция $G(t)$ удовлетворяет системе $(-\infty < t < \infty)$

$$\frac{d}{dt} G(t) = AG(t) + \delta(t) I, \quad G(+0) - G(-0) = I, \tag{2.5}$$
$$G(+\infty) = G(-\infty) = 0.$$

В силу (2.4) имеет смысл матричная функция $W(t)$ $(-\infty < t < \infty)$:

$$W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} G(z)\, dz. \tag{2.6}$$

Используя (2.5), (2.6), можно записать цепочку равенств:

$$(itI - A)\,W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ite^{-itz}G(z) - e^{-itz}AG(z)\right] dz =$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} \frac{d}{dz}\left[e^{-itz}G(z)\right] dz - \int_{0}^{\infty} \frac{d}{dt}\left[e^{-itz}G(z)\right] dz = -G(-0) + G(+0) = I,$$

получение которой обеспечивает справедливость (2.3). Следовательно, если $g_{ij}(z)$ и $G_{ij}(t)$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ — суть элементы матриц $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(A - izI)^{-1}$ и $G(t)$, то верно равенство

$$g_{ij}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G_{ij}(t)\, e^{-izt}\, dt. \tag{2.7}$$

Далее, так как

$$|G_{ij}(t)| \leqslant \|G(t)\|,$$

то, используя (2.4), можем выписать цепочку неравенств:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_{ij}(t)|^2\, dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \|G(t)\|^2\, dt \leqslant 2\int_{0}^{\infty} \varkappa(A)\, e^{-2t\frac{\|A\|}{\varkappa(A)}} = \frac{\varkappa^2(A)}{\|A\|},$$

которая позволяет ввиду (2.7) утверждать, что функции $g_{ij}(z)$ и $G_{ij}(t)$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$ принадлежат пространству L_2 и связаны наряду с (2.7) также равенством

$$G_{ij}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_{ij}(z)\, e^{izt}\, dt,$$

где значение в точке 0 полагается равным:

$$G_{ij}(0) = \frac{1}{2}\left[G_{ij}(+0) + G_{ij}(-0)\right].$$

Итак, нами доказано представление (2.1).

Переходя к выводу представления (2.2), заметим, что $(k,\ m = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$

$$[G^*(t)\,G(t)]_{km} = \sum_{j=1}^{N} G^*_{kj}(t)\, G_{jm}(t) = \sum_{j=1}^{N} \overline{G_{jk}(t)}\, G_{jm}(t),$$

и, значит, для $(k,\ m)$-элемента H из (2.2) имеем цепочку равенств:

$$H_{km} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[G^+(t)\,G(t)\right]_{km} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} \overline{G_{jk}(t)}\, G_{jm}(t) = \sum_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G_{jk}(t)}\, G_{jm}(t)\, dt. \tag{2.8}$$

Далее, воспользовавшись следствием к теореме Планшереля, получаем

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{G_{jk}(t)}\, G_{jm}(t)\, dt = \sum_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g_{jk}(z)}\, g_{jm}(z)\, dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} \overline{g_{jk}(z)}\, g_{jm}(z)\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(A^* + izI)^{-1}(A - izI)^{-1}\right]_{ij} dz,$$

что вместе с (2.8) обеспечивает справедливость (2.2).

§ 3. Основная лемма

В этом параграфе будет доказана лемма.

Лемма 1. *Пусть A — экспоненциально дихотомичная матрица* $(\varkappa(A) < \infty)$, *тогда для любого вещественного z справедлива оценка*

$$\sigma_1(A + izI) \geqslant \frac{1}{14.2}\,\frac{\|A\|}{\varkappa(A)}. \tag{3.1}$$

Для доказательства леммы потребуются представления, выведенные в § 2:

$$G(t) = G(t, A) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(izI - A)^{-1}e^{izt}\,dz, \tag{3.2}$$

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} G^*(t)\,G(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(A^* + izI)^{-1}(A - izI)^{-1}\,dz, \tag{3.3}$$

и равенство, определяющее $\varkappa(A)$:

$$\varkappa(A) = 2\|A\|\|H\|. \tag{3.4}$$

Переходя к доказательству, прежде всего заметим, что так как $H = H^* \geqslant 0$, то

$$\frac{\varkappa(A)}{2\|A\|} = \max_{\|y\|=1}(Hy, y) = \frac{1}{2\pi} = \max_{\|y\|=1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(A^* + izI)^{-1}(A - izI)^{-1}\,dzy,\ y\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\max_{\|y\|=1}\int_{-\infty}^{\infty}\left((A^* + izI)^{-1}(A - izI)^{-1}y,\ y\right)dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\max_{\|y\|=1}\int_{-\infty}^{\infty}\left\|(A - izI)^{-1}y\right\|^2 dz. \tag{3.5}$$

Далее предположим, что для некоторого вещественного z_0 и вектора $\tilde{y}_0$ выполнено равенство

$$\|(A - iz_0I)^{-1}\tilde{y}_0\| = \|(A - iz_0I)^{-1}\|\|\tilde{y}_0\|.$$

Рассмотрим некоторую окрестность точки z_0:

$$|z - z_0| \leqslant \frac{1}{\rho}\sigma_1(A - iz_0I), \tag{3.6}$$

где величина $\rho > 2$ выбрана позже. Покажем, что в этом случае

$$\|(A - iz_0I)^{-1}\| \geqslant \frac{\rho - 1}{\rho}\|(A - izI)^{-1}\|. \tag{3.7}$$

В самом деле,

$$\|(A - izI)^{-1}\| = [\sigma_1(A - iz_0I + i(z_0 - z)I)]^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant [\sigma_1(A - iz_0I) - |z - z_0|]^{-1} \leqslant \left[\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)\sigma_1(A - iz_0I)\right]^{-1}.$$

Ясно, что если мы введем обозначение $r_0 = \sigma_1(A - iz_0I)/\rho$, то неравенство (3.5) можно огрубить так:

$$\frac{\varkappa(A)\,\pi}{\|A\|} \geqslant \int_{z_0 - r_0}^{r_0 + z_0}\left\|(A - izI)^{-1}\frac{1}{\|\tilde{y}_0\|}\tilde{y}_0\right\|^2 dz. \tag{3.8}$$

Далее, используя тождество (см. [1], с. 15)

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - (A + B)^{-1}BA^{-1}$$

и оценки (3.6), (3.7), огрубим подынтегральную функцию в (3.8) следующим образом $\left(y_0 = \frac{1}{\|\tilde{y}_0\|}\tilde{y}_0\right)$:

$$\|(A - izI)^{-1} y_0\| = \|(A - iz_0I)^{-1} y_0 - i(z_0 - z)(A - izI)^{-1}(A - iz_0I)^{-1} y_0\| \geqslant$$
$$\geqslant \|(A - iz_0I)^{-1} y_0\| - |z_0 - z|\,\|(A - izI)^{-1}\|\,\|(A - iz_0I)^{-1} y_0\| =$$
$$= \left(1 - |z_0 - z|\cdot\|(A - izI)^{-1}\|\right)\|(A - iz_0I)^{-1}\|\,\|y_0\| \geqslant$$
$$\geqslant \left(1 - \frac{1}{\rho}\sigma_1(A - iz_0I)\frac{\rho}{\rho - 1}\|(A - iz_0I)^{-1}\|\right)\|(A - iz_0I)^{-1}\| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\rho - 2}{\rho - 1}\|(A - iz_0I)^{-1}\|. \tag{3.9}$$

И наконец, из (3.8), (3.9) получаем, что

$$\frac{\varkappa(A)\pi}{\|A\|} \geqslant 2r_0\left[\frac{\rho - 2}{\rho - 1}\right]^2 \|(A - iz_0I)^{-1}\|^2 = \frac{2}{\rho}\sigma_1(A - iz_0I) \times$$
$$\times \frac{(\rho - 2)^2}{(\rho - 1)^2}\|(A - iz_0I)^{-2}\|^2 = \frac{2(\rho - 2)^2}{\rho(\rho - 1)^2}\left[\sigma_1(A - iz_0I)^{-1}\right].$$

Таким образом,

$$\sigma_1(A - iz_0I) \geqslant \frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\,\frac{2(\rho - 2)^2}{\rho(\rho - 1)^2\pi}.$$

Далее, возьмем в качестве ρ величину $\rho = 4$, тогда $2(\rho - 2)^2/[\rho(\rho - 1)^2\pi] \geqslant 14.2$ и, значит, неравенство (1.3) доказано при $z = z_0$, что влечет за собой из-за произвольного выбора z_0 справедливость леммы 1.

В заключение выведем оценку

$$\varkappa(A) \leqslant 2\theta^2(A), \tag{3.10}$$

где, как было сказано во введении,

$$\theta(A) = \max_{-\infty < z < \infty} \|(A - izI)^{-1}\|\,\|A\|. \tag{3.11}$$

Прежде всего заметим, что если $z > \|A\|$, то верны неравенства

$$\begin{gathered} \|(A - izI)^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_1(A - izI)} \leqslant \frac{1}{z - \|A\|}, \\ \|(A^* + izI)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{z - \|A\|}. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Обозначим $(T > 0)$

$$R_T = \frac{1}{2\pi}\left[\int_T^\infty (A^* + izI)^{-1}(A - izI)^{-1}\,dz + \int_{-\infty}^{-T}(A^* + izI)^{-1}(A - izI)^{-1}\,dz\right]. \tag{3.13}$$

Тогда, используя (3.12), при условии $T > \|A\|$ запишем

$$\|R_T\| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_T^\infty \frac{1}{(z - \|A\|)^2}\,dz = \frac{1}{\pi(T - \|A\|)}. \tag{3.14}$$

Из интегрального представления матрицы H:

$$H = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(A^* + izI)^{-1}(A - izI)^{-1}\,dz$$

можно с учетом (3.13), (3.14) и определения $\varkappa(A)$ записать

$$\frac{\varkappa(A)}{2\|A\|}=\left\|\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}(A^*+izI)^{-1}(A-izI)^{-1}\,dz+R_T\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\|(A-izI)^{-1}\|^2\,dz+\frac{1}{\pi(T-\|A\|)}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\theta^2(A)}{\|A\|^2}\,dz+\frac{1}{\pi(T-\|A\|)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\left(\frac{\theta^2(A)}{\|A\|}\frac{T}{\|A\|}+\left[\left(\frac{T}{\|A\|}-1\right)\|A\|\right]^{-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi\|A\|}\left(\theta^2(A)\frac{T}{\|A\|}+\left[\frac{T}{\|A\|}-1\right]^{-1}\right)\leqslant\frac{\theta^2(A)}{\pi\|A\|}\left(\frac{T}{\|A\|}+\left[\frac{T}{\|A\|}-1\right]^{-1}\right),$$

т. е.

$$\varkappa(A)\leqslant\frac{2}{\pi}\theta^2(A)\left(\frac{T}{\|A\|}+\left[\frac{T}{\|A\|}-1\right]^{-1}\right).$$

Если теперь выбрать $T=\frac{3}{2}\|A\|$, то из последнего неравенства получаем требуемую оценку (3.10).

§ 4. Теорема непрерывности

Докажем теорему непрерывности параметра дихотомии $\varkappa(A)$ и матрицы Грина $G(t, A)$.

Теорема 1. *Пусть A — экспоненциально дихотомичная матрица ($\varkappa(A)<\infty$), и если*

$$\frac{\|B\|}{\|A\|}<\frac{1}{100\varkappa(A)},\tag{4.1}$$

то $A+B$ также экспоненциально дихотомичная, причем

$$|\varkappa(A+B)-\varkappa(A)|<36\varkappa^2(A)\frac{\|B\|}{\|A\|},\tag{4.2}$$

$$\|H_{(A)}-H_{(A+B)}\|\leqslant 38\varkappa(A)\|H_{(A)}\|\frac{\|B\|}{\|A\|},\tag{4.2$'$}$$

$$\|G(t, A+B)-G(t, A)\|\leqslant 12\varkappa^2(A)\frac{\|B\|}{\|A\|}e^{-\frac{|t|\|A\|}{2\varkappa(A)}}.\tag{4.3}$$

Переходя к доказательству теоремы, заметим, что в силу леммы 1 верна следующая цепочка неравенств:

$$\|(izI-A-B)^{-1}\|\leqslant\max_{-\infty<z<\infty}[\sigma_1(izI-A-B)]^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant\max_{-\infty<z<\infty}\frac{1}{\sigma_1(izI-A)-\|B\|}\leqslant\left[\frac{\|A\|}{14.2\varkappa(A)}-\|B\|\right]^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{\|A\|}{16.6\varkappa(A)}\right)^{-1}=\frac{16.6\varkappa(A)}{\|A\|},\tag{4.4}$$

результатом которой является утверждение об экспоненциальной дихотомичности матрицы $A+B$.

По определению

$$\varkappa(A)=2\|A\|\,\|H_{(A)}\|,\quad \varkappa(A+B)=2\|A+B\|\,\|H_{(A+B)}\|,\tag{4.5}$$

где, как указано в § 2,

$$H_{(A)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(A^*+izI)^{-1}(A-izI)^{-1}\,dz,$$

$$H_{(A+B)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(A^*+B^*+izI)^{-1}(A+B-izI)^{-1}\,dz.$$

Эти равенства позволяют записать, что

$$\|H_{(A)}-H_{(A+B)}\|=\max_{\|y\|=1}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\|(izI-A)^{-1}y\|^2-\|(izI-A-B)^{-1}y\|^2\right)dz\right|. \tag{4.6}$$

Используя известное тождество

$$A^{-1}-(A+B)^{-1}=(A+B)^{-1}BA^{-1}, \tag{4.7}$$

которым мы уже пользовались в § 3, а также неравенства (4.1), (4.4), можно преобразовать и оценить подынтегральное выражение в (4.6) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&|\,\|(izI-A-B)^{-1}y\|^2-\|(izI-A)^{-1}y\|^2|=\\
&=|\,\|[(izI-A)^{-1}+(izI-A-B)^{-1}B(izI-A)^{-1}]y\|^2-\|(izI-A)^{-1}y\|^2|\leqslant\\
&\leqslant 2|((izI-A)^{-1}y,\ (izI-A-B)^{-1}B(izI-A)^{-1}y)|+\\
&+\|(izI-A-B)^{-1}B(izI-A)^{-1}y\|^2\leqslant\\
&\leqslant(2\|(izI-A-B)^{-1}\|\,\|B\|+\|(izI-A-B)^{-1}\|^2\|B\|^2)\|(izI-A)^{-1}y\|^2\leqslant\\
&\leqslant\left[34.2\varkappa(A)\frac{\|B\|}{\|A\|}+\left(100\varkappa(A)\frac{\|B\|}{\|A\|}\right)\frac{(16.6)^2}{100}\varkappa(A)\frac{\|B\|}{\|A\|}\right]\|(izI-A)^{-1}y\|^2\leqslant\\
&\leqslant 36\varkappa(A)\frac{\|B\|}{\|A\|}\|(izI-A)^{-1}y\|^2.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Возвращаясь к (4.6), с учетом (4.8) получаем

$$\begin{aligned}
\|H_{(A)}-H_{(A+B)}\|&\leqslant 36\varkappa(A)\frac{\|B\|}{\|A\|}\max_{\|y\|=1}\int_{-\infty}^{\infty}\|(izI-A)^{-1}y\|^2\,dz=\\
&=36\varkappa(A)\frac{\|B\|}{\|A\|}\max_{\|y\|=1}\int_{-\infty}^{\infty}\left((A^*+izI)^{-1}(A-izI)^{-1}y,\ y\right)dz=\\
&=36\varkappa(A)\frac{\|B\|}{\|A\|}\max_{\|y\|=1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(A^*+izI)^{-1}(A-izI)^{-1}\,dzy,\ y\right)=\\
&=36\varkappa(A)\frac{\|B\|}{\|A\|}\|H_{(A)}\|,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

т. е. оценка (4.2) доказана. Далее, вспоминая определения параметров $\varkappa(A)$ и $\varkappa(A+B)$, можем записать цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
&|\varkappa(A)-\varkappa(A+B)|=|2\|A\|\|H_{(A)}\|-2\|A+B\|\|H_{(A+B)}\||=\\
&=|2\|A+B\|(\|H_{(A)}\|-\|H_{(A+B)}\|)+\|H_{(A)}\|(2\|A\|-2\|A+B\|)|\leqslant\\
&\leqslant 2\|A\|\|H_{(A)}\|\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{\|A\|}\right)\frac{\|H_{(A)}-H_{(A+B)}\|}{\|H_{(A)}\|}+2\|A\|\|H_{(A)}\|\left|1-\frac{\|A\|+\|B\|}{\|A\|}\right|=\\
&=\varkappa(A)\left[\left(1+\frac{\|B\|}{\|A\|}\right)\frac{\|H_{(A)}-H_{(A+B)}\|}{\|H_{(A)}\|}+\frac{\|B\|}{\|A\|}\right],
\end{aligned}$$

из которой с учетом (4.9) и (4.1) следует, что

$$\begin{aligned}
|\varkappa(A)-\varkappa(A+B)|&\leqslant\varkappa(A)\Big[36\varkappa(A)\frac{\|B\|}{\|A\|}+\\
&+\left(1+36\varkappa(A)\frac{\|B\|}{\|A\|}\right)\frac{\|B\|}{\|A\|}\Big]\leqslant 38\varkappa^2(A)\frac{\|B\|}{\|A\|}.
\end{aligned}$$

Доказанное неравенство (4.2) в условиях теоремы обеспечивает вместе с неравенством

$$\|G(t,\ A+B)\|\leqslant\sqrt{\varkappa(A+B)}\exp\{-|t|\,\|A+B\|/\varkappa(A+B)\}$$

выполнение оценки

$$\|G(t,\ A+B)\| \leqslant (1+c_1)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\varkappa(A)} \exp\left\{-|t| \frac{\|A\|}{\varkappa(A)} (1-c_1) 1 - \frac{\|B\|}{\|A\|}\right\}, \quad (4.10)$$

где $c_1 = 38\sqrt{\varkappa(A)}\|B\|/\|A\|$.

Нетрудно проверить, что если использовать обозначение

$$c_2 = 38\sqrt{\varkappa(A)}\|B\|/\|A\|, \quad (4.11)$$

то верны неравенства

$$\sqrt{1+c_1} < 1 + c_2/2, \quad (1-c_1)\left(1 - \frac{\|B\|}{\|A\|}\right) < 1 - c_2, \quad (4.12)$$

которые позволяют огрубить оценку (4.10):

$$\|G(t,\ A+B)\| \leqslant \left(1 + \frac{c_2}{2}\right)\sqrt{\varkappa(A)} \exp\left\{-\frac{|t|\,\|A\|}{\varkappa(A)}(1-c_2)\right\}. \quad (4.13)$$

Получив неравенство (4.13), можем перейти к выводу оценки (4.3). Так как $G(t,\ A+B) = -G(-t,\ -A-B)$, $G(-t,\ -A) = -G(t,\ A)$, достаточно рассмотреть случай $t > 0$.

Поскольку $G(t,\ A+B)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} G(t,\ A+B) = AG(t,\ A+B) + BG(t,\ A+B) + \delta(t) I,$$

то матричная функция $G(t,\ A+B)$ является решением интегрального уравнения

$$G(t,\ A+B) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s,\ A)\,[BG(s,\ A+B) + \delta(s) I]\, ds,$$

т. е.

$$G(t,\ A+B) = G(t,\ A) + \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s,\ A)\, BG(s,\ A+B)\, ds.$$

Полученное соотношение позволяет, опираясь на оценку матрицы Грина $G(t,\ A)$ и неравенство (4.13), записать

$$\|G(t,\ A+B) - G(t,\ A)\| \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa(A)\|B\|\left(1 + \frac{c_2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{(-|t-s| - |s|(1-c_2)) \frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\} ds. \quad (4.14)$$

Нетрудно проверить справедливость равенств

$$|t-s| + |s|(1-c_2) = \begin{cases} t - sc_2 & \text{при } 0 < s < t; \\ t - 2s + sc_2 & \text{при } s < 0; \\ 2s - t - sc_2 & \text{при } s > t, \end{cases}$$

которые позволяют преобразовать интеграл в (4.14) следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-(|t-s| + |s|(1-c_2)) \frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\} ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \exp\left\{-(t - s - s(1-c_2)) \frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\} ds + \int_{0}^{t} \exp\left\{-(t - c_2 s) \frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\} ds +$$

$$+ \int_{t}^{\infty} \exp\left\{-(-t + s + s(1-c_2)) \frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\} ds = \exp\left\{-(t(1-c_2)) \frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\} \times$$

$$\times \left\{\int_{0}^{t} \exp\left\{-(t-s) c_2 \frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\} ds + 2\int_{0}^{\infty} \exp\left\{2s(1-c_2) \frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\} ds\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{t + \frac{\varkappa(A)}{(1-c_2)\|A\|}\right\} \exp\left\{-t(1-c_2) \frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\}. \quad (4.15)$$

Здесь воспользуемся тем, что

$$\int_0^t e^{-ps}\,ds < t \quad \text{при} \quad p > 0.$$

Так как при всех $x > 0$ верно неравенство $x < e^x$, то можно гарантировать выполнение неравенства

$$\left(\frac{1}{2} - c_2\right)\frac{t\,\|A\|}{\varkappa(A)} < \exp\left\{t\,\|A\|\left(\frac{1}{2} - c_2\right)\Big/\,\varkappa(A)\right\},$$

которое, в свою очередь, позволяет огрубить (4.15):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-(|t-s| + |s|(1-c_2))\|A\|/\varkappa(A)\} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{t\|A\|}{\varkappa(A)}}\left\{\frac{\varkappa(A)}{(0.5-c_2)\|A\|} + \frac{\exp\left\{-t\left(\frac{1}{2}-c_2\right)\frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\}\varkappa(A)}{(1-c_2)\|A\|}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{t\|A\|}{\varkappa(A)}}\frac{\varkappa(A)}{\|A\|}\left[\frac{1}{0.5-c_2} + \frac{1}{1-c_2}\right]. \tag{4.16}$$

Так как при $c_2 \leqslant 0.38$

$$\left(1 + \frac{c_2}{2}\right)\left[\frac{1}{0.5-c_2} + \frac{1}{1-c_2}\right] \leqslant 12,$$

то из (4.11), (4.13), (4.14) следует справедливость неравенства (4.3).

Доказательство теоремы 1 закончено.

§ 5. Оценка близости решений двух краевых задач

Рассмотрим две краевые задачи на интервале $(0, T)$.

Первая —

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \mathscr{A}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}, \quad \mathscr{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

с граничными условиями

$$X(0) - Y(0) = 0, \; Y(T) - X(T) = I. \tag{5.2}$$

Вторая —

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \tilde{X}(t) \\ \tilde{Y}(t) \end{pmatrix} = (\mathscr{A} + \mathscr{B}(t))\begin{pmatrix} \tilde{X}(t) \\ \tilde{Y}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathscr{B}(t) = \begin{pmatrix} \mathscr{B}_{11}(t) & \mathscr{B}_{12}(t) \\ \mathscr{B}_{21}(t) & \mathscr{B}_{22}(t) \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

с граничными условиями

$$\tilde{X}(0) - \tilde{Y}(0) = 0, \; \tilde{Y}(T) - \tilde{X}(T) = I. \tag{5.4}$$

Здесь $X(t)$, $Y(t)$, $\tilde{X}(t)$, $Y(t)$ — матричные функции размера $N \times N$. Для оценки близости решений этих задач докажем теорему.

Теорема 2. *Пусть A — экспоненциально дихотомичная матрица ($\varkappa(A) < \infty$) и для возмущающей матрицы $\mathscr{B}(t)$ имеет место равномерная оценка*

$$\|\mathscr{B}(t)\| \leqslant \rho\|A\|, \; 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5.5}$$

где ρ выбирается так, что

$$0 < \rho < \frac{1}{4\varkappa^{*3/2}}. \tag{5.6}$$

Тогда для решений краевых задач (5.1)—(5.4) *верны оценки*

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T}\left\|\begin{pmatrix} \tilde{X}(t) - X(t) \\ \tilde{Y}(t) - Y(t) \end{pmatrix}\right\| \leqslant 8\varkappa^2(A)\,\rho. \tag{5.7}$$

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 2, остановимся подробнее на рассмотрении краевой задачи (5.1), (5.2). В [20] показано, что решение этой задачи существует и единственно. Напомним рассуждения работы [20]. Образуем матрицу $G_T(t)$:

$$G_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(t + 2kT, A). \tag{5.8}$$

При каждом t ряд (5.8), представляющий $G_T(t)$, сходится как геометрическая прогрессия. Это утверждение является следствием неравенства

$$\|G(t, A)\| \leqslant \sqrt{\varkappa(A)} \exp\left\{-|t| \frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Матрица $G_T(t)$ — периодичная функция t с периодом $2T$: $G_T(t+2T) = G_T(t)$. В частности, $G_T(T) = G_T(-T)$. Очевидно, что $G_T(t)$ является решением следующей краевой задачи на отрезке $[-T, T]$:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt} G_T(t) = AG_T(t) + \delta(t) I, \\ G_T(T) = G_T(-T). \end{gathered} \tag{5.9}$$

Решение задачи (5.9) существует (для него приведена формула) и единственно при любом $T > 0$, так как соответствующая однородная задача не может иметь решений. Если бы они существовали, то их можно было бы периодически продолжить на всю числовую ось и тем самым получить ограниченное решение однородной системы

$$\frac{d}{dt} Z(t) = AZ(t),$$

что невозможно в силу конечности $\varkappa(A)$. (Из этой конечности следует отсутствие у A чисто мнимых характеристических корней.) Проанализировав представление (5.8) для $G_T(t)$, легко установить, что при $-T \leqslant t \leqslant T$

$$\|G_T(t) - G(t)\| \leqslant \frac{2\sqrt{\varkappa(A)} \exp\{-T\|A\|/\varkappa(A)\}}{1 - \exp\{-2T\|A\|/\varkappa(A)\}}, \tag{5.10}$$

$$\|G_T(t)\| \leqslant \sqrt{\varkappa(A)} e^{-\frac{|t|\|A\|}{\varkappa(A)}} + \frac{2\sqrt{\varkappa(A)} \exp\{-T\|A\|/\varkappa(A)\}}{1 - \exp\{-2T\|A\|/\varkappa(A)\}}. \tag{5.11}$$

Далее нетрудно понять, что если определить на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ функции $X(t) = G_T(t-T)$, $Y(t) = G_T(T-t)$, то они удовлетворяют задаче (5.1), (5.2), т. е. существование решения этой задачи доказано. Для доказательства единственности данного решения заметим, что если $\overline{X}(t)$ и $\overline{Y}(t)$ удовлетворяют задаче (5.1), (5.2), то функция

$$\overline{G_T}(t) = \begin{cases} \overline{Y}(T-t), & T \geqslant t > 0; \\ \overline{X}(T+t), & -T \leqslant t < 0 \end{cases}$$

удовлетворяет задаче (5.9), но в силу единственности решения (5.9) $\overline{G}_T(t) = G_T(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, и, значит,

$$X(t) = \overline{X}(t),\ Y(t) = \overline{Y}(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Итак, доказано, что решение краевой задачи (5.1), (5.2) существует и единственно, если $\varkappa(A) < \infty$. В частности, если $G_2(t)$ — матрица размера $2N \times N$, решение на интервале $(0, T)$ краевой задачи

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt} G_2(t) = \mathscr{A} G_2(t), \quad \mathscr{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \\ [I_N - I_N] G_2(0) = 0, \ [-I_N, I_N] G_2(T) = I, \end{gathered} \tag{5.12}$$

то

$$G_2(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5.12'}$$

где $X(t)$, $Y(t)$ — решение задачи (5.1), (5.2). Причем в силу (5.11) имеем цепочку:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|G_2(t)\| = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\left\|\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t)\end{pmatrix}\right\| = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\left\|\begin{pmatrix} G_T(t-T) \\ G_T(t+T)\end{pmatrix}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant T}\sqrt{\varkappa(A)}\left[e^{-\frac{|t|\|A\|}{\varkappa(A)}} + \frac{2\exp\{-T\|A\|/\varkappa(A)\}}{1-\exp\{-2T\|A\|/\varkappa(A)\}}\right] =$$

$$= \sqrt{\varkappa(A)}\left[1+2\exp\left\{-T\frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\}\Big/\left[1-\exp\left\{-2T\frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\}\right]\right].$$

Следовательно, если

$$\exp\{-T\|A\|/\varkappa(A)\} < 0.25, \tag{5.13}$$

то

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|G_2(t)\| \leqslant 2\sqrt{\varkappa(A)}. \tag{5.14}$$

Рассмотрим далее $G_3(t, s)$ — матрицу размера $2N\times 2N$, удовлетворяющую системе

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}G_3(t,s) = \mathscr{A}G_3(t,s),\ s\neq s,\\ &G_3(s+0,\ s) - G_3(s-0,\ s) = I_{2N}, \end{aligned} \tag{5.15}$$

т. е. $G_3(t, s)$ является матрицей Грина и, значит, как показано в [29], в силу того, что $\mathscr{A}$ не зависит от времени, представляется формулой

$$G_3(t,\ s) = G(t-s,\ \mathscr{A}),$$

т. е.

$$G_3(t,s) = \begin{pmatrix} G(t-s, A) & 0 \\ 0 & G(t-s, -A)\end{pmatrix}.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\|G_3(t,\ s)\| = \|G(t-s,\ \mathscr{A})\| \leqslant \sqrt{\varkappa(A)}\exp\{-|t-s|\|A\|/\varkappa(A)\}. \tag{51.6}$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 2. Известно (см. [30]), что решение задачи (5.3), (5.4) можно представить в виде

$$\begin{pmatrix}\widetilde{X}(t) \\ \widetilde{Y}(t)\end{pmatrix} = G_2(t) + \int_0^T G_3(t,s)\mathscr{B}(s)\begin{pmatrix}\widetilde{X}(s) \\ \widetilde{Y}(s)\end{pmatrix}ds. \tag{5.17}$$

При $k\geqslant 0$ имеем $x_0(t)\equiv 0$, $y_0(t)\equiv 0$, $0\leqslant t\leqslant T$,

$$\begin{pmatrix} x_{k+1}(t) \\ y_{k+1}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t)\end{pmatrix} + \int_0^T G_3(t,s)\mathscr{B}(s)\begin{pmatrix} x_k(s) \\ y_k(s)\end{pmatrix}ds. \tag{5.18}$$

Строим для $\widetilde{X}(t)$ и $\widetilde{Y}(t)$ процесс последовательных приближений. Для любой матрицы $F(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, справедлива оценка

$$\left\|\int_0^T G_3(t,s)\mathscr{B}(s)F(s)\,ds\right\| \leqslant R\max_{0\leqslant s\leqslant T}\|F(s)\|, \tag{5.19}$$

где

$$R = 2\varkappa^{3/2}(A)\rho$$

(в силу условия (5.6) такой выбор R обеспечивает выполнение неравенства $R < 0.5$).

В самом деле, используя условие (5.5) и неравенство (5.16), получим цепочку:

$$\left\|\int_0^T G_3(t,s)\mathscr{B}(s)F(s)\,ds\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant s\leqslant T}\|\mathscr{B}(s)\|\max_{0\leqslant s\leqslant T}\|F(s)\|\int_0^T\sqrt{\varkappa(A)}\exp\left\{-|t-s|\frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\}ds \leqslant$$

$$\leqslant \rho \| A \| 2 \sqrt{\varkappa(A)} \max_{0 \leqslant s \leqslant T} \| F(s) \| \int_0^\infty \exp\{-s \| A \| / \varkappa(A)\} ds \leqslant$$

$$\leqslant 2\varkappa^{3/2}(A) \rho \max_{0 \leqslant s \leqslant T} \| F(s) \|,$$

которая и доказывает справедливость (5.19). Далее из (5.18) следует, что

$$\begin{pmatrix} x_{k+1}(t) - x_k(t) \\ y_{k+1}(t) - y_k(t) \end{pmatrix} = \int_0^T G_3(t, s) \mathscr{B}(s) \begin{pmatrix} x_k(s) - x_{k-1}(s) \\ y_k(s) - y_{k-1}(s) \end{pmatrix} ds,$$

и, значит, в силу (5.19) имеем

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left\| \begin{pmatrix} x_{k+1}(t) - x_k(t) \\ y_{k+1}(t) - y_k(t) \end{pmatrix} \right\| \leqslant R \max_{0 \leqslant s \leqslant T} \left\| \begin{pmatrix} x_k(s) - x_{k-1}(s) \\ y_k(s) - y_{k-1}(s) \end{pmatrix} \right\|. \quad (5.20)$$

Таким образом, последовательности матриц $x_k(t)$ и $y_k(t)$ равномерно сходятся и их пределами являются соответственно матрицы $\widetilde{X}(t)$ и $\widetilde{Y}(t)$, причем справедлива цепочка неравенств:

$$\left\| \begin{pmatrix} \widetilde{X}(t) - X(t) \\ \widetilde{Y}(t) - Y(t) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \widetilde{X}(t) - x_2(t) \\ \widetilde{Y}(t) - y_1(t) \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} x_{k+1}(t) - x_k(t) \\ y_{k+1}(t) - y_k(t) \end{pmatrix} \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \begin{pmatrix} x_{k+1}(t) - x_k(t) \\ y_{k+1}(t) - y_k(t) \end{pmatrix} \right\|.$$

И значит, в силу (5.20), (5.12) и (5.14) при условии (5.13) получаем

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left\| \begin{pmatrix} \widetilde{X}(t) - X(t) \\ \widetilde{Y}(t) - Y(t) \end{pmatrix} \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} R^k \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left\| \begin{pmatrix} x_1(t) - x_0(t) \\ y_1(t) - y_0(t) \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \frac{R}{1-R} \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left\| \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \right\| = \frac{R}{1-R} \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \| G_2(t) \| \leqslant 4R \sqrt{\varkappa(A)},$$

что с учетом выбора $R = 2\varkappa^{3/2}(A)\rho$ и обеспечивает справедливость теоремы 2.

Глава 2

РАСЧЕТ МАТРИЧНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ С ГАРАНТИРОВАННОЙ ОЦЕНКОЙ ТОЧНОСТИ

Введение

В работе [24] подробно рассмотрен алгоритм расчета экспоненты от асимптотически устойчивой матрицы с гарантированной оценкой точности. Алгоритм уравнения степеней от экспоненты малой нормы, ставший основой алгоритма работы [24], ранее эффективно использовался в [31]. Первая попытка провести анализ влияния ошибок округления в алгоритме удвоения степеней проведена в работе [27]. Алгоритм удвоения степеней основан на том факте, что

$$e^A = \left(e^{A_1}\right)^{2^m}, \; A_1 = 2^{-m} A, \| A_1 \| = 0.5. \quad (1)$$

Для вычисления экспоненты e^{A_1} используются с одинаковым успехом как Падэ-аппроксимация, так и приближения тейлоровскими полиномами. Поэтому ограничимся выводом в § 1 оценок точности вычисления e^{A_1}, используя несколько первых слагаемых в тейлоровском разложении e^{A_1}.

При обосновании алгоритма расчета проекторов на инвариантные подпространства экспоненциально дихотомичной матрицы мы столкнулись с необходимостью при заданных ρ, θ ($\rho \ll 1$, $\theta \gg 1$) определить такое τ (как можно большое), чтобы для найденных приближений $\left(e^{\pm\tau A_1}\right)_{\text{выч}}$ $\left(\| A_1 \| = 0.5,\ A_1 = \frac{1}{2\|A\|}\right)$ были выполнены оценки

$$\left\| e^{\pm\tau A_1} - \left(e^{\pm\tau A_1}\right)_{\text{выч}} \right\| \leqslant \rho, \qquad (2)$$

$$\max_{|t| \leqslant \tau} \left\| e^{tA_1} \right\| \leqslant \theta. \qquad (3)$$

Для решения этой задачи предлагаем использовать следующий алгоритм.

Вычисляются последовательности матриц $B_0, B_1, \ldots, B_k, C_0, C_1, \ldots, C_k$ и чисел $r_0, r_1, \ldots, r_k, R_0, R_1, \ldots, R_k$ такие, что ($m = 1, 2, \ldots, k$)

$$B_0 = \left(e^{A_1}\right)_{\text{выч}},\ C_0 = \left(e^{-A_1}\right)_{\text{выч}},\ B_m = B_{m-1}^2,\ C_m = C_{m-1}^2,$$

$$r_0 = \|B_0\|,\ r_m = \|B_m\|,\ R_0 = \|C_0\|,\ R_m = \|C_m\|,\ \tilde r_0 = \sqrt{e} r_0,\ \tilde R_0 = \sqrt{e} R_0,$$

$$\tilde r_m = \begin{cases} 1.1\, \tilde r_{m-1} r_m, & \text{если } 1.1\, r_m > 1; \\ \tilde r_{m-1}, & \text{если } 1.1\, r_m \leqslant 1, \end{cases} \qquad \tilde R_m = \begin{cases} 1.1\, \tilde R_{m-1} R_m, & \text{если } 1.1\, R_m > 1; \\ \tilde R_{m-1}, & \text{если } 1.1\, R_m \leqslant 1. \end{cases}$$

Причем расчет ведется до такого максимального k, при котором выполнимы неравенства

$$\max\{\tilde r_k, \tilde R_k\} < \theta, \left(\max \left\{ \prod_{i=0}^{k} r_i, \prod_{i=0}^{k} R_i \right\} \right) \alpha < \rho,$$

где α — малая величина, характеризующая точность вычисления квадрата матрицы и суммы двух матриц. При этом гарантировано выполнение оценок (2), (3). Правомерность сделанных заключений следует из проведенного в § 2 анализа влияния ошибок округления на процесс удвоения степеней, повторяющего, по существу, анализ работы [22].

В § 2 описан способ получения апостериорных оценок точности вычисления $e^{2^k A_1}$, при этом результаты справедливы для произвольных матриц. Если же ограничиться классом асимптотически устойчивых матриц ($\varkappa(A) < \infty$), а точнее, «практически» устойчивых ($\varkappa(A) < \varkappa^*$), то имеют место априорные оценки точности вычисления матриц $e^{2^k A_1}$, выводу которых посвящен § 3. Оказалось, что величины ρ — точность вычисления $e^{2^k A_1}$, N — размерность матрицы A_1, k и ε — малые величины, характеризующие точность вычисления произведения двух матриц, взаимосвязаны. Так, зная ρ, N, $\varkappa^*$, k, всегда можно указать, насколько точно необходимо вычислять произведения матриц, чтобы, используя алгоритм удвоения степеней, убедиться, что

$$\left\| \left(e^{2^k A_1}\right)_{\text{выч}} - e^{2^k A_1} \right\| \leqslant \rho.$$

При этом необходимо отметить, что полученные априорные оценки в § 3 принципиально точнее апостериорных оценок § 2. Так, например, в работе [12] рассмотрена матрица

$$A = \begin{bmatrix} \tilde A & 0 & 0 \\ 0 & \tilde A & 0 \\ 0 & 0 & \tilde A \end{bmatrix},$$

где

$$\tilde A = \begin{bmatrix} -16 & 107.2 & & & \\ & -16 & 107.2 & 0 & \\ & & -16 & 107.2 & \\ & 0 & & -16 & 107.2 \\ & & & & -16 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что $\varkappa(A)=0.8_{10}7$. Тогда если для вычисления используется машина ЕС-1050 и расчет ведется с машинными словами удвоенной длины, то априорная оценка § 3 обеспечивает выполнение оценки $\|(e^A)_{\text{выч}}-e^A\|\leqslant\rho$, в то время как апостериорная оценка этой же величины § 2 превосходит $0.1_{10}5$. Таким образом, доказательство теоремы 1 § 3 проще доказательства, приведенного в работе [24]. Оно получено А. Н. Малышевым.

§ 1. Точность вычисления экспоненты от матрицы малой нормы

Хорошо известно, что матричную экспоненту e^A можно представить рядом

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{m!}A^m + \ldots \tag{1.1}$$

и что урезанные полиномы

$$A_m = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{m!}A^m \tag{1.2}$$

приближают матрицу e^A с точностью

$$\left\|e^A - A_m\right\| \leqslant \frac{\|A\|^{m+1}}{(m+1)!}e^{\|A\|}. \tag{1.3}$$

Оценку (1.3) легко вывести. В самом деле, из (1.1) и (1.2) следует, что

$$e^A - A_m = \frac{1}{(m+1)!}A^{m+1} + \frac{1}{(m+2)!}A^{m+2} + \ldots + \frac{1}{n!}A^n + \ldots$$

и, значит,

$$\left\|e^A - A_m\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|A\|^{m+k}}{(m+k)!} \leqslant \frac{\|A\|^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k}{k!} \leqslant \frac{\|A\|^{m+1}}{(m+1)!}e^{\|A\|}.$$

Из неравенства (1.3) видно, что чем больше первых членов в (1.1) возьмем, тем точнее матрица e^A будет приближаться матрицей A_m, но при этом чем больше m, тем больше накопленная погрешность при вычислении сумм (1.2), которая зависит во многом и от алгоритма расчета A_m.

Наиболее употребимый алгоритм расчета матрицы A_m следующий:

$$\begin{gathered} A_0 = B_0 = I,\ p = 1, 2, \ldots, m, \\ B_p = \frac{1}{p}AB_{p-1},\ A_p = A_{p-1} + B_p. \end{gathered} \tag{1.4}$$

В этом параграфе проведем анализ накопления погрешности вычисления в алгоритме (1.4), который позволит сформулировать правило оптимального выбора числа m. Так как основные операции в (1.4) — это сложение и умножение матриц, то начнем со следующего предположения.

Пусть при вычислении произведения двух матриц A, B (их результат будем обозначать $(AB)_{\text{выч}}$) и их сложения $((A+B)_{\text{выч}})$ допускается погрешность:

$$\|(AB)_{\text{выч}} - AB\| \leqslant d_1\varepsilon_1\|A\|\,\|B\|, \tag{1.5}$$

$$\|(A+B)_{\text{выч}} - (A+B)\| \leqslant d_2\varepsilon_1(\|A\| + \|B\|), \tag{1.6}$$

где ε — малая положительная величина, характеризующая разрядную сетку используемого вычислительного устройства, а d_1, d_2 — постоянные, характеризующие применяемый алгоритм расчета AB и $A+B$. Подробнее о них см. [24].

Для получения оптимального приближения матрицы e^A необходимо остановить процесс (1.4) после k_0 шагов, когда гарантированная погрешность вычисления A_{k_0} станет одного порядка с погрешностью приближения A_{k_0} экспоненты e^A (оценка (1.3)). В этом параграфе покажем, что в качестве k_0 необходимо взять минимальное среди всех целых k, удовлетворяющих неравенству

$$1.01\varepsilon(d_2k+d_1\|A\|)\geqslant\|A\|^{k+1}/(k+1)!. \qquad (1.7)$$

Возникающая при этом погрешность оценивается неравенством

$$\left\|A_{k_0}-e^A\right\|\leqslant\alpha_0\varepsilon e^{\|A\|}, \qquad (1.8)$$

где

$$\alpha_0=2.02(d_2k_0+d_1\|A\|). \qquad (1.9)$$

Из (1.8) и (1.9) видно, что рассматриваемый алгоритм расчета матрицы e^A может эффективно применяться лишь для матриц A достаточно малой нормы (порядка единицы и меньше).

Перейдем к оценке погрешности, накапливающейся в процессе (1.4). Предположим, что матрицы $\{\widetilde{A}_i\}$, $\{\widetilde{B}_i\}$ связаны соотношениями

$$\widetilde{A}_0=\widetilde{B}_0=I,\ P\geqslant 1,$$

$$\widetilde{B}_p=\frac{1}{p}A\widetilde{B}_{p-1}+\Psi_p,\ \widetilde{A}_p=\widetilde{A}_{p-1}+\widetilde{B}_p+\varphi_p, \qquad (1.10)$$

в которых Φ_p и Ψ_p — квадратные $N\times N$ матрицы — обозначают погрешности. Сделанные предположения позволяют оценить матрицы Φ_p и Ψ_p:

$$\|\varphi_p\|\leqslant\frac{d_1\varepsilon}{m}\|A\|\|\widetilde{B}_{p-1}\|, \qquad (1.11)$$

$$\|\Psi_p\|\leqslant d_2\varepsilon(\|\widetilde{B}_p\|+\|\widetilde{A}_{p-1}\|. \qquad (1.12)$$

Оценим разность $\widetilde{B}_p-\frac{1}{p!}A^p$. Из (1.10) следует равенство

$$\widetilde{B}_p-\frac{1}{p!}A^p=\frac{1}{p}A\left[\widetilde{B}_{p-1}-\frac{1}{(p-1)!}A^{p-1}\right]+\Psi_p,$$

позволяющее вывести цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{B}_p-\frac{1}{p!}A^p\right\|&\leqslant\left\|\widetilde{B}_{p-1}-\frac{1}{(p-1)!}A^{p-1}\right\|\frac{\|A\|}{p}+\|\Psi_p\|\leqslant\\&\leqslant\left\|\widetilde{B}_{p-1}-\frac{1}{(p-1)!}A^{p-1}\right\|\frac{\|A\|}{p}+d_1\varepsilon\|\widetilde{B}_{p-1}\|\frac{\|A\|}{p}\leqslant\\&\leqslant(1+d_1\varepsilon)\frac{\|A\|}{p}\left\|\widetilde{B}_{p-1}-\frac{1}{(p-1)!}A^{p-1}\right\|+\\&+d_1\varepsilon\frac{\|A\|}{p}\left\|\frac{1}{(p-1)!}A^{p-1}\right\|\leqslant d_1\varepsilon\frac{\|A\|^p}{(p-1)!}.\end{aligned}$$

Опираясь на полученную оценку и используя неравенства (1.11), (1.12), докажем по индукции, что если

$$\sum_{p=1}^{k}\varepsilon\|A\|(d_2p+d_1)\leqslant 0.01,$$

то

$$\|\widetilde{A}_k-A_k\|\leqslant 1.01(d_2k+d_1\|A\|)\varepsilon e^{\|A\|}. \qquad (1.13)$$

В самом деле, при $k=1$ неравенство (1.13) следует из (1.4), (1.10)—(1.12). Пусть оно верно и при всех $k<j$ и докажем, что тогда (1.13) верно и при $k=j$. В силу сделанных предположений справедлива цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}\|\widetilde{A}_j-A_j\|&\leqslant\left\|\sum_{p=1}^{j}\widetilde{B}_p-\frac{1}{p!}A^p+\varphi_p\right\|\leqslant\\&\leqslant\sum_{p=1}^{j}\left\{\left\|\widetilde{B}_p-\frac{1}{p!}A^p\right\|+d_2\varepsilon\|\widetilde{B}_p\|+d_2\varepsilon\|A_{p-1}\|\right\}\leqslant\\&\leqslant\sum_{p=1}^{j}\left\{\left\|\widetilde{B}_p-\frac{1}{p!}A^p\right\|(1+d_2\varepsilon)+d_2\varepsilon\left\|\frac{1}{p!}A^p\right\|+d_2\varepsilon\|A_{p-1}\|+\right.\end{aligned}$$

$$+ d_2\varepsilon \left\| \tilde{A}_{p-1} - A_{p-1} \right\| \Big\} \leqslant j d_2 \varepsilon e^{\|A\|} + (1 + d_2\varepsilon)\, d_1\varepsilon \| A \| e^{\|A\|} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{j} d_2 \varepsilon e^{\|A\|} 1.01 (d_2 p + d_1) \leqslant 1.01 (d_2 j + d_1 \| A \|)\, e^{\|A\|}\varepsilon,$$

откуда с учетом (1.7) и следует справедливость утверждения (1.8), (1.9).

§ 2. Алгоритм удвоения степеней

Докажем лемму.

Лемма 1. *Рассмотрим последовательность матриц* $B_0, B_1, \ldots, B_k, \ldots$ *размерности* $N \times N$, *связанных при помощи квадратных матриц* Φ_j $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ *рекуррентными соотношениями*

$$B_0 = e^{A} + \Phi_0, \quad B_{j+1} = B_j^2 + \Phi_{j+1}. \tag{2.1}$$

На матрицы Φ_{j+1} *накладываются условия*

$$\|\Phi_0\| \leqslant r, \quad \|\Phi_{j+1}\| \leqslant r\alpha \|B_j\|^2, \tag{2.2}$$

где

$$r \ll 1, \quad \alpha \ll 1. \tag{2.3}$$

Тогда числовая последовательность $\{r_k\}$:

$$r_0 = r, \quad r_{k+1} = 2.2\|B_k\| r_k, \quad r_k < 0.1\|B_k\|, \tag{2.4}$$

является мажорирующей для погрешности представления B_k *матричных экспонент* $e^{2^k A}$

$$\left\| e^{2^k A} - B_k \right\| \leqslant r_k. \tag{2.5}$$

Переходя к доказательству, обозначим $(j = 0, 1, 2, \ldots)$

$$\xi_j = e^{2^j A} - B_j. \tag{2.6}$$

Из (2.1) легко выводится равенство, связывающее матрицы ξ_k и ξ_{k+1}:

$$\xi_{k+1} = B_{k+1} - e^{2^{k+1}A} = B_k^2 + \Phi_{k+1} - e^{2^{k+1}A} =$$

$$= B_k^2 + \Phi_{k+1} - (B_k + \xi_k)^2 = \Phi_{k+1} - B_k\xi_k - \xi_k B_k - \xi_k^2,$$

которое влечет за собой выполнение неравенства

$$\|\xi_{k+1}\| \leqslant 2\|B_k\|\, \|\xi_k\| + \|\xi_k\|^2 + \|\Phi_{k+1}\|. \tag{2.7}$$

Далее покажем, что из условий леммы (неравенств (2.3) и (2.4)) следует

$$\|\xi_k\|^2 < 0.1\|B_k\| r_k, \tag{2.8}$$

$$\|\Phi_{k+1}\| < 0.1\|B_k\| r_k. \tag{2.9}$$

В этом случае, так как $\|\xi_k\| < r_k$, из (2.7) следует

$$\|\xi_{k+1}\| \leqslant 2.2\|B_k\| r_k,$$

и, значит, в качестве мажоранты $\|\xi_{k+1}\|$ можно взять величину $r_{k+1} = 2.2\|B_k\| r_k$, что и доказывает справедливость леммы 1. Итак, для завершения доказательства леммы 1 осталось вывести неравенства (2.8), (2.9) из условий леммы.

Из (2.2) следует, что

$$\|\Phi_{k+1}\| \leqslant r\alpha\|B_k\|^2 = 0.1 r_k \|B_k\| \left[\|B_k\| r\alpha / (0.1 r_k)\right]$$

и, значит, (2.9) верно, если $\|B_k\| r\alpha < 0.1 r_k$, а это есть условие (2.4).

Поскольку $\|\xi_k\| < r_k$, то в силу (2.4) верна цепочка неравенств:

$$\| \xi_k \|^2 < r_k^2 = r_k r_k < r_k\, 0.1 \| B_k \|,$$

что и доказывает справедливость (2.8), а значит, и утверждение леммы 1 доказано.

Следствие 1. *Если имеют место условия леммы 1, то справедливы неравенства*

$$\left\| e^{2^k A} - B_k \right\| \leqslant (2.2)^k \prod_{j=0}^{k} \| B_j \| \| \Phi_0 \| \leqslant (2.2)^k \prod_{j=0}^{k} \| B_j \| r.$$

Теперь сформулируем и докажем следствие 2 леммы 1, которое позволит оценить матрицу e^{tA} на интервале от 0 до 2^k на основании значений норм $\|B_i\|$ $(i \leqslant k)$.

Следствие 2. *Определим числовую последовательность*

$$\tilde{r}_k = \max_{0 \leqslant m_1 \leqslant \ldots \leqslant m_i \leqslant k} \sqrt{e} \prod_{j=1}^{i} 1.1 \| B_{m_j} \|, \quad m_j \text{ — целые},$$

в этом случае при $0 \leqslant t \leqslant 2^k$ *верна оценка*

$$\|e^{tA}\| \leqslant \tilde{r}_k. \tag{2.10}$$

Для доказательства воспользуемся представлениями

$$e^{tA} = e^{\tau A} \prod_{j=1}^{i} e^{2^{m_j} A},$$

где

$$t = \tau + 2^{m_1} + 2^{m_2} + \ldots + 2^{m_i}, \quad 0 \leqslant \tau < \frac{1}{2},$$

$$e^{2^{m_j} A} = B_{m_j} + \xi_{m_j}.$$

Воспользуемся обозначениями, принятыми при доказательстве леммы 1. Из этих представлений следует, что

$$\| e^{tA} \| = \left\| e^{\tau A} \prod_{j=1}^{k} (B_{m_j} + \xi_{m_j}) \right\| \leqslant \sqrt{e} \prod_{j=1}^{k} \| (B_{m_j} + \xi_{m_j}) \| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{e} \prod_{j=1}^{k} (\| B_{m_j} \| + \| \xi_{m_j} \|).$$

Далее, воспользовавшись оценкой $\| \xi_{m_j} \| \leqslant 0.1 \| B_{m_j} \|$, можно огрубить оценку $\|e^{tA}\|$ так:

$$\| e^{tA} \| \leqslant \sqrt{e} \prod_{j=1}^{k} 1.1 \| B_{m_j} \|,$$

откуда с учетом определения $\tilde{r}_k$ и следует справедливость неравенства (2.10).

В заключение параграфа отметим, что доказанная здесь лемма является, по существу, доказательством точности расчета матричной экспоненты e^A, предложенного в работе [14]. Ясно, что в процессе вычисления данным алгоритмом всегда можно вычислять величину

$$(2.2)^k \prod_{j=0}^{k} \| B_j \| r.$$

Хотя, как правило, она достаточно велика. Так, например, если рассмотреть матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A} \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -16 & 102.7 & & & 0 \\ & -16 & 102.7 & & \\ & & -16 & 102.7 & \\ & & & -16 & 102.7 \\ 0 & & & & -16 \end{bmatrix},$$

и взять $\varepsilon = 10^{-15}$, то величина

$$(2.2)^k \prod_{j=0}^{k} \| B_j \| r$$

будет превосходить $0.1_{10}5$.

§ 3. Расчет экспоненты от асимптотически устойчивой матрицы A

Рассмотрим алгоритм удвоения степеней матричной экспоненты e^A от матрицы малой нормы A, которая кроме этого является асимптотически устойчивой. Существенное место в наших оценках займет введенный в [22] параметр качества устойчивости матрицы A $(\varkappa(A))$. Выведем также связь между величинами ε, $\varkappa(A)$, N, T, где ε — величина, характеризующая используемую ЭВМ, N — размерность матрицы A, T — длина интервала, на котором можно вычислять e^{tA} с гарантией точности. По значениям ε, T, N, ρ (ρ — уровень требуемой точности определения e^{tA} на интервале $(0, T)$) можно определить величину $\varkappa^*$ — уровень «практической» устойчивости матриц. Это позволит утверждать, что для всех матриц A с $\varkappa(A) < \varkappa^*$ можно на интервале $(0, T)$ вычислить e^{tA} с точностью, не меньшей чем ρ.

Рассмотрим последовательности матриц размерности $N \times N$: B_0, B_1, B_2, ..., B_k, ..., связанных при помощи квадратных матриц Φ_j ($j = 0, 1, 2, \ldots$) рекуррентными соотношениями

$$B_0 = e^A + \Phi_0, \; B_{j+1} = B_j^2 + \Phi_{j+1}. \tag{3.1}$$

На матрицы Φ_j накладываются условия

$$\|\Phi_0\| \leqslant r, \; \|\Phi_j\| \leqslant \delta \|B_{j-1}\|^2, \tag{3.2}$$

где

$$r = \frac{r_0}{4\varkappa(A)}, \; \delta = \frac{r_0}{2\varkappa^2(A)}. \tag{3.3}$$

Предположим, что для всех $k \leqslant m$ и при любых p, $q \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\left\| e^{pA} \left(B_m - e^{2^m A}\right) e^{qA} \right\| \leqslant c_m e^{-(2^m + p + q)\frac{\|A\|}{\varkappa(A)}}. \tag{3.4}$$

Если взять

$$c_0 = r\varkappa, \tag{3.5}$$

то, используя неравенство $(t > 0)$

$$\| e^{tA} \| \leqslant \sqrt{\varkappa(A)}\, e^{-t\frac{\|A\|}{\varkappa(A)}}, \tag{3.6}$$

выведенное в [22], можно из (3.1), (3.2) и условия $\|A\| = 0.5$ получить цепочку неравенств:

$$\| e^{pA} (B_0 - e^A) e^{qA} \| = \| e^{pA} \Phi_0 e^{qA} \| \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa(A)\, e^{-(p+q)\frac{\|A\|}{\varkappa(A)}} \| \Phi_0 \| \leqslant 2r e^{-\frac{1}{2\varkappa(A)}} \varkappa(A)\, e^{-(p+q)\frac{\|A\|}{\varkappa(A)}} \leqslant$$
$$\leqslant 2r\varkappa(A) \exp\{-(1 + p + q)\|A\|/\varkappa(A)\},$$

из которой следует справедливость предположения (3.4) при $m = 0$, $c_0 = 2r\varkappa(A)$.

Далее, в силу (4.1) при любых $p,\ q>0$ верно равенство

$$e^{pA}\left(B_{m+1}-e^{2^{m+1}A}\right)e^{qA}=e^{pA}\Phi_{m+1}e^{qA}+e^{pA}\left(B_m-e^{2^mA}\right)^2e^{qA}-$$
$$-e^{pA}e^{2^mA}\left(B_m-e^{2^mA}\right)e^{qA}-e^{pA}\left(B_m-e^{2^mA}\right)e^{2^mA}e^{qA},$$

и, значит, опираясь на предположение (3.4), можем записать, что

$$\left\|e^{pA}\left(B_{m+1}-e^{2^{m+1}A}\right)e^{qA}\right\|\leqslant\left(c_m^2+c_m\right)\exp\left\{-\left(2^{m+1}+p+q\right)\frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\}+$$
$$+\delta\varkappa(A)e^{-(p+q)\frac{\|A\|}{\varkappa(A)}}\left\|B_m-e^{2^mA}+e^{2^mA}\right\|^2\leqslant$$
$$\leqslant\left[c_m^2+2c_m+\delta\varkappa(A)\left(c_m+\sqrt{\varkappa(A)}\right)^2\right]\exp\left\{-\left(2^{m+1}+p+q\right)\frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\}.$$

Следовательно, для некоторого c_{m+1}

$$c_{m+1}\leqslant c_m^2+2c_m+\delta\varkappa(A)\left(c_m+\sqrt{\varkappa(A)}\right)^2 \tag{3.7}$$

при любых $p,\ q>0$ верна оценка

$$\left\|e^{pA}\left[B_{m+1}-e^{2^{m+1}A}\right]e^{qA}\right\|\leqslant c_{m+1}\exp\left\{-\left(2^{m+1}+p+q\right)\frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\}.$$

Из (3.7) следует, что

$$1+c_{m+1}\leqslant(1+c_m)^2(1+\delta\varkappa^2(A))$$

и, так как $c_0=2r\varkappa(A)$, получаем, что

$$1+c_m\leqslant(1+\delta\varkappa^2(A))^{2^m-1}(1+2r\varkappa(A))^{2^m},$$

т. е.

$$c_m\leqslant(1+\delta\varkappa^2(A))^{2^m-1}(1+2r\varkappa(A))^{2^m}-1$$

и, значит,

$$c_m\leqslant 2^m(\delta\varkappa^2(A)+2r\varkappa(A))/(1-2^m(\delta\varkappa^2(A)+2r\varkappa(A))). \tag{3.8}$$

Итак, нами доказана теорема.

Теорема 1. *Пусть $\varkappa=\varkappa(A)<\infty$, где A — некоторая матрица, и пусть квадратные матрицы Φ_j $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ k_0)$ той же размерности $N\times N$ удовлетворяют неравенствам*

$$\|\Phi_j\|\leqslant\frac{r_0}{2\varkappa^2}\|B_{j-1}\|^2,\quad\|\Phi_0\|\leqslant\frac{r_0}{4\varkappa} \tag{3.9}$$

с достаточно малой постоянной r_0, где k_0 — максимальное среди всех m, для которых справедливо неравенство

$$1-2^mr_0<\rho,\quad\rho<1. \tag{3.10}$$

Если матрицы $B_0,\ B_1,\ \ldots,\ B_{k_0}$ определены рекуррентными соотношениями $(j\geqslant1)$

$$B_0=e^A+\Phi_0,\quad B_j=B_{j-1}^2+\Phi_j, \tag{3.11}$$

то имеет место следующая оценка $(m\leqslant k_0)$:

$$\left\|e^{2^mA}-B_m\right\|\leqslant\frac{2^mr_0}{1-2^mr_0}e^{-2^m\frac{\|A\|}{\varkappa}}. \tag{3.12}$$

Замечание к теореме 1. Пусть $G(G^2=G,\ AG=GA)$ — проектор на инвариантное подпространство $\mathscr{L}_+(A)$ матрицы A, тогда, находясь в условиях теоремы 1 и изменив определяющую формулу для B_0

$$B_0=e^AG+\Phi_0,$$

можно утверждать, что справедлива оценка $(s_1,\ s_2=0,\ 1)$

$$\left\|G^{*s_1}\left[e^{2^mA}G-B_m\right]G^{s_2}\right\|\leqslant\frac{2^mr_0}{1-2^mr_0}\exp\left\{-\frac{2^m\|A\|}{\varkappa(A)}\right\}.$$

Доказательство этого утверждения повторяет доказательство теоремы 1, если только выполнена оценка

$$\|e^{tA}G\| \leqslant \sqrt{\varkappa(A)}\exp\{-t\|A\|/\varkappa(A)\},\ t>0,$$

и вместо неравенства (3.4), справедливого при любом выборе $p,\ q>0$, необходимо потребовать выполнение неравенства

$$\left\|e^{pA}G\left(B_m - e^{2^m A}G\right)e^{qA}G\right\| \leqslant c_m \exp\left\{-\left(2^m+p+q\right)\frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\}.$$

Как следствие из доказанной теоремы введем утверждение: если $m_1, m_2, \ldots, m_i < k_0$, то верна оценка

$$\left\|\prod_{j=1}^{i} B_{m_j} - \exp\left\{\sum_{j=1}^{i} 2^{m_j}A\right\}\right\| \leqslant \frac{\sum\limits_{j=1}^{i} 2^{m_j}r_0}{1-\sum\limits_{j=1}^{i} 2^{m_j}r_0}\exp\left\{-\frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\sum_{j=1}^{i} 2^{m_j}\right\}. \quad (3.13)$$

Для доказательства этого неравенства достаточно показать, что если $m,\ l<k_0$, то

$$\left\|B_mB_l - e^{(2^m+2^l)A}\right\| \leqslant \frac{(2^m+2^l)\,r_0}{1-(2^m+2^l)\,r_0}\exp\left\{-\left(2^m+2^l\right)\frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\}. \quad (3.14)$$

Прежде всего заметим, что так как при всех $p,\ q \geqslant 0$ справедливы оценки ($k=m,\ l$)

$$\left\|e^{pA}\left[B_k - e^{2^kA}\right]e^{qA}\right\| \leqslant c_k \exp\left\{-\left(p+q+2^k\right)\frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\},$$

то из тождества

$$B_mB_l - \exp\left\{\left(2^m+2^l\right)A\right\} = \left(B_m - e^{2^mA}\right)\left(B_l - e^{2^lA}\right) + \left(B_m - e^{2^mA}\right)e^{2^lA} + e^{2^mA}\left(B_l - e^{2^lA}\right)$$

вытекает неравенство

$$\left\|B_mB_l - \exp\left\{\left(2^m+2^l\right)A\right\}\right\| \leqslant \left(c_m + c_l + c_mc_l\right)\exp\left\{-\left(2^m+2^l\right)\frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\right\}. \quad (3.15)$$

Далее, так как

$$c_m = \frac{2^m r_0}{1-2^m r_0}, \qquad c_l = \frac{2^l r_0}{1-2^l r_0},$$

то верна цепочка очевидных неравенств:

$$c_m + c_l + c_mc_l = (1+c_m)(1+c_l) - 1 = (1-2^mr_0)^{-1}(1-2^lr_0)^{-1} - 1 \leqslant (2^m+2^l)r_0/[1-(2^m+2^l)r_0],$$

что вместе с (3.15) и позволяет утверждать справедливость (3.14), а следовательно, и (3.13). Аналогично замечанию к теореме 1 можно сделать замечание к следствию теоремы 1, т. е. можно утверждать в условиях замечания и следствия к теореме 1, что если $m_1, m_2, \ldots, m_i < k_0$, то верна оценка ($s_1, s_2 = 0, 1$)

$$\left\|G^{*s_1}\left[\prod_{j=1}^{i} B_{m_j} - \exp\left\{\sum_{j=1}^{i} 2^{m_j}A\right\}G\right]G^{s_2}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sum\limits_{j=1}^{i} 2^{m_j}r_0}{1-\sum\limits_{j=1}^{i} 2^{m_j}r_0}\exp\left\{-\frac{\|A\|}{\varkappa(A)}\sum_{j=1}^{i} 2^{m_j}\right\}.$$

Глава 3

ВЫДЕЛЕНИЕ ПРОЕКТОРОВ ДЛЯ МАТРИЦЫ С ХОРОШЕЙ ДИХОТОМИЕЙ СПЕКТРА

Введение

В работе [20] предложено использовать числовую характеристику матрицы A

$$\varkappa(A) = 2\|A\|\,\|H\|,$$

где
$$H = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(A^* + izI)^{-1}(A - izI)^{-1}dz,$$

в качестве критерия качества экспоненциальной дихотомии спектра матрицы A мнимой осью. Величина $\varkappa(A)$ полагается равной ∞, если у A есть собственные значения на мнимой оси.

Выделим в классе экспоненциально дихотомичных матриц множество «практически» экспоненциально дихотомичных, а именно такое множество, что для всех матриц, принадлежащих ему, верна оценка $\varkappa(A) < \varkappa^*$, где $\varkappa^*$ (большое число) — уровень «практической» дихотомии. В этой главе покажем, что, задавшись величиной $\varkappa^*$ и взяв δ, $\delta \ll 1$, можно указать, насколько точно необходимо выполнять элементарные вычислительные операции с матрицами, чтобы с гарантированной точностью найти проекторы $G(+0, A)$, $G(-0, A)$ на максимальные инвариантные подпространства A, отвечающие соответственно частям спектра A, расположенным строго в левой и в правой полуплоскостях. Таким образом, опишем схему алгоритма, результатом которого в случае «практической» дихотомии матрицы A будут матрицы $\tilde{G}_+$ и $\tilde{G}_-$ с оценками

$$\|G(+0, A) - \tilde{G}_+\| \leqslant \delta, \quad \|G(-0, A) - \tilde{G}_-\| \leqslant \delta,$$
$$\|A\tilde{G}_+ - \tilde{G}_+A\| \leqslant 2\|A\|\,\delta, \quad \|\tilde{G}_+^2 - \tilde{G}_+\| \leqslant 2\sqrt{\varkappa_+}\,\delta.$$

Одним из основных этапов предлагаемой схемы является прямой ход ортогональной прогонки для решения некоторой краевой задачи, учету влияния ошибок округления уделяется специальное внимание. При этом можно указать число шагов k_0 прямого хода ортогональной прогонки, проделав которые, получим необходимые приближения к проекторам $G(+0, A)$ и $G(-0, A)$, либо гарантировать выполнение неравенства $\varkappa(A) > \varkappa^*$.

Кроме этого расчетные формулы прямого хода ортогональной прогонки совпадают с расчетными формулами известного ортогонально-степенного метода (см. [11, 12]). Сама ортогональная прогонка предложена в [32, 35], причем в [33] уже приведено доказательство ее устойчивости относительно погрешности данных и вычислительных ошибок округления. В работе [36] исследована ортогональная прогонка в более общем, чем здесь, случае, а именно: для решения на интервале от $\bar{x}_0$ до $\bar{x}$ краевой задачи

$$\frac{du}{dx} = A(x)u(x) + f(x),$$
$$Bu(\bar{x}_0) = \varphi, \quad Cu(\bar{x}) = \psi.$$

Хотя в достаточно общих случаях анализ влияния ошибок округления, возникающих при решении краевой задачи, уже проведен, повторим его для получения более точных оценок в нашем частном случае и чтобы подчеркнуть тот факт, что погрешности округления, возникающие в ортогонально-степенном методе, можно моделировать как погрешности задания коэффициентов некоторой краевой задачи.

§ 1. Параметр дихотомии матричного спектра и проекторы на инвариантные подпространства

Если у матрицы A нет собственных значений на мнимой оси, то имеет смысл интеграл

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (A^* + izI)^{-1}(A - izI)^{-1}\,dz$$

и совершенно естественно выбрать в качестве меры экспоненциальной дихотомии матрицы A величину $\varkappa(A) = 2\|A\|\,\|H\|$. Введенный в работе С. К. Годунова [20] параметр качества экспоненциальной дихотомии $\varkappa(A)$ допускает именно такое толкование. Определение $\varkappa(A)$ связано с тем фактом, что если у A нет собственных значений на мнимой оси, то существует единственная, ограниченная на всей прямой $-\infty < t < \infty$ матрица Грина $G(t, A)$, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d}{dt} G(t, A) = AG(t, A) + \delta(t) I,$$

для которой сходится интеграл

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} G^*(t, A)\, G(t, A)\, dt.$$

В этом случае полагалось $\varkappa(A) = 2\|A\|\,\|H\|$. При наличии чисто мнимых точек спектра матрицы A положено $\varkappa(A) = \infty$. Для гурвицевых матриц, у которых спектр лежит полностью в левой полуплоскости, параметр экспоненциальной дихотомии $\varkappa(A)$ совпадает с параметром качества устойчивости, рассмотренным в гл. 1. В ней же доказана оценка

$$\|G(t, A)\| \leqslant \sqrt{\varkappa(A)}\, e^{-\frac{|t|\|A\|}{\varkappa(A)}}, \quad -\infty < t < \infty. \tag{1.1}$$

Матрицы $G(+0, A)$ и $G(-0, A)$ являются проекторами на максимальные инвариантные подпространства размерностей $N_+(A)$ и $N_-(A)$, отвечающие соответственно собственным значениям A с отрицательной ($\mathscr{L}_+(A)$) и положительной вещественной частью ($\mathscr{L}_-(A)$). Приведем схему вычисления $G(+0, A)$, $G(-0, A)$, $N_+(A)$, $N_-(A)$, подробно рассмотренную в [20, 37]. Схема расчета основана на том, что вместо $G(\xi, A)$ рассматриваются приближения $G_T(\xi)$, где $G_T(\xi)$ — матричная функция, удовлетворяющая краевой задаче на конечном интервале $[-T, T]$ длины $2T$

$$\frac{d}{d\xi} G_T(\xi) = AG_T(\xi) + \delta(\xi) I,$$

$$G_T(-T) = G_T(T)$$

и допускающая представление

$$G_T(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(\xi + 2kT). \tag{1.2}$$

Из (1.2) с помощью (1.1) выводим, что при конечном $\varkappa(A)$

$$\lim_{T\to\infty} G_T(\xi) = G(\xi).$$

Точнее,

$$\|G_T(\xi) - G(\xi)\| \leqslant \varepsilon(T, \varkappa(A)),$$

$$\varepsilon(T, \varkappa(A)) = \frac{2\sqrt{\varkappa(A)}\exp\{-T\|A\|/\varkappa(A)\}}{1 - \exp\{-T\|A\|/\varkappa(A)\}}. \tag{1.3}$$

Из этой оценки видно, что, зная величину $\varkappa(A)$ и выбрав $T = T(\varkappa(A), \delta)$, можно вычислить матричную функцию $G_T(\xi)$ как решение краевой задачи, которая приближает $G(\xi)$ с заранее заданной точностью δ $(\varepsilon(T, \varkappa(A))<\delta)$.

Удобно вместо $G_T(\xi)$ рассматривать матричные функции $\widehat{X}_T(\xi)$, $\widehat{Y}_T(\xi)$, являющиеся при $0\leqslant\xi\leqslant T$ решением краевой задачи

$$\frac{d}{d\xi}\begin{bmatrix}\widehat{X}_T(\xi)\\ \widehat{Y}_T(\xi)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & -A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widehat{X}_T(\xi)\\ \widehat{Y}_T(\xi)\end{bmatrix},$$

$$\widehat{Y}_T(0)-\widehat{X}_T(0)=0,\ \widehat{Y}_T(T)-\widehat{X}_T(T)=I, \tag{1.4}$$

через которые $G_T(\xi)$ определяется формулой

$$G_T(\xi)=\begin{cases}\widehat{Y}_T(T-\xi), & T\geqslant\xi>0,\\ \widehat{X}_T(T+\xi), & -T\leqslant\xi<0.\end{cases} \tag{1.5}$$

Приведем схему расчета $G_T(+0)$, $G_T(-0)$, основанную на методе ортогональной прогонки (см. [11, 12]) и являющуюся модификацией известного ортогонально-степенного метода для матриц удвоенного порядка

$$\begin{pmatrix}e^{\tau A} & 0\\ 0 & e^{-\tau A}\end{pmatrix}.$$

Схема алгоритма вычисления $G(+0, A)$, $G(-0, A)$ с точностью δ:

1. Для некоторого $\tau>0$ вычисляются матрицы $e^{\pm\tau A}$.

2. Положив $Q_0=P_0=\frac{1}{\sqrt{2}}I$, определим по рекуррентным формулам матрицы Q_i, P_i, R_i $(i\geqslant 1)$, R_i — верхнетреугольная:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix}e^{\tau A} & Q_{i-1}\\ e^{-\tau A} & P_{i-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_i\\ P_i\end{pmatrix}R_i,\\ Q_i^*Q_i+P_i^*P_i=I.\end{gathered} \tag{1.6}$$

Процесс ведется до тех пор, пока не будут вычислены матрицы Q_{n_0}, P_{n_0}, где n_0 — минимальное целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\varepsilon(n_0\tau, \varkappa(A))<\delta.$$

В заключение вычисляем матрицы $S_{n_0}=(P_{n_0}-Q_{n_0})$, $S_{n_0}^{-1}$ и окончательно получаем

$$G_{n\tau}(+0)=\widehat{X}_{n\tau}(n\tau)=Q_{n_0}S_{n_0}^{-1},\quad G_{n\tau}(-0)=\widehat{Y}_{n\tau}(n\tau)=P_{n_0}S_{n_0}^{-1},$$

$$\|G_{n\tau}(\pm 0)-G(\pm 0, A)\|\leqslant\delta.$$

Во-первых, никаких осложнений с вычислением $S_{n_0}^{-1}$ при конечном $\varkappa(A)$ не возникает, так как в [20] показано, что

$$\|S_{n_0}\|\leqslant 2\sqrt{\varkappa(A)}+2\varepsilon(n_0\tau, \varkappa(A)),\quad \|S_{n_0}^{-1}\|\leqslant 2.$$

Во-вторых, если известно точное значение $\varkappa(A)$ $(\varkappa(A)<\varkappa^*)$, то величина n_0 в указанной схеме выбирается из условия выполнения неравенства

$$\varepsilon(n_0\tau, \varkappa^*)<\delta.$$

В-третьих, из (1.6) следует, что при любой $N\times N$ матрице S матричные функции $\widehat{X}_T(\xi)$, $\widehat{Y}_T(\xi)$, вычисленные с помощью формулы

$$\begin{pmatrix}\widehat{X}_T(\xi)\\ \widehat{Y}_T(\xi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{(\xi-n\tau)A} & Q_n\\ e^{-(\xi-n\tau)A} & P_n\end{pmatrix}S,$$

удовлетворяют при $\xi=0$ условиям $\widehat{X}_T(0)-\widehat{Y}_T(0)=0$. Это и позволило, выбрав $S_{n_0}=(P_{n_0}-Q_{n_0})^{-1}$, обеспечить выполнение равенства $\widehat{X}_{n_0\tau}(n_0\tau)-\widehat{Y}_{n_0\tau}(n_0\tau)=I$.

В следующем параграфе сделаем некоторые предположения, касающиеся реализации на ЭВМ матричных вычислений. Это позволит в § 3 дать более детальную схему расчета матриц $G(+0, A)$, $G(-0, A)$, учитывающую влияние погрешностей округления на процесс расчета.

§ 2. Некоторые предположения, касающиеся машинной реализации матричных вычислений

Так как вычисления на ЭВМ в основном выполняются не точно, то будем обозначать через $(X)_{\text{выч}}$ вычисленное приближение к матрице X.

Предположим, что

1) для любых квадратных $N\times N$ машинно заданных матриц X, Y выполнена оценка

$$\|(XY)_{\text{выч}} - XY\| \leqslant r_2\|XY\|, \tag{2.1}$$

где r_2 — малое положительное число;

2) параметры r_1, r_3 характеризуют точность ортогонализации $2N\times N$ матрицы $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ (z_1, z_2 — квадратные $N\times N$ матрицы), т. е. точность получения $N\times N$ матриц Q, P, R таких, что R — верхнетреугольная и выполнено условие

$$\|P^*P + Q^*Q - I\| \leqslant r_1, \tag{2.2}$$

для которого справедливо неравенство

$$\left\|\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} R\right\| \leqslant r_3. \tag{2.3}$$

Пусть ε_1 — машинная постоянная, такая что $\varepsilon_1 > 0$ и между числами 1 и $1+\varepsilon_1$ нет других машинных чисел. Используя эту постоянную, можно указать для некоторых алгоритмов вычисления произведения матриц и ортогонализации системы векторов конкретные значения параметров r_1, r_2, r_3, найденные, например, в [1, 36]. Ясно, что, применяя прецизионные алгоритмы вычисления указанных задач, можно обеспечить для параметров r_1, r_2, r_3 какие угодно малые значения, поэтому мы не даем конкретного выражения для них.

Предположим далее, что можно вычислять приближения к матрицам $e^{\tau A}$, $e^{-\tau A}$ для квадратных $N\times N$ матриц A и некоторых τ, превосходящих $1/(2\|A\|)$, так что гарантировано выполнение неравенств

$$\|(e^{\pm\tau A})_{\text{выч}} - e^{\pm\tau A}\| \leqslant \rho, \tag{2.4}$$

$$\max_{-\tau\leqslant t\leqslant\tau} \|e^{tA}\| < \theta, \tag{2.5}$$

где ρ — малое положительное число, а $\Theta > 1$. Ясно, что если взять $\tau = 1/(2\|A\|)$, то можно положить $\Theta = \sqrt{e}$, а в качестве ρ взять, например, в силу [24] величину $100N\varepsilon_1$.

Таким образом, всегда существуют ρ, τ, Θ, для которых сделанное предположение (2.4), (2.5) справедливо.

§ 3. Учет влияния погрешностей округления в схеме расчета $G(+0, A)$

В § 2 гл. 2 подробно рассмотрен с учетом влияния ошибок округления алгоритм вычисления величины τ ($\tau\|A\| \gg 1$) по наперед заданным числам ρ и Θ ($\rho \ll 1$, $\Theta \gg 1$) такой, что

$$\max_{-\tau\leqslant t\leqslant\tau} \|e^{tA}\| < 0$$

и для $(e^{\tau A})_{\text{выч}}$, $(e^{-\tau A})_{\text{выч}}$, вычисленных приближений к матрицам $e^{\tau A}$,

$e^{-\tau A}$, гарантировано выполнение оценок

$$\|(e^{\pm\tau A})_{\text{выч}} - e^{\pm\tau A}\| \leqslant \rho.$$

О том, как выбирать Θ и ρ, скажем несколько позже в данном параграфе. Итак, первый этап схемы расчета $G(+0, A)$ и $G(-0, A)$ с учетом влияния ошибок округления рассмотрен. Перейдем к следующему этапу.

Основным моментом на этом этапе является утверждение о том, что матрицы, полученные при реализации ортогонально-степенного метода, можно рассматривать как точные решения в некоторых точках краевой задачи с возмущенной матрицей коэффициентов. На данном факте основано доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть A — экспоненциально дихотомичная матрица с $\varkappa(A) < \varkappa^* < \infty$. Рассмотрим три последовательности $N \times N$ матриц $\overline{Q}_0, \overline{Q}_1, \ldots, \overline{Q}_n, \overline{P}_0, \overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_n, \overline{R}_0, \ldots, \overline{R}_n$ такие, что все $\overline{R}_i$ верхнеугольные.* Предположим, эти матрицы связаны соотношениями

$$\overline{Q}^*_{k+1}\overline{Q}_{k+1} + \overline{P}^*_{k+1}\overline{P}_{k+1} = I + H_{k+1},$$

$$\begin{pmatrix} Z^{(1)}_{k+1} \\ Z^{(2)}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e^{\tau A})_{\text{выч}}\overline{Q}_k \\ (e^{-\tau A})_{\text{выч}}\overline{P}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi'_{k+1} \\ \psi'_{k+1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} Z^{(1)}_{k+1} \\ Z^{(2)}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Q}_{k+1} \\ \overline{P}_{k+1} \end{pmatrix} \overline{R}_{k+1} + \begin{pmatrix} \varphi''_{k+1} \\ \psi''_{k+1} \end{pmatrix},$$

в которых $Z^{(1)}_{k+1}, Z^{(2)}_{k+1}$ — промежуточные матрицы, а $\varphi'_{k+1}, \psi'_{k+1}, \varphi''_{k+1}$ ψ''_{k+1}, H_{k+1} — матрицы, моделирующие ошибки округления. Пусть $(e^{\tau A})_{\text{выч}}$, $(e^{-\tau A})_{\text{выч}}$ — матрицы, приближающие $e^{\tau A}$, $e^{-\tau A}$. Будем считать, что для некоторых малых положительных чисел r_1, r_2, r_3, ρ и $\Theta \gg 1$, $\tau\|A\| > 1$ выполнены оценки

$$\|(e^{\pm\tau A})_{\text{выч}} - e^{\pm\tau A}\| \leqslant \rho, \quad \max_{0 \leqslant |t| \leqslant \tau} \|e^{tA}\| \leqslant \Theta,$$

$$\|H_{k+1}\| \leqslant r_1, \quad \|\varphi'_{k+1}\| \leqslant \|(e^{\tau A})_{\text{выч}}\| r_2, \quad \|\varphi''_{k+1}\| \leqslant r_3,$$

$$\|\psi'_{k+1}\| \leqslant \|(e^{-\tau A})_{\text{выч}}\| r_2, \quad \|\psi''_{k+1}\| \leqslant r_3.$$

Тогда если $\rho_1 < \dfrac{1}{16(\varkappa^*)^{3/2}}$, где

$$\rho_1 = \Theta(\rho + [2r_3 + 2r_2(\Theta + \rho)])\frac{1 + 0.5r_1}{1 - r_1},$$

то справедливы оценки

$$\|G(+0, A) - \overline{Q}_n(\overline{Q}_n - \overline{P}_n)^{-1}\| \leqslant \varepsilon(n\tau, \varkappa^*) + 32(\varkappa^*)^2\rho_1,$$

$$\|G(-0, A) - \overline{P}_n(\overline{Q}_n - \overline{P}_n)^{-1}\| \leqslant \varepsilon(n\tau, \varkappa^*) + 32(\varkappa^*)^2\rho_1,$$

где

$$\varepsilon(n\tau, \varkappa^*) = 2\sqrt{\varkappa^*}\exp\left\{-\frac{n\tau}{\|A\|}\right\}\left(1 - \exp\left\{\frac{-2n\tau\|A\|}{\varkappa(A)}\right\}\right)^{-1}.$$

Доказательству данной теоремы посвящен целиком § 5, при этом существенно используются вспомогательные леммы, собранные в § 4.

Таким образом, если $\varkappa(A) < \varkappa^*$, то для получения матриц $G(+0, A)$ и $G(-0, A)$ с точностью δ необходимо, во-первых, так выбрать величины $\Theta > 1$, $\rho < 1$, а также параметры r_1, r_2, r_3, характеризующие точность выполнения матричных операций, чтобы выполнялась оценка

$$32(\varkappa^*)\rho_1 < 0.25\delta.$$

Во-вторых, количество шагов n_0 в процессе (1.6) должно выбираться из условия выполнения неравенства

$$\varepsilon(n\tau, \varkappa^*) < 0.25\delta,$$

где τ определяется, как указано в начале этого параграфа, по значениям ρ и Θ. Тогда будут выполнены оценки

$$\begin{aligned} &\left\|G(+0, A)-\bar{Q}_{n_0}\left(\bar{Q}_{n_0}-\bar{P}_{n_0}\right)^{-1}\right\| \leqslant \delta/2, \\ &\left\|G(-0, A)-\bar{P}_{n_0}\left(\bar{Q}_{n_0}-\bar{P}_{n_0}\right)^{-1}\right\| \leqslant \delta/2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Покажем, что если $\varkappa(A)<\varkappa^*$, то матрица

$$\bar{S}_{n_0}=\left(\bar{Q}_{n_0}-\bar{P}_{n_0}\right)^{-1}$$

хорошо обусловлена. В самом деле, так как

$$\left\|\bar{Q}_{n_0}^* \bar{Q}_{n_0}+P_{n_0}^* \bar{P}_{n_0}\right\|=\left\|I+H_{n_0}\right\| \leqslant 1+r_1,$$

то

$$\left\|\bar{Q}_{n_0}\right\| \leqslant \sqrt{1+r_1}, \quad \left\|\bar{P}_{n_0}\right\| \leqslant \sqrt{1+r_1}$$

и, значит,

$$\left\|\bar{S}_{n_0}^{-1}\right\|=\left\|\bar{Q}_{n_0}-\bar{P}_{n_0}\right\| \leqslant\left\|\bar{Q}_{n_0}\right\|+\left\|P_{n_0}\right\| \leqslant 2 \sqrt{1+r_1},$$

т. е. при $r_1 \ll 1/2$

$$\left\|\bar{S}_{n_0}^{-1}\right\| \leqslant 1.1. \tag{3.2}$$

С другой стороны, поскольку

$$\begin{gathered} \bar{S}_{n_0}=\left[\bar{Q}_{n_0}^* \bar{Q}_{n_0}+\bar{P}_{n_0}^* \bar{P}_{n_0}-H_{n_0}\right] \bar{S}_{n_0}=\bar{Q}_{n_0}^* \bar{Q}_{n_0} \bar{S}_{n_0}+\bar{P}_{n_0}^* \bar{P}_{n_0} \bar{S}_{n_0}- \\ -H_{n_0} \bar{S}_{n_0}=\bar{Q}_{n_0}^* \bar{Q}_{n_0}\left(\bar{Q}_{n_0}-\bar{P}_{n_0}\right)^{-1}+\bar{P}_{n_0}^* \bar{P}_{n_0}\left(\bar{Q}_{n_0}-\bar{P}_{n_0}\right)^{-1}-H_{n_0} \bar{S}_{n_0}= \\ =\bar{Q}_{n_0}^* G(+0, A)+\bar{P}_{n_0}^* G(-0, A)-H_{n_0} \bar{S}_{n_0}+ \\ +\bar{Q}_{n_0}^*\left[\bar{Q}_{n_0}\left(\bar{Q}_{n_0}-\bar{P}_{n_0}\right)^{-1}-G(+0, A)\right]+\bar{P}_{n_0}^*\left[\bar{P}_{n_0}\left(\bar{Q}_{n_0}-\bar{P}_{n_0}\right)-G(-0, A)\right], \end{gathered}$$

то, используя оценки $\|G(\pm 0, A)\| \leqslant \sqrt{\varkappa(A)}$, $\left\|\bar{Q}_{n_0}\right\| \leqslant \sqrt{1+r_1}$, $\left\|\bar{P}_{n_0}\right\| \leqslant \sqrt{1+r_1}$, $\left\|\bar{H}_{n_0}\right\| \leqslant r_1$ и (3.1), можно утверждать, что

$$\left\|\bar{S}_{n_0}\right\| \leqslant 2 \sqrt{1+r_1} \sqrt{\varkappa(A)}+r_1\left\|\bar{S}_{n_0}\right\|+2 \frac{\delta}{2} \sqrt{1+r_1},$$

т. е.

$$\left\|\bar{S}_{n_0}\right\| \leqslant \frac{2 \sqrt{1+r_1}}{1-r_1}\left(\sqrt{\varkappa(A)}+\frac{\delta}{2}\right).$$

Полученную оценку, опираясь на неравенство $r_1 \ll 0.5$, огрубим так:

$$\left\|\bar{S}_{n_0}\right\| \leqslant 3\left(\sqrt{\varkappa(A)}+\delta 0.5\right). \tag{3.3}$$

Из (3.2), (3.3) следует, что $\mu\left(\bar{S}_{n_0}\right)$ — обусловленность $\bar{S}_{n_0}$ оценивается как

$$\mu\left(\bar{S}_{n_0}\right) \leqslant 3.3\left(\sqrt{\varkappa(A)}+0.5 \delta\right). \tag{3.4}$$

И значит, если в процессе решения $\mu\left(\bar{S}_{n_0}\right)>3.3 \sqrt{\varkappa^*}+0.5 \delta$, то из (3.4) следует, что $\varkappa(A)>\varkappa^*$.

Предположим теперь, что, зная, что $\mu\left(\bar{S}_{n_0}\right)<3.3 \sqrt{\varkappa^*}+0.5 \delta$, мы вычисляем $\bar{Q}_{n_0} \bar{S}_{n_0}^{-1}$ и $\bar{P}_{n_0} \bar{S}_{n_0}^{-1}$ с точностью 0.5δ. Данное предположение не обременительно, поскольку, зная обусловленность матрицы A, можно, используя прецизионные алгоритмы векторных операций на ЭВМ, организовать процесс вычисления решения системы $Ax=f$ или, что то же самое, системы $xA=f$, где x и f — строки размера N [1].

В этом случае если обозначить

$$\tilde{G}_{n_0}^{(+)}=\left(\bar{Q}_{n_0} \bar{S}_{n_0}^{-1}\right)_{\text{выч}}, \quad \tilde{G}_{n_0}^{(-)}=\left(\bar{P}_{n_0} \bar{S}_{n_0}^{-1}\right)_{\text{выч}},$$

то верны оценки

$$\left\|\widetilde{G}_{n_0}^{(-)}-G(-0,A)\right\|\leqslant\delta,\quad \left\|\widetilde{G}_{n_0}^{(+)}-G(+0,A)\right\|<\delta.$$

Далее, так как $AG(\pm0,\ A)=G(+0,\ A)A$, $G^2(-0,\ A)=-G(-0,\ A)$, $G^2(+0,A)=G(+0,A)$ и $\|G(\pm0,A)\|\leqslant\sqrt{\varkappa(A)}$, из данных оценок следует, что

$$\left\|A\widetilde{G}_{n_0}^{(\pm)}-\widetilde{G}_{n_0}^{(\pm)}A\right\|\leqslant2\|A\|\delta,$$
$$\left\|\left(\widetilde{G}_{n_0}^{(+)}\right)^2-\widetilde{G}_{n_0}^{(+)}\right\|\leqslant2\sqrt{\varkappa(A)}\,\delta,$$
$$\left\|\left(\widetilde{G}_{n_0}^{(-)}\right)^2+\widetilde{G}_{n_0}^{(-)}\right\|\leqslant2\sqrt{\varkappa(A)}\,\delta.$$

§ 4. Вспомогательные леммы

Докажем две леммы.

Лемма 1. *Если для матриц Y, $e^{\tau A}$, $\tau>0$, одинаковой размерности выполнены неравенства*

$$\|e^{-tA}\|\,\|Y-e^{\tau A}\|<0.5,\quad 0\leqslant t\leqslant\tau, \tag{4.1}$$

то матричная функция

$$X(t)=e^{tA}+\frac{t}{\tau}\left[Y-e^{\tau A}\right] \tag{4.2}$$

является решением краевой задачи (4.3) *на интервале* $(0,\ \tau)$

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}X(t)=[A+B(t)]\,X(t),\\ X(0)=I,\ X(\tau)=Y,\end{gathered} \tag{4.3}$$

причем для матрицы $B(t)$ выполнена оценка $(0\leqslant t\leqslant\tau)$

$$\|B(t)\|\leqslant2\left(\frac{1}{\tau}+\|A\|\right)\|e^{-tA}\|\,\|Y-e^{\tau A}\|. \tag{4.4}$$

Переходя к доказательству, заметим, что так как $0\leqslant t\leqslant\tau$, то в силу предположения (4.1) верна оценка

$$\left\|\frac{t}{\tau}\,e^{-tA}\left[e^{\tau A}-Y\right]\right\|<0.5,$$

которая обеспечивает равномерную сходимость ряда

$$\left(I-\frac{t}{\tau}\,e^{-tA}\left(e^{\tau A}-Y\right)\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\tau}\,e^{-tA}\left(e^{\tau A}-Y\right)^k\right).$$

Это доказывает обратимость матричной функции $X(t)$, заданной формулой (4.3), на интервале $(0,\ \tau)$, причем верна цепочка неравенств:

$$\begin{gathered}\|X^{-1}(t)\|=\left\|\left(I-\frac{t}{\tau}\,e^{-tA}\left(e^{\tau A}-Y\right)\right)^{-1}e^{-tA}\right\|\leqslant\\ \leqslant\left\|\left(\left(I-\frac{t}{\tau}\,e^{-tA}\left(e^{\tau A}-Y\right)\right)^{-1}\right)\right\|\cdot\|e^{-tA}\|\leqslant\\ \leqslant\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\tau}\,e^{-tA}\left(e^{\tau A}-Y\right)\right)^k\right\|\cdot\|e^{-tA}\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left\|\left(\frac{t}{\tau}\right)e^{-tA}\left(e^{\tau A}-Y\right)\right\|^k\|e^{-tA}\|\leqslant\\ \leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left(\|e^{-tA}\|\,\|e^{\tau A}-Y\|\right)^k\|e^{-tA}\|\leqslant2\|e^{-tA}\|,\end{gathered}$$

результатом которой является оценка

$$\|X^{-1}(t)\|\leqslant2\|e^{-tA}\|,\quad 0\leqslant t\leqslant\tau. \tag{4.5}$$

Итак, убедившись в обратимости матрицы $X(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ в условиях леммы, можно продифференцировать $X(t)$ по t и убедиться, что верна цепочка равенств:

$$\frac{d}{dt} X(t) = Ae^{tA} + \frac{1}{\tau}[Y - e^{\tau A}] = A\left[e^{tA} + \frac{t}{\tau}(Y - e^{\tau A})\right] -$$

$$- A\frac{t}{\tau}(Y - e^{\tau A}) + \frac{1}{\tau}(Y - e^{\tau A}) = A\left[e^{tA} + \frac{t}{\tau}(Y - e^{\tau A})\right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{\tau}(I - tA)(Y - e^{\tau A})\right] = \left[A + \frac{1}{\tau}(I - tA)(Y - e^{\tau A})X^{-1}(t)\right]X(t),$$

т. е. верно равенство

$$\frac{d}{dt} X(t) = [A + B(t)]\, X(t), \tag{4.6}$$

где

$$B(t) = \frac{1}{\tau}(I - tA)(Y - e^{\tau A})\, X^{-1}(t). \tag{4.7}$$

Из определения (4.2) следуют равенства $X(0) = I$, $X(\tau) = Y$, что вместе с (4.6), (4.7) говорит о том, что $X(t)$ на интервале $(0, \tau)$ является решением краевой задачи (4.3), (4.7).

В силу цепочки неравенств:

$$\left\|\frac{1}{\tau}(I - tA)\right\| \leqslant \frac{1}{\tau} + \frac{t}{\tau}\|A\| \leqslant \frac{1}{\tau} + \|A\|$$

и неравенства (4.5) следует справедливость оценки (4.4). Таким образом, лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть для квадратных $N \times N$ матриц P и Q выполнено равенство $Q^*Q + P^*P = I + \Delta$, где $\|\Delta\| < 1$. Если φ, ψ — произвольные матрицы той же размерности, то для матрицы*

$$T = T(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix}\varphi \\ \psi\end{pmatrix}(I + \Delta)^{-1}(Q^*, P^*),$$

переводящей матрицу $\begin{pmatrix}Q \\ P\end{pmatrix}$ в $\begin{pmatrix}\varphi \\ \psi\end{pmatrix}$ $\left(\begin{pmatrix}\varphi \\ \psi\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}Q \\ P\end{pmatrix}\right)$, *имеет место оценка*

$$\|T\| \leqslant (\|\varphi\| + \|\psi\|)\,(1 + 0.5\|\Delta\|)/(1 - \|\Delta\|). \tag{4.8}$$

В самом деле, нетрудно проверить справедливость следующих цепочек неравенств:

$$\|(Q^*, P^*)\| = \left\|(Q^*, P^*)\begin{pmatrix}Q \\ P\end{pmatrix}\right\|^{1/2} = \|Q^*Q + P^*P\|^{1/2} =$$

$$= \|I + \Delta\|^{1/2} \leqslant (1 + \|\Delta\|)^{1/2} \leqslant 1 + \|\Delta\|/2;$$

$$\|(I + \Delta)^{-1}\| = \sigma_1^{-1}(I + \Delta) \leqslant (1 - \|\Delta\|)^{-1};$$

$$\left\|\begin{pmatrix}\varphi \\ \psi\end{pmatrix}\right\| \leqslant \|\varphi\| + \|\psi\|,$$

которые в силу неравенства

$$\|T\| \leqslant \|(Q^*, P^*)\|\,\|(I + \Delta)^{-1}\|\,\left\|\begin{pmatrix}\varphi \\ \psi\end{pmatrix}\right\|,$$

следующего из (4.7), обеспечивают выполнение оценки (4.8). Лемма 2 доказана.

§ 5. Доказательство основной теоремы

Докажем теорему 1, сформулированную в § 3. Для доказательства нам потребуется теорема 2 гл. 1. *Пусть A — экспоненциально дихотомичная матрица* $(\varkappa(A)<\infty)$ *и заданы две краевые задачи на интервале* $0\leqslant t\leqslant T$:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}X(t)\\ Y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & -A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X(t)\\ Y(t)\end{pmatrix},$$

$$Y(T)-X(T)=I,\ X(0)-Y(0)=0$$

и

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\widetilde{X}(t)\\ \widetilde{Y}(t)\end{pmatrix}=[\mathscr{A}+\mathscr{B}(t)]\begin{pmatrix}\widetilde{X}(t)\\ \widetilde{Y}(t)\end{pmatrix},\quad \mathscr{A}=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & -A\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{X}(0)-\widetilde{Y}(0)=0,\ \widetilde{Y}(T)-\widetilde{X}(T)=I.$$

Тогда если

$$\|\mathscr{B}(t)\|\leqslant\rho\|A\|,\quad 0<\rho<\frac{1}{4\varkappa^{3/2}(A)},$$

то справедлива оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left\|\begin{pmatrix}\widetilde{X}(t)-X(t)\\ \widetilde{Y}(t)-Y(t)\end{pmatrix}\right\|\leqslant 8\varkappa^2(A)\,\rho.$$

Переходя к доказательству теоремы 1 (см. § 3), обозначим

$$\varphi_{k+1}=\varphi'_{k+1}+\varphi''_{k+1},\quad \psi_{k+1}=\psi'_{k+1}+\psi''_{k+1}.$$

Из условия теоремы следует, что

$$\|\varphi_{k+1}\|\leqslant\|(e^{\tau A})_{\text{выч}}\|r_2+r_3,\ \|\psi_{k+1}\|\leqslant\|(e^{-\tau A})_{\text{выч}}\|r_2+r_3. \tag{5.1}$$

Покажем, что в условиях теоремы 1, используя последовательности $\overline{Q}_k$, $\overline{P}_k$, $\overline{R}_k$, можно построить линейное пространство непрерывных решений некоторой дифференциальной системы

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\widetilde{X}(t)\\ \widetilde{Y}(t)\end{pmatrix}=[\mathscr{A}+\mathscr{B}(t)]\begin{pmatrix}\widetilde{X}(t)\\ \widetilde{Y}(t)\end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

удовлетворяющей условию $\widetilde{X}(0)=\widetilde{Y}(0)$. Кроме того, для данного пространства выполнены равенства

$$\begin{gathered}\widetilde{X}(k\tau)=\overline{Q}_k\overline{T}_k,\ \widetilde{Y}(k\tau)=\overline{P}_k\overline{T}_k,\\ \overline{T}_k=\overline{R}_k\overline{T}_{k-1}=\overline{R}_k\overline{R}_{k-1}\cdot\ldots\cdot\overline{R}_1\overline{T}_0,\end{gathered} \tag{5.3}$$

а для матрицы $\mathscr{B}(t)$ — неравенство $(t>0)$

$$\|\mathscr{B}(t)\|\leqslant 2\left(\frac{1}{\tau}+\|A\|\right)\rho_1. \tag{5.4}$$

В самом деле, в силу леммы 2 (§ 4) можно утверждать, что существует матрица $T(\varphi_{k+1},\psi_{k+1})$ такая, что

$$T(\varphi_{k+1},\psi_{k+1})\begin{pmatrix}\overline{Q}_k\\ \overline{P}_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_{k+1}\\ \psi_{k+1}\end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

причем

$$\|T(\varphi_{k+1},\psi_{k+1})\|\leqslant(\|\varphi_{k+1}\|,\|\psi_{k+1}\|)\frac{1+0.5r_1}{1-r_1},$$

т. е. с учетом (5.1) имеем оценку

$$\|T(\varphi_{k+1},\psi_{k+1})\|\leqslant[2r_3+r_2(\|(e^{\tau A})_{\text{выч}}\|+\|(e^{-\tau A})_{\text{выч}}\|)]\frac{1+0.5r_1}{1-r_1}, \tag{5.6}$$

исключая в условиях теоремы из матричных уравнений матрицу $\begin{pmatrix} Z_{k+1}^{(1)} \\ Z_{k+1}^{(2)} \end{pmatrix}$.
Воспользовавшись равенством (5.5), можно записать

$$\begin{bmatrix} (e^{\tau A})_{\text{выч}} \overline{Q}_k \\ (e^{-\tau A})_{\text{выч}} \overline{P}_k \end{bmatrix} + T(\varphi_{k+1}, \psi_{k+1}) \begin{bmatrix} \overline{Q}_k \\ \overline{P}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{k+2} \\ \overline{P}_{k+1} \end{bmatrix} \overline{R}_{k+1},$$

т. е.

$$\left\{ \begin{bmatrix} (e^{\tau A})_{\text{выч}} & 0 \\ 0 & (e^{-\tau A})_{\text{выч}} \end{bmatrix} + T(\varphi_{k+1}, \psi_{k+1}) \right\} \begin{bmatrix} \overline{Q}_k \\ \overline{P}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{k+1} \\ \overline{P}_{k+1} \end{bmatrix} \overline{R}_{k+1}. \quad (5.7)$$

И наконец, если обозначим

$$\mathscr{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix},$$

$$F_{k+1} \begin{bmatrix} (e^{\tau A})_{\text{выч}} - e^{\tau A} & 0 \\ 0 & (e^{-\tau A})_{\text{выч}} - e^{-\tau A} \end{bmatrix} + T(\varphi_{k+1}, \psi_{k+1}),$$

то из (5.7) следует равенство

$$\left(e^{\tau \mathscr{A}} + F_{k+1}\right) \begin{bmatrix} \overline{Q}_k \\ \overline{P}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{k+1} \\ \overline{P}_{k+1} \end{bmatrix} \overline{R}_{k+1}. \quad (5.8)$$

Если теперь удастся на интервалах от $k\tau$ до $(k+1)\tau$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ построить матрицы $\mathscr{X}_k(t)$ такие, что

$$\frac{d}{dt} \mathscr{X}_k(t) = [\mathscr{A} + \mathscr{B}_k(t)] \mathscr{X}_k(t),$$

$$\mathscr{X}_k(k\tau) = I, \ \mathscr{X}_k((k+1)\tau) = e^{\tau A} + F_{k+1},$$

то очевидно, что линейное пространство непрерывных решений системы

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \widetilde{X}(t) \\ \widetilde{Y}(t) \end{pmatrix} = (\mathscr{A} + \mathscr{B}_k(t)) \begin{pmatrix} \widetilde{X}(t) \\ \widetilde{Y}(t) \end{pmatrix}, \quad \tau k \leqslant t \leqslant (k+1)\tau,$$

удовлетворяющих при $t = k\tau$ условию

$$\begin{pmatrix} \widetilde{X}(k\tau) \\ \widetilde{Y}(k\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Q}_k \\ \overline{P}_k \end{pmatrix} \overline{T}_k,$$

будет при $t = (k+1)\tau$ удовлетворять условию

$$\begin{bmatrix} \widetilde{X}((k+1)\tau) \\ \widetilde{Y}((k+1)\tau) \end{bmatrix} = [e^{\tau A} + F_{k+1}] \begin{bmatrix} \overline{Q}_k \\ \overline{P}_k \end{bmatrix} \overline{T}_k,$$

и, значит, в силу (5.8) имеем

$$\begin{bmatrix} \widetilde{X}((k+1)\tau) \\ \widetilde{Y}((k+1)\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{k+1} \\ \overline{P}_{k+1} \end{bmatrix} \overline{R}_{k+1} \overline{T}_k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{k+1} \\ \overline{P}_{k+1} \end{bmatrix} \overline{T}_{k+1}.$$

Отсюда следует, что если есть система $(t \geqslant 0)$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \widetilde{X}(t) \\ \widetilde{X}(t) \end{bmatrix} = [\mathscr{A} + \mathscr{B}(t)] \begin{bmatrix} \widetilde{X}(t) \\ \widetilde{Y}(t) \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

где

$$\mathscr{B}(t) = \mathscr{B}_k(t) \ \text{при} \ k\tau \leqslant t \leqslant (k+1)\tau, \ k \geqslant 0, \quad (5.10)$$

то ввиду (5.8) получаем линейное пространство непрерывных решений системы (5.10), удовлетворяющих при $t = 0$ условию

$$\widetilde{X}(0) = \widetilde{Y}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} I \overline{T}_0,$$

где $\overline{T}_0$ — (невырожденная матрица) параметр пространства решений, а также во всех точках $t=k\tau$, $k\geqslant 1$, верны равенства (5.3). Следовательно, для окончательного вывода формул (5.2) — (5.4) нам осталось доказать с учетом (5.10), что на произвольном интервале $(k\tau,\ (k+1)\tau)$ можно построить матрицу $\mathscr{B}_k(t)$, для которой выполнена оценка

$$\|\mathscr{B}_k(t)\|\leqslant 2\left(\frac{1}{\tau}+\|A\|\right)\rho_1,\quad k\tau\leqslant t\leqslant (k+1)\tau. \tag{5.11}$$

Для этого нам потребуется лемма 1 (см. § 4). Заметим прежде всего, что оценки

$$\|(e^{\pm\tau A})_{\text{выч}}-e^{\pm\tau A}\|\leqslant\rho,\ \|(e^{\pm\tau A})_{\text{выч}}\|\leqslant\Theta+\rho$$

в условиях теоремы и неравенства (5.6) и (5.7) позволяют выписать цепочку неравенств:

$$\|F_{k+1}\|\leqslant\|T(\varphi_{k+1},\psi_{k+1})\|+\max\{\|(e^{\tau A})_{\text{выч}}-e^{\tau A}\|,\ \|(e^{-\tau A})_{\text{выч}}-e^{-\tau A}\|\}\leqslant$$

$$\leqslant\rho+[2r_3+r_2(\|(e^{\tau A})_{\text{выч}}\|+\|(e^{-\tau A})_{\text{выч}}\|)]\frac{1+0.5r_1}{1-r_1}\leqslant$$

$$\leqslant\rho+[2r_3+2r_2(\Theta+\rho)](1+r_1 0.5)/(1-r_1).$$

Далее по условиям теоремы

$$\rho_1=\Theta(\rho+[2r_3+2r_2(\Theta+\rho)])\frac{1+0.5r_1}{1-r_1}<0.5,$$

что вместе с очевидным неравенством $(k\tau\leqslant t\leqslant (k+1)\tau)$

$$\left\|e^{-(t-k\tau)\mathscr{A}}\right\|\leqslant\max_{-\tau\leqslant\xi\leqslant\tau}\|e^{\xi A}\|$$

позволяет утверждать, что $(k\tau\leqslant t\leqslant (k+1)\tau)$

$$\left\|\frac{t-k\tau}{\tau}e^{-(t-k\tau)\mathscr{A}}F_{k+1}\right\|\leqslant\max_{|\xi|\leqslant\tau}\|e^{\xi A}\|\|F_{k+1}\|\leqslant\Theta\|F_{k+1}\|\leqslant\rho_1<0.$$

Следовательно, $(k\tau\leqslant t\leqslant (k+1)\tau)$

$$\left\|\frac{t-k\tau}{\tau}e^{-(t-k\tau)\mathscr{A}}\left[-\left(F_{k+1}+e^{\tau\mathscr{A}}\right)+e^{\tau\mathscr{A}}\right]\right\|\leqslant 0.5$$

и, значит, можно, используя лемму 1 § 4, построить матричные функции $\mathscr{B}_k(t)$ и $\mathscr{X}_k(t)$ $(k\tau\leqslant t\leqslant (k+1)\tau)$, удовлетворяющие краевой задаче

$$\frac{d}{dt}\mathscr{X}_k(t)=[\mathscr{A}+\mathscr{B}_k(t)]\mathscr{X}_k(t),$$

$$\mathscr{X}_k(k\tau)=I,\ \mathscr{X}_k((k+1)\tau)=e^{\tau\mathscr{A}}+F_{k+1},$$

причем для матриц $\mathscr{B}_k(t)$ выполнена оценка (5.11). Итак, мы показали, что по последовательностям $\overline{Q}_k$, $\overline{P}_k$, $\overline{R}_k$ можно построить по формулам (5.3) непрерывные функции $\widetilde{X}(t)$, $\widetilde{Y}(t)$, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений (5.2) и начальному условию $\widetilde{X}(0)=\widetilde{Y}(0)$ (на матричную функцию $\mathscr{B}(t)$ получено ограничение (5.4)). При этом имеем невырожденные матрицы

$$\overline{T}_0,\ \overline{T}_1,\ \overline{T}_2,\ \ldots,\ \overline{T}_k,\ \ldots.$$

Выбор любой из них позволяет выделить единственное решение из системы линейно независимых решений (5.2), удовлетворяющих условию $\widetilde{X}(0)=\widetilde{Y}(0)$. Например, взяв $\overline{T}_k=(\overline{P}_k-\overline{Q}_k)^{-1}$, можно обеспечить для выделенного решения выполнение условия $\widetilde{X}(k\tau)-\widetilde{Y}(k\tau)=I$, причем из формул (5.3) следует, что в данном случае

$$\widetilde{X}(k\tau)=\overline{Q}_k(\overline{Q}_k-\overline{P}_k)^{-1},\ \widetilde{Y}(k\tau)=\overline{P}_k(\overline{Q}_k-\overline{P}_k)^{-1}.$$

А это, в свою очередь, позволяет, воспользовавшись теоремой 2 гл. 1, утверждать, что ввиду оценок $\rho_1<1/(16\varkappa^{*3/2})$ и $\tau\|A\|\geqslant 1$ следует:

$(1+1/(\tau\|A\|))\rho_1 2\|A\| < 0.25\varkappa^{-3/2}(A)$ и можно выписать оценки

$$\begin{aligned} \|X(k\tau)-\bar{Q}_k(\bar{Q}_k-\bar{P}_k)^{-1}\| &\leqslant 8\varkappa^2(A)(1+1/(\tau\|A\|))\rho_1, \\ \|Y(k\tau)-\bar{P}_k(\bar{Q}_k-\bar{P}_k)^{-1}\| &\leqslant 8\varkappa^2(A)(1+1/(\tau\|A\|))\rho_1. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Но в § 1 отмечалось, что

$$G_{k\tau}(+0)=X(k\tau),\ G_{k\tau}(-0)=Y(k\tau),$$
$$\|G_{k\tau}(\pm 0)-G(\pm 0,\ A)\| \leqslant \varepsilon(k\tau,\ \varkappa(A)),$$

и, значит, можно вывести из (5.12) оценки

$$\|G(+0,A)-\bar{Q}_k(\bar{Q}_k-\bar{P}_k)^{-1}\| \leqslant 8\varkappa^2(A)\,2\left(\frac{1}{\tau\|A\|}+1\right)\rho_1+\varepsilon(k\tau,\varkappa(A)),$$

$$\|G(-0,A)-\bar{P}_k(\bar{Q}_k-\bar{P}_k)^{-1}\| \leqslant 8\varkappa^2(A)\,2\left(\frac{1}{\tau\|A\|}+1\right)\rho_1+\varepsilon(k\tau,\varkappa(A)),$$

т. е. ввиду условия $\tau\|A\| \geqslant 1$ можно утверждать справедливость теоремы 1.

Глава 4

РАСЧЕТ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА НА ПОДПРОСТРАНСТВЕ ЗАТУХАЮЩИХ РЕШЕНИЙ

Введение

Пусть у нас есть система уравнений

$$\frac{dx}{dt}=Ax+\delta(t)f \tag{1}$$

с постоянной квадратной $N\times N$ матрицей A, у которой нет собственных значений на мнимой оси, f — вектор размера N. Вопрос, рассматриваемый в настоящей работе, состоит в том, можно ли построить квадратичную функцию Ляпунова на подпространстве затухающих при $t>0$ решений (1), если это подпространство задается проектором $G=G(+0,\ A)$ $(AG=GA,\ G^2=G)$, известным лишь с некоторой точностью δ, δ_1 $(\delta,\ \delta_1 \ll 1)$, т. е. известен «почти» проектор $\tilde{G}$ такой, что

$$\|\tilde{G}^2-\tilde{G}\| \leqslant \delta_1,\quad \|A\tilde{G}-\tilde{G}A\| \leqslant \delta_1 2\|A\|,\quad \|G-\tilde{G}\| \leqslant \delta. \tag{2}$$

Иначе говоря, нам необходимо получить приближенное решение с неулучшаемой точностью для системы

$$\begin{aligned} A^*H+HA+G^*G&=0,\\ G^*HG&=H, \end{aligned} \tag{3}$$

если вместо $G=G(+0,\ A)$ известны $\tilde{G}$ с точностью (2).

В этой главе описан алгоритм решения отмеченной задачи, использующий величину $\varkappa(A)$ — параметр экспоненциальной дихотомии матрицы A, предложенный в [20]. Напомним, что $\varkappa(A)$ определяется на ограниченных решениях $x(t)$ системы (1) условием

$$\varkappa(A)=2\|A\|\max_{\|f\|=1}\int_{-\infty}^{\infty}\|x(t)\|^2\,dt. \tag{4}$$

В гл. 1 выведено представление для $\varkappa(A)$:

$$\varkappa(A)=\frac{\|A\|}{\pi}\left\|\int_{-\infty}^{\infty}(A^*+izI)^{-1}(A-izI)^{-1}\,dz\right\|. \tag{5}$$

Матрица A экспоненциально дихотомична, если $\varkappa(A) < \infty$. Во множестве экспоненциально дихотомичных матриц можно выделить подмножество «практически» дихотомичных матриц, потребовав для них выполнения оценки $\varkappa(A) < \varkappa^*$, где $\varkappa^*$ — большое число, уровень «практической» дихотомии. Величина $\varkappa^*$ зависит, с одной стороны, от точности задания элементов матрицы A, а с другой — связана с конкретным алгоритмом и разрядной сеткой, используемой ЭВМ.

Заметим, что алгоритм решения системы (3) является развитием алгоритмов работ [23, 25] и сопровождается анализом экспоненциальной дихотомии матрицы A. Если в процессе расчета $\varkappa(A) > \varkappa^*$, то процесс завершается и его результатом является утверждение: A «практически» не дихотомична. В гл. 4 показано, что если

$$\delta < \frac{1}{5600\varkappa^{*3}}, \quad \delta < \delta_1 < \frac{1}{100\varkappa^*}, \quad \rho_0 \approx 50(\delta + \delta_1),$$

то либо гарантируется выполнение неравенства $\varkappa(A) > \varkappa^*$, либо процесс доводится до получения матрицы $\widetilde{H}$, обеспечивающей выполнение условия

$$\|\widetilde{G}^*\widetilde{H}\widetilde{G} - \widetilde{H}\| \leqslant 4\varkappa^*\delta_1, \quad \|C\| \leqslant \frac{\rho_0}{2}, \quad C = A^*\widetilde{H} + \widetilde{H}A + \widetilde{G}^*\widetilde{G},$$

при этом если выполнены неравенства $\varkappa(A) < \varkappa^*$ и (2), то

$$\|\widetilde{H} - H\|/\|H\| \leqslant \rho_0.$$

Остановимся кратко на структуре этой главы.

В § 1 получены неравенства (теоремы 1, 2), играющие основную роль в схеме расчета H для «практически» дихотомичных матриц, изложенной в § 2. В § 3 выведены оценки точности вычисления матриц

$$\widetilde{H}_0 = \int_0^1 e^{tA_1^*}\widetilde{G}C\widetilde{G}e^{tA_1}dt,$$

где $A_1 = \frac{1}{2\|A\|}A$, $C = C^*$. В § 4 доказана теорема о точности вычисления e^{pA_1} для достаточно большого p. В § 5 проведен учет погрешности вычисления

$$\int_0^{2k} e^{tA_1^*}G^*CGe^{tA_1}\,dt.$$

§ 1. Погрешности вычисления и некоторые неравенства

Рассмотрим систему

$$\begin{gathered} A^*H(C) + H(C)A + G^*CG = 0, \\ G^*H(C)G = H(C), \end{gathered} \tag{1.1}$$

где A — экспоненциально дихотомичная матрица $\varkappa(A) < \infty$, $C = C^*$, $G = G(+0, A)$ — проектор на $\mathscr{L}_+(A)$ $(AG = GA,\ G^2 = G)$. Единственное решение системы (1.1) можно представить следующим интегралом:

$$H(C) = \int_0^\infty e^{tA^*}G^*CGe^{tA}\,dt. \tag{1.2}$$

В самом деле, так как A — экспоненциально дихотомичная матрица, то в силу теоремы Шура существует ортогональная матрица U такая, что

$$A = U^*A_1U, \quad A_2 = \begin{pmatrix} B_+ & D \\ 0 & B_- \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

где у матрицы B_+ размера $N_+ \times N_+$ все собственные значения лежат в левой полуплоскости. В этом случае (см. гл. 1) верно представление

$$G = G(+0, A) = U^* \begin{pmatrix} I_{N_+} & L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U. \tag{1.4}$$

Пусть

$$UHU^* = H_1 = \begin{pmatrix} H_{11}^{(1)} & H_{12}^{(1)} \\ H_{21}^{(1)} & H_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad C_1 = UCU^* = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

где $H_{11}^{(1)}$ и C_{11} — матрицы размера $N_+ \times N_+$. Используя (1.3), (1.4), можно, умножив (1.1) слева на U и справа на U^*, получить систему

$$A_1^* H_1 + H_1 A_1 + \begin{pmatrix} I & 0 \\ L^* & 0 \end{pmatrix} C_1 \begin{pmatrix} I & L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \tag{1.6}$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ L^* & 0 \end{pmatrix} H_1 \begin{pmatrix} I & L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = H_1. \tag{1.7}$$

Из (1.6) следует, что справедливы равенства

$$H_{21}^{(1)} = 0, \quad H_{12}^{(1)} = 0, \quad H_{22}^{(1)} = 0. \tag{1.8}$$

В этом случае из (1.5), (1.6), (1.8) нетрудно вывести, что

$$B_+^* H_{11}^{(1)} + H_{11}^{(1)} B_+ + C_{11} = 0. \tag{1.9}$$

Далее, так как матрица B_+ гурвицева, то матричное уравнение Ляпунова (1.9) однозначно разрешимо при любой матрице $C_{11} = C_{11}^*$, а значит, в силу сказанного однозначно разрешима система (1.1). Подставив в (1.1) матрицу $H(C)$, заданную формулой (1.2), нетрудно убедиться, что справедливы две цепочки равенств $(G = G(+0, A))$:

$$A^* H(C) + H(C) A = A^* \int_0^\infty e^{tA^*} G^* C G e^{tA}\, dt + \int_0^\infty e^{tA^*} G^* C G e^{tA}\, dt\, A =$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{dt} [e^{tA^*} G^* C G e^{tA}]\, dt = -G^* C G,$$

$$G^* H(C) G = \int_0^\infty G^* e^{tA^*} G^* C G e^{tA} G\, dt = \int_0^\infty e^{tA^*} (G^*)^2 C G^2 e^{tA}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{tA^*} G^* C G e^{tA}\, dt = H(C),$$

получение которых и доказывает, что система (1.1) однозначно разрешима и ее решение представляется формулой (1.2).

Напомним, что в гл. 1 показано, что при $t > 0$

$$G(t, A) = e^{tA} G, \tag{1.10}$$

где $G(t, A)$ — функция Грина, удовлетворяющая системе $(t \neq 0)$

$$\frac{d}{dt} G(t, A) = AG(t, A), \quad G(+0, A) - G(-0, A) = I,$$

$$G(+\infty, A) = G(-\infty, A) = 0. \tag{1.11}$$

Следовательно, ввиду выведенной в гл. 1 оценки можно утверждать, что

$$\| e^{tA} G \| \leqslant \sqrt{\varkappa(A)} \exp\left\{ -\frac{t \| A \|}{\varkappa(A)} \right\}, \quad t > 0, \tag{1.12}$$

а по определению $\varkappa(A)$ (см. гл. 1) верна оценка

$$\left\| \int\limits_0^\infty G^*(t, A)\, G(t, A)\, dt \right\| \leqslant \frac{\varkappa(A)}{2\|A\|}, \tag{1.14}$$

которая позволяет, опираясь на (1.14), утверждать, что

$$\left\| \int\limits_0^\infty e^{tA^*} G^* G e^{tA}\, dt \right\| \leqslant \frac{\varkappa(A)}{2\|A\|}. \tag{1.15}$$

Обозначим

$$H_T(C) = \int\limits_0^T e^{tA^*} G^* C G e^{tA}\, dt,$$

и, в частности, если $C = I$, то будем считать $H_T = H_T(I)$. Возьмем ρ из интервала (0, 1) и определим число

$$T_\rho = \varkappa(A) \ln(4\varkappa(A)/\rho).$$

Покажем, что для всех $T\,(T > T_\rho)$ выполнена оценка

$$\|A^* H_T(C) + H_T(C) A + G^* C G\| \leqslant \|C\| \frac{\rho}{4}. \tag{1.16}$$

В самом деле, справедлива цепочка равенств:

$$A^* H_T(C) + H_T(C) A + G^* C G = A^* \int\limits_0^T e^{tA^*} G^* C G e^{tA}\, dt + \int\limits_0^T e^{tA^*} G^* C G e^{tA}\, dt A +$$

$$+ G^* C G = G^* C G + \int\limits_0^T \frac{d}{dt} [e^{tA^*} G^* C G e^{tA}]\, dt = e^{TA^*} G^* C G e^{TA},$$

позволяющая утверждать, что

$$A^* H_T(C) + H_T(C) A + G^* C G = e^{TA^*} G^* C G e^{TA}. \tag{1.17}$$

Далее из (1.12) и определения T_ρ следует, что

$$\|e^{TA} G\|^2 \leqslant \varkappa(A)\, e^{-2T\|A\|/\varkappa(A)} \leqslant \varkappa(A)\, e^{-T_\rho/\varkappa(A)} = \frac{\rho}{4},$$

т. е.

$$\|e^{TA} G\|^2 \leqslant \frac{\rho}{4}. \tag{1.18}$$

Так как $C = C^*$, то

$$\|e^{TA^*} G^* C G e^{TA}\| \leqslant \|C\| \|e^{TA^*} G^* G e^{TA}\| = \|C\| \|e^{TA}\|^2,$$

и, значит, ввиду (1.17), (1.18) справедливо (1.16).

Итак, мы убедились, доказав (1.16), что поскольку

$$H_T(C) = G^* H_T(C)\, G,$$

то чем больше T, тем меньше невязка системы на матрице $H_T(C)$.

Основные результаты данного параграфа — две теоремы, позволяющие оценить: насколько близко мы находимся от решения (1.1) в случае, если его невязка невелика. При этом вместо $G = G(+0, A)$ имеем некоторый приближенный «почти» проектор $\tilde{G}$.

Теорема 1. *Пусть A — экспоненциально дихотомичная матрица ($\varkappa(A) < \infty$) и $\|A\| = 0.5$. Предположим, матрица $\tilde{G}$ приближает $G(+0, A)$ с точностью δ $(\delta < 1(8\sqrt{\varkappa(A)}))$:*

$$\|\tilde{G} - G\| \leqslant \delta, \quad G = G(+0, A), \tag{1.19}$$

тогда если на матрице $X = X^*$ выполнены равенства

$$A^*X + XA + \tilde{G}^*\tilde{G} = C_1, \tag{1.20}$$

$$\tilde{G}^*X\tilde{G} - X = C_2, \tag{1.21}$$

где при $\rho_1 < \frac{1}{2}$, $\rho_2 < \frac{1}{2}$ *имеем*

$$\|C_1\| \leqslant \rho_1, \tag{1.22}$$

$$\|C_2\| \leqslant \rho_2, \tag{1.23}$$

то матрица X связана с единственным решением системы

$$\begin{gathered} A^*H + HA + G^*G = 0, \\ G^*HG = H \end{gathered} \tag{1.24}$$

оценкой

$$\|X - H\| \leqslant \|H\| (\rho_1 + \rho_2 + 4\delta + 2\delta^2) / (1 - 2\delta\sqrt{\varkappa(A)} - \delta^2). \tag{1.25}$$

Теорема 2. *Пусть A — экспоненциально дихотомичная матрица ($\varkappa(A) < \varkappa^* < \infty$) и $\|A\| = 0.5$. Допустим, положительные параметры ρ, δ, δ_1, ρ_1, T выбраны из условий*

$$\begin{gathered} \rho < \frac{1}{2}, \ 1.001\rho_1 < \frac{\rho}{2} - 0.02, \ \delta < \frac{\rho}{72\varkappa^*}, \\ \delta < \delta_1 < \frac{1}{100\varkappa^*}, \quad T > T_\rho = \varkappa(A) \ln\left[\frac{4\varkappa(A)}{\rho}\right]. \end{gathered} \tag{1.26}$$

Предположим, матрицы $\hat{X} = \hat{X}^*$ и $\tilde{G}$ таковы, что

$$\|\tilde{G} - G\| \leqslant \delta, \ (G = G(+0, A)), \tag{1.27}$$

$$\|\tilde{G}^2 - \tilde{G}\| \leqslant \delta_1, \ \|A\tilde{G} - \tilde{G}A\| \leqslant \delta_1, \tag{1.28}$$

$$\left\| G^{*s_1} \left[\hat{X} - H_T(C)\right] G^{s_2} \right\| \leqslant \rho_1 \|C\|, \quad s_1, s_2 = 0, 1. \tag{1.29}$$

Тогда для матриц

$$X = \tilde{G}^*\hat{X}\tilde{G}, \tag{1.30}$$

$$C_1 = A^*X + XA + \tilde{G}^*C\tilde{G} \tag{1.31}$$

справедливы оценки

$$\|X - H_T(C)\| \leqslant [1.001\rho_1 + 3\varkappa(A)\delta] \|C\|, \tag{1.32}$$

$$\|\tilde{G}^*X\tilde{G} - X\| \leqslant 2.01 \|H_T(C)\| \delta_1 + 0.6 \|C\| \delta_1, \tag{1.33}$$

$$\|C_1 - \tilde{G}^*C_1\tilde{G}\| \leqslant 7.4\varkappa(A)\delta_1 \|C\|, \ \|C_1\| \leqslant \|C\| \frac{\rho}{2}. \tag{1.34}$$

Приступая к доказательству теоремы 1, прежде всего заметим, что имеет место легко проверяемое тождество

$$\begin{gathered} G^*XG = \tilde{G}^*X\tilde{G} + G^*H(G - \tilde{G}) + (G - \tilde{G})^*HG + \\ + (G - \tilde{G})^*X(G - \tilde{G}) + G^*(X - H)(G - \tilde{G}) + (G - \tilde{G})^*(X - H)G. \end{gathered} \tag{1.35}$$

Здесь и далее будем использовать обозначение $G = G(+0, A)$. Из (1.35) с учетом (1.19) и (1.21—23) и равенств $G^*H = HG = H$ получаем

$$\begin{gathered} \|G^*XG - X\| \leqslant \rho_1 \|X\| + 2\|H - X\|\delta\|G\| + \|X\|\delta^2 + 2\|H\|\delta, \\ \|G^*XG - \tilde{G}^*X\tilde{G}\| \leqslant 2\|X - H\|\delta\|G\| + 2\|H\|\delta + \|X\|\delta^2. \end{gathered} \tag{1.36}$$

Переписав (1.20) в виде

$$A^*X + XA + G^*G = C_1 - \tilde{G}^*\tilde{G} + G^*G,$$

можно, учитывая, что G — проектор на инвариантное подпространство A, точнее, $G^2 = G$, $GA = AG$, $G^*A^* = A^*G^*$, заключить, что G^*XG удовлетворяет уравнению

$$A^*G^*XG + G^*XGA + G^*G = G^*(C_1 - \tilde{G}^*\tilde{G} + G^*G)G. \tag{1.37}$$

Далее, если обозначить

$$Y = H - G^*XG, \tag{1.38}$$

то из (1.24) и (1.37) следует, что

$$\begin{gathered} A^*Y + YA = -G^*(C_1 - \tilde{G}^*\tilde{G} + G^*G)G, \\ G^*YG = Y. \end{gathered} \tag{1.39}$$

Так как G — проектор на $\mathcal{L}_+(A)$, то единственное решение (1.39) допускает интегральное представление

$$Y = \int_0^\infty e^{tA^*}G^*(C_1 - \tilde{G}^*\tilde{G} + \tilde{G}^*G)\,Ge^{tA}\,dt,$$

из которого следует, что

$$\|Y\| = \left\|\int_0^\infty e^{tA^*}G^*(C_1 - \tilde{G}^*\tilde{G} + G^*G)\,Ge^{tA}\,dt\right\| =$$

$$= \left\|\int_0^\infty e^{tA^*}G^*[C_1 + (\tilde{G} - G) + (\tilde{G} - G)^* + (\tilde{G} - G)^*(\tilde{G} - G)]\,Ge^{tA}\,dt\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|C_1 + (\tilde{G} - G) + (\tilde{G} - G)^* + (\tilde{G} - G)^*(\tilde{G} - G)\| \left\|\int_0^\infty e^{tA^*}G^*Ge^{tA}\,dt\right\| \leqslant$$

$$\leqslant [\,\|C_1\| + 2\|\tilde{G} - G\| + \|\tilde{G} - G\|^2\,]\,\|H\|,$$

т. е. в силу (1.19), (1.22)

$$\|Y\| \leqslant (\|C_1\| + 2\|G - \tilde{G}\| + \|G - \tilde{G}\|^2)\,\|H\| \leqslant (\rho_1 + 2\delta + \delta^2)\,\|H\|. \tag{1.40}$$

В то же время верна простая цепочка неравенств:

$$\begin{gathered} \|H - X\| = \|H - G^*XG + G^*XG - X\| \leqslant \|Y\| + \|G^*XG - X\| = \\ = \|Y\| + \|\tilde{G}^*X\tilde{G} - X + G^*XG - \tilde{G}^*X\tilde{G}\| \leqslant \\ \leqslant \|Y\| + \|\tilde{G}^*X\tilde{G} - X\| + \|G^*XG - \tilde{G}^*X\tilde{G}\| = \\ = \|Y\| + \|C_2\| + \|G^*XG - \tilde{G}^*X\tilde{G}\|. \end{gathered}$$

Из нее с учетом (1.23), (1.36) и (1.40) следует, что

$$\|H - X\| \leqslant (\rho_1 + 2\delta + \delta^2)\,\|H\| + \rho_2 + 2\|X - H\|\delta\|G\| + \|X\|\delta^2 + 2\|H\|\delta. \tag{1.41}$$

Так как $\rho_2 < 0.5$, $2\delta\sqrt{\varkappa(A)} - \delta^2 < 0.5$, то $1 - \rho_2 - 2\delta\sqrt{\varkappa(A)} - \delta^2 > 0$, и, значит, из (1.41) следует справедливость (1.25). Теорема 1 доказана.

Переходя к доказательству теоремы 2, прежде всего заметим, что из определения $H_T(C)$ следует равенство

$$H_T(C) = G^*H_T(C)\,G \tag{1.42}$$

и цепочка неравенств:

$$\|H_T(C)\| \leqslant \|C\| \left\|\int_0^T e^{tA^*}G^*Ge^{tA}\,dt\right\| \leqslant \|C\| \left\|\int_0^\infty e^{tA^*}G^*Ge^{tA}\,dt\right\| = \|C\|\,\|H\|,$$

из которой получаем оценку

$$\|H_T(C)\| \leqslant \|C\|\,\|H\|. \tag{1.43}$$

Воспользовавшись очевидным тождеством

$$\begin{gathered} \tilde{G}^*\hat{X}\tilde{G} = G^*H_T(C)\,G + G^*(\hat{X} - H_T(C))\,G + G^*H_T(C)\,(\tilde{G} - G) + \\ + G^*(\hat{X} - H_T(C))\,(\tilde{G} - G) + (\tilde{G} - G)^*H_T(C)\,G + (\tilde{G} - G)^*H_T(C)\,(\tilde{G} - G) + \\ + (\tilde{G} - G)^*(\hat{X} - H_T(C))\,G + (\tilde{G} - G)^*(\hat{X} - H_T(C))\,(\tilde{G} - G), \end{gathered}$$

используя (1.27), (1.29) и (1.42), запишем:

$$\|X - H_T(C)\| \leqslant \|C\|\rho_1(1+\delta^2) + \delta(2+\delta)\|H_T(C)\|,$$
$$\|X - H_T(C)\| \leqslant \|C\|[\rho_1(1+\delta^2) + \varkappa(A)\delta(2+\delta)]. \tag{1.44}$$

Обозначив

$$\bar{\rho}_1 = (1+\delta^2)\rho_1 + \varkappa(A)\delta(2+\delta), \tag{1.45}$$

можно утверждать, что

$$\|X - H_T(C)\| \leqslant \bar{\rho}_1\|C\|. \tag{1.46}$$

В силу неравенств (1.26) нетрудно убедиться, что $\bar{\rho}_1 \leqslant 0.5\rho$, (1.44) обеспечивает справедливость неравенства (1.32). Представим невязку (1.31) так:

$$C_1 = A^*X + XA + \tilde{G}^*C\tilde{G} = A^*H_T(C) + H_T(C)A + G^*CG +$$
$$+ A^*(X - H_T(C)) + (X - H_T(C))A + (\tilde{G} - G)^*C(\tilde{G} - G) +$$
$$+ G^*C(\tilde{G} - G) + (\tilde{G} - G)^*CG. \tag{1.47}$$

Рассматривая три группы слагаемых, отметим.

Во-первых, в силу (1.16)

$$\|A^*H_T(C) + H_T(C)A + G^*CG\| \leqslant \|C\|\,\rho/4.$$

Во-вторых, в силу доказанного неравенства (1.46)

$$\|A^*[X - H_T(C)] + [X - H_T(C)]A\| \leqslant 2\|A\|\,\|X - H_T(C)\| \leqslant \bar{\rho}_1\|C\|.$$

В-третьих, очевидно, что

$$\|(\tilde{G} - G)^*C(\tilde{G} - G) + G^*C(\tilde{G} - G) + (\tilde{G} - G)^*CG\| \leqslant \|C\|\delta(\delta + 2\sqrt{\varkappa(A)}).$$

Полученные неравенства позволяют, огрубив (1.47), утверждать, в силу выбора ρ_1 и δ, что вторая оценка (1.34) верна.

Далее, воспользовавшись определением C_1, можно записать, что

$$\tilde{G}^*C_1\tilde{G} = \tilde{G}^*A^*X\tilde{G} + \tilde{G}^*XA\tilde{G} + \tilde{G}^{*2}C\tilde{G}^2 = A^*X + XA + \tilde{G}^*C\tilde{G} +$$
$$+ (\tilde{G}^{*2}C\tilde{G}^2 - \tilde{G}^*C\tilde{G}) + A^*(\tilde{G}^*X\tilde{G} - X) + (\tilde{G}^*X\tilde{G} - X)A +$$
$$+ (\tilde{G}^*A^* - A^*\tilde{G}^*)X + (\tilde{G}^*A^* - A^*\tilde{G}^*)(X\tilde{G} - X) +$$
$$+ X(A\tilde{G} - \tilde{G}A) + (\tilde{G}^*X - X)(A\tilde{G} - \tilde{G}A),$$

и, используя оценки $\|A\tilde{G} - \tilde{G}A\| \leqslant \delta_1$, $\|\tilde{G}^2 - \tilde{G}\| \leqslant \delta_1$, вывести неравенство

$$\|\tilde{G}^*C_1\tilde{G} - C_1\| \leqslant 2\|A\|\,\|X - \tilde{G}^*X\tilde{G}\| +$$
$$+ 2\delta_1[\|X\| + \|X\tilde{G} - X\|] + \|\tilde{G}^{*2}C\tilde{G}^2 - \tilde{G}^*C\tilde{G}\|. \tag{1.48}$$

Так как $\|X - H_T(C)\| \leqslant \bar{\rho}_1\|C\|$, то

$$\|X\| \leqslant \|H_T(C)\| + \bar{\rho}_1\|C\|. \tag{1.49}$$

Нетрудно, воспользовавшись условием

$$\left\| G^{*s_1}\left(\hat{X} - H_T(C)\right) G^{s_2} \right\| \leqslant \rho_1 \|C\|, \quad s_1, s_2 = 0, 1,$$

вывести оценку

$$\|X\tilde{G} - X\| \leqslant 2.2\rho_1\|C\| + \|H_T(C)\|0.05 \tag{1.50}$$

и проверить, что из тождества

$$\tilde{G}^{*2}C\tilde{G}^2 = \tilde{G}^*C\tilde{G} + \tilde{G}^*C(\tilde{G}^2 - \tilde{G}) + (\tilde{G}^2 - \tilde{G})^*C\tilde{G} +$$
$$+ (\tilde{G}^2 - \tilde{G})^*C(\tilde{G}^2 - \tilde{G})$$

следует оценка

$$\|\tilde{G}^*C\tilde{G} - \tilde{G}^{*2}C\tilde{G}^2\| \leqslant \|C\|\,[\delta_1 + 2\sqrt{\varkappa(A)}]\,\delta_1. \tag{1.51}$$

Итак, справедливость первого из неравенств (1.34) можно получить, огрубив (1.48) при помощи (1.49—51), (1.33).

И наконец, выписав простое тождество

$$\widetilde{G}^*X\widetilde{G} - X = \widetilde{G}^{*2}\widehat{X}\widetilde{G}^2 - \widetilde{G}^*\widehat{X}\widetilde{G} = (\widetilde{G}^2 - \widetilde{G})^*H_T(C)(\widetilde{G} - G) +$$
$$+ (\widetilde{G}^2 - \widetilde{G})^*H_T(C)G + (\widetilde{G}^2 - \widetilde{G})^*(\widehat{X} - H_T(C))G + (\widetilde{G}^2 - \widetilde{G})^* \times$$
$$\times (\widehat{X} - H_T(C))(\widetilde{G} - G) + G^*H_T(C)(\widetilde{G}^2 - \widetilde{G}) + (\widetilde{G} - G)^*H_T(C)(\widetilde{G}^2 - \widetilde{G}) +$$
$$+ (\widetilde{G}^2 - \widetilde{G})^*\widehat{X}(\widetilde{G}^2 - \widetilde{G}) + G^*(\widehat{X} - H_T(C))(\widetilde{G}^2 - \widetilde{G}) +$$
$$+ (\widetilde{G} - G)^*(\widehat{X} - H_T(C))(\widetilde{G}^2 - \widetilde{G}),$$

можно, используя (1.28), (1.29), вывести оценку (1.33). Теорема доказана.

В заключение параграфа докажем лемму 1, которая потребуется в § 5.

Лемма 1. *Если* $\|R\|/\|A\| < 0.2$, $(t > 0)$, *то верна оценка*

$$\left\| e^{\frac{t}{2\|A\|}A} - e^{\frac{t}{2\|A\|}(A+R)} \right\| \leqslant t\frac{\|R\|}{\|A\|}.$$

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{d}{d\tau}X(\tau) = \frac{1}{2\|A\|}(A + R)X(\tau), \quad X(0) = I.$$

Ее решение в точке $\tau = t$ совпадает с матрицей $\exp\left\{\frac{1}{2\|A\|}(A + R)\right\}$, и, значит, справедливо интегральное представление

$$e^{\frac{t}{2\|A\|}(A+R)} = e^{\frac{t}{2\|A\|}A} + \int_0^t e^{\frac{t-s}{2\|A\|}A}\frac{1}{2\|A\|}Re^{\frac{s}{2\|A\|}(A+R)}\,ds,$$

т. е. при $\|R\|/\|A\| < 0.2$, $t > 0$ имеем оценку

$$\left\| e^{\frac{t}{2\|A\|}(A+R)} - e^{\frac{t}{2\|A\|}A} \right\| \leqslant \frac{\|R\|}{\|A\|}\int_0^t \sqrt{e}e^{\frac{s\|R\|}{2\|A\|}}\,ds \leqslant \frac{\|R\|}{2\|A\|}te^{\frac{1}{2}+\frac{1}{10}} \leqslant t\frac{\|R\|}{\|A\|},$$

получение которой и доказывает справедливость леммы.

§ 2. Схема расчета матричного интеграла $\int\limits_0^\infty e^{tA^*}G^*(+0, A)G(+0, A)e^{tA}\,dt$

В этом параграфе описывается грубая схема расчета матричного интеграла

$$H = \int_0^\infty e^{tA^*}G^*(+0, A)G(+0, A)e^{tA}\,dt,$$

удовлетворяющего системе матричных уравнений

$$\begin{aligned} &A^*H + HA + G^*(+0, A)G(+0, A) = 0,\\ &G^*(+0, A)HG(+0, A) - H = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Процесс вычисления единственного решения системы (2.1) сопровождается анализом: лежат ли все собственные значения матрицы $\exp\left\{\frac{1}{2\|A\|}A\right\}G$ внутри единичного круга. При $\varkappa(A) > \varkappa^*$ матрицу A уже не стоит относить к числу экспоненциально дихотомичных. Поэтому если в процессе анализа матрицы A удается на некотором этапе установить это неравенство, то процесс останавливается и его результатом считается неравенство $\varkappa(A) > \varkappa^*$. Когда же установить справедливость такого неравенства не удается, процесс доводится до вычисления $\tilde{H}$, приближающей H с требуемой точностью.

Прежде всего отметим, что у нас есть матрица $\tilde{G}$ («почти» проектор), про которую известно, что

$$\|\tilde{G}^2 - \tilde{G}\| \leqslant \delta_1, \quad \|A\tilde{G} - \tilde{G}A\| \leqslant 2\|A\|\delta_1, \quad \|G - \tilde{G}\| \leqslant \delta, \tag{2.2}$$

где δ, δ_1 — некоторые малые положительные числа, связанные с параметром $\varkappa^*$ неравенствами

$$0 < \delta < \frac{1}{5600\varkappa^{*3}}, \quad 0 < \delta < \delta_1 < \frac{1}{100\varkappa^*}. \tag{2.3}$$

Для того чтобы описать схему расчета решения системы (2.1), необходимо определить величины r_0, α, ρ, ρ_0. Прежде всего зададимся величиной ρ из интервала

$$\max\left\{\frac{1}{\varkappa^*}, \ 2800\varkappa^{*3}\delta\right\} < \rho < 1. \tag{2.4}$$

Используя $\varkappa^*$ и ρ, определим r_0, $\bar{r}_0$ формулами

$$\bar{r}_0 = \frac{\rho}{28\varkappa^{*2}}, \quad r_0 = \bar{r}_0 - 4\sqrt{e}\varkappa^*\delta. \tag{2.5}$$

Далее, если найти целое k_1 из неравенства

$$(2^{k_1} - 1)\bar{r}_0 < 0.5 < (2^{k_1+1} - 1)\bar{r}_0, \tag{2.6}$$

то можно определить параметр α равенствами

$$\alpha = \bar{\alpha} - 6\delta/\sqrt{\varkappa^*}, \quad \bar{\alpha} = \bar{r}_0/(1 + k_1(4\varkappa^* + 1)). \tag{2.7}$$

Возьмем малое положительное число ρ_0 и целое число i_0 так, чтобы выполнялись неравенства

$$\left[\frac{\rho_0}{2} + 4\varkappa^*\delta_1 + 4\delta + 2\delta^2\right]\Big/\left[1 - 2\delta\sqrt{\varkappa^*} - \delta^2\right] \leqslant \rho_0, \tag{2.8}$$

$$\frac{14\delta_1\varkappa^* + (\rho/2)^{i_0+1} + 4\delta + 2\delta^2}{1 - 2\delta\sqrt{\varkappa^*} - \delta^2} \leqslant \rho_0. \tag{2.9}$$

Остановимся кратко на смысле выбранных параметров ρ_0, i_0, r_0, α. Величина ρ_0 характеризует желаемую точность расчета H, удовлетворяющего (2.1), а i_0 — ограничивает число шагов итерационного уточнения, за которое в случае, если $\varkappa(A) < \varkappa^*$, обязательно будет получено приближение к H с точностью ρ_0. Параметры r_0 и α показывают, с какой точностью необходимо рассчитывать матрицы $\left(A_1 = \frac{1}{2\|A\|}A\right)$:

$$e^{A_1}\tilde{G}, \ B^2, \ \int_0^1 e^{tA_1^*}\tilde{G}^*C\tilde{G}e^{tA_1}\,dt, \quad H + B^*HB,$$

а именно: должны выполняться неравенства

$$\|e^{A_1}\tilde{G} - (e^{A_1}\tilde{G})_{\text{выч}}\| \leqslant \frac{r_0}{4\varkappa^*}, \tag{2.10}$$

$$\|B^2 - (B^2)_{\text{выч}}\| \leqslant \frac{r_0}{2\varkappa^{*2}}, \tag{2.11}$$

$$\left\|\int_0^1 e^{tA_1^*}\tilde{G}^*C\tilde{G}e^{tA_1}\,dt - \left(\int_0^1 e^{tA_1^*}\tilde{G}^*C\tilde{G}e^{tA_1}\,dt\right)_{\text{выч}}\right\| \leqslant \alpha\|\tilde{G}^*C\tilde{G}\|, \tag{2.12}$$

$$\|H + B^*HB - (H + B^*HB)_{\text{выч}}\| \leqslant \alpha\varkappa^*, \tag{2.13}$$

причем последние две оценки справедливы в случае, если

$$\|C\| \geqslant 1, \quad \|H\| \leqslant \varkappa^*, \quad \|B\| \leqslant \varkappa^*. \tag{2.14}$$

Выбор k_1 обеспечивает выполнение оценки

$$2^{k_1} \geqslant T_\rho = \varkappa^* \ln [4\varkappa^*/\rho]. \tag{2.15}$$

В самом деле, из (2.4)—(2.6) следует цепочка простых неравенств:

$$2^{k_1-1} \geqslant \left(\frac{1}{2\bar{r}_0} + 1\right) \Big/ 4 = \frac{1}{8\bar{r}_0} + \frac{1}{4} \geqslant \frac{\rho}{\bar{r}_0} \frac{1}{8\rho} + \frac{1}{4} =$$

$$= 28\varkappa^{*2} \frac{1}{8\rho} + \frac{1}{4} \geqslant \frac{28}{32} \varkappa^* \frac{4\varkappa^*}{\rho},$$

т. е.

$$2^{k_1-1} \geqslant \varkappa^* \frac{28}{32} \frac{4\varkappa^*}{\rho}. \tag{2.16}$$

Далее, если $4\varkappa^*/\rho > 4 (\rho \leqslant 1,\ \varkappa^* \geqslant 1)$, то

$$\ln \left[\frac{28}{32} \frac{4\varkappa^*}{\rho}\right] < \frac{28}{32} \frac{4\varkappa^*}{\rho},$$

и, значит, в виду (2.16) оценка (2.15) справедлива. Покажем, что $\alpha > 0$ при $\varkappa^* \geqslant 40$. Для этого достаточно убедиться в том, что при $\varkappa^* \geqslant 40$ верно неравенство

$$\bar{\alpha} = \bar{r}_0 / [1 + k_1 (4\varkappa^* + 1)] > 6\delta / \sqrt{\varkappa^*}. \tag{2.17}$$

Из (2.6) следует оценка

$$k_1 \leqslant \log_2 \left(\frac{1}{2\bar{r}_0} + 1\right) \leqslant \log_2 \left(\frac{1}{\bar{r}_0}\right),$$

и тогда можно, опираясь на (2.4), (2.5), выписать простую цепочку неравенств:

$$\bar{\alpha} \geqslant \frac{\bar{r}_0}{1 + \left(\log_2 \frac{1}{\bar{r}_0}\right)(4\varkappa^* + 1)} = \frac{\rho/(28\varkappa^{*2})}{1 - (4\varkappa^* + 1) \log_2 \frac{\rho}{28\varkappa^{*2}}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\rho}{140\varkappa^{*3} \log_2 \frac{28\varkappa^{*2}}{\rho}} > \frac{20\delta}{\log_2 [28\varkappa^{*3}]},$$

т. е. верна оценка

$$\bar{\alpha} > 20\delta / (\log_2 [28\varkappa^{*3}]),$$

которая вместе с очевидным неравенством

$$6 \log_2 28 + 18 \log_2 \varkappa^* < 20\sqrt{\varkappa^*},$$

справедливым при $\varkappa^* \geqslant 40$, обеспечивает выполнение оценки (2.17). Схему вычислений разобьем на пять этапов.

I этап. Вычислим с гарантированной точностью (см. [1]) сингулярные числа $\sigma_N(A) = \|A\|$ и $\sigma_1(A) = \|A^{-1}\|^{-1}$. Если оказалось, что $\sigma_N(A) \geqslant \sigma_1(A) 27\varkappa^*$, то в силу неравенства $27\varkappa(A) > \mu(A)$ (см. гл. 1, § 3) можно заключить, что $\varkappa(A) > \varkappa^*$, и на этом закончить исследование дихотомии матрицы A. В противном случае, зная $\|A\|$, нормируем A так:

$$A_1 = \frac{1}{2\|A\|} A.$$

Величина параметра дихотомии не меняется при этом.

II этап. Состоит из следующих основных шагов:

1. Вычисляется матрица $B_0 = e^{A_1}\tilde{G}$.
2. Производится расчет по рекуррентным формулам матриц

$B_k\left[e^{A_1}\widetilde{G}\right]^{2k}$, которые являются вспомогательными для реализуемого на III этапе итерационного решения системы (2.1).

Сформулируем k-й шаг ($k \geqslant 1$) процесса.

2*а*. Вычисляется матрица B_k и число r_k:

$$B_k = B_{k-1}^2, \quad r_k = \|B_k\|.$$

2*б*. Проверяется неравенство

$$r_k \leqslant \frac{2^k\bar{r}_0}{1-2^k\bar{r}_0} + \sqrt{\varkappa^*}e^{-2^{k-1}/\varkappa^*}.$$

Если оно нарушено, то процесс завершается утверждением: $\varkappa(A) > \varkappa^*$.

2*в*. Если $k < k_1$, то k полагается равным $k+1$ и начинает работу пункт 2*а*, в противном случае пункт 2 завершается.

Прежде чем переходить к III этапу, обоснуем правомерность заключений пункта 2. Заметим, что в реальном процессе вместо матриц B_k получаем приближения к ним, а именно матрицы $(B_k)_{\text{выч}}$, поэтому удобнее считать, что $r_k = \|(B_k)_{\text{выч}}\|$. В § 4 показано, что если $\varkappa(A) < \varkappa^*$, то

$$\|(B_k)_{\text{выч}}\| \leqslant \frac{2^k\bar{r}_0}{1-2^k\bar{r}_0} + \sqrt{\varkappa(A)}\, e^{-2^{k-1}/\varkappa(A)}$$

при всех $k \leqslant k_0$, где k_0 — целое число из неравенств

$$2^{k_0}\bar{r}_0 < 0.5 < 2^{k_0+1}\bar{r}_0.$$

В § 5 показано, что $k_0 \geqslant k_1$ и, значит, при всех $k \leqslant k_1$ заключения пункта 2 справедливы.

III этап. Заключается в получении приближенного решения системы

$$\begin{gathered} A_1^*\widehat{H} + \widehat{H}A_1 + G^*C_0G = 0, \quad C_0 = I, \\ G^*\widehat{H}G = \widehat{H} \end{gathered} \tag{2.18}$$

и состоит из следующих основных шагов:

1. Вычисляется матрица

$$H_0 = \int_0^1 e^{tA_1^*}\widetilde{G}^*C_0\widetilde{G}e^{tA_1}\,dt.$$

Детальный алгоритм вычисления H_0 с учетом влияния ошибок округления описан в § 3.

2. Вычисляются матрицы ($k = 1, 2, \ldots, k_1$)

$$H_k = H_{k-1} + (B_{k-1})_{\text{выч}}^*\, H_{k-1}(B_{k-1})_{\text{выч}},$$

где матрицы $(B_{k-1})_{\text{выч}}$ получены и исследованы на предыдущем этапе. В реальном процессе будут получены близкие к требуемым H_k матрицы $(H_k)_{\text{выч}}$.

3. При всех $k = 0, 1, 2, \ldots, \tilde{k}_1$ проверяется неравенство

$$\|(H_k)_{\text{выч}}\| \leqslant \varkappa^* + \rho/4.$$

Если оно нарушено для некоторого k, то процесс завершается утверждением: $\varkappa(A) > \varkappa^*$. В противном случае если предположить, что $\varkappa(A) < \varkappa^*$, то в силу теоремы 4 § 5 верна оценка ($s_1, s_2 = 0, 1$)

$$\left\| G^{*s_1}\left[(H_k)_{\text{выч}} - \int_0^{2^k} e^{tA_1^*}G^*C_0Ge^{tA_1}\,dt\right]G^{s_2}\right\| \leqslant \frac{\rho}{4}\|C_0\|. \tag{2.19}$$

4. Вычисляются матрицы

$$X_1 = \widetilde{G}^*\left(H_{k_1}\right)_{\text{выч}}\widetilde{G}, \quad C_1 = A_1^*X_1 + X_1A_1 + \widetilde{G}^*C_0\widetilde{G},$$

для которых в силу (2.19) теоремы 2 § 1 и предположения $\varkappa(A)<\varkappa^*$ можем утверждать справедливость оценок

$$\|X_1 - H_{2^{k_1}}(C_0)\| \leqslant \left[\frac{\rho}{4} 1.001 + 3\varkappa(A)\,\delta\right]\|C_0\|,$$

$$\|C_1\| \leqslant \frac{\rho}{2}\|C_0\|, \quad \|\widetilde{G}^*C_1\widetilde{G} - C_1\| \leqslant 7.4\varkappa(A)\,\delta_1\|C_0\|,$$

$$\|\widetilde{G}^*X_1\widetilde{G} - X_1\| \leqslant \|H_{2^{k_1}}(C_0)\|2.01\delta_1 + 0.6\|C_0\|\delta_1.$$

5. Проверяются неравенства

$$\|C_1\| \leqslant \frac{\rho}{2}\|C_0\|, \quad \|C_1 - \widetilde{G}^*C_1\widetilde{G}\| \leqslant 7.4\varkappa^*\delta_1\|C_0\|,$$

$$\|\widetilde{G}^*X_1\widetilde{G} - X_1\| \leqslant 2.7\varkappa^*\delta_1\|C_0\|.$$

Если хотя бы одно из неравенств нарушено, то в силу замечаний, сделанных на предыдущем шаге, гарантируется выполнение неравенства $\varkappa(A)>\varkappa^*$, которое и будет результатом расчета. Если же выполнены все эти неравенства, то в силу теоремы 1 § 1 верна оценка ($\|C_0\|=1$)

$$\|X_1 - \widehat{H}\|\,\|\widehat{H}\| \left[\frac{\rho}{2} + 2.7\varkappa^*\delta_1 + 4\delta + 2\delta^2\right] \Big/ \left[1 - 2\delta\sqrt{\varkappa^*} - \delta^2\right].$$

6. Если оказалось, что

$$\left[\frac{\rho}{2} + 2.7\varkappa^*\delta_1 + 4\delta + 2\delta^2\right] \Big/ \left[1 - 2\delta\sqrt{\varkappa^*} - \delta^2\right] \leqslant \rho_0,$$

то процесс построения приближенного решения (2.18) завершен и его приближением с требуемой точностью будет матрица X_1, а иначе начинает работу следующий этап.

Обоснуем заключение пункта 3. Прежде всего отметим, что в силу результатов § 5 если $\varkappa(A)<\varkappa^*$, то последовательности

$$\{(H_k)_{\text{выч}}\} \quad \text{и} \quad \left\{\int_0^{2^k} e^{tA_1^*}G^*C_0Ge^{tA_1}\,dt\right\} \quad \text{при} \quad k \leqslant k_1$$

связаны неравенствами

$$\left\|(H_k)_{\text{выч}} - \int_0^{2^k} e^{tA_1^*}G^*C_0Ge^{tA_1}\,dt\right\| \leqslant 7\varkappa^{*2}\overline{r}_0\|C_0\|,$$

и так как

$$\left\|\int_0^{2^k} e^{tA_1}G^*C_0Ge^{tA_1}\,dt\right\| \leqslant \frac{\varkappa(A)\|C_0\|}{2\|A_1\|} = \varkappa(A)\|C_0\|,$$

то ввиду (2.4) верна цепочка неравенств:

$$\|(H_k)_{\text{выч}}\| \leqslant [7\varkappa^{*2}\overline{r}_0 - \varkappa^*]\|C_0\| \leqslant \left(\frac{\rho}{4} + \varkappa^*\right)\|C_0\| = \frac{\rho}{4} + \varkappa^*,$$

а значит, нами получено обоснование шага 3.

IV этап. Состоит в уточнении полученного на III этапе приближенного решения системы (2.18), совпадающего с процедурой итерационного уточнения (см., например, [26]) с той лишь разницей, что после каждого шага возникает неуточняемая часть погрешности, оценка которой приводится.

Для начала процесса задаются матрицы

$$H_{k_1}^0 = X_1, \quad C_1 = A_1^*X_1 + X_1A_1 + \widetilde{G}^*C_0G,$$

вычисленные на этапе III.

Сформулируем i-й шаг ($i>1$) процесса уточнения, на котором вычисляется приближенное решение уравнения

$$A_1^* X^{(i)} + X^{(i)} A_1 + \widetilde{G}^* C_i \widetilde{G} = 0.$$

После $(i-1)$-го шага считаются вычисленными матрицы $H_{k_1}^{(i-1)}$ и C_i.

1. Вычисляется матрица

$$X_0^{(i)} = \int_0^1 e^{tA_1^*} \widetilde{G}^* C_i \widetilde{G} e^{tA}\, dt.$$

2. Используя известные матрицы $(B_0)_{\text{выч}}, (B_1)_{\text{выч}}, \ldots, (B_{k_1})_{\text{выч}}$, строится последовательность. Эта последовательность сходится в силу утверждений этапов II и III.

3. Вычисляются матрицы

$$X_i = \widetilde{G}^* X_{k_1}^{(i)} \widetilde{G}, \quad H_{k_1}^{(i)} = H_{k_1}^{(i-1)} + X_i.$$

4. Вычисляется невязка C_{i+1}, ее норма $\|C_{i+1}\|$ и величина $\|C_{i+1} - \widetilde{G}^* C_{i+1} \widetilde{G}\|$:

$$C_{i+1} = A_1^* X_i + X_i A_1 + \widetilde{G}^* C_i \widetilde{G}.$$

В силу результатов предыдущих этапов верны неравенства

$$\|\widetilde{G}^* X_i \widetilde{G} - X_i\| \leqslant 2.7\varkappa^* \delta_1 \|C_i\|,$$

$$\|C_{i+1}\| \leqslant \frac{\rho}{2} \|C_i\|, \quad \|\widetilde{G}^* C_{i+1} \widetilde{G} - C_{i+1}\| \leqslant 7.4\varkappa^* \delta_1 \|C_i\|,$$

которые обеспечивают сходимость итерационного уточнения. Если нарушено хотя бы одно из неравенств, то процесс завершается утверждением, что $\varkappa(A) > \varkappa^*$. Если выполнены оба неравенства, то верно представление

$$\sum_{i=0}^{i_0} (C_{i+1} - \widetilde{G}^* C_{i+1} \widetilde{G}) + \widetilde{G}^* C_{i_0+1} \widetilde{G} = A_1^* H_{k_1}^{(i_0)} + H_{k_1}^{(i_0)} A_1 + \widetilde{G}^* C_0 \widetilde{G},$$

где $C_0 = I$, и, значит, $\widetilde{G}^* C_0 \widetilde{G} = \widetilde{G}^* \widetilde{G}$. Из этого представления с учетом выполнения отмеченных неравенств следует, что

$$\left\| A_1^* H_{k_1}^{(i_0)} + H_{k_1}^{(i_0)} A_1 + \widetilde{G}^* \widetilde{G} \right\| \leqslant \sum_{i=0}^{i_0} \|C_{i+1} - \widetilde{G}^* C_{i+1} \widetilde{G}\| + \|\widetilde{G}^* C_{i_0+1} \widetilde{G}\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{i_0} 7.4\delta_1 \varkappa^* \|C_i\| + \|C_{i_0+1}\| \leqslant 7.4\varkappa^* \delta_1 \frac{1 - (\rho/2)^{i_0+2}}{1 - \rho/2} + (\rho/2)^{i_0+1} \leqslant$$

$$\leqslant 10\varkappa^* \delta_1 + (\rho/2)^{i_0+1}.$$

Кроме того, имеет место оценка

$$\|\widetilde{G}^* H_{k_1}^{(i)} \widetilde{G} - H_{k_1}^{(i)}\| \leqslant \sum_{m=1}^{i} \|X_m - \widetilde{G}^* X_m \widetilde{G}\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{i} 2.7\varkappa^* \delta_1 \|C_{i-1}\| \leqslant \frac{2.7\varkappa^* \delta_1}{1 - \rho/2} \leqslant 4\varkappa^* \delta.$$

Следовательно, можно, воспользовавшись теоремой 1 § 1, утверждать, что

$$\left\| H_{k_1}^{(i_0)} - \widehat{H} \right\| \leqslant \|\widehat{H}\| \frac{10\delta_1 \varkappa^* + 4\delta_1 \varkappa^* + \left(\frac{\rho}{2}\right)^{i_0+1} + 4\delta + 2\delta^2}{1 - 2\sqrt{\varkappa^*}\,\delta - \delta^2},$$

т. е. в силу неравенства (2.9) имеем

$$\left\| H_{k_1}^{(i_0)} - \widehat{H} \right\| \leqslant \|\widehat{H}\| \rho_0.$$

5. Проверяется неравенство

$$\|C_{i+1}\| \leqslant \rho_0/2.$$

Если оно не выполнено, то начинается $(i+1)$-й шаг процесса уточнения. В противном случае матрица $H_{k_1}^{(i_0)}$ $(i = i_0)$ и есть искомое приближение к решению системы (2.18), а именно в силу теоремы 1 § 1 верна оценка

$$\left(\left\| \widehat{G}^* H_{k_1}^{(i)} \widehat{G} - H_{k_1}^{(i)} \right\| \leqslant 4\varkappa^* \delta_1 \right),$$

$$\frac{\left\| \widehat{H} - H_{k_1}^{i_0} \right\|}{\|\widehat{H}\|} \leqslant \frac{\rho_0/2 + 4\varkappa^*\delta_1 + 4\delta + 2\delta^2}{1 - 2\delta\sqrt{\varkappa^*} - \delta^2}.$$

Так как в силу предположения (2.8)

$$[\rho_0/2 + 4\varkappa^*\delta_1 + 4\delta + 2\delta^2] / [1 - 2\delta\sqrt{\varkappa^*} - \delta^2] \leqslant \rho_0,$$

то верна оценка

$$\left\| \widehat{H} - H_{k_1}^{(i_0)} \right\| \leqslant \|\widehat{H}\| \rho_0.$$

V этап. Завершающий, на нем имеем матрицу $\widehat{\widehat{H}}$ приближенного решения уравнения (2.18). Это либо матрица X_1, вычисленная на III этапе, либо матрица $H_{k_0}^{(i_0)}$, вычисленная на IV этапе. Данный этап состоит в том, что вычисляется матрица

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2\|A\|} \widehat{\widehat{H}},$$

являющаяся искомым приближением решения матричной системы (2.1), так как в силу сказанного, верно неравенство

$$\|H - \widetilde{H}\| / \|H\| \leqslant \rho_0.$$

§ 3. Учет погрешностей округления при вычислении матрицы $\int_0^1 e^{tA^*} G^* C G e^{tA}\, dt$

Пусть A — матрица малой нормы $(1/2 \leqslant \|A\| < 1)$ и G — «почти» проектор на подпространство $\mathscr{L}_+(A)$. Для вычисления $\int_0^1 e^{tA^*} G^* C G e^{tA}\, dt$ используем один из известных алгоритмов (см., например, [38]): $(k > 1)$,

$$T_1 = G^*CG, \quad Q_1 = G^*CG,$$

$$T_{k+1} = \frac{1}{k+1} [A^* T_k + T_k A], \quad Q_{k+1} = Q_k + T_{k+1}. \tag{3.1}$$

Если $\mathscr{L}$ — оператор Ляпунова:

$$\mathscr{L}X \equiv A^*X + XA,$$

то из (3.1) следует, что

$$Q_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \mathscr{L}^{(k-1)} G^*CG.$$

Это, в свою очередь, позволяет, используя представление

$$\int_0^1 e^{tA^*}G^*CGe^{tA}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\,\mathscr{L}^{(k-1)}G^*CG, \tag{3.2}$$

сделать вывод:

$$\begin{gathered}\left\| \int_0^1 e^{tA^*}G^*CGe^{tA}\,dt - Q_m \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\,\mathscr{L}^{(k-1)}G^*CG \right\| \leqslant \\ \leqslant \| G^*CG \| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(2\|A\|)^{k-1}}{k!} \leqslant \| G^*CG \| \frac{(2\|A\|)^m}{(m+1)!}\, e^{2\|A\|}.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Выведенное неравенство (3.3) дает оценку точности приближения матрицей Q_m интеграла $\int_0^1 e^{tA^*}G^*CGe^{tA}\,dt$ при любом m. Для получения оптимального приближения матрицы $\int_0^1 e^{tA^*}G^*CGe^{tA}\,dt$ необходимо остановить процесс (3.1) после k_0 шагов, когда гарантированная погрешность вычисления Q_{k_0} станет одного порядка с погрешностью приближения матрицей Q_{k_0} интеграла $\int_0^1 e^{tA^*}G^*CGe^{tA}\,dt$. В конце параграфа указан алгоритм выбора k_0 в каждом конкретном случае. Для учета погрешностей, возникающих при реализации процесса (3.1), достаточно предположить, что матрицы, полученные при этом, связаны соотношениями

$$\begin{gathered}\tilde{T}_1 = G^*CG, \quad \tilde{Q}_1 = G^*CG, \\ \tilde{T}_m = \frac{1}{m}\,[A^*\tilde{T}_{m-1} + \tilde{T}_{m-1}A] + \Psi_m, \quad \tilde{Q}_m = \tilde{Q}_{m-1} + \tilde{T}_m + \Phi_m,\end{gathered} \tag{3.4}$$

в которых Φ_m и Ψ_m — квадратные матрицы размера $N \times N$ обозначают погрешности вычислений. Предположим, что

$$\begin{gathered}\|\Phi_m\| \leqslant d_2\varepsilon_1 (\|\tilde{T}_m\| + \|\tilde{Q}_{m-1}\|), \\ \|\Psi_m\| \leqslant d_1\varepsilon_1/m \|\mathscr{L}\|\, \|\tilde{T}_{m-1}\|,\end{gathered} \tag{3.5}$$

где ε_1 —малая положительная величина, характеризующая разрядную сетку используемого вычислительного устройства, а d_1, d_2 — постоянные, характеризующие применяемый алгоритм расчета формул (3.1). Подробнее об этих постоянных см. [1].

Оценим разность $\tilde{T}_m - \frac{1}{m!}\,\mathscr{L}^{(m-1)}G^*CG$. Из (3.4) следует равенство

$$\tilde{T}_m - \frac{1}{m!}\,\mathscr{L}^{(m-1)}G^*CG = \frac{1}{m}\,\mathscr{L}\left[\tilde{T}_{m-1} - \frac{1}{(m-1)!}\,\mathscr{L}^{(m-2)}G^*CG\right] + \Psi_m,$$

позволяющее вывести цепочку неравенств ($\|\mathscr{L}\|$ — норма оператора $\mathscr{L}$: $\|\mathscr{L}\| \leqslant 2\|A\|$):

$$\begin{gathered}\left\| \tilde{T}_m - \frac{1}{m!}\,\mathscr{L}^{(m-1)}G^*CG \right\| \leqslant \frac{\|\mathscr{L}\|}{m} \left\| \tilde{T}_{m-1} - \frac{1}{(m-1)!}\,\mathscr{L}^{(m-2)}G^*CG \right\| + \|\Psi_m\| \leqslant \\ \leqslant \frac{2\|A\|}{m} \left\| \tilde{T}_{m-1} - \frac{1}{(m-1)!}\,\mathscr{L}^{(m-2)}G^*CG \right\| \leqslant 2d_1\varepsilon_1 \|A\| \frac{\|\tilde{T}_{m-1}\|}{m} \leqslant \\ \leqslant \frac{2\|A\|}{m}(1 + d_1\varepsilon_1) \left\| \tilde{T}_{m-1} - \frac{1}{(m-1)!}\,\mathscr{L}^{(m-2)}G^*CG \right\| + \\ + d_1\varepsilon_1 \frac{2\|A\|}{m} \left\| \frac{1}{(m-1)!}\,\mathscr{L}^{(m-2)}G^*CG \right\| \leqslant d_1\varepsilon_1 2\|A\| \frac{(2\|A\|)^{m-2}}{(m-1)!} \|G^*CG\| \leqslant \\ \leqslant d_1\varepsilon_1 \frac{(2\|A\|)^{m-1}}{(m-1)!} \|G^*CG\|.\end{gathered}$$

Опираясь на полученную оценку и используя неравенства (3.5), докажем по индукции, что если

$$\sum_{m=2}^{k} \varepsilon_1 (1.01\, d_2 m + 1.01 d_1 2 \| A \|) \leqslant 0.01,$$

то

$$\| \widetilde{Q}_k - Q_k \| \leqslant 1.01 \| G^* C G \| \frac{d_1 k + 2 \| A \| d_1}{2 \| A \|} e^{2\|A\|} \varepsilon_1. \tag{3.6}$$

В самом деле, при $k = 2$ неравенство (3.6) справедливо в силу (3.2) — (3.5). Предположим, что оно верно при всех $k < j$, и докажем, что тогда (3.6) верно и при $k = j$. В силу сделанных предположений справедлива цепочка неравенств:

$$\| \widetilde{Q}_j - Q_j \| \leqslant \left\| \sum_{m=2}^{j} T_m - \frac{1}{m!} \mathscr{L}^{(m-1)} G^* C G + \Phi_m \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=2}^{j} \left\{ \left\| T_m - \frac{1}{m!} \mathscr{L}^{(m-1)} G^* C G \right\| (1 + d_2 \varepsilon_1) + d_2 \varepsilon_1 \left\| \frac{1}{m!} \mathscr{L}^{(m-1)} G^* C G \right\| + \right.$$

$$\left. + d_2 \varepsilon_1 \| Q_{m-1} \| + d_2 \varepsilon_1 \| \widetilde{Q}_{m-1} - Q_{m-1} \| \right\} \leqslant$$

$$\leqslant (1 + d_2 \varepsilon_1) \sum_{m=2}^{j} d_1 \varepsilon_1 \frac{(2 \| A \|)^{m-1}}{(m-1)!} \| G^* C G \| + d_2 \varepsilon_1 \sum_{m=2}^{j} \sum_{k=1}^{m} \left\| \frac{1}{k!} \mathscr{L}^{(k-1)} G^* C G \right\| +$$

$$+ \sum_{m=2}^{j} d_2 \varepsilon_1 \frac{\| G^* C G \|}{2 \| A \|} e^{2\|A\|} 1.01 (d_2 m + 2 \| A \| d_1) \leqslant$$

$$\leqslant 1.01 (d_2 j + 2 \| A \| d_1) \frac{\| G^* C G \|}{2 \| A \|} e^{2\|A\|} \varepsilon_1.$$

Полученная оценка вместе с (3.3) позволяет заключить, что наиболее подходящим выбором значения k_0 для лучшего приближения матричного интеграла $\int_0^1 e^{tA^*} G^* C G e^{tA}\, dt$ является минимальное среди всех целых k, удовлетворяющих оценке $1.01 (d_2 k + 2\|A\| d_1) \geqslant (2\|A\|)^{k+1} / (k+1)$. Возникающая при этом погрешность оценивается неравенством

$$\left\| \widetilde{Q}_{k_0} - \int_0^1 e^{tA^*} G^* C G e^{tA}\, dt \right\| \leqslant 2.02 (d_2 k_0 + 2 \| A \| d_1) \frac{\| G^* C G \|}{2 \| A \|} e^{2\|A\|} \varepsilon_1.$$

§ 4. Теорема о точности вычисления $e^{pA} \widetilde{G}$

Пусть A — экспоненциально дихотомичная матрица размера $N \times N$ и $\varkappa^*$ — уровень «практической» дихотомии. Предположим, что у нас есть «почти» проектор $\widetilde{G}$, приближающий проектор $G = G(+0, A)$ с точностью δ:

$$\| G - \widetilde{G} \| \leqslant \delta. \tag{4.1}$$

Обозначим для удобства $A_1 = \frac{1}{2 \| A \|} A$. Рассмотрим последовательность матриц $B_0, B_1, B_2, \ldots$, связанных с матрицами $e^{A_1} \widetilde{G}$ и B_j^2 $(j \geqslant 0)$ равенствами

$$B_0 = e^{A_1} \widetilde{G} + \Phi_0, \quad B_j = B_{j-1}^2 + \Phi_j, \quad j \geqslant 1. \tag{4.2}$$

В этом случае матрицы B_k можно рассматривать как приближения к матрицам $e^{2^k A_1} G$. Допустим, для Φ_0, Φ_j $(j \geqslant 1)$ справедливы оценки

$$\| \Phi_j \| \leqslant \frac{r_0}{2 (\varkappa^*)^2} \| B_{j-1} \|^2, \quad \| B_0 \| \leqslant \frac{r_0}{4 \varkappa^*}, \tag{4.3}$$

где r_0 — маленькое положительное число. Положим

$$\bar{r}_0 = r_0 + 4\sqrt{e}\varkappa^*\delta, \tag{4.4}$$

тогда справедливы неравенства

$$\|\overline{\Phi}_0\| \leqslant \frac{\bar{r}_0}{4\varkappa^*}, \quad \|\Phi_j\| \leqslant \frac{\bar{r}_0}{2(\varkappa^*)^2}\|B_{j-1}\|^2, \tag{4.5}$$

где

$$\overline{\Phi}_0 = B_0 - e^{A_1}G. \tag{4.6}$$

В самом деле, из (4.2) и (4.4) следует, что

$$\overline{\Phi}_0 = \Phi_0 + e^{A_2}(\widetilde{G} - G),$$

т. е. с учетом (4.1) и (4.3) имеем оценку

$$\|\overline{\Phi}_0\| \leqslant \frac{r_0}{4\varkappa^*} + \sqrt{e}\,\delta,$$

получение которой и доказывает справедливость (4.5). Из (4.2), (4.5), (4.6) следует, что в силу следствия к теореме работы [30] справедлива теорема.

Теорема 3. *Если* $\varkappa(A) < \varkappa^*$, *то для матриц из* (4.2), (4.5), (4.6) *верны оценки*

$$\|B_k\| \leqslant \frac{2^k\bar{r}_0}{1 - 2^k\bar{r}_0} + \sqrt{\varkappa(A)}\, e^{-2^{k-1}/\varkappa(A)},$$

если только $k \leqslant k_0$, *где* k_0 — *целое число, удовлетворяющее неравенствам*

$$2^{k_0}\bar{r}_0 < 0.5 < 2^{k_0+1}\bar{r}_0.$$

§ 5. Учет погрешности вычисления $\int\limits_0^{2k} e^{tA_1^*}G^*CG^{tA_1}\,dt$

Продолжая рассуждения предыдущего параграфа, определим целое число k_1 из неравенств

$$(2^{k_1} - 1)\bar{r}_0 < 0.5 < (2^{k_1+1} - 1)\bar{r}_0. \tag{5.1}$$

Сравнивая (5.1) и (4.7), видим, что из цепочки неравенств:

$$2^{k_0+2} > \frac{1}{\bar{r}_0} > 2(2^{k_1} - 1) > 2^{k_1+1}$$

следует $k_0 + 1 > k_1$, а значит, так как k_0 и k_1 — целые числа, $k_0 \geqslant k_1$.

Рассмотрим последовательность матриц $\widehat{H}_0, \widehat{H}_1, \ldots, \widehat{H}_{k_1}$, связанную при помощи квадратных матриц $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{k_1}$ рекуррентными соотношениями $(m \geqslant 1)$

$$\begin{gathered}\widehat{H}_0 = \int\limits_0^1 e^{tA_1^*}\widetilde{G}^*C\widetilde{G}e^{tA_1}\,dt + \Phi_0,\\ \widehat{H}_m = \widehat{H}_{m-1} + B_{m-1}^*\widehat{H}_{m-1}B_{m-1} + \Phi_m,\end{gathered} \tag{5.2}$$

где $B_0, B_1, \ldots, B_{k_1}$ — матрицы, исследованные в § 4, а Φ_m моделируют влияние погрешностей выполнения соответствующих матричных операций. Допустим, точность этих операций оценивается при помощи малого положительного числа α, а именно выполнены оценки

$$\begin{gathered}\|\Phi_0\| \leqslant \alpha\|\widetilde{G}^*C\widetilde{G}\|,\\ \|\Phi_m\| \leqslant \alpha\varkappa^*\|C\|, \quad j = 1, 2, \ldots, k_1.\end{gathered} \tag{5.3}$$

Матрица $\widehat{H}_0$ допускает представление

$$\widehat{H}_0=\int_0^1 e^{tA_1}G^*CGe^{tA_1}+\overline{\Phi}_0, \tag{5.4}$$

где

$$\overline{\Phi}_0=\int_0^1 e^{tA_1^*}\widetilde{G}^*C\widetilde{G}e^{tA_1}\,dt.$$

Легко проверить, что из равенства

$$\widetilde{G}^*C\widetilde{G}-G^*CG=(\widetilde{G}-G)^*CG+G^*C(\widetilde{G}-G)+(\widetilde{G}-G)^*C(\widetilde{G}-G)$$

следует оценка

$$\|\widetilde{G}^*C\widetilde{G}-G^*CG\|\leqslant\|C\|(2\delta\sqrt{\varkappa(A)}+\delta^2). \tag{5.5}$$

Далее выпишем, учитывая (5.5), простую цепочку неравенств:

$$\|\overline{\Phi}_0\|\leqslant\|\Phi_0\|+\|\widetilde{G}^*C\widetilde{G}-G^*CG\|\left\|\int_0^1 e^{tA_1^*}e^{tA_1}\,dt\right\|\leqslant\alpha\|\widetilde{G}^*C\widetilde{G}\|+$$

$$+2\|\widetilde{G}^*C\widetilde{G}-G^*CG\|\leqslant\alpha\varkappa(A)\|C\|+(2+\alpha)\|\widetilde{G}^*C\widetilde{G}-G^*CG\|\leqslant$$

$$\leqslant\alpha\varkappa(A)\|C\|+(2+\alpha)\delta\left(2\sqrt{\varkappa(A)}+\delta\right)\|C\|\leqslant\left(\alpha\varkappa^*+6\delta\sqrt{\varkappa^*}\right)\|C\|,$$

т. е. получена оценка

$$\|\overline{\Phi}_0\|\leqslant(\alpha\varkappa^*+6\delta\sqrt{\varkappa^*})\|C\|. \tag{5.6}$$

Теорема 4. *Если для всех матриц* $\widehat{H}_m$, $m\leqslant k_1$, *удовлетворяющих процессу* (4.2), (4.3), (5.4), (5.6), *верно, что* ($\varkappa(A)<\varkappa^*$)

$$\|\widehat{H}_m\|\leqslant\frac{4}{3}\varkappa^*\|C\|, \tag{5.7}$$

то, если предположить, что ($\overline{r}_0=4\sqrt{e}\delta\varkappa^*+r_0$, $\overline{\alpha}=\alpha+6\delta/\sqrt{\varkappa^*}$),

$$[1+k_1(1+4\varkappa^*)]\,\overline{\alpha}/\overline{r}_0\leqslant 1, \tag{5.8}$$

справедлива оценка (s_1, $s_2=0$, 1)

$$\left\|G^{+s_1}\left[H_{k_1}-\int_0^{2^{k_1}} e^{tA_1^*}G^*CGe^{tA_1}\,dt\,G^{s_2}\right]\right\|\leqslant 7\varkappa^{*2}\overline{r}_0\|C\|. \tag{5.9}$$

Для удобства доказательства теоремы введем обозначения:

$$\xi_p=B_{m_1}B_{m_2}\ldots B_{m_s}-e^{pA_2}G;\quad p=2^{m_1}+2^{m_2}+\ldots+2^{m_s},\quad 0\leqslant\tau\leqslant 1,$$

$$\xi_p(\tau)=\left(e^{\tau A_1}G\xi_p\right)^*G^*CGe^{\tau A_1}G\xi_p+\left(e^{\tau A_1}G\xi_p\right)^*G^*CGe^{(\tau+p)A_1}G+$$

$$+G^*e^{(\tau+p)A_1^*}G^*CGe^{\tau A_1}G\xi_p;$$

$$\eta_q=B_{n_1}\ldots B_{n_j}-e^{qA_1}G;\quad q=2^{n_1}+2^{n_2}+\ldots+2^{n_j};$$

$$k_1-1\geqslant m_s>\ldots>m_2>m_1\geqslant 0;\ k_1-1\geqslant n_j>\ldots>n_2>n_1\geqslant m.$$

В силу замечания к следствию теоремы 1 гл. 2 имеют место неравенства ($s=0$, 1)

$$\left.\begin{aligned}&\left\|e^{\tau A_1}G\xi_pG^s\right\|\leqslant\delta_1(t)\,e^{-\frac{t}{2\varkappa^*}},\\&\left\|e^{\tau' A_1}G\eta_qG^s\right\|\leqslant\delta_1(t')\,e^{-\frac{t'}{2\varkappa^*}},\end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

где

$$\delta_1(\tilde{t})=(\tilde{t}-1)\overline{r}_0/(1-(\tilde{t}-1)r_0);$$
$$t'=q+\tau',\ t=p+\tau,\ 1>\tau,\ \tau'\geqslant 0.$$

При $0<(t-1)\bar{r}_0<0.5$ выполнена оценка

$$\delta_1^2(t)+2\delta_1(t)\leqslant 6(t-1)\bar{r}_0. \tag{5.11}$$

Переходя к доказательству теоремы, заметим, используя введенные обозначения, что из ее условия следует равенство

$$\begin{aligned}\widehat{H}_k&=\widehat{H}_0+\sum_{p=1}^{2^k-1}\left(\xi_p+Ge^{pA_1}\right)^*\widehat{H}_0\left(\xi_p+Ge^{pA_1}\right)+\\&+\sum_{m=0}\;\sum_{k-1\geqslant n_j>\ldots>n_1\geqslant m}\;\sum_{j=1}^{k-1-m}B_{n_j}^*\ldots B_{n_1}^*\Phi_m B_{n_1}\ldots B_{n_j}=\\&=\int_0^{2^k}e^{tA_1}G^*CGe^{tA_1}\,dt+\sum_{p=1}^{2^k-1}\int_0^1\zeta_p(\tau)\,d\tau+\Phi_k+\\&+\sum_{m=0}^{k-1}\left\{\Phi_m+\sum_{q=2^m}^{2^k-2^m}\left(e^{qA_1}+\eta_q\right)^*\Phi_m\left(e^{qA_1}+\eta_q\right)\right\}.\end{aligned} \tag{5.12}$$

Используя неравенства (5.10) и (5.11), запишем

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^1 G^{*s_1}\zeta_p(\tau)\,d\tau\,G^{s_2}\right\|&\leqslant\|C\|\int_0^1\delta_1^2(\tau+p)+2\delta_1(\tau+p)e^{-\frac{\tau+p}{\varkappa^*}}\,d\tau\leqslant\\&\leqslant\|C\|\int_0^1 6(\tau+p-1)\,\bar{r}_0e^{-\frac{\tau+p}{\varkappa^*}}\,d\tau=\|C\|\int_p^{p+1}6\,(t-1)\,\bar{r}_0e^{-t/\varkappa^*}\,dt.\end{aligned}$$

Полученное неравенство позволяет убедиться в справедливости

$$\begin{aligned}&\left\|G^{*s_1}\sum_{p=1}^{2^k-1}\int_0^1\zeta_p(\tau)\,d\tau\,G^{s_2}\right\|\leqslant\|C\|\int_1^{2^k}6\,(t-1)\,\bar{\eta}_0e^{-\frac{t}{\varkappa^*}}\,dt=\\&\leqslant\|C\|\left\{6\bar{r}_0\varkappa^{*2}e^{-\frac{1}{\varkappa^*}}-\left[6\bar{r}_0\left(2^k-1\right)\varkappa^*+6\bar{r}_0\varkappa^{*2}\right]e^{-\frac{2^k}{\varkappa^*}}\right\}\leqslant 6\bar{r}_0\varkappa^{*2}\,\|C\|.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Вывод неравенств, оценивающих оставшиеся слагаемые в (5.12), основывается на следующей цепочке:

$$\begin{aligned}&\left\|G^{*s_1}\Phi_mG^{s_2}+\sum_{q=2^m}^{2^k-2^m}G^{*s_1}\left(e^{qA_1}+\eta_q\right)^*\Phi_m\left(e^{qA_1}+\eta_q\right)G^{s_2}\right\|\leqslant\\&\leqslant\left\|G^{*s_1}\Phi_mG^{s_2}\right\|+\|\Phi_m\|\left\{\sum_{q=2^m}^{2^k-2^m}\left[\delta_1(q)+\sqrt{\varkappa^*}\right]^2e^{-q/\varkappa^*}\right\}\leqslant\\&\leqslant\|\Phi_m\|\left\{\varkappa^*+\sum_{q=2^m}^{2^k-2^m}4\varkappa^*e^{-q/\varkappa^*}\right\}.\end{aligned}$$

В самом деле, в силу предположения $\|\varphi_m\|\leqslant\bar{\alpha}\varkappa^*\|C\|$ верна цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{m=0}^{k-1}\left[G^{*s_1}\Phi_mG^{s_2}+\sum_{q=2^m}^{2^k-2^m}G^{*s_1}\left(e^{qA_1}+\eta_q\right)^*\Phi_m\left(e^{qA_1}+\eta_q\right)G^{s_2}\right]\right\|\leqslant\\&\leqslant\sum_{m=0}^{k-1}\left[\varkappa^*+\sum_{q=2^m}^{2^k-2^m}4\varkappa^*e^{-q/\varkappa^*}\right]\bar{\alpha}\varkappa^*\,\|C\|\leqslant\\&\leqslant\|c\|\,\bar{\alpha}\varkappa^{*2}k\left[1+4\varkappa^*e^{-\frac{1}{\varkappa^*}}\right]\leqslant\|C\|\,\bar{\alpha}\varkappa^{*2}k\,(1+4\varkappa^*).\end{aligned} \tag{5.14}$$

Далее, так как $\|\Phi_k\| \leqslant \bar{\alpha}\varkappa^* \|C\|$, $\|G^{*s_1}\Phi_k G^{s_2}\| \leqslant \bar{\alpha}\varkappa^{*2}\|C\|$ в силу полученных оценок (5.13), (5.14) из (5.12) следует оценка

$$\left\| \widehat{H}_{k_1} - \int\limits_0^{2^{k_1}} e^{tA^*} G^* C G e^{tA}\, dt \right\| \leqslant \bar{\alpha}\varkappa^{*2}\|C\| + \|C\| 6\bar{r}_0 \varkappa^{*2} +$$

$$+ \|C\| \bar{\alpha}\varkappa^{*2} k_1 (1 + 4\varkappa^*) = \|C\| \varkappa^{*2} \bar{r}_0 \left[6 + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{r}_0} (1 + k_1 (1 + 4\varkappa^*)) \right],$$

из которой, в свою очередь, ввиду предположения (5.8) получаем требуемую оценку (5.9). Теорема доказана.

Глава 5

ОБОБЩЕНИЕ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА НА СЛУЧАЙ НЕГУРВИЦЕВЫХ МАТРИЦ И ТОЧНОСТЬ РАСЧЕТА ПРОЕКТОРОВ

Введение

Алгебраическую систему матричных уравнений

$$\begin{gathered} G^2 = G, \quad GA = AG, \\ A^* H(C) + H(C) A + G^* C G - (I - G)^* C (I - G) = 0, \\ G^* H(C) G + (I - G)^* H(C) (I - G) - H(C) = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

предлагаем рассматривать в качестве обобщения матричного уравнения Ляпунова

$$A^* H + HA + C = 0 \tag{2}$$

на случай негурвицевых A. Если A гурвицева, то уравнение Ляпунова (2) и система (1) эквивалентны. Но в отличие от уравнения (2) для однозначной разрешимости (1) при любой $C = C^*$ достаточно, чтобы у A не было собственных значений на мнимой оси. Доказательство соответствующей теоремы приведено в § 1. При этом существенно используется введенный в [2] параметр экспоненциальной дихотомии $\varkappa(A)$ (конечный, если у A нет собственных значений на мнимой оси). Хотя система (1) и переопределенная, но если на некоторых матрицах $\widetilde{G}$ и $\widetilde{H} = \widetilde{H}^* > 0$ уравнения (1) выполнены с небольшой погрешностью, то гарантируется не слишком большое отличие данной матрицы от точных решений (1), что следует из теоремы 2 § 2. Ее доказательство основано на лемме, которой посвящен § 3.

Известная погрешность приближенного решения (1) позволяет выписать оценки погрешности определения и гарантировать точность расчета проекторов на максимальные инвариантные подпространства A, отвечающие собственным значениям, лежащим строго в правой и в левой полуплоскостях. Используя это в § 4, приведем схему расчета с гарантированной точностью проекторов $G(+0, A)$ и $G(-0, A)$ для экспоненциально дихотомичной A.

§ 1. Обобщение матричного уравнения Ляпунова для негурвицевых матриц

≈ §6, 7

Хорошо известна теорема Ляпунова [39]: *для того чтобы все собственные значения вещественной $N \times N$ матрицы A имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы матричное уравнение*

$$A^* H + HA + I = 0,$$

где I — единичная матрица размера $N\times N$, имело в качестве решения H матрицу коэффициентов некоторой положительно определенной квадратичной формы $(Hx, x)>0$. Эта теорема позволяет исследовать устойчивость линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а также нелинейных систем по их линейному приближению и допускает распространение [40]: *для того чтобы у матрицы A было $N_+(A)$ собственных чисел в левой полуплоскости и $N_-(A)$ — в правой*, необходимо чтобы матричное уравнение

$$A^*H+HA+C=0 \tag{1.1}$$

имело хотя бы при одной матрице $C=C^*>0$ в качестве решения H симметричную матрицу, у которой $N_+(A)$ положительных собственных значений и $N_-(A)$ отрицательных $(N=N+(A)+N-(A))$.

Эта теорема позволяет решать вопрос об экспоненциальной дихотомии матрицы A, а именно вопрос о том, есть ли у матрицы A собственные числа на мнимой оси. Если нет, то A называется экспоненциально дихотомичной. Напомним, что условием разрешимости (1.1) для любой матрицы $C=C^*$ является невыполнение равенств $\lambda_i(A)+\overline{\lambda}_j(A)=0$, $i,j=1, 2, \ldots, N$, т. е. если у матрицы A есть собственные значения, симметричные относительно начала координат, то мы не можем, задавшись произвольной матрицей $C=C^*$, получить матрицу H как решение (1.1), хотя у A и не будет собственных значений на мнимой оси. Хотя у целого класса матриц (гамильтоновых) собственные значения расположены симметрично относительно начала координат.

В этом параграфе предлагаем обобщение матричного уравнения (1.1) на случай негурвицевых матриц:

$$\begin{gathered} G^2=G, \quad AG=GA, \\ A^*H(C)+H(C)A+G^*CG-(I-G)^*C(I-G)=0, \\ G^*H(C)G+(I-G)^*H(C)(I-G)-H(C)=0. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь докажем теорему. В ее формулировке используем параметр экспоненциальной дихотомии $\varkappa(A)$ (см. [2]).

Теорема 1. *Если $C=C^*$, $H(C)=H^*(C)$ — положительно определенные матрицы, связанные с матрицами A и G системой (1.2), то матрица A экспоненциально дихотомична и для нее*

$$G=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(zI-A)^{-1}\,dz, \quad H(C)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(A^*+izI)^{-1}C(A-izI)^{-1}\,dz,$$

$$\frac{\varkappa(A)}{\|C^{-1}\|}\leqslant 2\|A\|\|H(C)\|\leqslant\varkappa(A)\|C\|, \quad \|H(C)\|\|H^{-1}(C)\|\leqslant\|C\|\|C^{-1}\|\varkappa(A),$$

где Γ — замкнутый без самопересечений контур, содержащий все собственные значения A с отрицательной вещественной частью. С другой стороны, если A экспоненциально дихотомична $(\varkappa(A)<\infty)$, то при любой положительно определенной $C=C^*>0$ система (1.2) однозначно разрешима относительно G и положительно определенной $H(C)=H^*(C)>0$, причем $N_+^{(A)}=\operatorname{rank}(G)$, $N_-(A)=N-N_+(A)$, где *$N_+(A)$ и $N_-(A)$ — количество собственных значений A, лежащих строго в левой и правой полуплоскостях соответственно.*

Доказательство. Пусть G и $H(C)=H^*(C)>0$ удовлетворяют системе (1.2).

Если $G=0$, то $I-G=I$ и, значит, положительно определенная матрица $H(C)=H^*(C)>0$ удовлетворяет уравнению Ляпунова $A^*H(C)+H(C)A-C=0$, $C=C^*>0$. Следовательно, в силу теоремы Ляпунова у матрицы A все собственные значения лежат строго в правой полуплоскости, т. е. $N_+(A)=0$, $N_-(A)=N$ и, значит, матрица A экспоненциально дихотомична.

Далее предположим, что $G \neq 0$. Тогда из первых двух равенств (2) следует, что G — проектор на инвариантное подпространство матрицы A. Обозначим через N_1 его размерность. Если $N_1 = N$, то $\operatorname{rank} G = N$. Это вместе с условием $G^2 = G$ гарантирует выполнение равенства $G = I$ и, значит, равенства $I - G = 0$. В данном случае система (1.2) эквивалентна матричному уравнению Ляпунова $A^*H(C) + H(C)A + C = 0$, $C = C^* > 0$, где $H(C) = H^*(C) > 0$ — положительно определенная матрица. Опять же, воспользовавшись теоремой Ляпунова, можно утверждать, что у матрицы A все собственные значения лежат строго в левой полуплоскости, т. е. и в этом случае A экспоненциально дихотомична.

Далее будем считать, что

$$G \neq 0, \quad G \neq I, \quad 0 < N_2 < N.$$

Тогда так как G — проектор, то существует ортогональная матрица U такая, что

$$U^*GU = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & I_{N_1} \end{pmatrix},$$

где L — некоторая матрица, у которой $N - N_1$ строк и N_1 столбцов.

Введем матрицы B_1, B_2, D, D_1 (матрица B_2 размера $N_1 \times N_1$), удовлетворяющие равенству

$$U^*AU = \begin{pmatrix} B_1 & D \\ D_1 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $D_1 = 0$ и $B_1L + D - LB_2 = 0$. Для этого достаточно воспользоваться равенством $AG = GA$ и легко проверяемыми равенствами

$$U^*AUU^*GU = \begin{pmatrix} B_1 & D \\ D_1 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & I_{N_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_1L + D \\ 0 & D_1L + B_2 \end{pmatrix},$$

$$U^*GUU^*AU = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & I_{N_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & D \\ D_1 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} LD_1 & LB_2 \\ D_1 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Итак, мы убедились в том, что

$$U^*AU = \begin{pmatrix} B_1 & D \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Теперь сосредоточим наше внимание на двух последних равенствах в системе (1.2), для чего нам потребуются обозначения

$$H_1 = G^*HG, \quad H_2 = (I - G)^*H(I - G), \tag{1.3}$$

$$U^*H_mU = \begin{pmatrix} H_{11}^{(m)} & H_{12}^{(m)} \\ H_{21}^{(m)} & H_{22}^{(m)} \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2; \qquad U^*CU = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

где $H_{22}^{(1)}$, $H_{22}^{(2)}$, C_{22} — матрицы размера $N_1 \times N_1$. Нетрудно проверить, опираясь на равенства

$$G^2 = G, \quad (I - G)^2 = (I - G), \quad (I - G)G = G(I - G) = 0,$$

что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &G^*H_1G = H_1, \quad (I - G)^*H_2(I - G) = H_2, \\ &(I - G)^*H_1(I - G) = 0, \quad G^*H_2G = 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Используя их, из (1.2) можно выписать две системы матричных уравнений:

$$\begin{cases} A^*H_1 + H_1A + G^*CG = 0, \\ G^*H_1G - H_1 = 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\begin{cases} A^*H_2 + H_2A - (I - G)^*C(I - G) = 0, \\ (I - G)^*H_2(I - G) - H_2 = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Для начала займемся системой (1.6). Ее ввиду (1.4) можно переписать так:

$$\begin{pmatrix} B_1^* & 0 \\ D^* & B_2^* \end{pmatrix} U^*H_1U + U^*H_1U \begin{pmatrix} B_1 & D \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & I \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & I \end{pmatrix} = 0, \quad (1.8)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ L^* & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11}^{(1)} & H_{12}^{(1)} \\ H_{21}^{(1)} & H_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}^{(1)} & H_{12}^{(1)} \\ H_{21}^{(1)} & H_{22}^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Из (1.9) получаем равенство

$$\begin{pmatrix} H_{11}^{(1)} & H_{12}^{(1)} \\ H_{21}^{(1)} & H_{22}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L^*H_{11}^{(1)}L + L^*H_{12}^{(1)} + H_{21}^{(1)}L + H_{22}^{(1)} \end{pmatrix},$$

т. е. $H_{11}^{(1)} = 0$, $H_{12}^{(1)} = 0$, $H_{21}^{(1)} = 0$ и, значит, ввиду обозначения (1.3)

$$U^*H_1U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{22}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Подставляя полученное представление в (1.8), можно выписать равенство для определения $H_{22}^{(1)}$:

$$B_2^*H_{22}^{(1)} + H_{22}^{(1)}B_2 + L^*C_{11}L + C_{21}L + L^*C_{12} + C_{22} = 0. \quad (1.10)$$

При выводе (1.10) мы воспользовались равенством

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ L^* & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L^*C_{11}L + L^*C_{12} + C_{12}L + C_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Покажем, что матрицы $H_{22}^{(1)}$ и $L^*C_{11}L + L^*C_{12} + C_{21}L + C_{22}$ положительно определены. Возьмем ненулевой вектор x размера N_1 ($\|x\| \neq 0$). Тогда

$$\begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Lx \\ x \end{pmatrix}, \quad \left\| \begin{pmatrix} Lx \\ x \end{pmatrix} \right\| \geqslant \|x\| > 0.$$

И значит, ввиду (1.11) и условия $C^* = C > 0$ справедлива цепочка неравенств:

$$([L^*C_{11}L + C_{21}L + L^*C_{12} + C_{22}]\, x, x) = \left(\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Lx \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Lx \\ x \end{bmatrix} \right) > 0.$$

Совершенно аналогично доказывается, что так как $H(C) = H^*(C) > 0$ и $H_1 = G^*H(C)G$, то $L^*H_{11}^{(1)}L + L^*H_{12}^{(1)} + H_{21}^{(1)}L + H_{22}^{(1)} > 0$. Следовательно, для завершения вывода условия $H_{22}^{(1)} > 0$ осталось напомнить полученные ранее равенства $H_{11}^{(1} = 0$, $H_{12}^{(1)} = 0$, $H_{21}^{(1)} = 0$.

Убедившись, что $H_{22}^{(1)} > 0$ и $L^*C_{11}L + L^*C_{12} + C_{12}L + C_{22} > 0$, можно, воспользовавшись теоремой Ляпунова, утверждать: у матрицы B_2 все собственные значения лежат в левой полуплоскости.

Покажем теперь, что из условия теоремы и системы (1.7) следует, что у матрицы B_1 все собственные значения расположены в правой полуплоскости, что вместе с доказанным утверждением о гурвицевости B_2 обеспечит экспоненциальную дихотомию матрицы A, причем $N_+(A) = N_1$, $N_-(A) = N - N_1$.

Систему (1.7) можно, используя обозначения (1.4), переписать в эквивалентном виде:

$$\begin{pmatrix} B^* & 0 \\ D^* & B_2^* \end{pmatrix} U^*H_2U + U^*H_2U \begin{pmatrix} B_1 & D \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ -L^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -L^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11}^{(2)} & H_{12}^{(2)} \\ H_{21}^{(2)} & H_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11}^{(2)} & H_{12}^{(2)} \\ H_{21}^{(2)} & H_{22}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Нетрудно проверить, что из (1.13) следуют равенства

$$H_{12}^{(2)} = -H_{11}^{(2)}L, \quad H_{21}^{(2)} = -L^*H_{11}^{(2)}, \quad H_{22}^{(2)} = L^*H_{11}^{(2)}L,$$

которые позволяют утверждать: матрица H_2 однозначно восстанавливается по матрицам L и $H_{11}^{(2)}$.

В свою очередь, из (1.12) можно выписать определяющее уравнение для $H_{11}^{(2)}$:

$$B_1^*H_{11}^{(2)} + H_{11}^{(2)}B_1 - C_{11} = 0. \tag{1.14}$$

Здесь C_{11} — симметричная положительно определенная матрица. В самом деле, из условия $C = C^* > 0$ и определения

$$U^*CU = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

где U — ортогональная, следует, что $C_{11} = C_{11}^* > 0$.

Покажем, что $H_{11}^{(2)} = [H_{11}^{(2)}]^* > 0$. По условию $H(C) = H^*(C) > 0$ и $H_2 = (I-G)^*H(C)(I-G)$, т. е. $H_2 = H_2^*$. Обозначим для удобства

$$U^*H(C)U = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix},$$

где h_{22} — матрица размера $N_1 \times N_1$. Тогда, используя определение (1.4), запишем

$$\begin{pmatrix} H_{11}^{(2)} & H_{12}^{(2)} \\ H_{21}^{(2)} & H_{22}^{(2)} \end{pmatrix} = U^*H_2U = U^*(I-G)^*H(C)(I-G)U =$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -L^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & -h_{11}L \\ -L^*h_{11} & L^*h_{11}L \end{pmatrix},$$

и так как $H_{11}^{(2)} = h_{11}$ и $h_{11} = h_{11}^* > 0$, то $H_{11}^{(2)} = [H_{11}^{(2)}]^* > 0$.

Итак, убедившись в том, что матрицы $H_{11}^{(2)}$ и C_{11} симметричные положительно определенные, можно, воспользовавшись теоремой Ляпунова, утверждать, что у матрицы A все собственные значения расположены строго в правой полуплоскости.

Тем самым закончим доказательство того факта, что если $C = C^* > 0$, G и $H(C) = H^*(C) > 0$ удовлетворяют системе (1.2), то A — экспоненциально дихотомичная матрица, а G — проектор на максимальное инвариантное подпространство матрицы A, отвечающее собственным значениям, расположенным в левой полуплоскости и, значит, $N_+(A) = \operatorname{rank} G$, $N_-(A) = N - N_+(A)$.

Пусть теперь A — экспоненциально дихотомичная матрица и для некоторой положительно определенной $C = C^* > 0$ существует пара матриц G и $H(C) = H^*(C) > 0$ удовлетворяют системе (1.2). В этом случае матрица G является проектором на максимальное инвариантное подпространство, отвечающее собственным значениям, расположенным в левой полуплоскости, и $\operatorname{rank} G = N_+(A)$, причем для него должно выполняться равенство $AG = GA$. В самом деле, так как A экспоненциально дихотомична, то в силу теоремы Шура существует ортогональная матрица V такая, что

$$V^*AV = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

где A_1 размера $N_+(A) \times N_+(A)$, A_1 и $-A_2$ — гурвицевы.

Обозначим

$$V^*GV = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

где G_{11} — матрица размера $N_+(A)\times N_1(A)$. Так как G — проектор на инвариантное подпространство матрицы A такой, что V^*GV проектирует $\begin{pmatrix} I_{N_+(A)} \\ 0 \end{pmatrix}$ в себя, то из (1.16) следуют равенства $G_{11}=I$, $G_{21}=0$. Следовательно, (1.16) переписывается в виде

$$V^*GV = \begin{pmatrix} I & G_{12} \\ 0 & G_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

В то же время, так как $\operatorname{rank} G = N_+(A)$, в (1.17) должно выполняться равенство $G_{22}=0$. Мы пока еще не воспользовались условием $AG=GA$. Покажем, что оно позволяет выписать уравнение, единственным решением которого будет G_{12}. Для этого заметим, что из (1.15) и (1.17) следуют равенства

$$AG = V\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & G_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^* = V\begin{pmatrix} A_1 & A_1G_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^*,$$

$$GA = V\begin{pmatrix} I & G_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}V^* = V\begin{pmatrix} A_1 & A_3+G_{12}A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V^*,$$

и, учитывая равенство $AG=GA$, получим

$$A_1G_{12}-G_{12}A_2-A_3=0.$$

Так как A_1 и $-A_2$ — гурвицевы, то это уравнение однозначно разрешимо относительно G_{12}.

Итак, мы показали, что матрица G является единственным проектором на максимальное инвариантное подпространство матрицы, отвечающее собственным значениям в левой полуплоскости и удовлетворяющее равенству $AG=GA$. Ясно, что если Γ — контур без самопересечений, содержащий все собственные значения A, расположенные в левой полуплоскости, то для G справедливо интегральное представление (см. гл. 1)

$$G = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (zI-A)^{-1}\,dz.$$

Теперь покажем, что если A — экспоненциально дихотомичная матрица, то для любой $C=C^*>0$ существуют матрицы G и $H(C)=H^*(C)>0$, удовлетворяющие (1.2).

Известно, что если A экспоненциально дихотомична, то существует единственная матричная функция $G(t,A)$ — ограниченное решение краевой задачи на прямой $-\infty<t<\infty$ (см. гл. 1):

$$\frac{d}{dt}G(t,A)=AG(t,A),\quad t\neq 0,$$

$$G(+0,A)-G(-0,A)=I,\quad G(+\infty,A)=G(-\infty,A)=0.$$

При этом в гл. 1 выведены равенства

$$\begin{gathered} G^2(+0,A)=G(+0,A),\quad AG(+0,A)=G(+0,A)A, \\ (I-G(+0,A))G(t,A)=G(t,A)(I-G(+0,A))=0,\quad t>0, \\ G(+0,A)G(t,A)=G(t,A)G(+0,A)=G(t,A),\quad t>0, \\ G(+0,A)G(t,A)=G(t,A)G(+0,A)=0,\quad t<0, \end{gathered} \tag{1.18}$$

и оценка

$$\|G(t,A)\|\leqslant\sqrt{\varkappa(A)}\,e^{-|t|\|A\||/\varkappa(A)}. \tag{1.19}$$

Таким образом, имеет смысл интеграл

$$H(C)=\int_{-\infty}^{\infty}G^*(t,A)\,CG(t,A)\,dt, \tag{1.20}$$

для которого в гл. 1 выведено представление

$$H(C)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(A^*+izI)^{-1}C(A-izI)^{-1}\,dz.$$

Нетрудно проверить, что $G=G(+0,\ A)$ и $H(C)$ удовлетворяют системе (1.2). В самом деле, так как уже известно выполнение равенств (1.18), то достаточно проверить, что $H(C)$ удовлетворяет системе (1.2). Используя (1.18), выпишем две цепочки равенств:

$$G^*(+0,\ A)H(C)G(+0,\ A)=\int_{-\infty}^{\infty}G^*(+0,\ A)\,G^*(t,\ A)\,CG(t,\ A)\,G(+0,\ A)\,dt=$$

$$=\int_{0}^{\infty}G^*(t,\ A)\,CG(t,\ A),$$

$$(I-G(+0,\ A))^*H(C)(I-G(+0,\ A))=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(I-G(+0,\ A))^*\,G^*(t,\ A)\,CG(t,\ A)(I-G(+0,\ A))\,dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{0}G^*(t,\ A)\,CG(t,\ A)\,dt=H(C)-\int_{0}^{\infty}G^*(t,\ A)\,CG(t,\ A)\,dt,$$

результатом которых является, в частности, равенство

$$G^*(+0,\ A)H(C)G(+0,\ A)+(I-G(+0,\ A))^*H(C)(I-G(+0,\ A))=H(C).$$

Далее, так как $G(t,\ A)$ является решением краевой задачи, то из определения (1.20) и равенств (1.18) можно выписать цепочку простых равенств:

$$A^*H(C)+H(C)A=\int_{-\infty}^{0}A^*C^*(t,\ A)\,CG(t,\ A)\,dt+$$

$$+\int_{-\infty}^{0}G^*(t,A)\,CG(t,A)\,A\,dt+\int_{0}^{\infty}A^*G^*(t,A)\,CG(t,A)\,dt+$$

$$+\int_{0}^{\infty}G^*(t,A)\,CG(t,A)\,A\,dt=\int_{-\infty}^{0}\frac{d}{dt}[G^*(t,A)\,CG(t,A)]\,dt+$$

$$+\int_{0}^{\infty}\frac{d}{dt}[G^*(t,A)\,CG(t,A)]\,dt=G^*(-0,A)\,CG(-0,A)-$$

$$-G^*(+0,A)\,CG(+0,A)=[I-G(+0,A)]^*C\,[I-G(+0,A)]-$$

$$-G^*(+0,A)\,CG(+0,A),$$

т. е.

$$A^*H(C)+H(C)A=[I-G(+0,\ A)]^*C[I-G(+0,\ A)]-$$
$$-G^*(+0,\ A)CG(+0,\ A).$$

Итак, мы показали, что $G=G(+0,A)$, $H(C)=\int_{-\infty}^{\infty}G^*(t,A)\,CG(t,A)\,dt$ удовлетворяют системе матричных уравнений (1.2), если A экспоненциально дихотомична. При этом матрица G определена однозначно. Далее, если однородное матричное уравнение (1.21)

$$\begin{gathered}A^*Y+YA=0,\\ G^*YG+(I-G)^*Y(I-G)-Y=0\end{gathered}\qquad(1.21)$$

имеет лишь нулевое решение $Y=0$, то, значит, система (1.2) при найденной G и произвольной $C=C^*$ имеет единственное решение. Для этого потребуется матрица U такая, что

$$U^*AU=\begin{pmatrix} B_1 & D \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \quad U^*GU=\begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & I_{N_+(A)} \end{pmatrix}, \tag{1.22}$$

где B_2 размера $N_+(A)\times N_+(A)$ и матрицы $-B_1$, B_2 — гурвицевы.

Пусть

$$U^*YU=\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}, \tag{1.23}$$

где Y_{22} — матрица размера $N_+(A)\times N_+(A)$. Тогда из уравнения A^*Y+ $+YA=0$ следует, что

$$\begin{aligned} &B_1^*Y_{11}+Y_{11}B_1=0, \\ &B_1^*Y_{12}+Y_{12}B_2+Y_{11}D=0, \\ &D^*Y_{12}+B_2^*Y_{22}+Y_{21}D+Y_{22}B_2=0. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Из первого равенства при B_2 — гурвицевой следует, что $Y_{11}=0$. Аналогично из равенства

$$G^*YG+(I-G)^*Y(I-G)-Y=0$$

следует ввиду (1.22), (1.23), что

$$Y_{12}L+L^*Y_{21}=0, \quad Y_{12}=0, \quad Y_{21}=0.$$

Полученные условия позволяют из (1.24) заключить, что

$$B_2^*Y_{22}+Y_{22}B_2=0,$$

откуда, учитывая гурвицевость B_2, получаем равенство $Y_{22}=0$. Итак, мы показали, что $U^*YU=0$, и, значит, ввиду ортогональности U имеем $Y=0$. Нами доказано, что если G — проектор на максимальное инвариантное подпространство матрицы A, экспоненциально дихотомичной, то при любой $C=C^*$ однозначно определяется матрица $H(C)$, удовлетворяющая вместе с G и C системе (1.2).

Итак, для завершения доказательства теоремы 1 остается вывести оценки

$$\frac{\varkappa(A)}{\|C^{-1}\|}\leqslant 2\|A\|\|H(C)\|\leqslant\varkappa(A)\|C\|, \tag{1.25}$$

$$\|H(C)\|\,\|H^{-1}(C)\|\leqslant\varkappa(A)\|C\|\,\|C^{-1}\|. \tag{1.26}$$

Используя интегральные представления для матриц

$$H(C)=\int_{-\infty}^{\infty}G^*(t,A)CG(t,A)\,dt, \; H=H(I)$$

определение $\varkappa(A)=2\|A\|\,\|H\|$ (см. гл. 1), выпишем простую цепочку неравенств:

$$\|H(C)\|=\max_{\|x\|=1}(H(C)x,x)=\max_{\|x\|=1}\int_{-\infty}^{\infty}(G^*(t,A)CG(t,A)x,x)\,dt=$$

$$=\max_{\|x\|=1}\int_{-\infty}^{\infty}(CG(t,A)x,G(t,A)x)\,dt\leqslant\|C\|\max_{\|x\|=1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}G^*(t,A)G(t,A)\right)dt\,x,x=$$

$$=\|C\|\|H\|=\|C\|\frac{\varkappa(A)}{2\|A\|},$$

результатом которой будет оценка

$$\|H(C)\|\leqslant\|C\|\frac{\varkappa(A)}{2\|A\|}. \tag{1.27}$$

Совершенно аналогично выписывается цепочка неравенства (условие $C = C^* > 0$ влечет за собой обратимость C):

$$\frac{\varkappa(A)}{2\|A\|} = \|H\| = \max_{\|x\|=1}\left(\int_{-\infty}^{\infty} G^*(t, A)\, G(t, A)\, dt\, x, x\right) =$$

$$= \max_{\|x\|=1}\int_{-\infty}^{\infty} (G^*(t, A)\, C^{1/2}C^{-1}C^{1/2}G(t, A)\, x, x)\, dt =$$

$$= \max_{\|x\|=1}\int_{-\infty}^{\infty} (C^{-1}C^{1/2}G(t, A)\, x, C^{1/2}G(t, A)\, x)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \|C^{-1}\| \max_{\|x\|=1}\int_{-\infty}^{\infty} (G^*(t, A)\, CG(t, A)\, x, x)\, dt = \|C^{-1}\|\,\|H(C)\|,$$

т. е. $\varkappa(A)/(2\|A\|) \leqslant \|C^{-1}\|\,\|H(C)\|$. Полученная оценка вместе с (1.27) доказывает справедливость (1.25).

Итак, для завершения доказательства теоремы 1 осталось вывести неравенство (1.26). Для этого выпишем простую цепочку неравенств ($\lambda_{\min}(X)$ — минимальное собственное значение $X = X^*$):

$$\lambda_{\min}(H(C)) = \min_{\|x\|=1}(H(C)\, x, x) = \min_{\|x\|=1}\int_{-\infty}^{\infty} (CG(t, A)\, x, G(t, A)\, x)\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_{\min}(C) \min_{\|x\|=1}\int_{-\infty}^{\infty} (G^*(t, A)\, G(t, A)\, x, x)\, dt = \lambda_{\min}(C)\, \lambda_{\min}(H),$$

в результате которой получим

$$\lambda_{\min}(H(C)) \geqslant \lambda_{\min}(C)\, \lambda_{\min}(H). \tag{1.28}$$

Но в гл. 1 показано, что $\lambda_{\min}(H) \geqslant \frac{1}{2\|A\|}$. Эта оценка позволяет, воспользовавшись очевидными равенствами

$$\|H^{-1}(C)\| = \frac{1}{\lambda_{\min}(H(C))}, \quad \|C^{-1}\| = \frac{1}{\lambda_{\min}(C)},$$

заключить из (1.28), что $\|H^{-1}(C)\|\,\|H(C)\| \leqslant \|C^{-1}\|\,\|H(C)\|\,2\|A\|$. Полученное неравенство вместе с уже доказанной оценкой $\|H(C)\| \leqslant \|C\|\varkappa(A)/(2\|A\|)$ гарантирует справедливость (1.26). Теорема доказана.

А. Н. Малышев заметил, что условие

$$G^*H(C)\, G + (I - G)^*H(C)\,(I - G) - H(C) = 0$$

в (1.2) можно заменить на эквивалентное ему условие

$$G^*H(C) = H(C)\, G.$$

§ 2. Теорема непрерывности решений обобщенного матричного уравнения Ляпунова

Докажем теорему непрерывности решения обобщенного матричного уравнения Ляпунова, подробно рассматриваемого в предыдущем параграфе.

Теорема 2. *Пусть для $N \times N$ матриц A, $\widetilde{G}$ и $\widetilde{H} = \widetilde{H}^* > 0$ выполнены неравенства*

$$\|\widetilde{H}\|\,\|\widetilde{H}^{-1}\| \leqslant \frac{1}{10\delta}, \tag{2.1}$$

$$\|\widetilde{G}A - A\widetilde{G}\| \leqslant \delta\|A\|, \tag{2.2}$$

$$\|\widetilde{G}^2 - \widetilde{G}\| \leqslant \delta/2, \tag{2.3}$$

$$\|A^*\tilde H + \tilde H A + \tilde G^* \tilde G - (I-\tilde G)^*(I-\tilde G)\| \leqslant 2\delta, \qquad (2.4)$$

$$\|\tilde G^* \tilde H \tilde G + (I-\tilde G)^* \tilde H (I-\tilde G) - \tilde H\| \leqslant \delta \|\tilde H\|, \qquad (2.5)$$

где
$$\tilde\varkappa = 2\|A\|\|\tilde H\|,\ \delta < \frac{1}{800\tilde\varkappa}\min\left\{1, \frac{8\tilde\varkappa}{\|\tilde G\|}\right\},$$

тогда A экспоненциально дихотомична, $N_+(A) = N_1$, $N_-(A) = N - N_1$ (N_1 — количество сингулярных чисел $\tilde G$, превосходящих $1-2\delta$). При этом справедливы оценки

$$|\varkappa(A) - \tilde\varkappa|/\tilde\varkappa \leqslant \alpha\tilde\varkappa\delta, \qquad (2.6)$$

$$\|\tilde G - G\| \leqslant \gamma\tilde\varkappa^2\delta, \qquad (2.7)$$

$$\|\tilde H - H\|/\|\tilde H\| \leqslant \beta\tilde\varkappa\delta, \qquad (2.8)$$

G и H — решения (1.2) при $C = I$, I — единичная матрица,

$$\alpha < 92,\ \beta < 90,\ \gamma < 27. \qquad (2.9)$$

Для доказательства данной теоремы потребуется теорема 1 гл. 1 и лемма, доказанная в § 3.

Лемма 1. *Пусть для $N \times N$ матриц A и $\tilde G$ справедливы неравенства*

$$\|\tilde G A - A\tilde G\| \leqslant \|A\|\,\delta_1\ \ \|\tilde G^2 - \tilde G\| \leqslant \delta_2,$$

где $0 < \delta_1 \ll 1$, $0 < \delta_2 < 1/8$. Тогда, во-первых, сингулярные числа $\tilde G$ лежат в объединении отрезка $[0,\ 2\delta_2]$ и открытого полуинтервала $(1 - 2\delta_2,\ \infty)$, во-вторых, существуют матрицы R и $\tilde G$ такие, что

$$\hat G(A+R) = (A+R)\hat G,\ \hat G^2 = \hat G,$$

$$\frac{\|R\|}{\|A\|} \leqslant 2\delta_2 + \delta_1,$$

$$\|\hat G - \tilde G\| \leqslant 2\delta_2.$$

Приступим непосредственно к доказательству теоремы 2. Используя лемму 1, определим из условий

$$\|\tilde G A - A\tilde G\| \leqslant \delta\|A\|,\ \|\tilde G^2 - \tilde G\| \leqslant \delta/2,$$

что существуют матрицы $\hat G$ и R такие, что

$$(A+R)\hat G = \hat G(A+R),\ \hat G^2 = \hat G,\ \|\hat G - \tilde G\| \leqslant \delta,\ \|R\|/\|A\| \leqslant 2\delta.$$

Введем для удобства обозначения

$$F = A^*\tilde H + \tilde H A + \tilde G^*\tilde G - (I-\tilde G)^*(I-\tilde G),$$

$$\hat F = F + (\hat G^*\hat G - \tilde G^*\tilde G) + (I-\tilde G)^*(I-\tilde G) - (I-\hat G)^*(I-\hat G) + R^*\tilde H + \tilde H R,$$

$$E = \tilde G^*\tilde H\tilde G + (I-\tilde G)^*\tilde H(I-\tilde G) - \tilde H,$$

$$\hat E = E + \hat G^*\tilde H\hat G - \tilde G^*\tilde H\tilde G + (I-\hat G)^*\tilde H(I-\hat G) - (I-\tilde G)^*H(I-\tilde G),$$

которые позволяют выписать равенства

$$(A+R)^*\tilde H + \tilde H(A+R) + \hat G^*\hat G - (I-\hat G)^*(I-\hat G) - \hat F = 0, \qquad (2.10)$$

$$\hat G^*\tilde H\hat G + (I-\hat G)^*\tilde H(I-\hat G) - \tilde H - \hat E = 0. \qquad (2.11)$$

Далее удобно пользоваться матрицей

$$\hat H = \hat G^*\tilde H\hat G + (I-\hat G)^*\tilde H(I-\hat G). \qquad (2.12)$$

Сравнивая (2.11), (2.12), получаем, что

$$\hat H - \tilde H = \hat E. \qquad (2.12')$$

т. е.

$$\|\widehat{H}-\widetilde{H}\|=\|\widehat{E}\|. \tag{2.13}$$

Займемся уравнением (2.10). Умножим его слева на $\widehat{G}^*$ и справа на $\widehat{G}$. Тогда, используя равенства $\widehat{G}^2=\widehat{G}$, $(A+R)\widehat{G}=\widehat{G}(A+R)$, можно выписать матричное уравнение

$$(A+R)^*\widehat{G}^*\widetilde{H}\widehat{G}+\widehat{G}^*\widetilde{H}\widehat{G}(A+R)+\widehat{G}^*(I-\widehat{F})\widehat{G}=0.$$

Совершенно аналогично, умножая (2.10) слева на $(I-\widehat{G})^*$ и справа на $I-\widehat{G}$, получаем

$$(A+R)^*(I-\widehat{G})^*\widetilde{H}(I-\widehat{G})+(I-\widehat{G})^*\widetilde{H}(I-\widehat{G})(A+R)-$$
$$-(I+\widehat{G})^*(I-\widehat{F})(I-\widehat{G})=0.$$

Складывая оба эти равенства и учитывая определение (2.12), придем к системе матричных уравнений

$$\begin{gathered}(A+R)^*\widehat{H}+\widehat{H}(A+R)+\widehat{G}^*(I-\widehat{F})\widehat{G}-(I-\widehat{G})^*(I-\widehat{F})(I-\widehat{G})=0,\\ \widehat{G}^*\widetilde{H}\widehat{G}+(I-\widehat{G})^*\widetilde{H}(I-\widehat{G})-\widehat{H}=0,\\ (A+R)\widehat{G}=\widehat{G}(A+R),\ \widehat{G}^2=\widehat{G}.\end{gathered} \tag{2.14}$$

Теперь если покажем, что

$$\|\widehat{F}\|<1, \tag{2.15}$$

$$\lambda_{\min}(\widetilde{H})>\|\widehat{E}\|, \tag{2.16}$$

то в силу (2.13) $\lambda_{\min}(\widehat{H})=\lambda_{\min}(\widetilde{H}+(\widehat{H}-\widetilde{H}))>\lambda_{\min}(\widetilde{H})-\|\widehat{H}-\widetilde{H}\|>$ $>\lambda_{\min}(\widetilde{H})-\|\widehat{E}\|>0$, т. е. $\widehat{H}$ и $I-\widehat{F}$ положительно определены ($\widehat{H}=\widehat{H}^*$, $I-\widehat{F}=(I-\widehat{F})^*$) и можно, воспользовавшись теоремой 1, утверждать, что $A+R$ экспоненциально дихотомична ($\varkappa(A+R)<\infty$) и $N_+(A+R)=N_1$, $N_-(A+R)=N-N_1$, $G(+0,A+R)=\widehat{G}$.

Постараемся оценить $\|\widehat{F}\|$ и $\|\widehat{E}\|$. Для вывода оценки $\|\widehat{F}\|$ выпишем, начиная с равенства, определяющего $\widehat{F}$, легко проверяемую оценку

$$\begin{aligned}\widehat{F}&=F+R^*\widetilde{H}+\widetilde{H}R+(\widehat{G}^*\widehat{G}-\widetilde{G}^*\widetilde{G})+(I-\widetilde{G})^*(I-\widetilde{G})-(I-\widehat{G})^*(I-\widehat{G})=\\ &=F+\widehat{G}^*+\widehat{G}-\widetilde{G}^*-\widetilde{G}+R^*\widetilde{H}+\widetilde{H}R=\\ &=F+(\widetilde{G}-\widetilde{G})^*+(\widehat{G}-\widetilde{G})+R^*\widetilde{H}+\widetilde{H}R,\end{aligned}$$

в результате чего получим

$$\widehat{F}=F+(\widehat{G}-\widetilde{G})^*+(\widehat{G}-\widetilde{G})+R^*\widetilde{H}+\widetilde{H}R.$$

Это равенство вместе с уже известной оценкой $\|\widehat{G}-\widetilde{G}\|\leqslant\delta$ и оценкой $\|F\|\leqslant 2\delta$, следующей из определения и неравенства (2.3), позволяет заключить, что

$$\|\widehat{F}\|\leqslant 4\delta+2\|R\|\,\|\widetilde{H}\|\leqslant 4\delta+2\delta\widetilde{\varkappa}=2\delta(\widetilde{\varkappa}+2). \tag{2.17}$$

Оценим матрицу $\widehat{E}=\widehat{H}-\widetilde{H}$. Начиная с определяющего для $\widehat{E}$ равенства, можно выписать цепочку:

$$\begin{aligned}\widehat{E}&=E+\widehat{G}^*\widetilde{H}\widehat{G}-\widetilde{G}^*\widetilde{H}\widetilde{G}+(I-\widehat{G})^*\widetilde{H}(I-\widehat{G})-(I-\widetilde{G})^*\widetilde{H}(I-\widetilde{G})=\\ &=E+2(\widehat{G}^*\widetilde{H}\widehat{G}-\widetilde{G}^*\widetilde{H}\widetilde{G})+(\widetilde{G}-\widehat{G})^*\widetilde{H}+\widetilde{H}(\widetilde{G}-\widehat{G}).\end{aligned} \tag{2.18}$$

Воспользуемся двумя простыми тождествами

$$\begin{gathered}\widetilde{G}^*\widetilde{H}\widetilde{G}-\widehat{G}^*\widetilde{H}\widehat{G}=\widetilde{G}^*\widehat{H}\widetilde{G}-\widehat{G}^*\widehat{H}\widehat{G}+\widehat{G}^*[\widetilde{H}-\widehat{H}](\widetilde{G}-\widehat{G})+\\ +(\widetilde{G}-\widehat{G})^*[\widetilde{H}-\widehat{H}]\widehat{G}+(\widetilde{G}-\widehat{G})^*[\widetilde{H}-\widehat{H}](\widetilde{G}-\widehat{G}),\\ \widetilde{G}^*\widehat{H}\widetilde{G}-\widehat{G}^*\widehat{H}\widehat{G}=(\widetilde{G}-\widehat{G})^*\widehat{H}(\widetilde{G}-\widehat{G})+\widehat{G}^*\widehat{H}(\widetilde{G}-\widehat{G})+(\widetilde{G}-\widehat{G})^*\widehat{H}\widehat{G}.\end{gathered}$$

Так как $\widehat{G}^*\widehat{H}=\widehat{H}\widehat{G}=\widehat{H}$, $\widehat{E}=\widehat{H}-\widetilde{H}$, то из этих тождеств и (2.18) следует, что

$$\widehat{E}=E+(\widetilde{G}-\widehat{G})^*\widetilde{H}+\widetilde{H}(\widetilde{G}-\widehat{G})+2[\widehat{G}^*\widehat{E}(\widetilde{G}-\widehat{G})+(\widetilde{G}-\widehat{G})^*\widehat{E}\widehat{G}+$$
$$+(\widetilde{G}-\widehat{G})^*\widehat{E}(\widetilde{G}-\widehat{G})+\dot{\widehat{H}}(\widetilde{G}-\widehat{G})+(\widetilde{G}-\widehat{G})^*\widehat{H}+(\widetilde{G}-\widehat{G})^*\widehat{H}(\widetilde{G}-\widehat{G})].$$

И наконец, подставив в полученное равенство $\widehat{H}=\widetilde{H}-\widehat{E}$ и $\widehat{G}=\widetilde{G}+(\widehat{G}-\widetilde{G})$, получаем

$$\widehat{E}=E+(\widetilde{G}-\widehat{G})^*\widetilde{H}+\widetilde{H}(\widetilde{G}-\widehat{G})+2[\widetilde{G}^*\widehat{E}(\widetilde{G}-\widehat{G})+(\widetilde{G}-\widehat{G})^*\widehat{E}\widetilde{G}+$$
$$+(\widetilde{G}-\widehat{G})^*\widehat{E}(\widetilde{G}-\widehat{G})-(\widetilde{G}-\widehat{G})^*\widehat{E}(\widetilde{G}-\widehat{G})+\widetilde{H}(\widetilde{G}-\widehat{G})-\widehat{E}(\widetilde{G}-\widehat{G})+$$
$$+(\widetilde{G}-\widehat{G})^*\widetilde{H}-(\widetilde{G}-\widehat{G})^*\widehat{E}+(\widetilde{G}-\widehat{G})^*\widetilde{H}(\widetilde{G}-\widehat{G})-(\widetilde{G}-\widehat{G})^*\widehat{E}(\widetilde{G}-\widehat{G})].$$

Из этого уравнения, учитывая неравенства $\|\widetilde{G}-G\|\leqslant\delta$, $\|E\|\leqslant\delta\|\widetilde{H}\|$, следует неравенство

$$\|\widehat{E}\|\leqslant 7\delta\|\widetilde{H}\|+\|\widehat{E}\|(4\delta\|\widetilde{G}\|+4\delta^2+4\delta)+\|\widetilde{H}\|\delta^2.$$

Далее, воспользовавшись условием

$$\delta<\frac{1}{800\widetilde{\varkappa}}\min\left\{1,\ \frac{8\widetilde{\varkappa}}{\|\widetilde{G}\|}\right\},$$

точнее, его следствием $4\delta\|\widetilde{G}\|+4\delta^2+4\delta<0{,}05$, можно огрубить оценку $\|\widehat{E}\|$:

$$\|\widehat{E}\|\leqslant 7.001\delta\|\widetilde{H}\|+0.05\|\widehat{E}\| \tag{2.18'}$$

и, значит, $\|\widehat{E}\|<7.4\delta\|\widetilde{H}\|$. Итак, мы оценили $\|\widehat{E}\|$ и $\|\widehat{F}\|$, причем $\|\widehat{F}\|\leqslant\leqslant 2\delta(\widetilde{\varkappa}+2)<1$. По условию теоремы матрица $\widetilde{H}$ положительно определена, а значит, $\lambda_{\min}(\widetilde{H})=\|\widetilde{H}-1\|-1$ и верна оценка

$$\|\widetilde{H}^{-1}\|\|\widetilde{H}\|<\frac{1}{10\delta},$$

т. е. из условия теоремы следует, что

$$\lambda_{\min}(\widetilde{H})>10\delta\|\widetilde{H}\|,$$

и вместе с (2.18′) позволяет гарантировать оценку

$$\lambda_{\min}(\widetilde{H})>\|\widehat{E}\|.$$

Таким образом, интересовавшие нас неравенства выведены и можно утверждать, что $A+R$ экспоненциально дихотомична, $\varkappa(A+R)<\infty$.

Определим, как величина $\widetilde{\varkappa}=2\|A\|\,\|\widetilde{H}\|$ связана с параметром $\varkappa(A+R)$.

Для начала оценим близость $\widehat{H}$ и матрицы

$$H_{(A+R)}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G^*(t,A+R)G(t,A+R)\,dt,$$

$H_{(A+R)}$ является единственным решением системы

$$(A+R)^*H_{(A+R)}+H_{(A+R)}(A+R)+G^*(+0,\ A+R)G(+0,\ A+R)-$$
$$-G^*(-0,\ A+R)G(-0,\ A+R)=0,$$
$$G^*(+0,\ A+R)H_{(A+R)}G(+0,\ A+R)+G^*(-0,\ A+R)H_{(A+R)}G(-0,\ A+R)=$$
$$=H_{(A+R)}.$$

Сравнивая ее с (2.14) и используя доказанные равенства $G(+0,\ A+R)=\widehat{G}$, $G(-0,\ A+R)=\widehat{G}-I$, получим систему

$$(A+R)^*(H_{(A+R)}-\widehat{H})+(H_{(A+R)}-\widehat{H})(A+R)+\widehat{G}^*\widehat{F}\widehat{G}-$$
$$-(I-\widehat{G})^*\widehat{F}(I-\widehat{G})=0,$$
$$\widehat{G}^*(H_{(A+R)}-\widehat{H})\widehat{G}+(I-\widehat{G})^*(H_{(A+R)}-\widehat{H})(I-\widehat{G})=H_{(A+R)}-\widehat{H}.$$

Так как $\varkappa(A+R)<\infty$, то полученная система имеет единственное решение и его можно представить следующим интегралом:

$$H_{(A+R)}-\widehat{H}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} G^*(t, A+R)\widehat{F}G(t, A+R)\,dt,$$

откуда следует простая цепочка неравенств:

$$\|H_{(A+R)}-\widehat{H}\| \leqslant \|\widehat{F}\|\,\|H_{(A+R)}\| \leqslant 2\delta(\widetilde{\varkappa}+2)\|H_{(A+R)}\|,$$

т. е.

$$\|H_{(A+R)}-\widehat{H}\| \leqslant 2\delta(\widetilde{\varkappa}+2)\|H_{(A+R)}\|. \tag{2.19}$$

Из (2.13) и (2.18′) имеем оценку

$$\|\widetilde{H}-\widehat{H}\| \leqslant 7.4\delta\|\widetilde{H}\|,$$

которая вместе с (2.19) позволяет записать

$$\|H_{(A+R)}-\widetilde{H}\| \leqslant 2\delta(\widetilde{\varkappa}+2)\|H_{(A+R)}\|+7.4\delta\|\widetilde{H}\|.$$

Так как $\|H_{(A+R)}\| \geqslant 1/(2\|A+R\|)$, то $\widetilde{\varkappa}>0.99$ и, значит,

$$\|H_{(A+R)}-\widetilde{H}\| \leqslant \frac{2\delta(\widetilde{\varkappa}+5.7)}{1-2\delta(\widetilde{\varkappa}+2)}\|\widetilde{H}\| \leqslant 11.8\,\delta\widetilde{\varkappa}\|\widetilde{H}\|. \tag{2.20}$$

Покажем, используя полученную оценку, что

$$|\varkappa(A+R)-\widetilde{\varkappa}| \leqslant 16\delta\widetilde{\varkappa}^2. \tag{2.21}$$

Напомним, что $\varkappa(A+R)=2\|A+R\|\,\|H_{(A+R)}\|$. Следовательно,

$$|\varkappa(A+R)-\widetilde{\varkappa}| = |2\|A+R\|\,\|\widetilde{H}_{(A+R)}\|-2\|A\|\,\|\widetilde{H}\|| =$$
$$=|2\|A+R\|(\|H_{(A+R)}\|-\|\widetilde{\mathrm{H}}\|)-2(\|A+R\|-\|A\|)\|\widetilde{H}\|| \leqslant$$
$$\leqslant 2(\|A\|+\|R\|)\|H_{(A+R)}-\widetilde{H}\|+2\|R\|\,\|\widetilde{H}\|.$$

Но тогда из неравенства $\|R\|/\|A\| \leqslant 2\delta$, оценки (2.20) и определения $\widetilde{\varkappa}=2\|A\|\,\|\widetilde{H}\|$ следует, что

$$|\widetilde{\varkappa}(A+R)-\widetilde{\varkappa}| \leqslant (1+2\delta)\,11.8\delta\widetilde{\varkappa}^2+4\delta\widetilde{\varkappa} \leqslant 16\delta\varkappa^2,$$

и оценка (2.21) доказана.

Из выведенной оценки (2.21) в силу выбора $\delta\,(\delta<1/(800\widetilde{\varkappa}))$ следует, что

$$|\varkappa(A+R)-\widetilde{\varkappa}|<0.02\widetilde{\varkappa}$$

и, значит,

$$\varkappa(A+R)<1.02\widetilde{\varkappa}. \tag{2.22}$$

Так как $\widehat{G}=G(+0, A+R)$, то для $\widehat{G}$ справедлива оценка $\|\widehat{G}\|<\sqrt{\varkappa(A+R)}$, и поскольку δ достаточно мала, то

$$\|\widetilde{G}\| \leqslant \|\widehat{G}\|+\|\widetilde{G}+\widehat{G}\| \leqslant \sqrt{\varkappa(A+R)}+\delta \leqslant \sqrt{1.02\widetilde{\varkappa}}+\delta<1.1\sqrt{\widetilde{\varkappa}},$$

т. е.

$$\|\widetilde{G}\| \leqslant 1.1\sqrt{\widetilde{\varkappa}}. \tag{2.23}$$

Поскольку $\delta<\dfrac{1}{800\widetilde{\varkappa}}$, то тем более выполнена оценка $2\delta<\dfrac{1}{100\widetilde{\varkappa}\cdot 1.02}$, и так как $\dfrac{\|R\|}{\|A\|}<2\delta$, $\varkappa(A+R)<1.02\widetilde{\varkappa}$, то верно ограничение

$$\frac{\|R\|}{\|A+R\|}<\frac{1}{100\varkappa(A+R)}.$$

Это позволяет, воспользовавшись теоремой 1 гл. 1, сформулированной в начале параграфа, утверждать, что A экспоненциально дихотомична,

$N_+(A) = N_+(A+R)$, $N_-(A) = N_-(A+R)$ и верны оценки

$$|\varkappa(A+R) - \varkappa(A)| \leqslant 36\varkappa^2(A+R)\frac{\|R\|}{\|A+R\|},$$

$$\|G(\pm 0, A+R) - G(\pm 0, A)\| \leqslant 12\varkappa^2(A+R)\frac{\|R\|}{\|A+R\|},$$

$$\|H_{(A+R)} - H_{(A)}\| \leqslant 38\varkappa(A+R)\|H_{(A+R)}\|\frac{\|R\|}{\|A+R\|}.$$

Используя неравенства $\|R\|/\|A\| < 2\delta$, $\frac{\|R\|}{\|A+R\|} \leqslant \frac{2\delta}{1-2\delta} < 2.01\delta$, $\varkappa(A+R) < \tilde{\varkappa}1.02$, огрубим эти оценки так:

$$|\varkappa(A+R) - \varkappa(A)| < 76\tilde{\varkappa}^2\delta, \tag{2.24}$$

$$\|G(\pm 0,\ A+R) - G(\pm 0,\ A)\| \leqslant 25.1\tilde{\varkappa}^2\delta, \tag{2.25}$$

$$\|H_{(A+R)} - H_{(A)}\| \leqslant 78\tilde{\varkappa}\|H_{(A+R)}\|\delta. \tag{2.26}$$

Далее, так как $G(+0,\ A+R) = G$, то можно, воспользовавшись оценкой $\|\tilde{G} - \hat{G}\| \leqslant \delta$, а также оценками (2.20), (2.21), вывести из (2.24)—(2.26) два неравенства:

$$|\varkappa(A) - \tilde{\varkappa}| < 92\tilde{\varkappa}^2\delta, \tag{2.27}$$

$$\|\tilde{G} - G(+0,\ A)\| \leqslant 27\tilde{\varkappa}^2\delta \tag{2.28}$$

и цепочку неравенств:

$$+ 78\varkappa\delta\|H_{(A+R)}\| \leqslant (1 + 78\tilde{\varkappa}\delta)\|\tilde{H} - H_{(A+R)}\| + 78\tilde{\varkappa}\delta\|\tilde{H}\| \leqslant 90\tilde{\varkappa}\delta\|\tilde{H}\|,$$

$$\|H_{(A)} - \tilde{H}\| \leqslant \|\tilde{H} - H_{(A+R)}\| + \|H_{(A+R)} - H_{(A)}\| \leqslant \|\tilde{H} - H_{(A+R)}\| +$$

т. е.

$$\|H_{(A)} - \tilde{H}\| \leqslant 90\tilde{\varkappa}\delta\|\tilde{H}\|. \tag{2.29}$$

Неравенства (2.27)—(2.29) доказывают справедливость теоремы 2, если взять

$$\alpha = 92,\ \beta = 90,\ \gamma = 27.$$

Теорема 3. *Пусть A — экспоненциально дихотомичная $N \times N$ матрица ($\varkappa(A) < \varkappa^* < \infty$) и $\tilde{G}$, $\tilde{H} = \tilde{H}^* > 0$ — матрицы, для которых*

$$\|\tilde{G} - G(+0,\ A)\| < \delta,$$

$$\|A^*\tilde{H} + \tilde{H}A + \tilde{G}^*\tilde{G} - (I - \tilde{G})^*(I - \tilde{G})\| \leqslant 2\delta, \tag{2.30}$$

$$\|\tilde{G}^*\tilde{H}\tilde{G} + (I - G)^*\tilde{H}(I - \tilde{G}) - \tilde{H}\| \leqslant \delta\|\tilde{H}\|,$$

где

$$\tilde{\varkappa} = 2\|A\|\|\tilde{H}\|,\ \delta < \frac{1}{170}.$$

Тогда справедливы оценки

$$|\varkappa(A) - \tilde{\varkappa}|/\tilde{\varkappa} \leqslant 14\delta,$$

$$\frac{\|\tilde{H} - H\|}{\|H\|} \leqslant 14\delta,\ \frac{\|\tilde{H} - H\|}{\|\tilde{H}\|} \leqslant 14\delta,$$

где $G = G(+0,\ A)$ и H — решения (1.2) при $C = I$, I — единичная матрица.

Для удобства доказательства введем обозначения:

$$F = A^*\tilde{H} + \tilde{H}A + \tilde{G}^*\tilde{G} - (I - \tilde{G})^*(I - \tilde{G}), \tag{2.31}$$

$$F_0 = \tilde{G}^*\tilde{H}\tilde{G} + (I - \tilde{G})^*\tilde{H}(I - \tilde{G}) - \tilde{H}, \tag{2.32}$$

$$\hat{H} = G^*\tilde{H}G + (I - G)^*\tilde{H}(I - G), \tag{2.33}$$

$$\hat{F} = F - G^*G + (I - G)^*(I - G). \tag{2.34}$$

Используя их, запишем

$$A^*\widetilde{H}+\widetilde{H}A+G^*G-(I-G)^*(I-G)-\widehat{F}=0, \tag{2.35}$$

в частности

$$\begin{gathered} A^*\widehat{H}+\widehat{H}A+G^*(I-\widehat{F})G-(I-G)^*(I-\widehat{F})(I-G)=0, \\ G^*HG+(I-G)^*\widehat{H}(I-G)=\widehat{H}. \end{gathered} \tag{2.36}$$

В то же время для матрицы H, удовлетворяющей системе (1.2), верны равенства

$$\begin{gathered} A^*H+HA+G^*G\ (I-G)^*(I-G)=0, \\ (I-G)^*H(I-G)+G^*HG=H. \end{gathered} \tag{2.37}$$

Сравнивая (2.36), (2.37), можно записать определяющую $\widehat{H}-H$ систему

$$\begin{gathered} A^*(\widehat{H}-H)+(\widehat{H}-H)A+G^*\widehat{F}G-(I-G)^*\widehat{F}(I-G)=0, \\ G^+(\widehat{H}-H)G+(I-G)^*(\widehat{H}-H)\,(I-G)=0, \end{gathered} \tag{2.38}$$

из которой ввиду теоремы 1 матрица $\widehat{H}-H$ допускает интегральное представление

$$\widehat{H}-H=\int_{-\infty}^{\infty} G^*(t,A)\,\widehat{F}G(t,A)\,dt$$

и верно неравенство

$$\|\widehat{H}-H\|\leqslant\|H\|\,\|\widehat{F}\|. \tag{2.39}$$

Теперь для уточнения (2.39) постараемся оценить $\|\widehat{F}\|$ и $\|\widehat{H}-\widetilde{H}\|$. Из (2.31), (2.34) следует, что $\widehat{F}=F+\widetilde{G}^*+\widetilde{G}-G^*-G$ и значит $\|\widehat{F}\|\leqslant\|F\|+ 2\|\widetilde{G}-G\|\leqslant 4\delta$, т. е.

$$\|\widehat{F}\|\leqslant 4\delta. \tag{2.40}$$

Рассмотрим $\widetilde{H}-\widehat{H}$. Из (2.32), (2.33) следует, что

$$\widehat{H}-\widetilde{H}=F_0+G^*\widetilde{H}G-\widetilde{G}^*\widetilde{H}\widetilde{G}+(I-G)^*\widetilde{H}(I-G)-(I-\widetilde{G})^*\widetilde{H}(I-\widetilde{G})$$

и

$$\|\widehat{H}-\widetilde{H}\|\leqslant\|F_0\|+2\|G^*\widetilde{H}G-\widetilde{G}^*\widetilde{H}\widetilde{G}\|+2\|\widetilde{H}(G-\widetilde{G})\|. \tag{2.41}$$

Далее из тождеств

$$\begin{gathered} G^*\widetilde{H}G-\widetilde{G}^*\widetilde{H}\widetilde{G}=-G^*H(\widetilde{G}-G)-(\widetilde{G}-G)HG-(\widetilde{G}-G)^*H(\widetilde{G}-G)- \\ -G^*(\widetilde{H}-H)\,(\widetilde{G}-G)-(\widetilde{G}-G)^*(\widetilde{H}-H)-(\widetilde{G}-G)^*(\widetilde{H}-H)\,(\widetilde{G}-G), \\ \widetilde{H}(G-\widetilde{G})=(\widetilde{H}-H)\,(G-\widetilde{G})+H(G-\widetilde{G}), \end{gathered}$$

которые позволяют продолжить оценку (2.41), воспользовавшись равенствами $GH=HG=H$ и (2.32), имеем

$$\begin{gathered} \|\widehat{H}-\widetilde{H}\|\leqslant\|F_0\|+2\|H\|[3\delta+\delta^2]+2\|H-\widetilde{H}\|(3\delta+\delta^2)\leqslant \\ \leqslant\delta_2\|\widetilde{H}\|+2\|\mathrm{H}\|[3\delta+\delta^2]+2\|H-\widetilde{H}\|(3\delta+\delta^2). \end{gathered} \tag{2.42}$$

И наконец, из (2.39), (2.40) и (2.42) следует, что

$$\|H-\widetilde{H}\|\leqslant 4\delta\|H\|+(7\delta+2\delta^2)\|H\|+\|H-\widetilde{H}\|(6\delta+2\delta^2),$$

т. е.

$$\frac{\|H-\widetilde{H}\|}{\|H\|}\leqslant\frac{11\delta+2\delta^2}{1-6\delta-2\delta^2},$$

$$\frac{\|H-\widetilde{H}\|}{\|\widetilde{H}\|}\leqslant\frac{11\delta+2\delta^2}{1-17\delta-2\delta^2},$$

и, значит, при $\delta<1/(170)$ справедливы неравенства теоремы 3.

§ 3. Основная лемма

Докажем основную лемму, использованную в предыдущем параграфе.

Лемма 1. *Пусть для $N \times N$ матриц A и $\widetilde{G}$ справедливы неравенства*

$$\|\widetilde{G}A - A\widetilde{G}\| \leqslant \|A\|\delta_1,$$
$$\|\widetilde{G}^2 - \widetilde{G}\| \leqslant \delta_2,$$

где

$$0 < \delta_1 \ll 1, \ 0 < \delta_2 < \frac{1}{8}.$$

Тогда, во-первых, ингулярные числа $\widetilde{G}$ лежат в объединении отрезка $[0, 2\delta_2]$ и открытого полуинтервала $(1-2\delta_2, +\infty)$, во-вторых, существуют матрицы $\widehat{G}$ и R такие, что

$$\widehat{G}(A+R) = (A+R)\widehat{G}, \ \widehat{G}^2 = \widehat{G},$$
$$\frac{\|R\|}{\|A\|} \leqslant 2\delta_2 + \delta_1, \ \|\widehat{G} - \widetilde{G}\| \leqslant 2\delta_2.$$

Для доказательства леммы 1 потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Если $N \times N$ матрица $\widetilde{G}$ удовлетворяет неравенству $\|\widetilde{G}^2 - \widetilde{G}\| \leqslant \delta$, $0 < \delta < 1/8$, то, во-первых, сингулярные числа матрицы $\widetilde{G}$ сосредоточены в объединении отрезка $[0, 2\delta]$ и полуоткрытого интервала $(1-2\delta, +\infty)$ и, во-вторых, существуют матрица $\widehat{G}$ и ортогональная U такие, что*

$$\widetilde{G} = U^* \begin{pmatrix} R_0 & L \\ 0 & R_1 + I_{N_1} \end{pmatrix} U, \ \widehat{G} = U^* \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & I_{N_1} \end{pmatrix} U,$$
$$\widehat{G}^2 = \widehat{G}, \ \|\widehat{G} - \widetilde{G}\| \leqslant 2\delta, \ \|R_0\| \leqslant 2\delta, \ \|R_1\| \leqslant 2\delta,$$

где N_1 — число сингулярных чисел $\widetilde{G}$, превосходящих $1 - 2\delta$.

Доказательство леммы 2 приведем сразу же после завершения доказательства леммы 1, к которому сейчас приступаем.

Если $N_1 = 0$, то $U = I$, $\widehat{G} = 0$. Если же $N_1 = N$, то $U = I$, $\widehat{G} = I$. В обоих случаях полагаем $R = 0$ и завершаем на этом доказательство леммы 1.

Пусть $N_1 \neq 0$. Из условия $\|\widetilde{G}^2 - \widetilde{G}\| \leqslant \delta_2$, $0 < \delta_2 < 1/8$, на основании леммы 3 следует, что существуют ортогональная U и матрица $\widehat{G}$ такие, что

$$U^*\widehat{G}U = \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & I_{N_1} \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

$$\|\widehat{G} - \widetilde{G}\| \leqslant 2\delta_2, \ \widehat{G}^2 = \widehat{G}, \tag{3.2}$$

где L — некоторая матрица с $N - N_1$ строкой и N_1 столбцом.

Обозначим

$$U^*AU = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \ U^*RU = \begin{pmatrix} 0 & R_{12} \\ R_{21} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

где A_{22} — матрица размера $N_1 \times N_1$, а R_{12} — той же размерности, что и A_{12}.

Взяв

$$R_{21} = -A_{21}, \ R_{12} = LA_{22} - A_{11}L - A_{12}, \tag{3.4}$$

обеспечим выполнение равенства

$$(A+R)\widehat{G} = \widehat{G}(A+R). \tag{3.5}$$

В самом деле, имеют место две цепочки равенств:

$$(A+R)\widehat{G} = U\begin{pmatrix} A_{11} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & I \end{pmatrix}U^* = U\begin{pmatrix} 0 & A_{11}L + A_{12} + R_{12} \\ 0 & (A_{21}+R_{21})L + A_{22} \end{pmatrix}U,$$

$$\widehat{G}(A+R) = U\begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}U^* = U\begin{pmatrix} L(A_{21}+R_{21}) & LA_{22} \\ A_{21}+R_{21} & A_{22} \end{pmatrix}U^*,$$

которые позволяют при условии (3.4) утверждать справедливость (3.5).

Оценим $\|R_{21}\|$ и $\|R_{12}\|$. В силу леммы 2

$$U^*\widetilde{G}U = \begin{pmatrix} R_0 & L \\ 0 & I+R_1 \end{pmatrix},$$

$$\|R_0\| \leqslant 2\delta_2, \ \|R_1\| \leqslant 2\delta_2. \tag{3.6}$$

Далее легко убедиться в том, что верны равенства

$$A\widetilde{G} = U\begin{pmatrix} A_{11}R_0 & A_{11}L + A_{12} + A_{12}R_1 \\ A_{21}R_0 & A_{21}L + A_{22} + A_{22}R_1 \end{pmatrix}U^*,$$

$$\widetilde{G}A = U\begin{pmatrix} R_0A_{11} + LA_{21} & R_0A_{12} + LA_{22} \\ A_{21} + R_1A_{21} & A_{22} + R_1A_{22} \end{pmatrix}U^*,$$

из которых, используя условие $\|A\widetilde{G} - \widetilde{G}A\| \leqslant \delta_1\|A\|$, нетрудно вывести оценки:

$$\|A_{21} + R_1A_{21} + A_{21}R_0\| \leqslant \delta_1\|A\|,$$

$$\|LA_{22} + R_0A_{12} - A_{11}L - A_{12} - A_{12}R_1\| \leqslant \delta_1\|A\|.$$

Из полученных неравенств и оценок $\|A_{21}\| \leqslant \|A\|$, $\|A_{12}\| \leqslant \|A\|$ и (3.6) выписываются две цепочки:

$$\|LA_{22} - A_{22}L - A_{12}\| \leqslant \|A_{12}\|(\|R_0\| + \|R_1\|) + \delta_1\|A\| \leqslant \|A\|2\delta_2 + \delta_1\|A\| = \|A\|(\delta_1 + 2\delta_2),$$

$$\|A_{12}\| \leqslant \|A_{21}\|(\|R_1\| + \|R_0\|) + \delta_1\|A\| \leqslant \|A\|2\delta_2 + \delta_1\|A\| \leqslant (2\delta_2 + \delta_1)\|A\|,$$

в результате которых можно заключить, что

$$\max(\|A_{12}\|, \|LA_{22} - A_{11}L - A_{12}\|) \leqslant \|A\|(2\delta_2 + \delta_1). \tag{3.7}$$

Поскольку

$$\|R\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & R_{12} \\ R_{21} & 0 \end{pmatrix}\right\| = \max(\|R_{12}\|, \|R_{21}\|),$$

то ввиду (3.4), (3.6), (3.7) получаем оценку $\|R\| \leqslant \|A\|(2\delta_2 + \delta_1)$. Лемма 1 доказана.

Приступим к доказательству леммы 2. Из условия $\|\widetilde{G}^2 - \widetilde{G}\| \leqslant \delta$ следует, что

$$|\lambda_j(\widetilde{G}) - \lambda_j^2(\widetilde{G})| \leqslant \delta, \ 0 < \delta, < \frac{1}{8}, \ j = 1, 2, \ldots, N,$$

а значит, модули собственных значений $\widetilde{G}$ $(\lambda_j = \lambda_j(\widetilde{G}))$ лежат в объединении отрезков $[0, 2\delta]$, $[1 - 2\delta, 1 + 2\delta]$.

По теореме Шура существует ортогональная $N \times N$ матрица U такая, что

$$U^*\widetilde{G}U = \begin{pmatrix} R_0 & L \\ 0 & I+R_1 \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

где собственные значения матриц R_0 и R_1 лежат в круге радиуса 2δ с центром в нуле. Пусть F_0, F_1, F — матрицы размеров, соответствующих размерам матриц R_0, R_1, L, такие, что

$$U^*(\widetilde{G}^2 - \widetilde{G})U = \begin{pmatrix} F_0 & F \\ 0 & F_1 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Из ортогональности U и условия $\|\widetilde{G}^2 - \widetilde{G}\| \leqslant \delta$ имеем

$$\|F_0\| \leqslant \delta, \ \|F_1\| \leqslant \delta, \ \|F\| \leqslant \delta. \tag{3.10}$$

В то же время из (3.8) следует, что

$$U^*\widetilde{G}^2U = \begin{pmatrix} R_0^2 & R_0L + L(I + R_1) \\ 0 & I + 2R_1 + R_1^2 \end{pmatrix}.$$

Полученное равенство вместе с (3.8), (3.9) позволяет выписать следующие матричные уравнения, связывающие матрицы R_0 и R_1 соответственно с матрицами F_0 и F_1:

$$R_0^2 - R_0 = F_0, \ R_1^2 + R_1 = F_1. \tag{3.11}$$

Для доказательства леммы 2 достаточно показать справедливость оценок

$$\|R_0\| \leqslant 2\delta, \ \|R_1\| \leqslant 2\delta. \tag{3.12}$$

В этом случае можно взять в качестве $\widehat{G}$ матрицу

$$\widehat{G} = U \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & I \end{pmatrix} U^*.$$

При этом ввиду (3.8) и (3.12) гарантируется оценка

$$\|\widetilde{G} - \widehat{G}\| \leqslant 2\delta. \tag{3.13}$$

Очевидно, что для таким образом выбранной матрицы $\widehat{G}$ справедливо равенство $\widehat{G}^2 = \widehat{G}$ и ее N_1 сингулярных чисел превосходят 1, а остальные $N - N_1$ равны 0. Следовательно, используя неравенства Вейля для сингулярных чисел $\sigma_i(\widehat{G})$ и $\sigma_i(\widetilde{G})$, $i = 1, 2, \ldots, N$, и оценки (3.13), можно утверждать, что

$$|\sigma_i(\widetilde{G}) - \sigma_i(\widehat{G})| \leqslant 2\delta.$$

Тем самым покажем, что у матрицы $\widetilde{G}$ ровно $N - N_1$ сингулярных числа близки к 0 с точностью 2δ, а N_1 сингулярных чисел превосходят $1 - 2\delta$. В этом случае лемма 2 будет доказана.

Для завершения доказательства леммы 2 осталось показать, что из условий $R_0^2 - R_0 = F_0$, $\|F_0\| \leqslant \delta$, $0 < \delta < \frac{1}{8}$, следует $\|R_0\| \leqslant 2\delta$, так как совершенно аналогично выводится оценка $\|R_1\| < 2\delta$.

Перепишем уравнение $R_0^2 - R_0$ в виде

$$\left(R_0 - \frac{1}{2} I\right)^2 = F_0 + \frac{1}{4} I.$$

Так как $\|F_0\| \leqslant \delta$, $\delta < 1/8$, то матрица $F_0 + 0.25I$ неособенная. Следовательно, имеет смысл матрица $\sqrt{F_0 + 0.25I}$ и верно равенство (см.: Гантмахер [39], § 6, гл. VIII)

$$R_0 = \frac{1}{2} I - \sqrt{\frac{1}{4} I + F_0},$$

где в многозначной матричной функции $\sqrt{F_0 + 0.25I}$ выбрана ветвь, при которой у R_0 собственные значения будут около 0.

Обозначим для простоты $\widetilde{F}_0 = 4F_0$. Тогда из условия $\|F_0\| < \delta < 0.125$ получаем $\|\widetilde{F}_0\| < 0.5$, и, значит, матрица $\sqrt{I + \widetilde{F}_0}$ представляется рядом Тейлора

$$\sqrt{I + \widetilde{F}_0} = I + \frac{1}{2} \widetilde{F}_0 - \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \widetilde{F}_0^2 + \ldots + (-1)^n \prod_{j=2}^{n} \left(j - \frac{3}{2}\right) \widetilde{F}_0^n + \ldots. \tag{3.14}$$

Этот ряд сходится, так как

$$\left|\frac{1}{n!}\prod_{j=2}^{n}(j-3/2)\|\widetilde{F}_0\|^n\right|<\frac{1}{n}\|\widetilde{F}_0\|^n\leqslant\frac{1}{2^n n}. \tag{3.15}$$

Из (3.14) следует, что

$$\left\|\sqrt{I+\widetilde{F}_0}-I\right\|\leqslant\frac{1}{2}\|\widetilde{F}_0\|+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\|\widetilde{F}_0\|^2+\ldots+\frac{\|\widetilde{F}_0\|^n}{n!}\prod_{j=2}^{n}\left(j-\frac{3}{2}\right)+\ldots,$$

ряд в правой части сходится в силу (3.15).

Раскладывая в ряд Тейлора функцию $\sqrt{1-\|\widetilde{F}_0\|}$, можно записать, что

$$1-\sqrt{1-\|\widetilde{F}_0\|}=\frac{1}{2}\|\widetilde{F}_0\|+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\|\widetilde{F}_0\|^2+\ldots+\frac{\|\widetilde{F}_0\|^n}{n!}\prod_{j=2}^{n}\left(j-\frac{3}{2}\right).$$

Сравнивая два последних ряда, нетрудно заключить, что верна цепочка:

$$\left\|\sqrt{I+\widetilde{F}_0}-I\right\|\leqslant\left|\sqrt{1-\|\widetilde{F}_0\|}-1\right|\leqslant\|\widetilde{F}_0\|.$$

В качестве $\widetilde{F}_0$ мы взяли $\widetilde{F}_0=4F_0$ и $R_0=0.5(I-\sqrt{I+4F_0})$, тогда полученная оценка $\left\|\sqrt{I+\widetilde{F}_0}-I\right\|\leqslant\|\widetilde{F}_0\|$ гарантирует выполнение неравенства $\|R_0\|\leqslant\|4F_0\|/2\leqslant 2\delta$, т. е. лемма 2 доказана.

§ 4. Окончательная схема расчета параметра дихотомии и проекторов на $\mathscr{L}_+(A)$ $\mathscr{L}_-(A)$

В этом параграфе, подводя итоги работы, сформулируем схему расчета проекторов $G(+0)$, $G(-0)$ на $\mathscr{L}_+(A)$, $\mathscr{L}_-(A)$. Все ее этапы разобраны выше. Схему приводим для того, чтобы предлагаемая технология выделения инвариантных подпространств несамосопряженных матриц A была легко обозримой.

Схема предусматривает в процессе расчета $G(+0)$ и $G(-0)$ получение оценки величины $\varkappa(A)$. Если оказалось при этом, что $\varkappa(A)>\varkappa^*$ ($\varkappa^*$ — большое число, которое тем больше, чем больше разрядов выделено для чисел в разрядной сетке ЭВМ), то матрицы $G(+0)$ и $G(-0)$ не вычисляются, а только констатируется отсутствие «практической» дихотомии спектра A мнимой осью. Если же $\varkappa(A)<\varkappa^*$, то $G(+0)$ и $G(-0)$ вычисляются с гарантированной оценкой точности δ, где δ связана с $\varkappa^*$ неравенством

$$\delta<\frac{1}{5600\varkappa^{*3}},\quad \varkappa^*>20.$$

Рассматриваемый здесь алгоритм всегда приводит к однозначному ответу, какова бы ни была матрица A.

Положим $\|A\|=0.5$ (это предположение не является ограничительным, так как инвариантные подпространства матрицы не зависят от ее нормировки).

I ЭТАП. Задавшись величинами

$$\varkappa_0^*=2\varkappa^*,\ \delta, \tag{4.1}$$

можно указать (см. § 1 гл. 3) целое число n_0 такое, что, проделав n_0 шагов в процессе (1.6) гл. 3 (при этом указывается степень точности выполнения матричных операций в этом процессе), либо убедимся, что $\varkappa(A)>\varkappa_0^*$, и процесс завершится утверждением $\varkappa(A)>\varkappa^*$, либо получим матрицы $\widetilde{G}_+$ и $\widetilde{G}_-$ такие, что

$$\|\widetilde{G}_+^2-\widetilde{G}_+\|\leqslant 2\sqrt{\varkappa^*}\delta+\delta+\delta^2,\ \|A\widetilde{G}_+-\widetilde{G}_+A\|\leqslant\delta. \tag{4.2}$$

При этом если $\varkappa(A) < \varkappa_0^*$, то в силу результатов исследований гл. 3 верны неравенства

$$\|\widetilde{G}_+ - G(+0)\| \leqslant \delta, \ \|\widetilde{G}_- - G(-0)\| \leqslant \delta. \tag{4.3}$$

Дальнейшие этапы этой схемы предназначены для того, чтобы либо убедиться, что $\varkappa(A) < \varkappa_0^*$, либо гарантировать выполнение неравенства $\varkappa(A) > \varkappa^*$.

Заметим, что если $\|\widetilde{G}_+\| < 1 - \delta$, то в случае $\varkappa(A) < \varkappa^*$ должно выполняться равенство $G(+0) = 0$ (так как $\|G(+0)\| \neq 0$ влечет за собой неравенство $\|G(+0)\| \geqslant 1$). Поэтому в случае, когда $\|\widetilde{G}_+\| < 1 - \delta$, исследуется гурвицевость матрицы $-A$ (см. [25]), и если она гурвицева, то параметр дихотомии $\varkappa(A)$ совпадает с параметром качества устойчивости матрицы $-A$, а инвариантное подпространство $\mathscr{L}_-(A)$ совпадает со всем пространством, при этом $G(+0) = 0$, $G(-0) = I$, в противном случае результатом будет утверждение $\varkappa(A) > \varkappa^*$. Аналогично при $\|\widetilde{G}_-\| < 1 - \delta$ исследуется гурвицевость матрицы A, и если она гурвицева, то параметр дихотомии $\varkappa(A)$ совпадает с параметром качества устойчивости матрицы A, а инвариантное подпространство $\mathscr{L}_+(A)$ — со всем пространством, при этом $G(+0) = I$, $G(-0) = 0$. Иначе результатом будет утверждение: $\varkappa(A) > \varkappa^*$.

II ЭТАП. На этом этапе вычисляются приближения к интегралу

$$H_+ = \int_0^\infty G^*(+0)\, e^{tA^*} e^{tA} G(+0)\, dt.$$

Обозначим $\delta_1 = 2\delta\sqrt{\varkappa^*} + \delta + \delta^2$, $\rho_0 = 50(\delta + \delta_1)$. Тогда в силу неравенств (4.2), (4.3) и выбора δ можно, реализуя алгоритм, указанный в главе 4, либо убедиться, что $\varkappa(A) > \varkappa^*$, и завершить процесс, либо указать матрицу $\widetilde{H}_+$ такую, что

$$\left\|A^*H_+ + H_+A + \widetilde{G}_+^*\widetilde{G}_+\right\| \leqslant \frac{\rho_0}{2} = 25(\delta + \delta_1) < 26\delta_1, \tag{4.4}$$

$$\left\|\widetilde{G}_+^*\widetilde{H}_+\widetilde{G}_+ - \widetilde{H}_+\right\| \leqslant 4\varkappa^*\delta_1.$$

При этом если $\varkappa(A) < \varkappa^*$, то для матриц $\widetilde{H}_+$ и H_+ справедливо неравенство

$$\|\widetilde{H}_+ - H_+\| \leqslant \rho_0\|H_+\|. \tag{4.5}$$

III ЭТАП. Аналогично этапу II вычисляется приближение к интегралу

$$H_- = \int_0^\infty (I - G(+0))^* e^{-tA^*} e^{-tA} (I - G(+0))\, dt.$$

(Здесь вместо $\widetilde{G}_+$ берется матрица $I - \widetilde{G}_+$, а вместо A матрица $-A$.) На этом этапе также либо гарантируется, что $\varkappa(A) > \varkappa^*$, либо указывается матрица $\widetilde{H}_-$ такая, что

$$\begin{aligned} &\|A^*\widetilde{H}_- + \widetilde{H}_-A - (I - \widetilde{G}_+)^*(I - \widetilde{G}_+)\| \leqslant 26\delta_1, \\ &\|(I - \widetilde{G}_+)^*\widetilde{H}_-(I - \widetilde{G}_+) - \widetilde{H}_-\| \leqslant 4\varkappa^*\delta_1, \end{aligned} \tag{4.6}$$

причем если $\varkappa(A) < \varkappa^*$, то

$$\|\widetilde{H}_- - H_-\| \leqslant \rho_0\|H_-\|. \tag{4.7}$$

IV ЭТАП. Вычисляется матрица $\widetilde{H} = \widetilde{H}_+ + \widetilde{H}_-$ и ее максимальное $(\lambda_{\max}(\widetilde{H}))$ и минимальное $(\lambda_{\min}(\widetilde{H}))$ собственные значения.

V ЭТАП. Проверяется неравенство

$$\lambda_{\min}(\widetilde{H}) > 0. \tag{4.8}$$

Если оно не выполнено, то процесс завершается утверждением: $\varkappa(A) > \varkappa^*$. В противном случае полагаем $\widetilde{\varkappa} = \|\widetilde{H}\|$ $(\|\widetilde{H}\| = \lambda_{\max}(\widetilde{H}))$.

VI ЭТАП. Проверяются неравенства

$$\|\tilde{H}\| \, \|\tilde{H}^{-1}\| < 2\varkappa^*, \tag{4.9}$$

$$\|A^*\tilde{H} + \tilde{H}A + \tilde{G}_+^*\tilde{G}_+ - (I - \tilde{G}_+)^*(I - \tilde{G}_+)\| \leqslant 52\delta_1, \tag{4.10}$$

$$\|\tilde{G}_+^*\tilde{H}\tilde{G}_+ + (I - \tilde{G}_+)^*\tilde{H}(I - \tilde{G}_+) - \tilde{H}\| \leqslant \frac{8\varkappa^*(\delta_1 + \rho_0)}{1 - 2\rho_0\varkappa^*}, \tag{4.11}$$

$$\|\tilde{G}_+\| \leqslant \sqrt{\varkappa^*} + \delta, \ \tilde{\varkappa} < (1 + 52\delta_1)\varkappa^*. \tag{4.12}$$

В случае, когда хотя бы одно из этих неравенств нарушено, гарантируется выполнение неравенства $\varkappa(A) > \varkappa^*$. Иначе в силу теоремы 2 § 2 $\varkappa(A) < \varkappa_0^*$, и, значит, справедливы оценки

$$\|G(+0) - \tilde{G}_+\| \leqslant \delta, \ \|G(-0) - \tilde{G}_-\| \leqslant \delta. \tag{4.13}$$

Обозначив

$$\Delta = \max\Big\{\delta, \frac{1}{\|\tilde{H}\|}\|\tilde{G}_+^*\tilde{H}\tilde{G}_+ + (I - \tilde{G}_+)^*\tilde{H}(I - \tilde{G}_+) - \tilde{H}\|,$$
$$\frac{1}{2}\|A^*\tilde{H} + \tilde{H}A + \tilde{G}_+^*\tilde{G}_+ - (I - \tilde{G}_+)^*(I - \tilde{G}_+)\|\Big\},$$

(ясно, что в силу выбора δ, δ_1 и неравенств (4.10), (4.11), (4.13) верна оценка $\Delta < 1/170$) из (4.10), (4.11) и (4.13) получим

$$\|\tilde{G}_+ - G(+0)\| \leqslant \Delta,$$
$$\|A^*\tilde{H} + \tilde{H}A + \tilde{G}_+^*\tilde{G}_+ - (I - \tilde{G}_+)^*(I - \tilde{G}_+)\| \leqslant 2\Delta,$$
$$\|\tilde{G}_+^*\tilde{H}\tilde{G}_+ + (I - \tilde{G}_+)^*\tilde{H}(I - \tilde{G}_+) - \tilde{H}\| \leqslant \Delta\|\tilde{H}\|.$$

Эти неравенства позволяют, воспользовавшись теоремой 3 § 2, утверждать, что

$$\frac{\|\tilde{H} - H\|}{\|H\|} \leqslant 14\Delta, \ \frac{|\varkappa(A) - \|\tilde{H}\||}{\|\tilde{H}\|} \leqslant 14\Delta, \ \frac{|\varkappa(A) - \|\tilde{H}\||}{\varkappa(A)} \leqslant 14\Delta.$$

Следовательно, установив справедливость неравенства $\varkappa(A) < \varkappa_0^*$, можно, анализируя результат расчета, указать величину $\varkappa(A)$ с точностью 14Δ.

Перейдем к обоснованию заключения V и VI этапов. Прежде всего напомним, что в гл. 1 для матрицы H:

$$H = H_+ + H_-,$$

$$H_+ = \int_0^\infty G^*(+0)e^{tA^*}e^{tA}G(+0)\,dt,$$

$$H_- = \int_0^\infty (I - G(+0))^*e^{-tA^*}e^{-tA}(I - G(+0))\,dt$$

справедлива оценка ее минимального собственного значения ($\|A\| = 0.5$):

$$\lambda_{\min}(H) \geqslant \frac{1}{2\|A\|} = 1. \tag{4.13$'$}$$

Тогда тем более

$$\|H\| \geqslant 1. \tag{4.14}$$

Из (4.5), (4.7) и (4.13′) следует, что ($\tilde{H} = \tilde{H}_+ + \tilde{H}_-$, $\max(\|H_+\|, \|H_-\|) \leqslant$ $\leqslant \|H\| = \varkappa(A)$)

$$\lambda_{\min}(\tilde{H}) \geqslant 1 - 2\rho_{0\max}(\|H_+\|, \|H_-\|) \geqslant 1 - 2\rho_0\varkappa(A),$$

т. е.

$$\lambda_{\min}(\tilde{H}) \geqslant 1 - 2\rho_0\varkappa(A). \tag{4.15}$$

Нетрудно убедиться, что в силу выбора $\delta\, 1 - 2\rho_0\varkappa^* > 0$, и, значит, если $\varkappa(A) < \varkappa^*$, то обязано выполняться неравенство $\lambda_{\min}(\tilde{H}) > 0$. Тем самым мы получили обоснование заключения этапа V.

Теперь покажем, как из условия $\varkappa(A) < \varkappa^*$ можно вывести справедливость неравенств (4.9) — (4.12), что и будет доказательством значений этапа VI.

Начнем с неравенства (4.9). Из (4.15) и цепочки неравенств ($\|A\| = 0.5$):

$$\|\tilde{H}\| \leqslant \|H\| + \|H - \tilde{H}\| \leqslant \varkappa(A) + \|H_+ - \tilde{H}_+\| + \|H_- - \tilde{H}_-\| \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa(A) + 2\rho_0 \max(\|H_+\|, \|H_-\|) \leqslant \varkappa(A)(1 - 2\rho_0)$$

следует, что если $\varkappa(A) < \varkappa^*$, то

$$\|\tilde{H}\|\|\tilde{H}^{-1}\| = \frac{\|\tilde{H}\|}{\lambda_{\min}(\tilde{H})} \leqslant \frac{\varkappa^*(1 + 2\rho_0)}{1 - 2\rho_0}.$$

Это неравенство с учетом оценки $(1 + 2\rho_0)/(1 - 2\rho_0) < 2$, справедливой ввиду выбора ρ_0, δ_1 и в конечном итоге δ, позволяет утверждать оценку (4.9), если $\varkappa(A) < \varkappa^*$. Следствием неравенств (4.4) и (4.6) является

$$\|\tilde{G}_+^*\tilde{H}_+\tilde{G}_+ + (I - \tilde{G}_+)^*\tilde{H}_-(I - \tilde{G}_+) - \tilde{H}\| \leqslant 8\varkappa^*\delta_1, \tag{4.16}$$

что, в свою очередь, влечет справедливость (4.10).

Если воспользоваться равенствами

$$G^*(+0)H_+ = H_+G(+0) = H_+$$

(см. гл. 1), неравенством $\|G(+0)\| \leqslant \sqrt{\varkappa(A)}$ и оценками $\|G(+0) - \tilde{G}_+\| \leqslant \delta$, $\|\tilde{H}_+ - H_+\| \leqslant \rho_0\|H_+\|$, справедливыми при $\varkappa(A) \leqslant \varkappa^*$, то можно получить цепочку неравенств:

$$\|(I - \tilde{G}_+)^*H_+(I - G_+)\| \leqslant \|H_+\|\,\|G(+0) - \tilde{G}_+\|^2 +$$
$$+ \|\tilde{H}_+ - H_+\|[\|G(+0) - \tilde{G}_+\|^2 + 2\|I - G(+0)\| + \|I - G(+0)\|^2] \leqslant$$
$$\leqslant \{[\delta + 2\sqrt{\varkappa(A)} + \varkappa(A)]\rho_0 + \delta^2\}\,\|H_+\| \leqslant 4\varkappa(A)\rho_0\|H_+\|.$$

Из нее, используя простые оценки

$$\|H_+\| \leqslant \|H\|, \quad \|\tilde{H}\| \geqslant (1 - 2\rho_0)\|H\|,$$

можно утверждать, что

$$\|(I - \tilde{G}_+)^*\tilde{H}_+(I - \tilde{G}_+)\| \leqslant \frac{4\varkappa(A)\rho_0}{1 - 2\rho_0}\|\tilde{H}\|. \tag{4.17}$$

Совершенно аналогично выводится оценка

$$\|\tilde{G}_+^*\tilde{H}_-\tilde{G}_-\| \leqslant \frac{4\varkappa(A)\rho_0}{1 - 2\rho_0}\|\tilde{H}\|. \tag{4.18}$$

Воспользовавшись неравенствами (4.17), (4.18), $\varkappa(A) < \varkappa^*$ и неравенством $\|\tilde{H}\| \geqslant \lambda_{\min}(\tilde{H})$ (см. (4.15)) и огрубив (4.14):

$$\|\tilde{G}_+^*\tilde{H}\tilde{G}_+ + (I - \tilde{G}_+)^*\tilde{H}(I - \tilde{G}_+) - \tilde{H}\| \leqslant \frac{8\varkappa^*\delta_1 + 8\varkappa^*\rho_0}{1 - 2\rho_0\varkappa^*}\|\tilde{H}\|,$$

получим (4.11).

Остановимся на неравенствах (4.12). Во-первых, из предположения $\varkappa(A) < \varkappa^*$ следует в силу этапа I, что $\|G(+0) - \tilde{G}_+\| \leqslant \delta$, и, значит, так как $\|G(+0)\| \leqslant \sqrt{\varkappa(A)}$, имеем

$$\|\tilde{G}_+\| \leqslant \sqrt{\varkappa(A)} + \delta \leqslant \sqrt{\varkappa^*} + \delta.$$

Во-первых, опираясь на определение $\tilde{\varkappa} = \|\tilde{H}\|$ и оценку $\|\tilde{H} - H\| \leqslant \leqslant 2\rho_0\|H\|$, следующую из (4.4), (4.6), можно заключить, что $\tilde{\varkappa} < <(1 + 2\rho_0)\varkappa^*$. Таким образом, неравенства (4.9) обоснованы. Для завершения обоснования этапа VI нам осталось убедиться в том, что если неравенства (4.9) — (4.12) выполнены, то $\varkappa(A) < \varkappa_0^*$.

Для удобства доказательства положим

$$\bar{\delta} = 8\varkappa^*(\delta_1 + \rho_0)/(1 - 2\rho_0\varkappa^*).$$

Введенное обозначение, ввиду выбора δ_1, ρ_0, δ, позволяет из неравенств (4.9) — (4.12) заключить, что при $\varkappa^* > 20$ верны оценки

$$\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\| \leqslant \frac{1}{10\bar{\delta}},$$

$$\|A^*\widetilde{H} + \widetilde{H}A + \widetilde{G}_+^*\widetilde{G}_+ - (I - \widetilde{G}_+)^*(I - \widetilde{G}_+)\| \leqslant 2\delta,$$

$$\|\widetilde{G}_+^*\widetilde{H}\widetilde{G}_+ + (I - \widetilde{G}_+)^*\widetilde{H}(I - \widetilde{G}_+) - \widetilde{H}\| \leqslant \bar{\delta}\|\widetilde{H}\|,$$

$$\bar{\delta} < \frac{1}{800\varkappa^*}\min\left\{1, \frac{8\varkappa^*}{\|\widetilde{G}_+}\right\},$$

которые позволяют, воспользовавшись теоремой 2 § 2, утверждать, что

$$|\varkappa(A) - \widetilde{\varkappa}| < 92\widetilde{\varkappa}^2\delta.$$

Откуда в силу выбора $\bar{\delta}$, δ_1, ρ_0 и в конечном итоге δ можно утверждать, что при $\varkappa^* > 20$ верна оценка

$$\widetilde{\varkappa} + 92\widetilde{\varkappa}^2\bar{\delta} < 2\varkappa^* = \varkappa_0^*,$$

а значит, $\varkappa(A) < \varkappa_0^*$.

Итак, мы убедились, что описанная схема позволяет либо гарантировать выполнение неравенства $\varkappa(A) > \varkappa^*$, либо получить матрицы $\widetilde{G}_+$ и $\widetilde{G}_-$, приближающие $G(+0)$ и $G(-0)$ с точностью δ ($\|G(\pm 0) - \widetilde{G}_\pm\| \leqslant \delta$). При этом гарантируется, что $\varkappa(A) < \varkappa^*$. Более того, указывается величина $\varkappa(A)$ с точностью порядка невязки системы матричных уравнений, обобщающей матричное уравнение Ляпунова.

Предложенную здесь схему расчета проекторов $G(+0)$ и $G(-0)$ можно сделать в некоторых случаях более быстрой за счет следующей модификации этапа I. Возьмем некоторую целочисленную последовательность $\{n_k\}$ (например, $n_k = 10k$, $k = 1, 2, \ldots$), а точнее, ограничимся ее конечной частью: $n_k \leqslant n_0$. Мы можем, как только по формулам (1.6) (см. гл. 3) вычислены очередные матрицы Q_{n_k}, P_{n_k}, выяснить, насколько матрица $\pi_{n_k} = P_{n_k}(P_{n_k} - Q_{n_k})^{-1}$ является «почти» проектором на инвариантное подпространство A, т. е. выполнены ли неравенства

$$\|\pi_{n_k} - \pi_{n_k}^2\| \leqslant \frac{1}{2}\widetilde{\delta}, \quad \|A\pi_{n_k} - \pi_{n_k}A\| \leqslant \frac{1}{2}\widetilde{\delta}, \tag{4.19}$$

где $\widetilde{\delta}$ выбирается из условия

$$\widetilde{\delta} < \delta/(72\varkappa^{*2}). \tag{4.20}$$

В случае нарушения хотя бы одного из неравенств (4.19) процесс вычисления по формулам (1.6) гл. 3 продолжается, начиная с $i = n_k + 1$ до следующего $i = n_{k+1} \leqslant n_0$. Если $n_k \geqslant n_0$, то действует II этап рассмотренной схемы (в этом случае ожидавшегося ее ускорения не получилось).

В случае выполнения неравенств (4.19) можно утверждать, что матрицы π_{n_k} и $(I - \pi_{n_k})$ являются «почти» проекторами на инвариантные подпространства матрицы A, и нам теперь необходимо выяснить, являются ли они «почти» проекторами соответственно в $\mathscr{L}_+(A)$ и $\mathscr{L}_-(A)$.

Прежде всего напомним, что из леммы 1 § 3 гл. 5 и неравенств (4.19) следует существование матриц R и $\widehat{\pi}$, для которых верны утверждения:

$$(A + R)\widehat{\pi} = \widehat{\pi}(A + R), \quad \widehat{\pi}^2 = \widehat{\pi}, \quad \|\widehat{\pi} - \pi_{n_k}\| \leqslant \widetilde{\delta}, \quad \frac{\|R\|}{\|A\|} < \frac{3}{2}\widetilde{\delta}.$$

Следовательно, если $\widehat{\pi}$ — проектор на $\mathscr{L}_+(A+R)$, то в силу теоремы 1 гл. 1 верна оценка

$$\|G(+0,\ A)-\widehat{\pi}\| \leqslant 18\varkappa^2(A)\widetilde{\delta},$$

и, значит, при условиях $\varkappa(A) < \varkappa_0^* = 2\varkappa^*$, $\widetilde{\delta} < \frac{1}{300\varkappa^*}$ и (4.20) получаем

$$\|G(+0,\ A)-\widehat{\pi}\| \leqslant \delta.$$

Далее повторяя этапы рассмотренной ранее схемы, начиная с этапа II и исключая исходы $\varkappa(A) > \varkappa^*$, мы либо убедимся, что $\varkappa(A) < \varkappa_0^*$, и, значит, мы построили приближения к $G(+0,\ A)$ и $G(-0,\ A)$ с требуемой точностью δ, либо продолжим расчеты Q_i и P_i по формулам этапа I до следующего члена выделенной последовательности $\{n_k\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Годунов С. К.** Решение системы линейных уравнений.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.— 177 с.
2. **Уилкинсон Дж. Х.** Алгебраическая проблема собственных значений.— М.: Наука, 1970.— 564 с.
3. **Воеводин В. В.** Вычислительные основы линейной алгебры.— М.: Наука, 1977.— 304 с.
4. **Воеводин В. В.** Ошибки округления и устойчивость в прямых методах линейной алгебры.— М.: ВЦ МГУ, 1969.— 153 с.
5. **Форсайт Дж., Моулер К.** Численное решение систем линейных алгебраических уравнений.— М.: Мир, 1969.— 167 с.
6. **Тюринг А.** Ошибки округления в матричных процессах // УМН.— 1951.— Т. VI, вып. I (41).— С. 138—162.
7. **Von Neuman T., Goldstine H. H.** Numerical inverting of matrices of high order // Bull. Amer. Math. Soc.— 1947.— Vol. 53, N 11.— P. 1021—1099.
8. **Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.** Машинные методы математических вычислений.— М.: Мир, 1980.— 280 с.
9. **Фадеев Д. К., Фадеева В. Н.** Вычислительные методы линейной алгебры.— М.; Л.: Физматгиз, 1963.— 734 с.
10. **Кублановская В. Н.** О некоторых алгоритмах для решения полной проблемы собственных значений // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1961.— Т. 1, № 4.— С. 555—570.
11. **Воеводин В. В.** Некоторые методы решения полной проблемы собственных значений // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1962.— Т. 2, № 1.— С. 15—24.
12. **Воеводин В. В.** Решение полной проблемы собственных значений степенными методами // Вычислительные методы и программирование.— М.: МГУ, 1965.— С. 7—55.
13. **Абрамов А. А.** О граничных условиях в особой точке для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1971.— Т. 11, № 1.— С. 275—278.
14. **Абрамов А. А.** О численном решении некоторых алгебраических задач, возникающих в теории устойчивости // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1984.— Т. 24, № 3.— С. 339—347.
15. **Валеев К. Г., Финин Г. С.** Построение функций Ляпунова.— Киев: Наук. думка, 1980.— 412 с.
16. **Кублановская В. Н.** Алгоритм Ab и его свойства // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР.— 1980.— Т. 102.— С. 42—60.
17. **Balzer L. A.** Accelerated convergence of the matrix sign-function method of solving Lyapunov, Riccati and other matrix equation // Internat. J. Control.— 1980.— Vol. 32, N 6.— P. 1057—1078.
18. **Годунов С. К., Рябенький В. С.** Введение в теорию разностных схем.— М.: Физматгиз, 1962.— 340 с.
19. **Костин В. И., Раззаков Ш. И.** О сходимости ортогонально-степенного метода расчета спектра // Тр. Ин-та математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 6: Вычислительные методы линейной алгебры.— С. 55—84.
20. **Годунов С. К.** Задача о дихотомии спектра матрицы // Сиб. мат. журн.— 1986.— Т. 27, № 5.— С. 24—37.
21. **Годунов С. К., Булгаков А. Я.** Устойчивость устойчивых матриц // Кубатурные формулы и вычислительная математика.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.— С. 18—28.

22. **Булгаков А. Я.** Эффективно вычисляемый параметр качества устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Сиб. мат. журн.— 1980.— Т. 21, № 3.— С. 32—41.
23. **Godounov S. K., Boulgakov A. J.** Difficultes de calcul dans le probleme de Hurwitz et methodes pour les surmonter // Analysis and Optimization of Systems: Versailles, 1982.— Springer-Verlag, 1982.— P. 843—851.
24. **Булгаков А. Я.** Расчет экспоненты от асимптотически устойчивой матрицы // Тр. Ин-та математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 6: Вычислительные методы линейной алгебры.— С. 4—17.
25. **Булгаков А. Я., Годунов С. К.** Расчет положительно определенных решений уравнений Ляпунова // Тр. Ин-та математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 6: Вычислительные методы линейной алгебры.— С. 17—38.
26. **Булгаков А. Я.** Расчет положительно определенных решений уравнения Ляпунова: Описание применения программы *mle*. ГосФАП инф. № 50850000719 в Зап. Сиб. отд-нии АН СССР.— Новосибирск, 1984.— 30 с.— (Ин-т математики СО АН СССР).
27. **Ward R. C.** Numerical computation of the matrix exponential with accuracy estimate // SIAM j. Numerical Anal.— 1977.— Vol. 14, N 4.— P. 600—610.
28. **Колмогоров А. И., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1981.— 542 с.
29. **Годунов С. К., Гордиенко В. М.** Матрица Грина краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН.— 1984.— Т. 39, вып. 1 (235).— С. 39—76.
30. **Наймарк М. А.** Линейные дифференциальные операторы.— М.: Наука, 1969.— 373 с.
31. **Повзнер А. Я., Павлов Б. В.** Об одном методе численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1973.— Т. 13, № 4.— С. 256—259.
32. **Годунов С. К.** О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН.— 1961.— Т. 16, вып. 3.— С. 171—174.
33. **Годунов С. К.** Метод ортогональной прогонки для решения систем разностных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1962.— Т. 2, № 6.— С. 972—982.
34. **Абрамов А. А.** Вариант метода прогонки // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1961.— Т. 1, № 2.— С. 349—351.
35. **Абрамов А. А.** О переносе граничных условий для систем обыкновенных дифференциальных уравнений: Вариант метода прогонки // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1961.— Т. 1, № 3.— С. 542—545.
36. **Кузнецов С. В.** Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та математики СО АН СССР.— 1985.— Т. 6: Вычислительные методы линейной алгебры.— С. 85—110.
37. **Булгаков А. Я., Годунов С. К.** Параметр дихотомии спектра матрицы и схема расчета.— Новосибирск, 1985.— 20 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 8).
38. **Per Hagander.** Numerical Solution of $A^*S + SA + Q = 0$ // Information Sciences.— 1972.— Vol. 4.— P. 35—50.
39. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 576 с.
40. **Ланкастер П.** Теория матриц.— М.: Наука, 1978.— 272 с.

В. Л. ВАСКЕВИЧ

К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В СОСТАВНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Введение

Конструирование различных методов приближенного решения эллиптических краевых задач весьма актуально и в настоящее время [1—6]. Наряду с работами, развивающими традиционные методы (конечно-разностные методы [4], методы интегральных уравнений [4, 7]), появляются статьи, предлагающие новые подходы [2, 3, 5, 8], суть которых, как правило, в более удачном использовании тех или иных аналитических свойств решения соответствующей краевой задачи.

В данной работе рассматривается задача Дирихле для уравнения Лапласа в составной области. Условимся называть осесимметричную область Ω составной, если она получается объединением конечного чис-