

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ КРИВОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЙ

ВВЕДЕНИЕ

Предположим, что вектор-функция $u(t)$ удовлетворяет на интервале $T \subset (-\infty, +\infty)$ системе линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{du(t)}{dt} = A(t)u(t) + f(t) + \gamma(t), \quad (1)$$

где $\gamma(t)$ — некоторый векторный обобщенный случайный процесс, конкретный вид траекторий которого неизвестен. Считаем, что $u(t)$, $f(t)$ и $\gamma(t)$ — вектор-столбцы размерности n , а $A(t)$ — матрица-функция размерности $n \times n$ и $f(t)$ состоит из заданных непрерывных функций.

Пусть в некоторые известные моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_l \in T$ ($t_1 < t_2 < \dots < t_l$) известны результаты измерений

$$g_i = C_i u(t_i) + \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (2)$$

где ξ_i — случайные погрешности, точные значения которых неизвестны, и для всех i ($i = 1, 2, \dots, l$) матрица C_i задана и имеет размер $n_i \times n$, поэтому g_i и ξ_i — вектор-столбцы размерности n_i .

В этой работе предложены алгоритмы численного нахождения различного рода оценок вектор-функции $u(t)$, являющейся решением системы дифференциальных уравнений (1) по совокупности наблюдений (2) в заданный момент времени t_0 ($t_0 \in T$). Под оценкой вектор-функции $u(t)$ в точке t_0 понимается предназначенный для использования вместо $u(t_0)$, вектор $\hat{u}(t_0)$, через который проходит одна из интегральных кривых системы дифференциальных уравнений (1), наиболее соответствующая имеющимся наблюдениям (2). Определение рассматриваемого класса оценок, а вместе с тем и понятие «оценка» дается в § 1. В основном работа посвящена задаче получения эффективных оценок, т. е. оценок с наименьшей ковариационной матрицей среди всех несмещенных оценок. Менее детально рассмотрены методы получения других оценок, в частности оценок по методу наименьших квадратов. Для получения эффективной оценки требуется, чтобы были известны ковариационные матрицы случайного процесса $\gamma(t)$ и случайных векторов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l$. Предположения относительно распределений процесса $\gamma(t)$ и векторов ξ_i , необходимые для получения такой оценки, также изложены в § 1. Алгоритм ее практического вычисления, предложенный С. В. Кузнецовым, описан в § 2—4. Наиболее подробно рассмотрен случай получения эффективной оценки вектор-функции $u(t)$ в точке t_0 , для которой выполнено $t_0 \geq t_l$, поясняющий в более простой форме метод получения такой оценки.

В основе предлагаемого подхода лежит то обстоятельство, что задача получения той или иной оценки для поставленной задачи эквивалентна решению одной или серии двухточечных краевых задач с разрывами решения в точках наблюдения. При их решении будет получена требуемая оценка и ее ковариационная матрица. Например, для получения эффективной оценки $\hat{u}(t_0)$ в случае $t_0 \geq t_l$ потребуется решить $3l + 1$ таких краевых задач. Для получения оценок вектор-функции $u(t)$ по методу наименьших квадратов на всем интервале $[t_1, t_l]$ необходимо решить всего одну краевую задачу. Численное решение краевых задач осуществляется методом ортогональной прогонки.

Возможные применения полученных эффективных оценок изложены в § 5. В частности, построение эффективных оценок необходимо для организации оптимального фильтра Калмана-Бьюси. Оптимальный фильтр

Калмана-Бьюси может быть применен в случае, когда помимо наблюдений (2), в наше распоряжение последовательно в моменты времени $t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_p, \dots$ ($t_i < t_{i+1} < t_{i+2} < \dots < t_p < \dots$ либо $t_1 > t_{i+1} > t_{i+2} > \dots > t_p > \dots$) поступают дополнительные результаты измерений такого же сорта, как и в (2). Данная процедура позволяет при наличии эффективной оценки и ее ковариационной матрицы в точке t_k строить эффективную оценку в точке t_{k+1} , причем для построения такой оценки результаты наблюдения в точке t_{k+1} не используются. В отличие от фильтра Калмана-Бьюси предлагаемая в настоящей работе процедура позволяет получать эффективные оценки по всем имеющимся в данный момент результатам измерений в любой другой момент времени, в том числе можно построить эффективную оценку в точке t_{k+1} , используя результаты измерений в этой точке. Несмотря на кажущуюся громоздкость, предлагаемый метод предпочтительнее с точки зрения численности устойчивости в случае достаточно жесткой системы дифференциальных уравнений либо достаточно длинного интервала наблюдения.

Для получения требуемых оценок применяется еще один распространенный подход. Исходную задачу при помощи численного интегрирования сводят к задаче линейной регрессии и путем решения систем линейных уравнений получают требуемую оценку. Такой подход имеет, на наш взгляд, два недостатка. Во-первых, в случае достаточно большого интервала наблюдения либо достаточно жесткой системы дифференциальных уравнений может произойти сильное искажение результатов вычислений. Во-вторых, в случае большого числа наблюдений приходится иметь дело с матрицами большой размерности. Предлагаемый в данной работе подход позволяет обойти эти проблемы.

Авторы выражают искреннюю благодарность члену-корреспонденту АН СССР С. К. Годунову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Прежде всего, сведем задачу нахождения требуемой оценки к задаче линейной регрессии, что необходимо для уточнения класса рассматриваемых оценок и для вывода формул получения различного рода оценок этого класса.

Пусть $X(t, t')$ — матрица-функция размерности является решением задачи Коши

$$\frac{dX(t, t')}{dt} = A(t)X(t, t'), \quad X(t', t') = I_n,$$

где I_n — единичная матрица порядка n .

Введем обозначения

$$u_0(t) = \int_{t_0}^t X(t, t') f(t') dt', \quad (1.1)$$

$$\eta(t) = \int_{t_0}^t X(t, t') \gamma(t') dt'. \quad (1.2)$$

Используя эти обозначения, любое решение $u(t)$ системы дифференциальных уравнений (1) можно записать в виде

$$u(t) = X(t, t_0)u(t_0) + u_0(t) + \eta(t), \quad (1.3)$$

где $\eta(t)$ — случайный процесс, определяемый равенством (1.3), а вектор-функция $u_0(t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{du_0(t)}{dt} = A(t)u_0(t) + f(t), \quad u_0(t_0) = 0. \quad (1.4)$$

Определим векторы $y_1(t_0), y_2(t_0), \dots, y_l(t_0)$ равенствами

$$y_j(t_0) = g_j - C_j u_0(t_j). \quad (1.5)$$

Из (1.3) и (1.5) вытекает, что условия (2) можно переписать в виде

$$y_j(t_0) = C_j X(t_j, t_0) u(t_0) + C_j \eta(t_j) + \xi_j. \quad (1.6)$$

Введем для рассмотрения векторы $Y(t_0), \xi, \eta$ размерности $N = \sum_{i=1}^l n_i$, матрицу c размерности $N \times nl$, матрицу $\widehat{X}(t_0)$ размерности $nl \times n$, полагая

$$Y(t_0) = \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \\ \vdots \\ y_l(t_0) \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_l \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} C_1 \eta(t_1) \\ C_2 \eta(t_2) \\ \vdots \\ C_l \eta(t_l) \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

$$c = \begin{bmatrix} \overline{C_1} & & & 0 \\ & \overline{C_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \overline{C_l} \end{bmatrix}, \quad \widehat{X}(t_0) = \begin{bmatrix} X(t_1, t_0) \\ X(t_2, t_0) \\ \vdots \\ X(t_l, t_0) \end{bmatrix}.$$

В этом случае уравнения (1.6) можно переписать в виде

$$Y(t_0) = C \widehat{X}(t_0) u(t_0) + \eta + \xi = \bar{C} u(t_0) + \eta + \xi. \quad (1.8)$$

Таким образом, рассматриваемая задача свелась к частному случаю задачи линейной регрессии, когда требуется получить оценку для параметра $u(t_0)$ при условии, что известно значение вектора $Y(t_0)$, определяемого равенствами (1.7) и (1.8), где векторы η и ξ — неизвестные случайные погрешности, о которых будем предполагать следующее.

Предположение А. Случайный процесс $\gamma(t)$ и вектора ξ_i имеют нулевые средние.

Из формул (1.1) и (1.7) и линейности математического ожидания видно, что в этом случае процесс $\eta(t)$ и векторы ξ_i, η имеют нулевые средние, т. е.

$$M\xi = 0, M\eta = 0.$$

З а м е ч а н и е 1. Если средние $a_0(t) = M\gamma(t)$ и $a_j = M\xi_j, j = 1, 2, \dots, l$, известны, то, полагая

$$f_0(t) = f(t) + a_0(t), \quad \gamma_0(t) = \gamma(t) - a_0(t),$$

$$\xi_{j,0} = \xi_j - a_j, \quad g_{j,0} = g_j - a_j, \quad j = 1, 2, \dots, l,$$

автоматически придем к выполнению предположения А, которое не уменьшает в этом случае общности.

Предположение Б. Случайный процесс $\gamma(t)$ является белым шумом с ковариационной матрицей $B_\gamma(t, t') = B_\gamma(t) \delta(t - t')$, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция, причем матрица $B_\gamma(t)$ предполагается известной. Из этого следует, что определенный в (1.2) процесс $\eta(t)$ имеет ковариационную матрицу

$$B_\eta(t, t') = \begin{cases} \int_{t_0}^{\max\{t, t'\}} X(t, x) B_\gamma(x) X^*(t', x) dx & \text{при } \max\{t, t'\} \geq t_0, \\ 0 & \text{при } t < t_0 < t', \\ \int_{t_0}^{\min\{t, t'\}} X(t, x) B_\gamma(x) X^*(t', x) dx & \text{при } \min\{t, t'\} \geq t_0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Далее ввиду (1.7) случайный вектор η имеет ковариационную матрицу, представленную в следующем блочном виде:

$$B_{\eta} = \begin{bmatrix} \vdots & & \\ \dots C_i B_{\eta}(t_i, t_j) C_j^* \dots & & \\ \vdots & & \\ j & & \end{bmatrix} i. \quad (1.10)$$

Из (1.9) следует, что более правильной была бы запись $B_{\eta}(t_0)$, подчеркивающая зависимость матрицы B_{η} от выбора точки t_0 .

Предположение В. Случайный вектор ξ не зависит от процесса $\eta(t)$ и имеет невырожденную ковариационную матрицу B_{ξ} вида

$$B_{\xi} = \begin{bmatrix} \overline{\Phi_1} & & 0 \\ & \overline{\Phi_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \overline{\Phi_l} \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

т. е. $M\xi_i\xi_j^* = 0$ при $i \neq j$, что означает независимость случайных векторов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l$ и $M\xi_i\xi_i^* = \Phi_i > 0$.

Предположение Г. Случайный процесс $\gamma(t)$ и случайный вектор ξ имеют гауссовское распределение.

В силу центральной предельной теоремы это предположение выполняется всякий раз, когда погрешности ξ и γ являются суммой большого числа независимых малых возмущений. Очевидно, что имеет место

Лемма 1. Если выполнены предположения А, Б, В то случайный вектор $\xi + \eta$ имеет нулевое среднее и ковариационную матрицу

$$B_{\xi+\eta} = B_{\xi} + B_{\eta}, \quad (1.12)$$

где B_{η} находится по формулам (1.9) и (1.10). А если дополнительно верно Г, то вектор $\xi + \eta$ также имеет гауссовское распределение.

Перейдем теперь к задаче построения оценок $\hat{u}(t_0)$ неизвестного вектора $u(t_0)$. Под оценками $\hat{u}(t_0)$ понимаются любые функции от «наблюдений» $Y(t_0)$, которые предназначаются для использования вместо неизвестного вектора $u(t_0)$. Следуя [1, 2], будем рассматривать только оценки $\hat{u}(t_0)$ для $u(t_0)$, которые можно представить в виде

$$\begin{aligned} & (Y(t_0) - \bar{C}\hat{u}(t_0))^* Q (Y(t_0) - \bar{C}\hat{u}(t_0)) = \\ & = \min_{u(t_0)} (Y(t_0) - \bar{C}u(t_0))^* Q (Y(t_0) - \bar{C}u(t_0)), \end{aligned} \quad (1.13)$$

где Q — некоторая симметрическая положительно определенная матрица. В частности, если $Q = I_N$, то оценка $\hat{u}(t_0)$ является оценкой по методу наименьших квадратов.

Замечание 2. Так как каждое решение $u(t)$ системы уравнений

$$\frac{du(t)}{dt} = A(t)u(t) + f(t) \quad (1.14)$$

однозначно определяется своим значением в точке t_0 , то в силу (1.1) — (1.9) уравнение (1.13) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^l (g_i - C_i\hat{u}(t_i)) q_{ij} (g_j - C_j\hat{u}(t_j))^* = \\ & = \min_u \sum_{i,j=1}^l (g_i - C_iu(t_i)) q_{ij} (g_j - C_ju(t_j))^*, \end{aligned}$$

где q_{ij} — матрицы размерности $n_i \times n_j$ такие, что

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1l} \\ \vdots & & & \\ q_{l1} & \dots & \dots & q_{ll} \end{bmatrix},$$

$\hat{u}(t)$ — решение уравнения (1.14), проходящее при $t = t_0$ через точку $\hat{u}(t_0)$, а минимум берется по всем интегральным кривым системы уравнений (1.14). Тем самым определенная в (1.9) оценка $\hat{u}(t_0)$ допускает наглядную интерпретацию: решение $u(t)$ системы уравнений (1.14) с начальными данными $u(t_0) = \hat{u}(t_0)$ в определенном смысле лучше всего соответствует имеющимся наблюдениям $g_i = C_i u(t_i) + C_i \eta(t_i) + \xi_i$ с погрешностями $C_i \eta(t_i) + \xi_i$.

Приведем теперь необходимые в дальнейшем известные свойства определенных в (1.9) оценок $\hat{u}(t_0)$ (подробнее см. [1, 2]).

Лемма 2. Оценка $\hat{u}(t_0)$ является решением системы уравнений

$$\bar{C} Q \bar{C} \hat{u}(t_0) = \bar{X}^*(t_0) C^* Q C \bar{X}(t_0) \hat{u}(t_0) = \bar{C}^* Q Y(t_0) \quad (1.15)$$

или, другими словами,

$$\hat{u}(t_0) = V_Q Y(t_0), \quad \text{где } V_Q = (\bar{C}^* Q \bar{C})^{-1} \bar{C}^* Q. \quad (1.16)$$

Сравнивая (1.15) с уравнением для определения неизвестных коэффициентов, которое обычно возникает при решении двухточечной краевой задачи, методом «пристрелки» (см. [3]), получаем, что в случае достаточно жесткой системы дифференциальных уравнений может произойти существенная потеря точности получаемого решения. Поэтому систему линейных уравнений (1.15) мы решать не будем, а покажем, что нахождение оценки вектора $\hat{u}(t_0)$ эквивалентно решению некоторой двухточечной краевой задачи с разрывами в точках наблюдения, которую решим методом ортогональной прогонки, позволяющим предотвратить потерю точности.

Из (1.8) и (1.11) вытекает следующее представление для погрешности $\hat{u}(t_0) - u(t_0)$, возникающей при использовании оценки $\hat{u}(t_0)$ вместо неизвестного значения $u(t_0)$:

$$\hat{u}(t_0) - u(t_0) = V_Q (\eta + \xi).$$

В частности, из (1.13) следует

Лемма 3. Если верны предположения A , B и B , то оценка $\hat{u}(t_0)$ является несмещенной оценкой параметра $u(t_0)$ и имеет ковариационную матрицу, вычисляемую по формуле

$$\sigma_Q^2 = V_Q (B_\xi + B_\eta) V_Q^*. \quad (1.17)$$

А если дополнительно справедливо предположение Γ , то оценка $\hat{u}(t_0)$ имеет гауссовское распределение.

Возникает естественное желание использовать оценку $\hat{u}(t_0)$ с минимальной погрешностью. Такой является оценка

$$\hat{u}_{\text{эфф}}(t_0) = \hat{u}(t_0) \quad \text{при } Q = (B_\xi + B_\eta)^{-1}.$$

Этот факт содержится в следующем утверждении, являющемся центральным для нужд данной работы.

Лемма 4. Если выполнены условия A , B и B , то оценка $\hat{u}_{\text{эфф}}(t_0)$ имеет наименьшую ковариационную матрицу среди всех несмещенных оценок, линейно зависящих от наблюдения $Y(t_0)$. А если дополнительно верно предположение Γ , то оценка $\hat{u}_{\text{эфф}}(t_0)$ эффективна, т. е. имеет наименьшую ковариационную матрицу среди всех несмещенных оценок.

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦЫ ОБРАТНОЙ К КОВАРИАЦИОННОЙ

Как показывают результаты предыдущего параграфа, для получения $\widehat{u}_{\alpha\Phi\Phi}(t_0)$ прежде всего необходимо вычисление матрицы $(B_{\xi} + B_{\eta})^{-1}$. Поскольку система линейных алгебраических уравнений для определения $\widehat{u}_{\alpha\Phi\Phi}(t_0)$ имеет вид

$$\widehat{X}^*(t_0)C^*(B_{\xi} + B_{\eta})^{-1}C\widehat{X}(t_0)\widehat{u}_{\alpha\Phi\Phi}(t_0) = \widehat{X}(t_0)C^*(B_{\xi} + B_{\eta})^{-1}Y(t_0), \quad (2.1)$$

то для получения искомой оценки гораздо удобнее вычислять сразу матрицы $C^*(B_{\xi} + B_{\eta})^{-1}C$ и $C^*(B_{\xi} + B_{\eta})^{-1}$. Алгоритму вычисления этих матриц и посвящен настоящий параграф. Далее будем считать $t_0 \geq t_l$. Докажем, что если $Z_m(t)$ и $P_m(t)$ — квадратные $n \times n$ матрицы-функции, являющиеся решением двухточечной краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Z_m(t) \\ P_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & B_{\gamma}(t) \\ \sum_{i=1}^l C_i^* \Phi_i^{-1} C_i \delta(t - t_i) & -A^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_m(t) \\ P_m(t) \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ C_m^* \Phi_m^{-1} C_m \delta(t - t_m) \end{pmatrix}, \\ P_m(t_1 - 0) = 0, \quad Z_m(t_0) = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция, то

$$\begin{aligned} C_j^* Q_{jm} C_m &= P_m(t_j + 0) - P_m(t_j - 0), \\ Q_{jm} C_m &= -\Phi_j^{-1} C_j Z_m(t_j) \quad \text{при } j \neq m, \\ Q_{mm} C_m &= \Phi_m^{-1} C_m - \Phi_m^{-1} C_m Z_m(t_m), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где Q_{jm} — матрицы размерности $n_j \times n_m$ таковы, что

$$Q = (B_{\xi} + B_{\eta})^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1l} \\ Q_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ Q_{l1} & \dots & \dots & Q_{ll} \end{bmatrix},$$

и поскольку матрица C определяется равенством

$$C = \begin{bmatrix} \overline{C_1} & \boxed{C_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \overline{C_l} \end{bmatrix},$$

то

$$C^*QC = \begin{bmatrix} C_1^* Q_{11} C_1 & \dots & C_1^* Q_{1l} C_l \\ C_2^* Q_{21} C_1 & & \\ \vdots & & \\ C_l^* Q_{l1} C_1 & \dots & C_l^* Q_{ll} C_l \end{bmatrix}.$$

Таким образом, решив l краевых задач (2), можно полностью определить матрицы $C^*(B_{\xi} + B_{\eta})^{-1}C$ и $(B_{\xi} + B_{\eta})^{-1}C$, а поскольку $(B_{\xi} + B_{\eta})^{-1*} = (B_{\xi} + B_{\eta})^{-1}$, то станет известна матрица $C^*(B_{\xi} + B_{\eta})^{-1}$.

Прежде чем приступить к доказательству данного утверждения, заметим, что $B_{\eta} = C\widetilde{B}_{\eta}C^*$, где $\widetilde{B}_{\eta}$ — квадратная $nl \times nl$, имеющая вид

$$\widetilde{B}_{\eta} = \begin{bmatrix} B_{\eta}(t_1, t_1) & B_{\eta}(t_1, t_2) & \dots & B_{\eta}(t_1, t_l) \\ \vdots & & & \vdots \\ B_{\eta}(t_l, t_1) & \dots & \dots & B_{\eta}(t_l, t_l) \end{bmatrix}.$$

Доказательство начнем с рассмотрения равенства

$$(B_{\xi} + B_{\eta})Q = I_N, \quad (2.4)$$

где $N = \sum_{i=1}^l n_i$. Домножая справа (2.4) на матрицу C , получаем

$$(B_{\mathfrak{s}} + B_{\mathfrak{n}})QC = B_{\mathfrak{s}}QC + C\tilde{B}_{\mathfrak{n}}C^*QC = C. \quad (2.5)$$

Зафиксируем произвольное натуральное число $m (1 \leq m \leq l)$. Для определения матриц $Q_{1m}, Q_{2m}, \dots, Q_{lm}$, как это следует из (2.5), необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 \sum_{i=1}^l B_\eta(t_1, t_i) C_i^* Q_{im} C_m + \Phi_1 Q_{1m} C_m &= 0, \\ C_{m-1} \sum_{i=1}^l B_\eta(t_{m-1}, t_i) C_i^* Q_{im} C_m + \Phi_{m-1} Q_{m-1,m} C_m &= 0, \\ C_m \sum_{i=1}^l B_\eta(t_m, t_i) C_i^* Q_{im} C_m + \Phi_m Q_{m,m} C_m &= C_m, \\ C_{m+1} \sum_{i=1}^l B_\eta(t_{m+1}, t_i) C_i^* Q_{im} C_m + \Phi_{m+1} Q_{m+1,m} C_m &= 0, \\ \\ C_l \sum_{i=1}^l B_\eta(t_l, t_i) C_i^* Q_{il} C_m + \Phi_l Q_{lm} C_m &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Напомним, что матрицы Φ_i суть $M_{\xi_i \xi_i^*}$.

Введем в рассмотрение матрицу $I_{n_j \times n_i}$ размерности $n_j \times n_i$, элементы которой a_{ij} определяются равенством $a_{ij} = \delta_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, n_j$; $j = 1, 2, \dots, n_i$), где δ_{ij} — символ Кронекера. Тогда систему линейных уравнений (2.6) можно записать в виде

$$C_j \sum_{i=1}^l B_{\eta}(t_j, t_i) C_i^* Q_{im} C_m + \Phi_j Q_{jm} C_m = \delta_{jm} I_{n_j \times n_m} C_m, \quad (2.7)$$

$$j = 1, 2, \dots, l.$$

Зафиксируем какое-либо число $j (1 \leq j \leq l)$. Тогда выполнено равенство

$$G_j^1 + G_j^2 = C_j \sum_{i=1}^l B_n(t_j, t_i) C_i^* Q_{im} C_m + \Phi_j Q_{jm} C_m = \delta_{jm} I_{n_j \times n_m} C_m,$$

где $G_j^1 = C_j \sum_{i=1}^{j-1} B_\eta(t_j, t_i) C_i^* Q_{im} C_m$, если $j > 1$ и $G_j^1 = 0$.

В противном случае

$$G_j^2 = C_j \sum_{i=i}^m B_{\eta}(t_j, t_i) C_i^* Q_{im} C_m + \Phi_j Q_{jm} C_m.$$

Поскольку при $t_j > t_i$ верна цепочка равенств:

$$B_{\eta}(t_j, t_i) = \int_{t_0}^{t_j} X(t_j, r) B_{\gamma}(r) X^*(t_i, r) dr =$$

$$= \int_{t_0}^{t_j} X(t_j, r) B_{\gamma}(r) X^*(t_j, r) dr X^*(t_i, t_j) = B_{\eta}(t_j, t_j) [X^*(t_j, t_i)]^{-1},$$

то для матрицы G_j^1 имеем представление

$$\begin{aligned} G_j^1 &= C_j \sum_{i=1}^{j-1} B_{\eta}(t_j, t_j) [X^*(t_j, t_i)]^{-1} C_i Q_{im} C_m = \\ &= C_j B_{\eta}(t_j, t_j) \sum_{i=1}^{j-1} [X^*(t_j, t_i)]^{-1} C_i Q_{im} C_m. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Пусть матрица-функция $P_m(t)$ размерности $n \times n$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{dP_m(t)}{dt} &= -A^*(t) P_m(t), \\ P_m(t_1 - 0) &= 0, \\ P_m(t_i + 0) - P_m(t_i - 0) &= C_i^* Q_{im} C_m, \quad i = 1, 2, \dots, j-1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Учитывая, что матрица-функция $N(t) = B_{\eta}(t, t)$ размерности $n \times n$ является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= A(t) N(t) + N(t) A^*(t) + B_{\eta}(t), \\ N(t_0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

получим равенство

$$G_j^1 = C_j N(t_j) P_m(t_j - 0). \quad (2.11)$$

Для доказательства (2.9) достаточно показать, что

$$\sum_{i=1}^{j-1} [X^*(t_j, t_i)]^{-1} C_i^* Q_{im} C_m = P_m(t_j - 0). \quad (2.12)$$

Справедливость утверждения (2.12) докажем индукцией по s . При $s = 2$ имеем очевидное равенство

$$[X^*(t_2, t_1)]^{-1} C_1^* Q_{1m} C_m = [X^*(t_2, t_1)]^{-1} P_m(t_1 + 0) = P_m(t_2 - 0),$$

так как матрица-функция $[X^*(t, t_0)]^{-1}$ является матрицантом для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{du(t)}{dt} = -A^*(t) u(t).$$

Пусть при $s = p$ выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^{p-1} [X^*(t_p, t_i)]^{-1} C_i^* Q_{im} C_m = P_m(t_p - 0).$$

Заметим, что $P_m(t_{p+1} - 0) = [X^*(t_{p+1}, t_p)]^{-1} P_m(t_p + 0)$, тогда, используя равенство $P_m(t_p + 0) = P_m(t_p - 0) + C_p^* Q_{pm} C_m$, получим

$$\begin{aligned} P_m(t_{p+1} - 0) &= [X^*(t_{p+1}, t_p)]^{-1} (P_m(t_p - 0) + C_p^* Q_{pm} C_m) = \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} [X^*(t_{p+1}, t_p)]^{-1} [X^*(t_p, t_i)]^{-1} C_i^* Q_{im} C_m + \\ &+ [X^*(t_{p+1}, t_p)]^{-1} C_p^* Q_{pm} C_m = \sum_{i=1}^p [X^*(t_{p+1}, t_i)]^{-1} C_i^* Q_{im} C_m. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (2.12), а вместе с тем и равенство (2.11) доказаны.

Поскольку при $t_j < t_i$ верно равенство $B_\eta(t_j, t_i) = X(t_j, t_i)B_\eta(t_i, t_i)$, то для матрицы G_j^2 получаем представление

$$\begin{aligned} G_j^2 &= C_j \sum_{i=j}^l B_\eta(t_j, t_i) C_i^* Q_{im} C_m + \Phi_j Q_{jm} C_m = \\ &= C_j \sum_{i=j}^l X(t_j, t_i) B_\eta(t_i, t_i) C_i^* Q_{im} C_m + \Phi_j Q_{jm} C_m. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Пусть матрица-функция $R_m(t)$ размерности $n \times n$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{dR_m(t)}{dt} &= A(t) R_m(t), \\ R_m(t_l + 0) &= 0, \\ R_m(t_i - 0) - R_m(t_i + 0) &= N(t_i) C_i^* Q_{im} C_m, \\ i &= l, l-1, \dots, j. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Нетрудно доказать справедливость равенства

$$\sum_{i=j}^l X(t_j, t_i) B_\eta(t_i, t_i) C_i^* Q_{im} C_m = R_m(t_j - 0). \quad (2.15)$$

Доказательство равенства (2.15) аналогично доказательству (2.12). Используя равенства (2.7), (2.11) и (2.15), получаем

$$G_j^2 = C_j R_m(t_j - 0) + \Phi_j Q_{jm} C_m, \quad (2.16)$$

$$G_j^1 + G_j^2 = C_j (R_m(t_j - 0) + N(t_j) P_m(t_j - 0)) + \Phi_j Q_{jm} C_m = \delta_{jm} I_{n_j \times n_m} C_m. \quad (2.17)$$

В силу произвольности выбора j при использовании равенства (2.8) — (2.17) получаем, что решение системы линейных уравнений (2.6) для нахождения неизвестных матриц $C_i^* Q_{im} C_m$ и $Q_{im} C_m$ эквивалентно решению двухточечной краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= A(t) N(t) + N(t) A^*(t) + B_\gamma(t), \quad N(t_0) = 0, \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} R_m(t) \\ P_m(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & -A^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_m(t) \\ P_m(t) \end{pmatrix}, \\ P_m(t_1 - 0) &= 0, \quad P_m(t_j + 0) - P_m(t_j - 0) = C_j Q_{jm} C_m, \\ R_m(t_l + 0) &= 0, \quad R_m(t_j - 0) - R_m(t_j + 0) = N(t_j) C_j^* Q_{jm} C_m, \\ C_j (R_m(t_j - 0) &+ N(t_j) P_m(t_j - 0)) + \Phi_j Q_{jm} C_m = \\ &= \delta_{jm} I_{n_j \times n_m} C_m, \quad j = 1, 2, \dots, l. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Краевая задача (2.18) имеет два недостатка. Во-первых, размерность ее системы дифференциальных уравнений $3n$. Во-вторых, она отличается трудностью определения неизвестных матриц $C_i^* Q_{im} C_m$ и $Q_{im} C_m$ при решении этой задачи. Докажем, что путем замены переменных можно перейти к другой эквивалентной краевой задаче, размерность которой $2n$, и, кроме того, будут получены достаточно простые формулы для нахождения неизвестных матриц.

Рассмотрим матрицу-функцию $Z_m(t)$, определяемую равенством $Z_m(t) = R_m(t) + N(t) P_m(t)$ при $t \neq t_j (j = 1, 2, \dots, l)$.

Нетрудно убедиться, что $Z_m(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dZ_m(t)}{dt} = A(t) Z_m(t) + B_\gamma(t) P_m(t) \quad \text{при} \quad t \neq t_j \quad (j = 1, 2, \dots, l).$$

Покажем, что $Z_m(t)$ непрерывна на интервале $[t_0, t_l]$. Для этого достаточно доказать равенство

$$R_m(t_j - 0) + N(t_j)P_m(t_j - 0) = R_m(t_j + 0) + N(t_j)P_m(t_j + 0). \quad (2.19)$$

Домножим слева равенство

$$P_m(t_j + 0) - P_m(t_j - 0) = C_j^* Q_{jm} C_m$$

на матрицу $N(t_j)$ и сложим с равенством

$$R_m(t_j - 0) - R_m(t_j + 0) = N(t_j) C_j^* Q_{jm} C_m$$

и таким образом получим (2.19).

Далее заметим, что $Z_m(t_0) = 0$. Действительно,

$$Z_m(t_0) = R_m(t_0) + N(t_0)P_m(t_0) = 0,$$

так как $R_m(t_0) = 0$ в силу того, что $t_0 \geq t_l$ и $R_m(t_0)$ можно получить как решение задачи Коши

$$\frac{dR_m(t)}{dt} = A(t) R_m(t), \quad R_m(t_l) = 0.$$

Используя приведенные свойства матрицы-функции $Z_m(t)$, получаем, что краевая задача (2.18) для определения скачков матриц-функций $P_m(t)$ и $R_m(t)$ при использовании матрицы $N(t)$ эквивалентна определению скачков матрицы-функции $P_m(t)$ краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Z_m(t) \\ P_m(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A(t) & B_\gamma(t) \\ 0 & -A^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_m(t) \\ P_m(t) \end{pmatrix}, \\ Z_m(t_0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} P_m(t_1 - 0) &= 0, \quad P_m(t_j + 0) - P_m(t_1 - 0) = C_j^* Q_{jm} C_m, \\ C_j Z_m(t_j) + \Phi_j Q_{jm} C_m &= \delta_{jm} I_{n_j \times n_m} C_m. \end{aligned}$$

Поскольку в силу предположения B для любого j существует матрица Φ_j^{-1} , то, учитывая свойства матрицы-функции $Z_m(t_j)$, получаем

$$\begin{aligned} C_j^* Q_{jm} C_m &= \delta_{jm} C_j^* \Phi_j^{-1} I_{n_j \times n_m} C_m - C_j^* \Phi_j^{-1} C_j Z_m(t_j) = \\ &= P_m(t_j + 0) - P_m(t_j - 0). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Тогда, используя дельта-функцию, краевую задачу (2.20) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Z_m(t) \\ P_m(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A(t) & B_\gamma(t) \\ \sum_{j=1}^l C_j^* \Phi_j^{-1} C_j \delta(t - t_j) & -A^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_m(t) \\ P_m(t) \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ C_m^* \Phi_m^{-1} C_m \delta(t - t_m) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$Z_m(t_0) = 0, \quad P_m(t_1 - 0) = 0. \quad (2.23)$$

Неизвестные матрицы $Q_{jm} C_m$ находятся с помощью равенства

$$Q_{jm} C_m = \delta_{jm} \Phi_j^{-1} I_{n_j \times n_m} C_m - \Phi_j^{-1} C_j Z_m(t_j). \quad (2.24)$$

Таким образом, решив краевую задачу (2.22), (2.23) с помощью равенств (2.21), (2.24), найдем требуемые матрицы $C_i^* Q_{im} C_m$ и $Q_{im} C_m$. Можно было бы с их помощью определить и матрицы Q_{ij} , но нам они не потребуются в дальнейшем. Утверждение доказано.

Рассмотрим два других случая. Пусть $t_0 \leq t_1$. Проводя аналогичные рассуждения, докажем, что нахождение матриц $C^* Q C$ и $Q C$ можно осу-

существовать посредством решения краевых задач

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Z_m(t) \\ P_m(t) \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} A(t) & B_j(t) \\ \sum_{j=1}^l C_j^* \Phi_j^{-1} C_j \delta(t-t_j) & -A^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_m(t) \\ P_m(t) \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ C_m^* \Phi_m^{-1} C_m \delta(t-t_m) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$Z_m(t_0) = 0, \quad P_m(t_l + 0) = 0, \quad (2.26)$$

где m пробегает значения от 1 до l . Нетрудно видеть, что краевая задача (2.25), (2.26) отличается от краевой задачи (2.22), (2.23) только краевыми условиями. Матрицы $C_i^* Q_{im} C_m$ и $Q_{im} C_m$, как и в первом случае, находятся по формулам (2.21) и (2.24).

В случае, когда существует такое натуральное число j_0 , что выполнено условие $t_{j_0} < t_0 \leq t_{j_0+1}$, для определения требуемых матриц необходимо решить также l краевых задач, но на интервалах меньшей длины. Выберем какое-либо m ($1 \leq m \leq l$). Пусть $m \leq j_0$. Рассмотрим краевую задачу на интервале $[t_1, t_0]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Z_m(t) \\ P_m(t) \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} A(t) & B_v(t) \\ \sum_{i=1}^{j_0} C_i^* \Phi_i^{-1} C_i \delta(t-t_i) & -A^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_m(t) \\ P_m(t) \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ C_m^* \Phi_m^{-1} C_m \delta(t-t_m) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$P_m(t_1 - 0) = 0, \quad Z_m(t_0) = 0. \quad (2.28)$$

При выполнении условия $1 \leq i \leq j_0$ матрицы $C_i^* Q_{im} C_m$ и $Q_{im} C_m$ находятся с помощью формул (2.21) — (2.24). Покажем, что при $i > j_0$ выполняются равенства $C_i^* Q_{im} C_m = 0$ и $Q_{im} C_m = 0$. Действительно, при $t_{j_0} < t_0 \leq t_{j_0+1}$ матрица $\tilde{B}_\eta$ в силу (1.9) имеет вид

$$\tilde{B}_\eta = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} B(t_1, t_2) & \dots & B(t_1, t_{j_0}) \\ \vdots & & \vdots \\ B(t_{j_0}, t_1) & \dots & B(t_{j_0}, t_{j_0}) \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} B(t_{j_0+1}, t_{j_0+1}) & \dots & B(t_{j_0+1}, t_l) \\ \vdots & & \vdots \\ B(t_l, t_{j_0+1}) & & B(t_l, t_l) \end{matrix} \end{array} \right],$$

и поскольку B_ξ — блочно-диагональная матрица, то $(B_\xi + B_\eta)^{-1}$ имеет вид

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} Q_{11} & \dots & Q_{1j_0} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{j_01} & \dots & Q_{j_0j_0} \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} Q_{j_0+1, j_0+1} & \dots & Q_{j_0+1, m} \\ Q_{l, j_0+1} & \dots & Q_{ll} \end{matrix} \end{array} \right] \quad (2.29)$$

и, стало быть, $C_i^* Q_{im} C_m = 0$ и $Q_{im} C_m = 0$ при $i > j_0$.

Рассмотрим второй случай $j_0 > m$, когда требуется решить краевую задачу на интервале $[t_0, t_l]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Z_m(t) \\ P_m(t) \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} A(t) & B_j(t) \\ \sum_{i=j_0+1}^l C_i \Phi_i^{-1} C_i \delta(t-t_i) & -A^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_m(t) \\ P_m(t) \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ C_m^* \Phi_m^{-1} C_m \delta(t-t_m) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$Z_m(t_0) = 0, \quad P_m(t_l + 0) = 0. \quad (2.31)$$

В силу (2.29) выполнены равенства $C_i^* Q_{im} C_m = 0$ и $Q_{im} C_m = 0$ при $i \leq j_0$. В противном случае необходимые матрицы находятся с помощью формул (2.21) и (2.24). Таким образом, нахождение матриц $C^* Q C$ и $Q C$ можно осуществить посредством решения l краевых задач. В реальных вычислениях нет необходимости определить матрицу $C^* Q C$ полностью в силу того, что она симметрическая. Достаточно только получить матрицы $C_i Q_{im} C_m$ при $i \leq m$. Данным свойством, к сожалению, не обладает матрица $Q C$, поэтому придется вычислять все ее элементы. Метод ортогональной прогонки применительно к решению краевых задач, изложенных выше, описан в § 5. Он представляет собой более устойчивую по отношению к ошибкам вычислений процедуру, чем прямые алгебраические приемы.

§ 3. НАХОЖДЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ОЦЕНКИ И ЕЕ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

Напомним, что оценка $\hat{u}(t_0)$ из класса оценок (1.13) вектор-функции $u(t)$, удовлетворяющей системе дифференциальных уравнений

$$\frac{du(t)}{dt} = A(t)u(t) + f(t) + \gamma(t) \quad (3.1)$$

в момент времени t_0 по результатам измерений

$$C_i u(t_i) = g_i + \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (3.2)$$

является решением системы линейных уравнений

$$\bar{C}^* Q \bar{C} \hat{u}(t_0) = \bar{X}(t_0) C^* Q C \bar{X}(t_0) \hat{u}(t_0) = \bar{C}^* Q Y(t_0) = \bar{X}(t_0) C Q Y(t_0). \quad (3.3)$$

В частности, когда $Q = (B_\xi + B_\eta)^{-1}$, то $\hat{u}(t_0) = \hat{u}_{\text{эфф}}(t_0)$.

Целью данного параграфа является сведение задачи нахождения эффективной оценки вектора $u(t_0)$ к решению серии краевых двухточечных задач. Покажем, что при решении одной из них можно попутно получить ковариационную матрицу этой оценки. Менее детально рассмотрим методы получения других оценок вектора $u(t_0)$.

Постановка краевой задачи для вычисления оценки

Допустим, нам уже известны матрицы $C^* Q C$, $C^* Q$. В частности, когда определяется эффективная оценка, то данные матрицы находятся с помощью алгоритма, изложенного в § 2.

Докажем, что если вектор-функции $u(t)$ и $v(t)$ размерности n являются решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & -A^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ v(t_1 - 0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} v(t_j + 0) - v(t_j - 0) &= C_j^* \sum_{i=1}^l Q_{ji} (C_i u(t_i) - g_i), \\ v(t_l + 0) &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

а $\hat{u}(t)$ — решением задачи Коши

$$\frac{d\hat{u}(t)}{dt} = A(t)\hat{u}(t) + f(t), \quad \hat{u}(t_l) = u(t_l), \quad (3.6)$$

то $\hat{u}(t_0)$ — искомая оценка.

Замечание 1. Как было отмечено в § 1, для нахождения эффективной оценки требуется сначала найти матрицу $(B_\xi + B_\eta)^{-1}$. Из (1.9) вытекает, что $B_\xi + B_\eta$ зависит от выбора точки t_0 , поэтому правильной

была бы запись $(B_{\xi} + B_{\eta})(t_0)$, что подчеркивало бы эту зависимость. Следовательно, вектор $\widehat{u}(t)$, где $\widehat{u}(t)$ — решение задачи Коши (3.6) при $Q = Q(t_0) = (B_{\xi} + B_{\eta})^{-1}(t_0)$ и $\bar{t} \neq t_0$ не является эффективной оценкой начального состояния системы (3.1) в момент времени $\bar{t}$.

З а м е ч а н и е 2. При $Q = I_N$ краевую задачу (3.4), (3.5) с использованием дельта-функций можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ \sum_{i=1}^l C_i^* C_i \delta(t - t_i) & -A^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ -\sum_{i=1}^l C_i^* g_i \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

$$v(t_1 - 0) = 0, \quad v(t_l + 0) = 0. \quad (3.8)$$

Заметим, что $\widehat{u}(t_0)$ в данном случае является оценкой по методу наименьших квадратов, где $\widehat{u}(t)$ — решение задачи Коши (3.6).

Доказательство начнем с рассмотрения правой части равенства (3.3). Заметим, что

$$Y(t_0) = -CY(t_0) + G, \quad (3.9)$$

где $\tilde{Y}(t_0)$ и G — векторы размерности N , определяемые формулами

$$G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_l \end{pmatrix}, \quad \tilde{Y}(t_0) = \begin{pmatrix} u_0(t_1) \\ u_0(t_2) \\ \vdots \\ u_0(t_l) \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Вектор-функция $u_0(t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{du_0(t)}{dt} = A(t)u_0(t) + f(t), \quad u_0(t_0) = 0. \quad (3.11)$$

Ввиду (3.9) и (3.3) справедливо равенство

$$\widehat{X}^*(t_0)C^*QC[\widehat{X}(t_0)\widehat{u}(t_0) + \tilde{Y}(t_0)] = \widehat{X}^*(t_0)CQG. \quad (3.12)$$

Пусть вектор-функция $u(t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = A(t)u(t) + f(t), \quad u(t_0) = \widehat{u}(t_0). \quad (3.13)$$

Тогда в силу (3.11) — (3.13) имеем

$$\widehat{X}(t_0)\widehat{u}(t_0) + \tilde{Y}(t_0) = U(t_0) = \begin{bmatrix} u(t_1) \\ u(t_2) \\ \vdots \\ u(t_l) \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Подставляя (3.14) в (3.12), получаем

$$X^*(t_0)C^*Q(CU(t_0) - G) = 0. \quad (3.15)$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$X^*(t_l, t_0)\widehat{X}^*(t_l) = \widehat{X}^*(t_0).$$

Поскольку матрицант $X(t_l, t_0)$ — невырожденная матрица размерности $n \times n$, то (3.15) эквивалентно равенству (3.16)

$$\widehat{X}^*(t_l)C^*Q[CU(t_0) - G] = 0 \quad (3.16)$$

или более подробно

$$\sum_{j=1}^l X^*(t_j, t_l)C_j^* \sum_{i=1}^l Q_{ji}(C_i u(t_i) - g_i) = 0. \quad (3.17)$$

Используя метод математической индукции и очевидное равенство

$$X^*(t_j, t_i) = [X^*(t_i, t_j)]^{-1},$$

достаточно просто доказать, что если вектор-функция $v(t)$ является решением задачи

$$\frac{dv(t)}{dt} = -A^*(t)v(t), \quad v(t_1 - 0) = 0, \quad (3.18)$$

$$v(t_j + 0) - v(t_j - 0) = C_j^* \sum_{i=1}^l Q_{ji}(C_i u(t_i) - g_i), \quad (3.19)$$

то справедливо равенство

$$v(t_m + 0) = \sum_{j=1}^m X^*(t_j, t_l) C_j^* \sum_{i=1}^l Q_{ji}(C_i u(t_i) - g_i). \quad (3.20)$$

Из (3.20) и (3.17) следует, что $v(t_l + 0) = 0$. Таким образом, в силу (3.16) — (3.20) вектор-функции $u(t)$ и $v(t)$ являются решением двухточечной краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & -A^*(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ v(t_1 - 0) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(t_j + 0) - v(t_j - 0) &= C_j^* \sum_{i=1}^l Q_{ji}(C_i u(t_i) - g_i), \\ v(t_l + 0) &= 0, \end{aligned}$$

где $u(t)$ — решение задачи Коши (3.13). В силу единственности решения задачи Коши $u(t_0)$ — искомая оценка. Тем самым требуемое утверждение доказано.

Остается открытым вопрос об алгоритме численного решения краевой задачи (3.4), (3.5). Докажем, что ее решение может быть получено путем последовательного применения метода ортогональной прогонки к решению более простых двухточечных краевых задач.

Поскольку

$$u(t) = X(t, t_1)u(t_1) + \int_{t_1}^t X(t, x)f(x)dx,$$

то

$$u(t) = \tilde{u}(t) + u_0(t), \quad (3.21)$$

где $\tilde{u}(t)$ и $u_0(t)$ — вектор-функции, являющиеся решениями задач Коши

$$\frac{d}{dt} u_0(t) = A(t)u_0(t) + f(u), \quad u_0(t_1) = 0, \quad (3.22)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{u}(t) = A(t)\tilde{u}(t), \quad \tilde{u}(t_1) = u(t_1). \quad (3.23)$$

Подставляя выражение (3.21) в (3.5), получаем

$$v(t_j + 0) - v(t_j - 0) = C_j^* \sum_{i=1}^l Q_{ji}(C_i \tilde{u}(t_i) + C_i u_0(t_i) - g_i). \quad (3.24)$$

Введем обозначение

$$\widehat{g}_i = g_i - C_i u_0(t), \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (3.25)$$

Учитывая (3.24), (3.25), краевую задачу (3.4), (3.5) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{u}(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & -A^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad v(t_1 - 0) = 0, \quad (3.26)$$

$$v(t_j + 0) - v(t_j - 0) = C_j^* \sum_{i=1}^l Q_{ji}(C_i \tilde{u}(t_i) - \widehat{g}_i), \quad v(t_l + 0) = 0. \quad (3.27)$$

Так как

$$\tilde{u}(t) = X(t, t_l) \tilde{u}(t_l),$$

то

$$v(t_j + 0) - v(t_j - 0) = C_j^* \sum_{i=1}^l Q_{ji} (C_i X(t_i, t_j) \tilde{u}(t_j) - \widehat{g}_i). \quad (3.28)$$

Если ввести следующие обозначения:

$$\mathcal{P}_j = C_j^* \sum_{i=1}^l Q_{ji} C_i X(t_i, t_j), \quad (3.29)$$

$$\rho_j = \sum_{i=1}^l C_j^* Q_{ji} \widehat{g}_i, \quad (3.30)$$

то краевую задачу (3.26), (3.27) с учетом выражения (3.28) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{u}(t) \\ v(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & -A^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \\ v(t_1 - 0) &= 0, \quad v(t_j + 0) - v(t_j - 0) = \mathcal{P}_j \tilde{u}(t_j) - \rho_j, \\ v(t_l + 0) &= 0 \end{aligned}$$

или с использованием дельта-функции

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{u}(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ \sum_{j=1}^l \mathcal{P}_j \delta(t - t_j) & -A^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}(t) \\ v(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{j=1}^l \rho_j \delta(t - t_j) \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

$$v(t_1 - 0) = 0, \quad v(t_l + 0) = 0. \quad (3.32)$$

Таким образом, решение краевой задачи (3.26), (3.27) эквивалентно решению задачи (3.31), (3.32). Допустим мы каким-то образом вычислили матрицы $\mathcal{P}_j$ и векторы ρ_j по формулам (3.29), (3.30), где векторы $\widehat{g}_i$ определяются равенством (3.25). Решив краевую задачу (3.31), (3.32) и получив функцию $\tilde{u}(t)$, зная вектор-функцию $\tilde{u}_0(t)$, получаем искомую вектор-функцию $u(t)$.

Остановимся более подробно на вопросе практического вычисления матриц $\mathcal{P}_j$. Их нахождение эквивалентно решению краевой двухточечной задачи, практическое решение которой, как и всех краевых задач, встреченных ранее, будет осуществляться методом ортогональной прогонки. Заметим, что

$$\mathcal{P}_j = S_j^1 + S_j^2, \quad (3.33)$$

где

$$S_j^1 = \sum_{i=1}^j C_j^* Q_{ji} C_i X(t_i, t_j),$$

$$S_j^2 = \sum_{i=j+1}^l C_j^* Q_{ji} C_i ([X^{-1}(t_j, t_i)]^*)^* = \sum_{i=j+1}^l C_j^* Q_{ji} C_i X(t_i, t_j).$$

Пусть матрица-функция Π_j^1 размерности $n \times n$ является решением задачи

$$\frac{d}{dt} \Pi_j^1(t) = 0,$$

$$\Pi_j^1(t_1 - 0) = 0, \quad (3.34)$$

$$\Pi_j^1(t_i + 0) - \Pi_j^1(t_i - 0) = C_j^* Q_{ji} C_i U_j(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, j,$$

где непрерывная матрица-функция $U_j(t)$ размерности $n \times n$ является решением задачи Коши

$$\frac{d}{dt} U_j(t) = A(t) U_j(t), \quad U_j(t_j) = I_n. \quad (3.35)$$

Тогда верно равенство

$$\Pi_j^1(t_j + 0) = S_j^1. \quad (3.36)$$

Действительно, из (3.55) вытекает, что $U_j(t) = X(t, t_j)$. Кроме того, из (3.34) следует, что $\Pi_j(t) = \text{const}$ для любого интервала $[t_{i-1}, t_i]$ $i = 2, \dots, j$. Тогда, используя метод математической индукции, нетрудно доказать равенство

$$\Pi_j^1(t_i + 0) = \sum_{s=1}^i C_j^* Q_{js} C_s X(t_s, t_j).$$

Отсюда следует справедливость (3.36). Таким образом, если матрицы-функции $U_j(t)$, $\Pi_j^1(t)$ — решение задачи.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} U_j(t) \\ \Pi_j^1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ \sum_{i=1}^j C_j^* Q_{ji} C_i \delta(t - t_i) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_j(t) \\ \Pi_j^1(t) \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

$$U_j(t_j) = I_n, \Pi_j^1(t_1 - 0) = 0, \quad (3.38)$$

то в силу (3.36) $\Pi_j^1(t_j + 0)$ суть матрица S_j^1 .

Рассмотрим матрицу S_j^2 . Пусть $\Pi_j^2(t)$ — матрица-функция размерности $n \times n$, решение задачи

$$\frac{d\Pi_j^2(t)}{dt} = 0,$$

$$\Pi_j^2(t_l + 0) = 0, \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \Pi_j^2(t_i + 0) - \Pi_j^2(t_i - 0) &= -C_j^* Q_{ji} C_i U_j(t_i), \\ i &= j + 1, j + 2, \dots, l, \end{aligned}$$

где $U_i(t)$ — решение задачи Коши (3.35). Тогда если $\Pi_j^2(t)$ и $U_j(t)$ — решение задачи

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} U_j(t) \\ \Pi_j^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ -\sum_{i=j+1}^l C_j^* Q_{ji} C_i \delta(t - t_i) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_j(t) \\ \Pi_j^2(t) \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

$$\Pi_j^2(t_l + 0) = 0, U_j(t_j) = I_n, \quad (3.41)$$

то легко показать, что $\Pi_j^2(t_j + 0)$ — суть матрица S_j^2 . Таким образом, получаем равенство

$$\mathcal{P}_j = \Pi_j^1(t_j + 0) + \Pi_j^2(t_j + 0). \quad (3.42)$$

Из (3.42) следует, что для получения матрицы $\mathcal{P}_j$ необходимо решить две двухточечные краевые задачи. Понятно, что матрицу $\mathcal{P}_j$ можно было бы получить, применяя только численное интегрирование, не используя вышеуказанный путь. Тем не менее решение краевых задач методом ортогональной прогонки — более устойчивая к ошибкам округления процедура, чем суммирование матриц, полученных путем численного интегрирования, особенно в случаях большого числа точек наблюдения либо жесткой системы дифференциальных уравнений или большого интервала наблюдения.

Постановка краевой задачи для нахождения ковариационной матрицы

В данном пункте рассмотрим вопрос определения ковариационной матрицы эффективной оценки $\hat{u}(t_0)$. Напомним, что ковариационная матрица определяется равенством

$$\sigma_{\hat{u}\hat{u}}^2 = (\bar{C}^* Q \bar{C})^{-1}, \quad (3.43)$$

где $Q = (B_{\xi} + B_{\eta})^{-1}$.

Знание ковариационной матрицы оценки $\hat{u}_{\text{эфф}}(t_0)$ позволяет строить доверительные эллипсоиды. Поскольку для построения доверительного эллипсоида нужна не сама матрица $\sigma_{\text{эфф}}^2$, а ей обратная ($\bar{C}^* Q \bar{C} = \sigma_{\text{эфф}}^{-2}$), то основное внимание будет уделено нахождению этой матрицы.

Пусть $t_0 \geq t_l$. Докажем, что если $U(t)$ и $V(t)$ — квадратные $n \times n$ матрицы-функции, являющиеся решением задачи

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & 0 \\ \sum_{j=1}^l \mathcal{P}_j \delta(t - t_j) & -A^*(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

$$U(t_0) = I_n, \quad V(t_l - 0) = 0, \quad (3.45)$$

где $\mathcal{P}_j$ определяется равенством (3.29), то справедливо

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{эфф}}^{-2} &= V(t_0) = \bar{C}^* Q \bar{C} \text{ в случае } t_0 > t_l, \\ \sigma_{\text{эфф}}^{-2} &= V(t_l + 0) = \bar{C}^* Q \bar{C} \text{ в случае } t_0 = t_l. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Действительно, используя (1.7) и (3.29), получаем

$$\begin{aligned} \bar{C}^* Q \bar{C} &= \sum_{i=1}^l ([X^*(t_0, t_i)]^{-1} \sum_{m=1}^l C_i^* Q_{im} C_m X(t_m, t_0)) = \\ &= \sum_{i=1}^l [X^*(t_0, t_i)]^{-1} \left(\sum_{m=1}^l C_i Q_{im} C_m X(t_m, t_i) \right) X(t_i, t_0) = \\ &= \sum_{i=1}^l [X^*(t_0, t_i)]^{-1} \mathcal{P}_i X(t_i, t_0). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Пусть $U(t)$ — квадратная $n \times n$ матрица-функция — является решением задачи Коши

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t) U(t), \quad U(t_0) = I_n, \quad (3.48)$$

т. е. $U(t) = X(t, t_0)$. Матрица-функция $V(t)$ той же размерности — решение задачи

$$\frac{dV(t)}{dt} = -A^*(t) V(t), \quad (3.49)$$

$$V(t_l - 0) = 0, \quad V(t_j + 0) - V(t_j - 0) = \mathcal{P}_j U(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, l. \quad (3.50)$$

Поскольку верно равенство

$$V(t_j - 0) = [X^*(t_j, t_{j-1})]^{-1} V(t_{j-1} + 0),$$

то методом математической индукции нетрудно доказать, что

$$V(t_j + 0) = \sum_{s=1}^j [X^*(t_j, t_s)]^{-1} \mathcal{P}_s X(t_s, t_0). \quad (3.51)$$

Из равенства (3.51) вытекает справедливость (3.46). В более компактном виде задачи (3.48) и (3.49), (3.50) можно переписать в виде двухточечной краевой задачи (3.44), (3.45).

Рассмотрим теперь случай $t_0 < t_l$. Докажем, что верно равенство

$$\sigma_{\text{эфф}}^{-2} = Z(t_0), \quad (3.52)$$

где матрица-функция $Z(t)$ размерности $n \times n$ является решением задачи Коши

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -A^*(t) Z(t) - Z(t) A(t), \quad (3.53)$$

$$Z(t_l) = V(t_l + 0).$$

Напомним, что матрица-функция $V(t)$ — решение задачи (3.44), (3.45). Доказательство утверждения начнем с рассмотрения равенства (3.47), которое перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{C}^* Q \bar{C} &= \sum_{i=1}^l [X^*(t_0, t_i)]^{-1} \mathcal{P}_i X(t_i, t_0) = \\ &= [X^*(t_0, t_l)]^{-1} \left(\sum_{i=1}^l [X^*(t_l, t_i)]^{-1} \mathcal{P}_i X(t_i, t_l) \right) X(t_l, t_0) = \\ &= [X^*(t_0, t_l)]^{-1} V(t_l + 0) [X(t_0, t_l)]^{-1},\end{aligned}\quad (3.54)$$

поскольку в силу (3.46), (3.47) справедливо утверждение

$$V(t_l + 0) = \sum_{i=1}^l [X^*(t_l, t_i)]^{-1} \mathcal{P}_i X(t_i, t_l).$$

Пусть

$$Z(t) = [X^*(t, t_l)]^{-1} V(t_l + 0) [X(t, t_l)]^{-1}.$$

Тогда $Z(t)$ — решение задачи (3.53). С другой стороны, в силу (3.54) получаем равенство

$$Z(t) = \bar{C}^* Q \bar{C},$$

из которого вытекает справедливость утверждения (3.52).

Таким образом, независимо от расположения точки t_0 нам сначала придется решить двухточечную краевую задачу (3.44), (3.45), а затем задачу Коши (3.53).

§ 4. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Настоящий параграф посвящен описанию применения метода ортогональной прогонки к решению краевых задач, описанных ранее. Поскольку данные задачи отличаются друг от друга либо краевыми условиями, либо размерностью и видом матрицы системы дифференциальных уравнений, либо тем, что в одних задачах требуется определить матрицу-функцию, а в других вектор-функцию, то описания методов их решения почти дословно совпадают, за исключением, возможно, указания размерностей отдельных матриц. Вследствие этого применение метода ортогональной прогонки продемонстрируем на примере решения краевой задачи

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & B(t) \\ \sum_{j=1}^l \mathcal{P}_j \delta(t - t_j) & C(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(t) \\ \sum_{j=1}^l \rho_j \delta(t - t_j) \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

$$S_1 \begin{bmatrix} u(t_1) \\ v(t_1 - 0) \end{bmatrix} = \varphi, \quad S_2 \begin{bmatrix} u(t_l) \\ v(t_l + 0) \end{bmatrix} = \psi, \quad (4.2)$$

где S_1 и S_2 — матрицы размерности $n \times 2n$, причем $\text{rank } S_1 = \text{rank } S_2 = n$. Квадратные $n \times n$ матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и вектор-функция $f(t)$ предполагаются непрерывными на отрезке $[t_1, t_l]$. Вектора $u(t)$, $v(t)$ и ρ_j размерности n , матрицы $\mathcal{P}_j$ размерности $n \times n$.

Разобьем отрезок $[t_1, t_l]$ на p участков точками $t_1 = x_1 < x_2 < \dots < x_p = t_l$ так, чтобы для любого s ($2 \leq s \leq p$) выполнялось неравенство

$$|x_s - x_{s-1}| \leq 1 \left| \max_{t \in [x_{s-1}, x_s]} \left\| \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ 0 & C(t) \end{pmatrix} \right\| \right|,$$

и, кроме того, для каждого из чисел $t_2, t_3, \dots, t_{l-2}, t_{l-1}$ существует натуральное число p_i такое, что $x_{p_i} = t_i$ ($i = 2, 3, \dots, l-1$).

Пусть векторы $z_1(x_1), z_2(x_1), \dots, z_n(x_1)$ образуют полный ортогональный базис подпространства векторов, удовлетворяющих условию $S_1 z_i(x_i) = 0$. Вектор $z_{n+1}(x_1)$ удовлетворяет равенству $S_1 z_{n+1}(x_1) = \varphi$, и,

кроме того, $(z_{n+1}(x_1), z_i(x_1)) = 0$ для любого i . Векторы $\tilde{z}_1(x_1), \tilde{z}_2(x_1), \dots, \tilde{z}_{n+1}(x_1), \widehat{z}_1(x_1), \widehat{z}_2(x_1), \dots, \widehat{z}_{n+1}(x_1)$ размерности n таковы, что для любого i ($1 \leq i \leq n+1$) выполнено

$$z_i(x_1) = \begin{bmatrix} \tilde{z}_i(x_1) \\ \widehat{z}_i(x_1) \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $Z_1(x_1)$ матрицу размерности $n \times n$, столбцы которой суть вектора $\tilde{z}_1(x_1), \tilde{z}_2(x_1), \dots, \tilde{z}_n(x_1)$, матрицу $Z_2(x_1)$ размерности $n \times n$ образуют векторы $\widehat{z}_1(x_1), \widehat{z}_2(x_1), \dots, \widehat{z}_n(x_1)$, т. е.

$$Z_1(x_1) = [\tilde{z}_1(x_1), \tilde{z}_2(x_1), \dots, \tilde{z}_n(x_1)],$$

$$Z_2(x_1) = [\widehat{z}_1(x_1), \widehat{z}_2(x_1), \dots, \widehat{z}_n(x_1)].$$

Матрица $\tilde{Z}(x_1)$ размерности $2n \times n$ такова, что

$$\tilde{Z}(x_1) = \begin{bmatrix} Z_1(x_1) \\ Z_2(x_1) \end{bmatrix}.$$

Пусть матрица $Z(x_1)$ размерности $2n \times (n+1)$ следующей структуры:

$$Z(x_1) = [\tilde{Z}(x_1) z_{n+1}(x_1)] = \begin{bmatrix} Z_1(x_1) & \tilde{z}_{n+1}(x_1) \\ Z_2(x_1) & \widehat{z}_{n+1}(x_1) \end{bmatrix}.$$

В силу предыдущего можно утверждать, что существует такой вектор $\tilde{\alpha}^T(x_1) = (\alpha(x_1), 1)^T = (\alpha_1(x_1), \alpha_2(x_1), \dots, \alpha_n(x_1), 1)^T$ размерности $n+1$, что

$$\begin{bmatrix} u(t_1) \\ v(t_1 - 0) \end{bmatrix} = Z(x_1) \tilde{\alpha}(x_1), \quad (4.3)$$

нахождение которого является нашей главной задачей.

Из условия

$$v(t_j + 0) = v(t_j - 0) + \mathcal{P}_j u(t_j) + \rho_j \quad (4.4)$$

для любого j ($1 \leq j \leq l$) следует, что

$$\begin{bmatrix} u(t_j) \\ v(t_j + 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \mathcal{P}_j & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t_j) \\ v(t_j - 0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_j \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

В силу (4.3) — (4.5) при $t_1 = x_1$ справедливо

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u(t_1) \\ v(t_1 + 0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \mathcal{P}_1 & I_n \end{bmatrix} Z(x_1) \tilde{\alpha}(x_1) + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} Z_1(x_1) & \tilde{z}_{n+1}(x_1) \\ Z_2(x_1) + \mathcal{P}_1 Z(x_1) \widehat{z}_{n+1}(x_1) + \mathcal{P}_1 \tilde{z}_{n+1}(x_1) + \rho_1 \end{bmatrix} \tilde{\alpha}(x_1) = H(x_1) \tilde{\alpha}(x_1). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Введем некоторые обозначения. Пусть $\tilde{H}(x_1)$ — матрица размерности $2n \times n$ — определяется равенством

$$\tilde{H}(x_1) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \mathcal{P}_1 & I_n \end{bmatrix} \tilde{Z}(x_1) = D_1(x_1) \tilde{Z}(x_1). \quad (4.7)$$

Векторы $\tilde{h}_{n+1}(x_1)$ и $\widehat{h}_{n+1}(x_1)$ размерности n , вектор h_{n+1} размерности $2n$ находятся с помощью равенств

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{n+1} &= \tilde{z}_{n+1}(x_1), \\ \widehat{h}_{n+1}(x_1) &= \widehat{z}_{n+1}(x_1) + \mathcal{P}_1 \tilde{z}_{n+1}(x_1) + \rho_1, \\ h_{n+1}(x_1) &= \begin{bmatrix} \tilde{h}_{n+1}(x_1) \\ \widehat{h}_{n+1}(x_1) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Далее, в соответствии с алгоритмом, подробно изложенным в [4], прямоугольную матрицу $\tilde{H}(x_1)$ представим в виде произведения матриц $\tilde{Q}(x_1)$ и $\tilde{R}(x_1)$, причем $\tilde{R}(x_1)$ — верхнетреугольная матрица, а $\tilde{Q}^*(x_1) \times \tilde{Q}(x_1) = I_n$. Определим вектор $q_{n+1}(x_1)$ по формуле

$$q_{n+1}(x_1) = h_{n+1}(x_1) - \tilde{Q}(x_1) \tilde{Q}^*(x_1) h_{n+1}(x_1). \quad (4.9)$$

Если ввести в рассмотрение матрицы $Q(x_1)$ и $R(x_1)$, определяемые равенствами

$$Q(x_1) = [\tilde{Q}(x_1) q_{n+1}(x_1)], \quad R(x_1) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{R}(x_1) & \tilde{Q}^*(x_1) h_{n+1}(x_1) \\ \hline 0 \ 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right],$$

то в силу $\tilde{H}(x_1) = \tilde{Q}(x_1) \tilde{R}(x_1)$, а также (4.6) — (4.9) вытекает справедливость представления

$$\begin{pmatrix} u(t_1) \\ v(t_1 + 0) \end{pmatrix} = H(x_1) \tilde{\alpha}(x_1) = G(x_1) R(x_1) \tilde{\alpha}(x_1) = G(x_1) \hat{\alpha}(x_1). \quad (4.10)$$

Заметим, что матрица $\tilde{R}(x_1)$ невырождена, поскольку

$$\text{rank } \tilde{H}(x_1) = \text{rank } \tilde{Z}(x_1) = n.$$

В дальнейшем будем придерживаться следующей схемы вычислений. Пусть для некоторой точки разбиения x_j получены представления:

$$\begin{aligned} 1. \begin{bmatrix} u(x_j) \\ v(x_j) \end{bmatrix} &= Q(x_j) \hat{\alpha}(x_j) \text{ в случае } x_j \neq t_i \text{ ни при каком } i, \\ 2. \begin{bmatrix} u(x_j) \\ v(x_j + 0) \end{bmatrix} &= Q(x_j) \hat{\alpha}(x_j) \text{ в противном случае,} \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $Q(x_j)$ — матрица размерности $2n \times (n+1)$, обладающая следующими свойствами. Пусть $\tilde{Q}(x_j)$ — матрица размерности $2n \times n$, вектор $q_{n+1}(x_j)$ размерности $2n$ таковы, что

$$Q(x_j) = [\tilde{Q}(x_j) q_{n+1}(x_j)].$$

Тогда $Q^*(x_j) Q(x_j) = I_n$ и $Q^*(x_j) q_{n+1}(x_j) = 0$.

Вектор $\alpha(x_j)^T = (\alpha_1(x_j), \alpha_2(x_j), \dots, \alpha_n(x_j), 1)^T = (\bar{\alpha}(x_j), 1)^T$ размерности $n+1$.

В случае 2, т. е. когда существует такое t_i , что $x_j = t_i$, предполагается, что мы имеем следующее представление:

$$\begin{bmatrix} u(x_j) \\ v(x_j - 0) \end{bmatrix} = Z(x_j) \tilde{\alpha}(x_j), \quad (4.12)$$

$Z(x_j)$ и $\tilde{\alpha}(x_j)$ имеют такие же размерности, что и $Q(x_j)$ и $\hat{\alpha}(x_j)$ соответственно. Формулы, связывающие матрицы $Z(x_j)$ и $Q(x_j)$, и векторы $\alpha(x_j)$ и $\hat{\alpha}(x_j)$ получены ниже.

Получив для некоторого j представление (4.11) численным интегрированием, определяем матрицу $\tilde{Z}(x_j)$ как решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{Z}(t)}{dt} &= \begin{bmatrix} A(t) & B(t) \\ 0 & C(t) \end{bmatrix} \tilde{Z}(t), \\ \tilde{Z}(x_j) &= \tilde{Q}(x_j). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Вектор $z_{n+1}(x_j)$ — решение уже другой задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{dz_{n+1}(t)}{dt} &= \begin{bmatrix} A(t) & B(t) \\ 0 & C(t) \end{bmatrix} z_{n+1}(t) + \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ z_{n+1}(x_j) &= g_{n+1}(x_j). \end{aligned} \quad (4.14)$$

В зависимости от номера j возможны два случая: а) $x_{j+1} \neq t_i$ ни при каком i ($i = 1, 2, \dots, l$); б) существует t_i такое, что $x_{j+1} = t_i$.

Рассмотрим случай б). В силу (4.12) — (4.14) имеем

$$\begin{bmatrix} u(x_{j+1}) \\ v(x_{j+1} - 0) \end{bmatrix} = Z(x_{j+1}) \hat{\alpha}(x_j). \quad (4.15)$$

Учитывая (4.11), получаем $\tilde{\alpha}(x_{j+1}) = \hat{\alpha}(x_j)$.

Пусть $Z_1(x_{j+1})$, $Z_2(x_{j+1})$, $H_1(x_{j+1})$, $H_2(x_{j+1})$ — квадратные $n \times n$ матрицы; $\tilde{z}_{n+1}(x_{j+1})$, $\hat{z}_{n+1}(x_{j+1})$, $\tilde{h}_{n+1}(x_{j+1})$, $\hat{h}_{n+1}(x_{j+1})$ — векторы размерности n такие, что

$$\begin{aligned} Z(x_{j+1}) &= \begin{bmatrix} Z_1(x_{j+1}) & \tilde{z}_{n+1}(x_{j+1}) \\ Z_2(x_{j+1}) & \hat{z}_{n+1}(x_{j+1}) \end{bmatrix}, \\ H(x_{j+1}) &= \begin{bmatrix} H_1(x_{j+1}) & \tilde{h}_{n+1}(x_{j+1}) \\ H_2(x_{j+1}) & \hat{h}_{n+1}(x_{j+1}) \end{bmatrix}, \\ \tilde{Z}(x_{j+1}) &= \begin{bmatrix} Z_1(x_{j+1}) \\ Z_2(x_{j+1}) \end{bmatrix}, \quad \hat{H}(x_{j+1}) = \begin{bmatrix} H_1(x_{j+1}) \\ H_2(x_{j+1}) \end{bmatrix}, \\ h_{n+1}(x_{j+1}) &= \begin{bmatrix} \tilde{h}_{n+1}(x_{j+1}) \\ \hat{h}_{n+1}(x_{j+1}) \end{bmatrix}, \quad z_{n+1}(x_{j+1}) = \begin{bmatrix} \tilde{z}_{n+1}(x_{j+1}) \\ \hat{z}_{n+1}(x_{j+1}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Подставляя (4.15) в (4.5), получаем

$$\begin{bmatrix} u(x_{j+1}) \\ v(x_{j+1} - 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1(x_{j+1}) & \tilde{z}_{n+1}(x_{j+1}) \\ Z_2(x_{j+1}) + \mathcal{P}_i Z_1(x_{j+1}) & \hat{z}_{n+1}(x_{j+1}) + \mathcal{P}_i \tilde{z}_{n+1}(x_{j+1}) + \rho_i \end{bmatrix} \times \\ \times \hat{\alpha}(x_j) = H(x_{j+1}) \hat{\alpha}(x_j), \quad (4.16)$$

причем

$$\tilde{H}(x_{j+1}) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \mathcal{P}_j & I_n \end{bmatrix} \tilde{Z}(x_{j+1}), \quad (4.17)$$

$$\tilde{h}_{n+1}(x_{j+1}) = \tilde{z}_{n+1}(x_{j+1}), \quad (4.18)$$

$$\hat{h}_{n+1}(x_{j+1}) = \hat{z}_{n+1}(x_{j+1}) + \mathcal{P}_i \tilde{z}_{n+1}(x_{j+1}) + \rho_i. \quad (4.19)$$

В случае а) полагаем

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x_{j+1}) &= \tilde{Z}(x_{j+1}), \quad \tilde{h}_{n+1}(x_{j+1}) = \tilde{z}_{n+1}(x_{j+1}), \\ \hat{h}_{n+1}(x_{j+1}) &= \hat{z}_{n+1}(x_{j+1}). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Далее, в соответствии с алгоритмом из [4] матрицу $\tilde{H}(x_{j+1})$ разлагаем в произведение ортогональной матрицы $\tilde{Q}(x_{j+1})$ и квадратной $n \times n$ верхнетреугольной матрицы $\tilde{R}(x_{j+1})$, т. е.

$$\tilde{H}(x_{j+1}) = \tilde{Q}(x_{j+1}) \tilde{R}(x_{j+1}). \quad (4.21)$$

Поскольку верны равенства

$$\begin{aligned} \text{rank } \tilde{Z}(x_1) &= n, \\ \text{rank } \tilde{Z}(x_j) &= \text{rank } \tilde{H}(x_j) \end{aligned}$$

и в силу того, что интегрирование системы линейных уравнений при решении задачи Коши (13) не изменяет ранга матрицы начальных данных, то справедливы утверждения

$$\det \tilde{R}(x_j) \neq 0, \quad \text{rank } \tilde{H}(x_j) = n$$

для любого j .

Вектор $q_{n+1}(x_j)$ получим, вычисляя

$$q_{n+1}(x_j) = h_{n+1}(x_{j+1}) - \tilde{Q}(x_{j+1}) \tilde{Q}^*(x_{j+1}) h_{n+1}(x_{j+1}). \quad (4.22)$$

Нетрудно проверить, что справедливо утверждение

$$Q(x_{j+1}) = H(x_{j+1})R(x_{j+1}), \quad (4.23)$$

где матрицы $Q(x_{j+1})$ и $R(x_{j+1})$ определяются равенствами

$$R(x_{j+1}) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{R}(x_{j+1}) & \tilde{Q}^*(x_{j+1})h_{n+1}(x_{j+1}) \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array} \right], \quad (4.24)$$

$$Q(x_{j+1}) = [\tilde{Q}(x_{j+1})q_{n+1}(x_{j+1})]. \quad (4.25)$$

Используя (4.23), получаем

$$\begin{bmatrix} u(x_{j+1}) \\ v(x_{j+1} + 0) \end{bmatrix} = H(x_{j+1})\hat{\alpha}(x_j) = Q(x_j)R(x_{j+1})\hat{\alpha}(x_j) = Q(x_{j+1})\hat{\alpha}(x_{j+1}), \quad (4.26)$$

если $x_{j+1} = t_i$ при некотором i . В противном случае имеем представление

$$\begin{bmatrix} u(x_{j+1}) \\ v(x_{j+1}) \end{bmatrix} = Q(x_{j+1})\hat{\alpha}(x_{j+1}). \quad (4.27)$$

Допустим, что мы уже получили представление (4.11) в точке $x_p = t_p$. С помощью второго краевого условия можно теперь определить неизвестные коэффициенты $\bar{\alpha}_1(x_p)$, $\bar{\alpha}_2(x_p)$, ..., $\bar{\alpha}_n(x_p)$, решив систему линейных уравнений:

$$S_2\hat{Q}(x_p)\bar{\alpha}(x_p) = \psi - S_2q_{n+1}(x_p). \quad (4.28)$$

Тогда в силу (4.11) и равенства $\hat{R}(x_{j+1})\bar{\alpha}(x_j) = \bar{\alpha}(x_{j+1})$ последовательно определим значения вектор-функций u и v в точках x_{p-1} , x_{p-2} , ..., x_1 с помощью равенств

$$\begin{bmatrix} u(x_j) \\ v(x_j + 0) \end{bmatrix} = \hat{Q}(x_j)\bar{\alpha}(x_j) + q_{n+1}(x_j), \quad (4.29)$$

$$\hat{R}(x_{j+1})\bar{\alpha}(x_j) = \bar{\alpha}(x_{j+1}). \quad (4.30)$$

В точках наблюдения значения вектора $v(t_i - 0)$ можно определить по формуле (4.5).

В заключение отметим, что применение метода ортогональной прогонки для нахождения эффективной оценки позволяет существенно уменьшить используемую память ЭВМ.

§ 5. О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ПОЛУЧЕННЫХ ОЦЕНОК

Остановимся прежде всего на вопросе оценивания параметра $\Theta = C_0 u(t_0)$, где C_0 — известная матрица размерности $n_0 \times n$. Естественно, что в этом случае лучше всего использовать эффективную оценку $\hat{\Theta}_{\text{эфф}} = C_0 \hat{u}_{\text{эфф}}(t_0)$, которая в силу (1.19) имеет ковариационную матрицу $C_0 \sigma_{\text{эфф}}^2 C_0^*$.

Обозначим

$$\sigma_m(x) = P(\chi^2 > x),$$

где χ_m^2 — случайная величина, имеющая χ -квадрат распределение с m степенями свободы. Следующее утверждение позволяет строить доверительные эллипсоиды для параметра Θ (подробнее см. [1]).

Лемма 5. Если число q удовлетворяет равенству

$$G_{n_0}(q) = \varepsilon \in (0, 1),$$

то с вероятностью $1 - \varepsilon$ имеет место неравенство

$$(\hat{\Theta}_{\text{эфф}} - \Theta)(C_0 \sigma_{\text{эфф}}^2 C_0^*)^{-1}(\hat{\Theta}_{\text{эфф}} - \Theta) < q.$$

Ясно, что, полагая $C_0 = I_n$, можно получить доверительные эллипсоиды для эффективной оценки $\hat{u}_{\text{эфф}}(t_0)$, где t_0 — произвольная точка из интервала T .

Другое применение полученной эффективной оценки заключается в следующем. Пусть помимо имеющихся наблюдений в точках $t_1, t_2, \dots, t_i$ поступают последовательно дополнительные результаты наблюдений такого же сорта в моменты времени $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_p$. Необходимо по имеющимся в данный момент результатам измерений построить в некоторый другой момент времени $\bar{t}$ эффективную оценку вектор-функции $u(t)$. В любом случае для получения требуемой оценки применим алгоритм, изложенный в предыдущих параграфах. Пусть моменты наблюдений строго упорядочены и для любого $i, i = 1, 2, \dots, p$, справедливо $\bar{t}_i \notin [t_1, t_i]$, что означает выполнение одного из двух условий: $t_i < \bar{t}_1 < \bar{t}_2 < \dots < \bar{t}_p$ либо $\bar{t}_p < \bar{t}_{p-1} < \dots < \bar{t}_1 < t_0$. Тогда для получения эффективной оценки в точке $\bar{t}_i$ можно воспользоваться идеей фильтра Калмана, причем результаты измерений в этой точке не используются. Приведем для удобства читателя необходимые подробности.

Пусть например, точки $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_p$ упорядочены следующим образом: $\bar{t}_i < \bar{t}_1 < \bar{t}_2 < \dots < \bar{t}_p$. В соответствии с алгоритмом, изложенным в § 1—4, по результатам измерений в точках $t_1, t_2, \dots, t_i$ получим эффективную оценку $\hat{u}_{\text{эфф}}(\bar{t}_1)$. Обозначим при $k = 1, 2, \dots$

$$f_k = \int_{\bar{t}_k}^{\bar{t}_{k+1}} X(t_{k+1}, t) f(t) dt, \quad \eta_k = \int_{\bar{t}_k}^{\bar{t}_{k+1}} K(t_{k+1}, t) \gamma(t) dt. \quad (5.1)$$

В этом случае из (1.3) следует, что

$$u(\bar{t}_{k+1}) = X(\bar{t}_{k+1}, \bar{t}_k) u(\bar{t}_k) + f_k + \eta_k. \quad (5.2)$$

Кроме того, очевидно, имеет место

Лемма 6. Если выполнены предположения A, B, B , то случайные векторы $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots$ независимы в совокупности и имеют известные матрицы ковариаций $\Phi_1, B_1, \Phi_2, B_2, \dots$ соответственно, где

$$B_k = \int_{\bar{t}_k}^{\bar{t}_{k+1}} X(\bar{t}_{k+1}, t) B_\gamma(t) X(\bar{t}_{k+1}, t) dt. \quad (5.3)$$

А если дополнительно верно предположение Γ , то эти вектора имеют гауссовское распределение.

Опишем теперь алгоритм получения требуемых оценок. Пусть по известным $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k$ и $g_1, g_2, \dots, g_{k-1}$ мы построим эффективную оценку $\hat{u}_k = \hat{u}_{\text{эфф}}(\bar{t}_k)$ вектора $u(\bar{t}_k)$, где $g_i C_i, \Phi_i$ полагаются равными тождественно нулю в случае, когда требуется получить эффективную оценку в точке $\bar{t}_i$, не являющейся точкой наблюдения. Наша цель теперь — построить оценку $\hat{u}_{k+1} = \hat{u}_{\text{эфф}}(\bar{t}_{k+1})$ вектора $u(\bar{t}_{k+1})$ и найти ее ковариационную матрицу $\hat{B}_{k+1}$. Эту оценку предполагается строить в два этапа. Сначала, используя значения g_k , улучшаем оценку для $u(t_k)$, полагая

$$\hat{\hat{u}}_k = \hat{u}_k + R_k(g_k - C_k \hat{u}_k), \quad (5.4)$$

где R_k — матрица $n \times n_k$, о выборе которой будет сказано ниже. Затем полагаем

$$\hat{u}_{k+1} = X(\bar{t}_{k+1}, \bar{t}_k) \hat{\hat{u}}_k + f_k. \quad (5.5)$$

Обозначим через $\hat{B}_k$ и $\hat{\hat{B}}_k$ ковариационные матрицы оценок $\hat{u}_k$ и $\hat{\hat{u}}_k$ соответственно и положим

$$\Delta_k = R_k \Phi_k + R_k C_k \hat{B}_k C_k^* - \hat{B}_k C_k^*. \quad (5.6)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\widehat{\widehat{B}}_k = (I - R_k C_k) \widehat{B}_k (I - R_k C_k)^* + R_k \Phi_k R_k^* = \widehat{B}_k - R_k C_k \widehat{B}_k + \Delta_k R_k^*, \quad (5.7)$$

$$\widehat{B}_{k+1} = X(\bar{t}_{k+1}, \bar{t}_k) \widehat{\widehat{B}}_k X^*(\bar{t}_{k+1}, \bar{t}_k) + B_k. \quad (5.8)$$

Известно, что если выбирать матрицу R_k так, чтобы выполнялось равенство

$$\Delta_k = 0, \quad (5.9)$$

то оценка $\widehat{u}_{k+1} = \widehat{u}_{\text{эфф}}(\bar{t}_{k+1})$ является эффективной. Этот факт (см. [1, 2]) можно сформулировать в следующем виде:

Лемма 7. Пусть выполнены предположения А—Г, а оценка $\widehat{u}_{k+1}$ определена по формулам (5.4), (5.5). Тогда, если оценка $\widehat{u}_k$ — эффективна, а матрица R_k удовлетворяет уравнению (9), оценка $\widehat{u}_{k+1}$ также эффективна.

Замечание. Матрица $\widehat{B}_{k+1}$ может быть получена численным интегрированием задачи Коши

$$\frac{dN(t)}{dt} = A(t)N(t) + N(t)A^*(t) + B_v(t), \quad (5.10)$$

$$N(\bar{t}_k) = \widehat{\widehat{B}}_k,$$

т. е. $N(\bar{t}_{k+1}) = \widehat{B}_{k+1}$. Из (5.8) и (5.9) вытекает равенство

$$\widehat{\widehat{B}}_k = \widehat{B}_k - R_k C_k \widehat{B}_k, \quad (5.11)$$

где

$$R_k = (\Phi_k + C_k \widehat{B}_k C_k^*)^{-1} \widehat{B}_k C_k^*. \quad (5.12)$$

Вектор $\widehat{u}_{k+1}$ также может быть получен численным интегрированием задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= A(t)u(t) + f(t), \\ u(\bar{t}_k) &= \widehat{\widehat{u}}_k, \end{aligned} \quad (5.13)$$

где вектор $\widehat{\widehat{u}}_k$ определяется равенством (5.4). Таким образом, требуемую эффективную оценку и ее ковариационную матрицу можно получить, решив задачу Коши (5.10) и (5.13) при помощи формул (5.4), (5.11) и (5.12).

§ 6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Пример 1. Пусть дана система дифференциальных уравнений шестого порядка:

$$\frac{du}{dt} = Au(t), \quad (6.1)$$

где A — матрица 6×6 имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Данную систему дифференциальных уравнений можно получить, если записать дифференциальное уравнение

$$U^{VI} = 0 \quad (6.2)$$

в виде системы, т. е. если $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_6(t))$, то

$$\begin{aligned} u_1(t) &= U(t), \quad u_2(t) = U^I(t), \quad u_3(t) = U^{II}(t), \\ u_4(t) &= U^{III}(t), \quad u_5(t) = U^{IV}(t), \quad u_6(t) = U^V(t). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Пусть для системы (1) имеем совокупность наблюдений

$$Cu(t_i) = g_i + \xi_i, \quad (6.4)$$

где $C = (100\,000)$. Равенство (6.4) можно переписать в виде

$$u_1(t_i) = U(t_i) = g_i + \xi_i. \quad (6.5)$$

Предположим, что для любого i верно равенство

$$\Phi_i = 1. \quad (6.6)$$

В силу (6.2), (6.5) и (6.6) данную задачу можно интерпретировать следующим образом. Пусть даны значения некоторой функции $f(t)$ в точках $t_1, t_2, \dots, t_l$. Требуется определить значения такого полинома пятой степени $h(t) = a_0t^5 + a_1t^4 + a_2t^3 + a_3t^2 + a_4t + a_5$ в этих же точках, чтобы величина

$$S(h) = \sum_{i=1}^l (f(t_i) - h(t_i))^2 \quad (6.7)$$

была минимальной среди всех возможных для полиномов пятой степени $h(t)$.

Пусть в моменты времени $t_i = (i-1)/2$, $i = 1, 2, \dots, 10$ заданы в виде (6.5) наблюдения, причем величины g_i будем определять по формуле $g_i = r(t_i)$, где $r(t)$ — полином пятой степени, задаваемый равенством

$$r(t) = t^5 - t + 1. \quad (6.8)$$

Значения случайных величин ξ_i возьмем из [5].

По всей совокупности рассматриваемых наблюдений с помощью алгоритма, изложенного в § 1—4, вычислим эффективные оценки вектор-функции $u(t)$, являющейся решением системы дифференциальных уравнений (6.1) в точках наблюдения t_i . Значения первой компоненты этих оценок будут являться значениями полинома пятой степени $h(t)$ в точках t_i , минимизирующего функционал

$$S(h(t)) = \sum_{i=1}^{10} (g_i + \xi_i - h(t_i))^2 = \sum_{i=1}^{10} (r(t_i) - h(t_i) + \xi_i)^2.$$

Результаты счета, значения величин ξ_i и $r(t_i)$ приведены в табл. 1.

Пример 2. Пусть для вектор-функции $(x_1(t), x_2(t))^T$ — решения системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Имеется следующая совокупность наблюдений:

$$x_1(t_i) = e^{-at_i}, \quad i = 1, 2, \dots, 5, \quad (6.10)$$

где $t_i = 2(i-1)$.

Необходимо для вектор-функции $(x_1(t), x_2(t))^T$ по совокупности наблюдений (6.10) получить оценку вектора $(x_1(0), x_2(0))^T$ по методу наименьших квадратов. Другими словами, требуется найти в момент времени $t=0$ положение такой интегральной кривой системы дифферен-

Т а б л и ц а 1. Эффективные оценки значений полинома пятой степени

Точка наблюдения	Точное значение полинома $r(t_i)$	Погрешность наблюдения ξ_i	Полученные значения
0	1	0,464	1,1638
0.5	0.53125	0.137	1.861
1	1	2.455	1.8943
1.5	7.0937	-0.323	7.355
2	31	-0.068	31.018
2.5	96.156	0.296	96.336
3	241	-0.288	241.45
3.5	522.719	1.298	523.195
4	1021	0.241	1021.08
4.5	1841.78	-0.957	1841.345
5	3121	0.06	3120.88

циальных уравнений (6.9), которая минимизирует функционал

$$S(x_1(t), x_2(t)) = \sum_{j=1}^5 (x_1(t_j) - e^{-at_j})^2. \quad (6.11)$$

Данная задача имеет единственное решение, и искомая интегральная кривая определяется равенствами

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-at}, \\ x_2(t) &= -e^{-at}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Действительно, для интегральной кривой (6.12) выполнено

$$S(x_1(t), x_2(t)) = 0.$$

Допустим, решение поставленной задачи неизвестно, и попытаемся определить его численно. На примере поставленной задачи будет показано преимущество предлагаемого метода по сравнению с подходом, связанным с нахождением оценки искомого вектора посредством решения системы линейных уравнений методом наименьших квадратов.

Поскольку матрица-функция

$$X(t, t_1) = \begin{pmatrix} \text{ch}(at) & \text{sh}(at) \\ \text{sh}(at) & \text{ch}(at) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} & \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} \\ \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} & \frac{e^{at} + e^{-at}}{2} \end{pmatrix}$$

при $t_1 = 0$ является матрицантом системы дифференциальных уравнений (6.9), то, проводя все рассуждения § 1 для определения оценки искомого вектора $z^T = (x_1(0), x_2(0))^T$ по методу наименьших квадратов, получим систему линейных уравнений

$$Lz = G, \quad (6.13)$$

где L и G в данном случае имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} \text{ch}(at_1) & \text{sh}(at_1) \\ \text{ch}(at_2) & \text{sh}(at_2) \\ \vdots & \vdots \\ \text{ch}(at_5) & \text{sh}(at_5) \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} e^{-at_1} \\ e^{-at_2} \\ \vdots \\ e^{-at_5} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай, когда $a = 5$ и на ЭВМ были вычислены сингулярные числа матрицы L , одно из которых с машинной точностью оказалось равным нулю.

Напомним, что сингулярными числами $\sigma_1(A), \sigma_2(A), \dots, \sigma_s(A)$ матрицы A размерности $n \times s$ называются числа $\sigma_j(A)$, определяемые по формуле

$$\sigma_j(A) = \sqrt{\lambda_j(A^*A)}, \quad (6.14)$$

где $\lambda_j(A^*A)$ — собственные числа матрицы A^*A .

Т а б л и ц а 2. Результаты восстановления интегральной кривой по методу наименьших квадратов с точным решением

Точка наблюдения	Точное значение $x_1(0)$	Вычисленное значение $x_1(0)$
0	1	1
2	$0.45499 \cdot 10^{-4}$	$0.453817 \cdot 10^{-4}$
4	$0.206115 \cdot 10^{-8}$	$0.205952 \cdot 10^{-8}$
6	$0.935762 \cdot 10^{-13}$	$0.934662 \cdot 10^{-13}$
8	$0.424835 \cdot 10^{-17}$	$0.424505 \cdot 10^{-17}$

В силу того, что величина $\sigma_2(L) = \sqrt{\lambda_2(L^*L)}$ даже при не очень больших значениях a оказывается достаточно близкой к нулю, в процессе решения системы линейных уравнений (6.13) на ЭВМ искомая оценка вектора z определяется либо с большой погрешностью, либо неединственным образом. В случае $a = 5$ решение системы (6.13) единственным образом определить не удалось и было получено одномерное линейное многообразие решений, в то время как решение исходной задачи единственно.

Сравнение в точках наблюдения t_i точных значений $x_1(0)$ и полученных численно с помощью описанного в § 1—4 алгоритма приведено в табл. 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А. Математическая статистика. Дополнительные главы.— М.: Наука, 1984.— 144 с.
2. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси.— М.: Наука, 1982.— 199 с.
3. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН.— 1961.— № 3.— С. 171—175.
4. Кузнецов С. В. Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та математики/АН СССР. Сиб. отд-ние.— 1985.— Т. 6: Вычислительные методы линейной алгебры.— С. 85—110.
5. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики.— М.: Наука, 1965.— 464 с.

В. Я. ИВАНОВ

МЕТОД АНАЛИЗА ТРЕХМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОТОКОВ ЧАСТИЦ

ВВЕДЕНИЕ

Для анализа корпускулярных потоков заряженных частиц, предназначенных для формирования и трансформации изображений объектов, широко используется метод теории возмущений, получивший название теории аббераций. Он использует представление решения в виде рядов по степеням выбранной системы физически малых параметров. Одним из таких параметров всегда является параметр параксиальности, характеризующий величину отклонения от некоторой стандартной траектории, называемой оптической осью пучка. Поскольку пучки, создающие изображения, имеют ярко выраженный ламинарный характер движения частиц преимущественно вдоль оптической оси, в качестве других малых параметров естественно выбрать начальные углы наклона к оси. В системах эмиссионного типа малыми параметрами служат не начальные углы, а компоненты начальной энергии частиц. Теория аббераций имеет две эквивалентные формулировки. В вариационном подходе, называемом так-