

Т а б л и ц а 2. Результаты восстановления интегральной кривой по методу наименьших квадратов с точным решением

Точка наблюдения	Точное значение $x_1(0)$	Вычисленное значение $x_1(0)$
0	1	1
2	$0.45499 \cdot 10^{-4}$	$0.453817 \cdot 10^{-4}$
4	$0.206115 \cdot 10^{-8}$	$0.205952 \cdot 10^{-8}$
6	$0.935762 \cdot 10^{-13}$	$0.934662 \cdot 10^{-13}$
8	$0.424835 \cdot 10^{-17}$	$0.424505 \cdot 10^{-17}$

В силу того, что величина $\sigma_2(L) = \sqrt{\lambda_2(L^*L)}$ даже при не очень больших значениях a оказывается достаточно близкой к нулю, в процессе решения системы линейных уравнений (6.13) на ЭВМ искомая оценка вектора z определяется либо с большой погрешностью, либо неединственным образом. В случае $a = 5$ решение системы (6.13) единственным образом определить не удалось и было получено одномерное линейное многообразие решений, в то время как решение исходной задачи единственно.

Сравнение в точках наблюдения t_i точных значений $x_1(0)$ и полученных численно с помощью описанного в § 1—4 алгоритма приведено в табл. 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А. А. Математическая статистика. Дополнительные главы.— М.: Наука, 1984.— 144 с.
2. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси.— М.: Наука, 1982.— 199 с.
3. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН.— 1961.— № 3.— С. 171—175.
4. Кузнецов С. В. Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та математики/АН СССР. Сиб. отд-ние.— 1985.— Т. 6: Вычислительные методы линейной алгебры.— С. 85—110.
5. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики.— М.: Наука, 1965.— 464 с.

В. Я. ИВАНОВ

МЕТОД АНАЛИЗА ТРЕХМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОТОКОВ ЧАСТИЦ

ВВЕДЕНИЕ

Для анализа корпускулярных потоков заряженных частиц, предназначенных для формирования и трансформации изображений объектов, широко используется метод теории возмущений, получивший название теории аббераций. Он использует представление решения в виде рядов по степеням выбранной системы физически малых параметров. Одним из таких параметров всегда является параметр параксиальности, характеризующий величину отклонения от некоторой стандартной траектории, называемой оптической осью пучка. Поскольку пучки, создающие изображения, имеют ярко выраженный ламинарный характер движения частиц преимущественно вдоль оптической оси, в качестве других малых параметров естественно выбрать начальные углы наклона к оси. В системах эмиссионного типа малыми параметрами служат не начальные углы, а компоненты начальной энергии частиц. Теория аббераций имеет две эквивалентные формулировки. В вариационном подходе, называемом так-

же методом эйконала, производится разложение в ряд по малым параметрам функции действия. Нулевой член этого разложения дает уравнения траектории частиц и закон сохранения энергии, а высшие члены — поправки, называемые коэффициентами аббераций. В «траекторном» подходе параксиальные разложения электромагнитных полей и траекторий подставляются непосредственно в уравнения траекторий, полученных из уравнений движения Лоренца исключением независимой переменной времени.

Сложность использования аналитического аппарата теории аббераций заключается не только в громоздкости выражений, для получения которых зачастую проводят вывод с помощью ЭВМ, но и в чрезвычайном многообразии вариантов формулировок конкретных задач, связанных с различиями типов симметрии поля, системы малых параметров и пр. Один из наиболее общих подходов к анализу систем с произвольной криволинейной осью пучка предложен Гринбергом [1] и развит в работах Вандакурова [2—5], Страшкевича, Пилата и Глузмана [6—7], Стэррока [8], Цуккермана [9, 10], Фрейнкмана [11] и других. Этот метод получил название метода главного луча. Он заключается в том, что в потоке частиц, отличающихся начальными координатами, наклонами, энергиями или массами, выделяется некоторая характерная траектория со средними значениями этих параметров. Такая траектория называется главным лучом, а все остальные — смежные траектории — представляют собой результат разложения по малым отклонениям параметров в окрестности главного луча. Безусловно такая методика обладает значительной универсальностью применений. Пучки с широкой входной апертурой и значительной компрессией можно рассчитывать, разбивая сечение входной апертуры на небольшое число неперекрывающихся зон, в каждой из которых производится разложение относительно своего главного луча. Критерием точности метода в таком случае служит совпадение характеристик смежных траекторий на границе соседних зон.

Отметим, что у метода главного луча имеется ряд существенных недостатков, ограничивающих сферу его применений, помимо громоздкости используемого математического аппарата. Во-первых, в указанных работах не рассматривались весьма важные для практики случаи катодных и зеркальных линз, у которых полная энергия частицы обращается в нуль в окрестности катода или точки поворота. Во-вторых, вне поля зрения остаются времяпролетные абберации, важные для оценки временного разрешения приборов. Кроме того, разложения ограничиваются линейными по малым параметрам членами или анализом стационарного режима. Ниже представлен новый способ вычисления характеристик пучка с пространственной криволинейной осью, свободный от указанных недостатков, применимый для анализа как стационарных, так и нестационарных потоков релятивистских заряженных частиц.

§ 1. МЕТОД τ -ВАРИАЦИЙ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ПУЧКОВ

Идея нового метода также основывается на явном интегрировании трехмерной траектории главного луча, но для вычисления параметров смежных траекторий используется метод, впервые предложенный в работе Монастырского и Щелева для осесимметричных систем с прямолинейной осью пучка [12]. Примечательно, что интегрирование уравнений для смежных траекторий производится не в криволинейной системе координат главного луча, а в исходной декартовой системе координат, что значительно упрощает используемый математический аппарат.

Пусть поверхность эмиттера задается уравнением $z = f(x, y)$ и из точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ этой поверхности выпускается траектория главного луча (рис. 1). Тогда начальные координаты произвольной смежной траек-

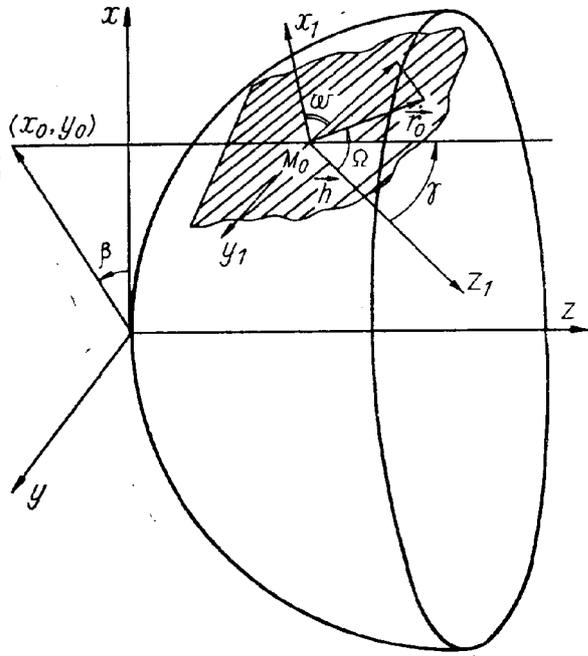


Рис. 1. Связь глобальной и локальной систем координат.

тории представлены в виде

$$\begin{aligned} x_0 &= \bar{x}_0 + \xi_1, \quad y_0 = \bar{y}_0 + \xi_2, \\ z_0 &= f(x_0, y_0), \end{aligned} \quad (1)$$

где ξ_1, ξ_2 — малые по отношению к характерному масштабу системы параметры параксиальности, образующие вектор геометрических вариаций $\vec{\xi}_r = (\xi_1, \xi_2)$. Для катодных линз естественными малыми параметрами будут также компоненты начальной скорости частицы

$$\xi_3 = \dot{x}_0, \quad \xi_4 = \dot{y}_0, \quad \xi_5 = \dot{z}_0, \quad (2)$$

образующие подвектор энергетических параметров $\vec{\xi}_e = (\xi_3, \xi_4, \xi_5)$. Оба указанных вектора дают суммарный вектор начальных данных $\vec{\xi} = (\vec{\xi}_r, \vec{\xi}_e)$. На траектории главного луча имеем $\vec{\xi} = 0$. Подвектор энергетических параметров можно представить в виде

$$\vec{\xi}_e = \sqrt{2 \frac{z}{m} q}(\Omega, \omega) T(\beta, \gamma) \vec{a} \sqrt{\varepsilon}, \quad (3)$$

где ε — начальная энергия частицы, а вектор \vec{q} и матрица T даются выражениями

$$\vec{q}(\Omega, \omega) = \begin{bmatrix} \sin \Omega & \cos \omega \\ \sin \Omega & \sin \omega \\ \cos \Omega & \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$T(\beta, \gamma) = \begin{bmatrix} 1 - 2 \cos^2 \beta \sin^2 \frac{\gamma}{2} & -\sin 2\beta \sin^2 \frac{\gamma}{2} & -\sin \gamma \cos \beta \\ -\sin 2\beta \sin^2 \frac{\gamma}{2} & 1 - 2 \sin^2 \beta \sin^2 \frac{\gamma}{2} & -\sin \gamma \sin \beta \\ \sin \gamma \cos \beta & \sin \beta \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Здесь $\beta \in [0, 2\pi]$ — угол между осью Ox и вектором (x_0, y_0) , $\gamma \in [0, \pi/2]$ — угол между осью Oz и нормалью к поверхности эмиттера в точке вылета M_0 , $\Omega \in [-\pi/2, \pi/2]$ — угол между нормалью и вектором начальной скорости частицы, $\omega \in [0, 2\pi]$ — угол между осью Ox касательной плоскости в точке M_0 и проекцией вектора начальной скорости на эту плоскость.

В любой момент времени τ , отсчитываемого вдоль главной траектории $\vec{r}_0(\tau)$, положение произвольной смежной траектории представим в виде ряда

$$\vec{r}(\tau) = \vec{r}_0(\tau) + \sum_{i=1}^5 \vec{r}_i^{(\tau)} \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^5 \vec{r}_{ij}^{(\tau)} \xi_i \xi_j + O(\xi^3) \quad (6)$$

по степеням малых параметров ξ_i .

Производную

$$\vec{r}_i^{(\tau)} = \left. \frac{\partial \vec{r}(\tau)}{\partial \xi_i} \right|_{\xi=0, \tau=\text{const}} \quad (i = 1, \dots, 5), \quad (7)$$

вычисляемую на главной траектории, будем называть первой τ -вариацией траектории, а производные

$$\vec{r}_{ij}^{(\tau)} = \left. \frac{\partial^2 \vec{r}(\tau)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right|_{\xi=0, \tau=\text{const}} \quad (i, j = 1, \dots, 5) \quad (8)$$

составляют вторые τ -вариации.

Исходное уравнение Лоренца релятивистской частицы имеет вид

$$\dot{\vec{p}} = Z(\vec{E} + [\dot{\vec{r}} \times \vec{B}]), \quad (9)$$

где $\vec{E}^{(r,t)}$ и $\vec{H}^{(r,t)}$ — напряженности самосогласованных электрического и магнитного полей, Z и m — заряд и масса покоя частицы, c — скорость света в пустоте, а связь импульса частицы \vec{p} со скоростью выражается формулой

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}}/[1 - (\dot{\vec{r}}\dot{\vec{r}})/c^2]^{1/2}. \quad (10)$$

Выпишем уравнения для вариаций первого

$$\dot{\vec{p}}_i^{(\tau)} = Z(\nabla_{\vec{r}} \vec{E} \otimes \vec{r}_i^{(\tau)}) + Z[\dot{\vec{r}}_i^{(\tau)} \times \vec{B}] + Z[\dot{\vec{r}}, \nabla_{\vec{r}} \vec{B} \otimes \vec{r}_i^{(\tau)}] \quad (11)$$

и второго порядков

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}}_{ij}^{(\tau)} = & Z(\nabla_{\vec{r}} \vec{E} \otimes \vec{r}_{ij}^{(\tau)}) + Z[\dot{\vec{r}}_{ij}^{(\tau)}, \vec{B}] + Z[\dot{\vec{r}}, \nabla_{\vec{r}} \vec{B} \otimes \vec{r}_{ij}^{(\tau)}] + \\ & + Z(\nabla_{\vec{r}} \nabla_{\vec{r}} \vec{E} \otimes \vec{r}_j^{(\tau)}) \otimes \vec{r}_i^{(\tau)} + Z[\dot{\vec{r}}_i^{(\tau)}, \nabla_{\vec{r}} \vec{B} \otimes \vec{r}_j^{(\tau)}] - Z[\dot{\vec{r}}_j^{(\tau)}, \nabla_{\vec{r}} \vec{B} \otimes \vec{r}_i^{(\tau)}] + \\ & + Z[\dot{\vec{r}}, (\nabla_{\vec{r}} \nabla_{\vec{r}} \vec{B} \otimes \vec{r}_j^{(\tau)}) \otimes \vec{r}_i^{(\tau)}], \quad (12) \end{aligned}$$

где значком \otimes указано тензорное произведение.

Начальные условия для вариаций первого порядка имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{r}_1^{(\tau)} &= \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x_0} \Big|_{M_0}\right), \quad \dot{\vec{r}}_1^{(\tau)} = 0, \\ \vec{r}_2^{(\tau)} &= \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y_0} \Big|_{M_0}\right), \quad \dot{\vec{r}}_2^{(\tau)} = 0, \\ \vec{r}_3^{(\tau)} &= \vec{r}_4^{(\tau)} = \vec{r}_5^{(\tau)} = 0, \\ \dot{\vec{r}}_3^{(\tau)} &= (1, 0, 0), \quad \dot{\vec{r}}_4^{(\tau)} = (0, 1, 0), \quad \dot{\vec{r}}_5^{(\tau)} = (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (13)$$

Начальные условия вариаций второго порядка обладают симметрией $\vec{r}_{ij}^{(\tau)} = \vec{r}_{ji}^{(\tau)}$, кроме того,

$$\begin{aligned} \vec{r}_{11}^{(\tau)} &= \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} \Big|_{M_0}\right), \\ \vec{r}_{12}^{(\tau)} &= \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial y_0} \Big|_{M_0}\right), \quad \dot{\vec{r}}_{ij}^{(\tau)} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, 5), \\ \vec{r}_{22}^{(\tau)} &= \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} \Big|_{M_0}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

а остальные компоненты $\vec{r}_{ij}^{(\tau)} = 0$.

§ 2. КАРДИНАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И КОЭФФИЦИЕНТЫ АБЕРРАЦИЙ

Коэффициенты при степенях малых параметров в разложении (6) принято называть коэффициентами aberrаций. Из них величины первого порядка определяют кардинальные элементы гауссовой оптики. Введем общепринятые обозначения

$$\vec{w}_x = \vec{r}_1^{(\tau)}, \quad \vec{w}_y = \vec{r}_2^{(\tau)}, \quad \vec{v}_x = \vec{r}_3^{(\tau)}, \quad \vec{v}_y = \vec{r}_4^{(\tau)}, \quad \vec{v}_z = \vec{r}_5^{(\tau)}. \quad (15)$$

Если при некотором значении $\tau_{gx} > 0$ имеем $\vec{v}_x(\tau) = 0$, то в этой точке главного луча имеет место фокусировка в сагиттальном направлении. Условие $\vec{v}_y(\tau) = 0$ в общем случае будет выполняться при $\tau_{gy} \neq \tau_{gx}$. Оно определяет фокусировку в меридианном направлении. Если $\tau_{gx} = \tau_{gy}$, говорят, что пучок образует стигматичное изображение. Значения траекторий w_x и w_y в точках фокусировки определяют линейное увеличение $M_x = w_x(\tau_{gx})$, $M_y = w_y(\tau_{gy})$ (рис. 2). Аналогичным образом уравнения $w_x(\tau) = 0$ и $w_y(\tau) = 0$ определяют окрестности точек главного луча с минимальным сечением пучка в сагиттальном и меридианном направлениях. Эти окрестности принято называть кроссовером пучка. Обратим внимание на то, что каждая из траекторий v_x , v_y , w_x , w_y представляет собой трехмерный параметрический вектор, например, $v_x = (x_1(\tau), y_1(\tau), z_1(\tau))$, поэтому уравнение $v_x(\tau) = 0$ следует понимать как обращение в нуль модуля данного вектора. Поскольку в численной модели каждая из компонент вектора интегрируется самостоятельно, вследствие влияния ошибок аппроксимации и округления маловероятно обращение в нуль всех компонент вектора при одном и том же значении параметра τ , то уравнение $v_x(\tau) = 0$ следует интерпретировать как

$$v_x(\tau_{gx}) = \min_{\tau} [x_1^2(\tau) + y_1^2(\tau) + z_1^2(\tau)]^{1/2}. \quad (16)$$

Аналогичным образом определяются и остальные кардинальные элементы. Коэффициент $v_z(\tau)$ определяет не геометрические искажения изображения, а линейный член временной задержки сигнала. Он играет определяющую роль при анализе нестационарных процессов в приборах для регистрации быстропротекающих процессов.

Если решения уравнений $\vec{r}_i^{(\tau)} = 0$ находятся вне оптически действующей области электромагнитных полей, то, начиная с некоторого значения $\tau = \tau_0$, главный луч и все смежные траектории вырождаются в прямые линии. В этом случае кардинальные элементы называются

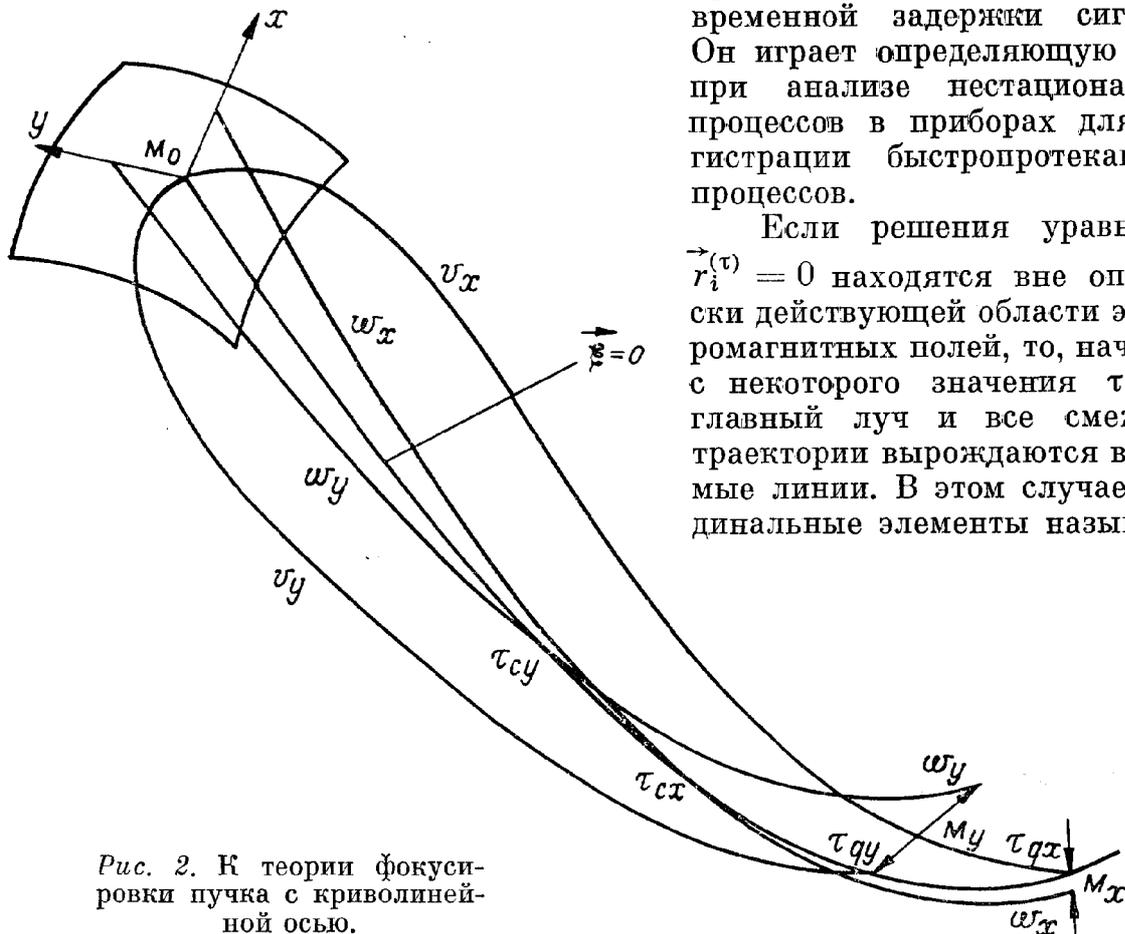


Рис. 2. К теории фокусировки пучка с криволинейной осью.

ся виртуальными и находятся из уравнений $\vec{r}_i^{(\tau)}(\tau) = 0$, где

$$\vec{r}_i^{(\tau)}(\tau) = \vec{r}_i^{(\tau)}(\tau_0) + (\tau - \tau_0) \dot{\vec{r}}_i^{(\tau)}(\tau_0). \quad (17)$$

Если точки фокусировки соответствуют значениям $\tau_{gx} > \tau_0$ или $\tau_{gy} > \tau_0$, то в соответствующем направлении образуется действительное изображение объекта, в противном случае имеет место мнимое изображение.

Представление (6) описывает пучок траекторий в произвольный момент времени τ , отсчитываемый от траектории главного луча. Совокупность смежных траекторий, отвечающих фиксированному значению τ , образует в общем случае поверхность сложной формы. Если реальная поверхность экрана описывается уравнением $f_a(\vec{r}) = 0$, необходимо уметь переходить от (6) к представлению

$$\vec{r}^{(\varepsilon)} = \vec{r}_0^{(\varepsilon)} + \sum_{i=1}^5 \vec{r}_i^{(\varepsilon)} \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^5 \vec{r}_{ij}^{(\varepsilon)} \xi_i \xi_j + O(\xi^3), \quad (18)$$

где индекс «э» означает, что величины относятся к поверхности экрана. Искомые преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{r}_i^{(\varepsilon)} &= \vec{r}_0^{(\varepsilon)} \tau_i^* + \vec{r}_i^{(\tau)}, \\ \vec{r}_{ij}^{(\varepsilon)} &= \ddot{\vec{r}}_0^{(\varepsilon)} \tau_i^* \tau_j^* + \vec{r}_i^{(\tau)} \tau_j^* + \vec{r}_j^{(\tau)} \tau_i^* + \dot{\vec{r}}_0 \tau_{ij}^* + \vec{r}_{ij}^{(\tau)}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\tau_i^* = - \frac{\left(\nabla_{\vec{r}} f_a, \vec{r}_i^{(\tau)} \right)}{\left(\nabla_{\vec{r}} f_a, \dot{\vec{r}}_0 \right)}, \quad \vec{g}_a = \nabla_{\vec{r}} f_a, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^* &= - \left\{ \left(\nabla_{\vec{r}} \nabla_{\vec{r}} f_a \otimes \vec{r}_j^{(\varepsilon)}, \vec{r}_i^{(\varepsilon)} \right) + \tau_i^* \left(\nabla_{\vec{r}} f_a, \vec{r}_j^{(\tau)} \right) + \tau_j^* \left(\nabla_{\vec{r}} f_a, \vec{r}_i^{(\tau)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \tau_i^* \tau_j^* \left(\ddot{\vec{g}}_a \vec{r}_0 \right) + \left(\vec{g}_a \vec{r}_{ij}^{(\tau)} \right) \right\} / \left(\vec{g}_a \dot{\vec{r}}_0 \right), \end{aligned} \quad (21)$$

а производные функции f_a вычисляются в точке пересечения экрана главной траекторией, имеющей скорость $\dot{\vec{r}}_0$.

При вычислении функции рассеяния точки понадобится определить проекцию вектора $\vec{\eta} = \vec{r}^{(\varepsilon)} - \vec{r}_0^{(\varepsilon)}$ на касательную к экрану плоскость. Представим вектор варьируемых малых параметров $\vec{\xi}$ и коэффициентов вариаций в виде подвекторов геометрических и энергетических, обозначаемых соответствующими индексами r и ε . Тогда разложение (18) запишется в виде

$$\vec{\eta} = \left(\vec{r}_r^{(\varepsilon)} \vec{\xi}_r \right) + \left(\vec{r}_\varepsilon^{(\varepsilon)} \vec{\xi}_\varepsilon \right) + \frac{1}{2} \left(\vec{r}_{\varepsilon\varepsilon} \vec{\xi}_\varepsilon \right) \vec{\xi}_\varepsilon = G \vec{\xi}_r + \vec{\delta}. \quad (22)$$

Можно показать, что в приближении условия изопланатизма для вектора $\vec{\delta}$ следует отбросить члены, зависящие от локальных координат $\vec{\xi}_r$. Тогда имеем

$$\vec{\delta} = \vec{r}_\varepsilon^{(\varepsilon)} a \sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{2} \vec{r}_{\varepsilon\varepsilon}^{(\varepsilon)} a^2 \varepsilon. \quad (23)$$

В соответствии с общепринятым в электронной оптике правилом будем относить преобразование (22) к катоду. Для этого умножим его слева на обратную матрицу G^{-1} и получим

$$\vec{\eta}_c = G^{-1} \left[\vec{\xi}_r + \vec{r}_\varepsilon^{(\varepsilon)} a \sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{2} \vec{r}_{\varepsilon\varepsilon}^{(\varepsilon)} a^2 \varepsilon \right]. \quad (24)$$

§ 3. НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Одной из наиболее удобных моделей для деталей численной реализации предлагаемой методики является модель сферического конденсатора, представляющая собой две концентрические сферы радиусами R_c и R_s с потенциалами U_c и U_s на них. Распределение потенциала в пространстве имеет вид

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{A}{R_c} \frac{r - R_c}{r}, & A = \frac{UR_c R_s}{R_c - R_s}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \\ U_s, & r < R_s, \end{cases} \quad (25)$$

Из интеграла энергии

$$(\dot{r})^2 = \frac{2Z}{m} (\varphi(r) + \epsilon_0) \quad (26)$$

получим уравнение траектории главного луча

$$R_c \ln \frac{\sqrt{-r} + \sqrt{R_c + r}}{\sqrt{R_c}} + \sqrt{-r(R_c + r)} = \sqrt{\frac{2ZA}{mR_c}} t, \quad t \leq t_s, \quad (27)$$

$$r = -R_s + \dot{r}_s t, \quad t > t_s,$$

где момент времени пересечения частицей поверхности сетки t_s и скорость в точке пересечения \dot{r}_s определяются формулами

$$t_s = \sqrt{\frac{mR_c}{2ZA}} \left[\ln \frac{\sqrt{R_s} - \sqrt{R_c - R_s}}{\sqrt{R_c}} + \sqrt{R_s(R_c - R_s)} \right], \quad (28)$$

$$\dot{r}_s = \sqrt{\frac{2ZA}{mR_c} \frac{R_c - R_s}{R_s}}, \quad (29)$$

а начальные данные для траектории имеют вид

$$r|_{t=0} = -R_c, \quad \dot{r}|_{t=0} = 0. \quad (30)$$

Выбрав траекторию главного луча в качестве оси симметрии $\bar{z} = r(t)$, перейдем к локальной системе координат \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} , в которой тау-вариации первого порядка имеют вид

$$w_x = (-\bar{z}/R_c, 0, \bar{z}), \quad w_y = (0, -\bar{z}/R_c, \bar{z}), \quad (31)$$

$$v_x = (v, 0, \bar{z}), \quad v_y = (0, v, \bar{z}), \quad v_z = (0, 0, v),$$

где
$$v = \begin{cases} 2[-\bar{z}(\bar{z} + R_c)(R_c - R_s)/R_s U_s]^{1/2}, & z \leq -R_s, \\ -v_s \frac{(z - R_c)}{R_c + R_s}, & t > -R_s, \quad v_s = 2(R_c - R_s)/\sqrt{U_s}. \end{cases} \quad (32)$$

Кардинальные элементы сферического конденсатора описываются простыми соотношениями. Положения плоскостей Гаусса $z_{gx} = z_{gy} = R_c$, плоскостей кроссовера $z_{cx} = z_{cy} = 0$ и коэффициентов увеличения $M_x = M_y - 1$ в двух взаимно ортогональных плоскостях совпадают в силу симметрии задачи. По этой же причине aberrации второго порядка обращаются в нуль.

Случай цилиндрического конденсатора подробно разобран в работах Вандакурова [3, 4], а также Страшкевича и Пилата [6]. Если в качестве главного луча выбрать окружность радиуса R , которая является эквипотенциальной линией с потенциалом U , то распределение потенциала описывается формулой

$$\varphi(r) = U \left(1 - 2 \ln \frac{r}{R} \right). \quad (33)$$

Для начальных данных

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, & v'(0) &= 1, \\ w(0) &= 1, & w'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

фундаментальная система решений параксиального уравнения электронной оптики имеет вид

$$v(s) = \sin \sqrt{2}s/R, \quad (35)$$

$$w(s) = \cos \sqrt{2}s/R - \operatorname{ctg} \sqrt{2}b/R \sin \sqrt{2}s/R, \quad (36)$$

а общее решение представляется комбинацией

$$u(s) = \alpha v(s)/v(b) + \beta w(s). \quad (37)$$

Здесь s — длина дуги траектории главного луча, а $s = b$ — положение апертурной диафрагмы. Аберрации второго и третьего порядков рассчитываются по формулам

$$\Delta u(s) = Au^2(0) + Bu(0)u(b) + Cu^2(b) + Du^3(0) + Eu^2(0)u(b) + Fu(0)u^2(b) + Gu^3(b), \quad (38)$$

$$\Delta u_2 = -\frac{4}{R^3} w(s) \int_0^s u^2(s) \cos \sqrt{2}s/R ds, \quad (39)$$

$$\Delta u_3 = -\frac{31}{3R^4} w(s) \int_0^s u^3 \cos \sqrt{2}s/R ds. \quad (40)$$

Проводя интегрирование, получим явный вид коэффициентов

$$\begin{aligned} A &= -2k \left[\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^2 \frac{\sqrt{2}b}{R} \sin^3 \frac{\sqrt{2}s}{R} + \sin \frac{\sqrt{2}s}{R} - \frac{1}{3} \sin^3 \frac{\sqrt{2}s}{R} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{2}b}{R} \left(\cos^3 \frac{\sqrt{2}s}{R} - 1 \right) \right], \\ B &= -\frac{4k}{3 \sin \frac{\sqrt{2}b}{R}} \left(\operatorname{ctg} \frac{\sqrt{2}b}{R} \sin^3 \frac{\sqrt{2}s}{R} + \cos^3 \frac{\sqrt{2}s}{R} - 1 \right), \\ C &= -\frac{2k}{3} \sin^3 \frac{\sqrt{2}s}{R} \Big/ \sin^2 \frac{\sqrt{2}b}{R}, \\ D &= -\frac{31k}{6R} \left[\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^3 \frac{\sqrt{2}b}{R} \sin^2 \frac{\sqrt{2}s}{R} \left(\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\sqrt{2}s}{R} - 1 \right) + \frac{3\sqrt{2}s}{8R} + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\sqrt{2}s}{R} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{32} \sin^4 \frac{\sqrt{2}s}{R} + \frac{3}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\sqrt{2}b}{R} \left(\cos^4 \frac{\sqrt{2}s}{R} - 1 \right) + \frac{3}{8} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{2}b}{R} \left(\frac{\sqrt{2}s}{R} - \frac{1}{4} \sin^4 \frac{\sqrt{2}s}{R} \right), \right. \\ E &= -\frac{31k}{2R \sin \frac{\sqrt{2}b}{R}} \left[\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\sqrt{2}b}{R} \sin^2 \frac{\sqrt{2}s}{R} \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\sqrt{2}s}{R} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{2}b}{R} \left(\frac{\sqrt{2}s}{R} - \frac{1}{4} \sin^4 \frac{\sqrt{2}s}{R} \right) - \frac{1}{4} \left(\cos^4 \frac{\sqrt{2}s}{R} - 1 \right) \right], \\ F &= -\frac{31k}{2R \sin^2 \frac{\sqrt{2}b}{R}} \left[\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{2}b}{R} \sin^2 \frac{\sqrt{2}s}{R} \left(\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\sqrt{2}s}{R} - 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{2}s}{8R} - \frac{1}{32} \sin^4 \frac{\sqrt{2}s}{R} \right], \\ G &= -\frac{31k}{12R} \left(\sin^2 \frac{\sqrt{2}s}{R} - \frac{1}{8} \sin^2 \frac{2\sqrt{2}s}{R} \right) \Big/ \sin^3 \frac{\sqrt{2}b}{R}, \\ k &= \frac{\sqrt{2}}{R^2} \left(\cos \frac{\sqrt{2}s}{R} - \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{2}b}{R} \sin \frac{\sqrt{2}s}{R} \right). \end{aligned}$$

§ 4. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТОКА ЭМИССИИ

Если в исследуемую область производится инжекция значительных токов, невозможно пренебрегать влиянием собственных полей пучков заряженных частиц на характеристики их движения. В таком случае уравнения самосогласованного поля становятся нелинейными, и полная система уравнений электронной оптики включает уравнения поля, уравнения движения заряженных частиц и закон сохранения полного заряда. В стационарном случае уравнения для электрических и магнитных полей становятся независимыми:

$$\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0, \quad (41)$$

$$\operatorname{div}(\hat{\mu} \nabla \psi) = \operatorname{div}(\hat{\mu} \vec{H}_0(J_0)), \quad (42)$$

где φ и ψ — скалярные электрический и магнитный потенциалы; ρ и \vec{J}_0 — объемные плотности зарядов и токов; ε_0 — диэлектрическая проницаемость среды; $\hat{\mu}$ — тензор магнитной проницаемости; \vec{H}_0 — вихревое поле токов проводимости

$$\vec{H}_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_V \frac{\vec{J}_0 \times \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'. \quad (43)$$

К уравнениям поля следует добавить краевые условия, отвечающие конкретной постановке физической задачи. Уравнения движения частиц в форме Лоренца описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (9), а закон сохранения заряда имеет вид

$$\operatorname{div}(\vec{J}) = 0. \quad (44)$$

Для последнего уравнения необходимо задать начальные условия на плотность тока $\vec{J} = \rho \vec{r}$ на некоторой поверхности эмиттера

$$(\vec{J})_s = \vec{J}_s(r, r, \varphi). \quad (45)$$

Вид функции \vec{J}_s описывает режим инжекции частиц в исследуемую область. В режиме ограничения тока эмиссии пространственным зарядом частиц величина тока определяется из условия обращения в нуль нормальной компоненты электрического поля на поверхности эмиттера

$$(E_n)_s = 0. \quad (46)$$

В ряде случаев удается получить явное выражение для плотности тока эмиссии путем аналитического решения задачи. Такие решения получены для диодов с плоским, цилиндрическим и сферическим катодами, которые формируют соответственно цилиндрический, клиновидный и конический пучки. В случае плоского катода это решение имеет вид «закона 3/2» или закона Богуславского — Чайлда — Ленгмюра

$$J_s = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \sqrt{2 \frac{e}{m} \frac{U^{3/2}}{d^2}}, \quad (47)$$

где d — величина зазора диода, U — полное ускоряющее напряжение.

Попытки учета влияния тепловых скоростей частиц, поперечных компонент магнитного поля, наличия ионного фона в окрестности эмиттера и других физических эффектов, а также отличия формы реального катода от аналитической модели требуют модификации «закона 3/2», что далеко не всегда удается сделать корректно. В связи с этим Мокиным [15] и Головиным [16, 17] были предложены численные алгоритмы непосредственной аппроксимации условия (46), которые приводят к решению

$$A\vec{J} + \vec{E}_{n0} = 0, \quad (48)$$

где \vec{E}_{n0} — нормальная компонента поля на катоде в отсутствие объемного заряда, J — вектор плотности тока, A — квадратная матрица, размерность которой равна числу точек N на эмиттере, в которых аппроксимируется условие (46). В данном методе на каждой нелинейной итерации требуется решение N краевых задач. В любой из них рассчитывается одна из N траекторий, а ее вклад в поле составляет строку матрицы A . Общий объем вычислений по этой методике на каждой итерации существенно превышает число операций, необходимых для вычислений по формуле (47), однако, как отмечено Головиным [16], скорость сходимости предложенного им метода в ряде случаев может быть существенно выше скорости сходимости для «закона 3/2». Кроме того, для участков эмиттера с малым радиусом закругления внутренняя сходимость итераций для плотности тока может давать решения, в которых условие (46) выполняется со значительной погрешностью.

Автором совместно с В. Т. Астрелиным предложен новый итерационный алгоритм вычисления плотности тока эмиссии в режиме ограничения объемным зарядом, который обеспечивает выполнение условия (46) и в то же время по объему вычислений на каждой итерации сравним с законом Ленгмюра. Для вывода исходных соотношений рассмотрим плоский диод с конечным значением напряженности поля E_0 на поверхности катода. Распределение потенциала в зазоре определяется уравнением Пуассона с одномерным распределением

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi\rho(x) = 4\pi J \sqrt{\frac{m}{2e\varphi}}. \quad (49)$$

Умножив это уравнение на $d\varphi/dx$ и проинтегрировав его по x , получим

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = E_0^2 + 16\pi J \sqrt{\frac{m\varphi}{2e}}. \quad (50)$$

Вторичное интегрирование дает искомое выражение для плотности тока эмиссии при условии равенства нулю потенциала катода

$$J = \frac{A}{x^2} \left(\sqrt{\varphi} + \frac{9}{16} \frac{A}{J} E_0^2 \right) \left(\sqrt{\varphi} - \frac{9}{8} \frac{A}{J} E_0^2 \right)^2, \quad A = \frac{1}{9\pi} \sqrt{\frac{2c}{m}}. \quad (51)$$

Для предельного перехода $E_0 \rightarrow 0$ это выражение переходит в известную формулу «закона 3/2». При малых значениях напряженности E_0 дифференциальную форму этого соотношения

$$d(J^2) = -\frac{27}{8} \frac{A^2}{x^2} \varphi d(E_0^2) \quad (52)$$

можно рассматривать в качестве правила изменения плотности тока, необходимого для уменьшения величины электрического поля на катоде от малого значения E_0 до нуля. В этом случае φ и x можно рассматривать как величины, характеризующие эквивалентный диод для реальной формы эмиттера: $\varphi(x)$ — потенциал в точке, отстоящей на некоторое малое расстояние x от поверхности эмиттера по нормали. Отличие от решения для плоского диода проявится в первую очередь в величине коэффициента формулы (52). Поскольку эта формула используется в ходе итерационного процесса, величину коэффициента можно уменьшить, уменьшив тем самым скорость приближения к истинному решению, чтобы в процессе итераций предотвратить значительное проникновение в нефизичную область $E_0 > 0$. Естественно, в этом случае требования к выбору величины зазора эквивалентного диода x будут не столь жесткими, как при использовании «закона 3/2».

Легко видеть, что формула (52) инвариантна относительно смены знака величины E_0 , в то время как физическим условием существования эмиссии является условие $E_0 \leq 0$, а в процессе итераций в окрестности истинного решения знак этой величины может меняться. Кроме того, при $E_0 \approx 0$ вблизи поверхности катода образуется особенность в распределении объемного заряда $\rho \sim x^{-2/3}$, которая при $E_0 > 0$ может нарушать ход итерационного процесса. Для учета этих обстоятельств в формулу (52) необходимо ввести корректирующий множитель B , доопределяющий величину $d(J^2)$ при $E_0 > 0$ и ускоряющий выход расчетного алгоритма из этой области.

В целом предлагаемый алгоритм заключается в проведении итераций по следующей схеме:

1. Решается краевая задача для уравнения Пуассона с объемным зарядом ρ_i , полученным на предыдущей итерации

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho_i. \quad (53)$$

2. Плотность тока k -й трубки тока пересчитывается по формуле

$$J_{k,i+1}^2 = \max \left\{ 0, J_{k,i}^2 - A^2\varphi \left(\frac{E_0}{d} \right)^2 B \right\}, \quad (54)$$

где φ — потенциал точки, отстоящей на расстоянии d по нормали к поверхности эмиттера. Эмпирически подобранный коэффициент B принимаем равным

$$B = \begin{cases} -1, & E_0 \leq 0, \\ 10, & E_0 > 0. \end{cases}$$

Численное интегрирование траектории начинается из точки, отстоящей на расстоянии $s \ll d$ по нормали к эмиттеру. Начальная скорость принимается равной $v_0 = \sqrt{2e\varphi(s/d)^{2/3}}$, что соответствует случаю плоского диода. В общем случае при $s < d$ малая начальная скорость практически не влияет на результат решения задачи. Если имеет место $\varphi < 0$, траектория не эмиттируется, а плотность тока для предотвращения ключевого режима запираания траекторий принимается равной $J_{k,i+1} = (1 - \omega_i)J_{k,i}$, где ω_i — коэффициент релаксации.

3. Рассчитываются траектории заряженных частиц в электрических и магнитных полях. Распределение объемного заряда находится из квазигидродинамической модели уравнения неразрывности

$$\operatorname{div} \tilde{\rho}_{i+1} \vec{v} = 0, \quad (55)$$

а распределение собственного магнитного поля пучка — из закона полного тока.

4. Производится релаксация объемного заряда по схеме

$$\rho_{i+1} = \omega_i \tilde{\rho}_{i+1} + (1 - \omega_i) \rho_i, \quad (56)$$

которая обеспечивает сходимость итерационного процесса при больших уровнях инжекции, когда система уравнений сильно нелинейна. Аналогичным образом релаксируется собственное магнитное поле пучка.

5. Производится проверка критериев окончания итерационного процесса

$$\|J_{i+1} - J_i\| < \varepsilon_1, \quad \|(E_n^{(i)})_s\| < \varepsilon_2 \quad (57)$$

для заданных малых величин ε_1 и ε_2 . При невыполнении указанных условий процесс повторяется, начиная с шага 1. При этом используется полученное на шаге 4 значение ρ_{i+1} .

Неудачный выбор начального приближения ρ_0 может привести к тому, что величина E_0 на первой итерации будет не малой, что замедляет сходимость итераций с использованием формулы (52). В этом случае целесообразно первые несколько итераций проводить с использованием «закона 3/2», а затем переходить на расчет по изложенной здесь методике.

§ 5. УЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ПОЛЕЙ ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Для учета собственных полей пучка необходимо принять какую-либо модель дискретизации уравнения неразрывности. Обзор разнообразных численных моделей приведен в книге Рошаля [18]. Для решения нестационарных задач наиболее употребительны различные варианты метода «частиц в ячейке», а для стационарных задач — метод «трубок тока». Между собой эти варианты отличаются способом «размазки» заряда по ячейкам сетки. Практически все известные реализации ограничиваются приближением, в котором суммарный заряд ячейки считается равномерно распределенным по ее объему. Такие модели дают весьма грубые приближения для тех подобластей, в которых происходит значительное ускорение или торможение пучка, что приводит к росту градиентов плотности объемных зарядов. Нами будут приведены алгоритмы, в которых плотность заряда аппроксимируется билинейной функцией, а соответствующие интегралы по объему ячеек регулярной сетки вычислены аналитически.

Для ламинарных потоков частиц наиболее точными являются гидродинамические модели, в которых поверхность эмиттера разбивается на k частей точками $\{s_i\}$. Из каждой точки s_i выпускается траектория, которой приписана плотность тока J_i . Траектория интегрируется численно, образуя множество продольных интервалов τ_j . Совокупность координат $\{s_i, \tau_j, i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, l\}$ образует криволинейную четырехугольную сетку, в узлах которой определены значения скоростей \vec{v}_{ij} и плотностей токов \vec{J}_{ij} . Величины \vec{J}_{ij} в произвольном сечении пучка пересчитываются из величин, определенных законом эмиссии на поверхности катода таким образом, чтобы сохранялся полный ток пучка

$$\sum_{i=1}^k \left(s_{i+1}^{(\tau_j)} - s_i^{(\tau_j)} \right) J_{ij} = \text{const.} \quad (58)$$

Плотность объемного заряда определяется отношением $\rho_{ij} = |\vec{J}_{ij}/\vec{v}_{ij}|$, а вклад в потенциал самосогласованного поля дается объемным интегралом

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \int_{s_i}^{s_{i+1}} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds'. \quad (59)$$

Естественно, в такой модели при численном интегрировании можно использовать полиномиальные аппроксимации функции ρ произвольного порядка

$$\rho(s, \tau) = \sum_{n=0}^m \alpha_n (s - s_i)^n (\tau - \tau_j)^{m-n}. \quad (60)$$

Для вычисления компонент напряженности электрического поля следует вычислить градиент потенциала

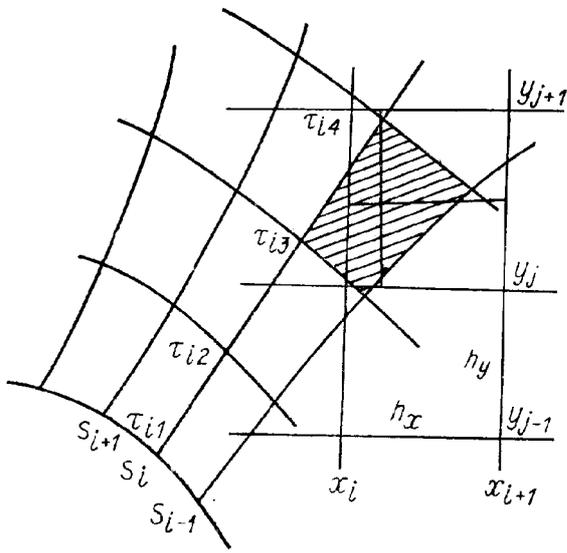
$$\vec{E}(\vec{r}) = - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \int_{s_i}^{s_{i+1}} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds'. \quad (61)$$

Вклад в собственно магнитное поле пучка определяется интегралом

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\mu_0} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \int_{s_i}^{s_{i+1}} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds', \quad (62)$$

где для функции $\vec{J}(\vec{r})$ используются аналогичные формуле (60) полиномиальные аппроксимации.

Рис. 3. К модели аппроксимации собственных полей пучка.



кого торможения с образованием электронного зеркала и ряд других процессов приводят к тому, что траектории частиц начинают пересекаться. В этом случае единственным выходом является использование квазигидродинамических моделей, в которых объемный заряд и компоненты собственного магнитного поля, вычисляемые в процессе численного интегрирования траекторий, пересчитываются в ячейки некоторой регулярной неподвижной сетки, покрывающей область прохождения пучка. По мере прохождения траекторий в ячейках накапливаются суммарные значения зарядов и компонент собственных магнитных полей. Такая модель производит усреднение по объему ячейки зарядов и токов изначально ассоциированных с объемами, приписываемыми интегрируемым траекториям. В этом случае модели траекторий принято называть «трубками тока». Наиболее грубая модель пересчета зарядов состоит в приписывании всего элементарного заряда трубки той ячейке, в которой оказался центр масс этого заряда. Суммарный заряд, накопленный в ячейке, считается равномерно распределенным по ее объему. Более точная модель заключается в том, что заряд элементарного объема «трубки» распределяется между четырьмя узлами ячейки с весами, обратно пропорциональными площадям, на которые разбивает площадь ячейки центр масс заряда (рис. 3). Существует и множество других алгоритмов «размазывания» заряда по ячейкам сетки. После вычисления зарядов ячеек можно использовать полиномиальные аппроксимации (60) для вычисления вклада собственных полей пучка.

Одна из сложностей вычисления объемных интегралов (59), (62) заключается в наличии особенностей подынтегрального выражения. Для преодоления подобных затруднений можно проводить аналитическое интегрирование, которое легко осуществляется для ячеек прямоугольной формы. Такое интегрирование для модели с кусочно-постоянной аппроксимацией плотности зарядов ячеек проведено, например, в работе [20]. Приведем новые результаты, полученные для модели с билинейной аппроксимацией плотности, которые рассматривают случаи плоскопараллельной и осесимметричной геометрии области.

Пусть функция $\rho(x, y)$ представляется билинейной формой

$$\rho(x, y) = \{[\rho_{ij}(x_{i+1} - x) + \rho_{i+1,j}(x - x_i)](y_{j+1} - y) + [\rho_{i,j+1}(x_{i+1} - x) + \rho_{i+1,j+1}(x - x_i)](y - y_j)\} / h_x h_y. \quad (63)$$

Здесь h_x и h_y — размеры прямоугольной ячейки сетки, $\rho_{ij} = \rho(x_i, y_j)$. В плоскопараллельном случае ядро G_0 интегрального представления потенциала имеет вид

$$G_0(x_0, y_0; x, y) = -\ln [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]. \quad (64)$$

Интегрируя функцию $\rho(x, y)G_0(x_0, y_0; x, y)$ по объему ячейки, запишем вклад в потенциал в виде

$$\varphi_{ij}(x_0, y_0) = \psi_{ij}^{(1)}I_{1\varphi} + \psi_{ij}^{(2)}I_{2\varphi} + \psi_{ij}^{(3)}I_{3\varphi} + \psi_{ij}^{(4)}I_{4\varphi}, \quad (65)$$

где

$$\psi_{ij}^{(1)} = \{[\rho_{ij}(x_{i+1} - x_0) + \rho_{i+1,j}(x_0 - x_i)](y_{j+1} - y_0) + [\rho_{i,j+1}(x_{i+1} - x_0) + \rho_{i+1,j+1}(x_0 - x_i)](y_0 - y_j)\}/h_x h_y, \quad (66)$$

$$\psi_{ij}^{(2)} = \{\rho_{ij} - \rho_{i+1,j}\}(y_{j+1} - y_0) + \{\rho_{i,j+1} - \rho_{i+1,j+1}\}(y_0 - y_j)/h_x h_y, \quad (67)$$

$$\psi_{ij}^{(3)} = \{\rho_{ij}(x_{i+1} - x_0) + \rho_{i+1,j}(x_0 - x_i) - \rho_{i+1,j+1}(x_0 - x_i) - \rho_{i,j+1}(x_{i+1} - x_0)\}/h_x h_y, \quad (68)$$

$$\psi_{ij}^{(4)} = (\rho_{ij} - \rho_{i+1,j} - \rho_{i,j+1} + \rho_{i+1,j+1})/h_x h_y, \quad (69)$$

$$I_{k\varphi} = \left\{ [J_{k\varphi}(x, y)]_{x_0-x_i}^{x_0-x_{i+1}} \right\}_{y_0-y_j}^{y_0-y_{j+1}}, \quad (70)$$

а неопределенные интегралы даются выражениями

$$J_{1\varphi} = xy \ln R^2 - 3xy + x^2 \operatorname{arctg} y/x + y^2 \operatorname{arctg} x/y, \quad R^2 = x^2 + y^2, \quad (71)$$

$$J_{2\varphi} = (y^3 + 3x^2y) \ln R^2 - \frac{7}{6} x^2y + \frac{2}{3} x^3 \operatorname{arctg} y/x, \quad (72)$$

$$J_{3\varphi} = (x^3 + 3xy^2) \ln R^2 - \frac{7}{6} xy^2 + \frac{2}{3} y^3 \operatorname{arctg} x/y, \quad (73)$$

$$J_{4\varphi} = \frac{R^2}{8} \ln R^2 - \frac{3}{16} x^2y^2. \quad (74)$$

Аналогичные представления справедливы для компонент электрического поля

$$E_{r,ij} = \psi_{ij}^{(1)}I_{1r} + \psi_{ij}^{(2)}I_{2r} + \psi_{ij}^{(3)}I_{3r} + \psi_{ij}^{(4)}I_{4r}, \quad (75)$$

$$E_{z,ij} = \psi_{ij}^{(1)}I_{1z} + \psi_{ij}^{(2)}I_{2z} + \psi_{ij}^{(3)}I_{3z} + \psi_{ij}^{(4)}I_{4z}. \quad (76)$$

Здесь

$$J_{1r} = \frac{y}{2} \ln R^2 + x \operatorname{arctg} y/x, \quad (77)$$

$$J_{2r} = \frac{1}{2} (x^2 \operatorname{arctg} y/x - y^2 \operatorname{arctg} x/y + xy), \quad (78)$$

$$J_{3r} = R^2/4 \ln R^2, \quad (79)$$

$$J_{4r} = \frac{x^3}{6} \ln R^2 + \frac{1}{3} (xy^2 - y^3 \operatorname{arctg} x/y), \quad (80)$$

$$J_{1z} = \frac{x}{2} \ln R^2 + y \operatorname{arctg} x/y, \quad (81)$$

$$J_{2z} = \frac{1}{2} (y^2 \operatorname{arctg} x/y - x^2 \operatorname{arctg} y/x + xy), \quad (82)$$

$$J_{3z} = \frac{R^2}{4} \ln R^2, \quad (83)$$

$$J_{4z} = \frac{1}{6} y^3 \ln R^2 + \frac{1}{3} (yx^2 - x^3 \operatorname{arctg} y/x). \quad (84)$$

В осесимметричном случае ядро интегрального представления имеет вид

$$G(r_0, z_0; r, z) = \frac{4rK(t)}{\sqrt{(r+r_0)^2 + (z-z_0)^2}}, \quad (85)$$

где $K(t)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

$$t^2 = \frac{4rr_0}{(r+r_0)^2 + (z-z_0)^2}. \quad (86)$$

Выделение особенности ядра приводит к представлению

$$\varphi(r_0, z_0) = \int_s \rho(r, z) [G(r_0, z_0; r, z) - G_0] ds + \int_s \rho(r, z) G_0 ds, \quad (87)$$

в котором первый интеграл не имеет особенности и вычисляется с помощью кубатурных формул, а второй берется аналитически, как показано выше. На оси симметрии имеем

$$G(0, z_0; r, z) = \frac{2\pi r}{\sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}}. \quad (88)$$

Вклад в потенциал от ядра этого вида вычисляется по формуле (65), где

$$J_{1\varphi} = \int 2\pi \frac{r dr dz}{R} = \pi r^2 \ln |z + R| + \pi z R, \quad (89)$$

$$R^2 = r^2 + (z - z_0)^2,$$

$$J_{3\varphi} = \int 2\pi \frac{rz dr dz}{R} = \frac{2\pi}{3} R^3, \quad (90)$$

$$J_{4\varphi} = 2\pi \int \frac{r^2 z dr dz}{R} = \frac{\pi}{2} r R^3 - \frac{\pi}{4} r z^2 R - \frac{\pi}{4} z^4 \ln(r + R), \quad (91)$$

а интеграл $J_{2\varphi}$ допускает однократное аналитическое интегрирование

$$J_{2\varphi} = 2\pi \int \frac{r^2 dr dz}{R} = 2\pi \int r^2 \ln |z + R| dz. \quad (92)$$

Компоненты поля E_r на оси равны нулю, а для E_z получаем выражения

$$J_{1z} = \int 2\pi \frac{rz dr dz}{R^3} = -\frac{2\pi}{R}, \quad (93)$$

$$J_{2z} = \int 2\pi \frac{r^2 z dr dz}{R^3} = -2\pi \left(\frac{R^3}{3} - z^2 R \right), \quad (94)$$

$$J_{3z} = \int 2\pi \frac{r z^2 dr dz}{R^3} = -2\pi \left(\frac{R^3}{3} - r^2 R \right), \quad (95)$$

$$J_{4z} = \int 2\pi \frac{r^2 z^2 dr dz}{R^3} = \pi z [rR - z^2 \ln(r + R)] + 2\pi \int r^2 \ln(z + R) dr. \quad (96)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948.— 740 с.
2. Вандакуров Ю. В. О некоторых антисимметричных магнитных полях с двойной фокусировкой // ЖТФ.— 1955.— Т. 25, вып. 14.— С. 2545—2554.
3. Вандакуров Ю. В. Уравнения электронной оптики для широких пучков с учетом хроматических aberrаций и их применение к исследованию движения частиц в аксиально-симметричных полях // Журн. техн. физики.— 1955.— Т. 25, вып. 8.— С. 1412—1425.
4. Вандакуров Ю. В. Электронно-оптические системы, поля которых не зависят от одной координаты // ЖТФ.— 1956.— Т. 26, вып. 11.— С. 2578—2594.
5. Вандакуров Ю. В. К теории aberrаций электронно-оптических фокусирующих систем с криволинейной осью // ЖТФ.— 1957.— Т. 27, вып. 8.— С. 1850—1862.
6. Страшкевич А. М., Пилат И. М. Aberrации корпускулярных пучков произвольной формы в произвольном электростатическом поле // Изв. АН СССР. Сер. физ.— 1951.— Т. 15, № 4.— С. 448—466.
7. Страшкевич А. М., Глузман Н. Г. Aberrации релятивистских электронных пучков // ЖТФ.— 1954.— Т. 24, вып. 12.— С. 2271—2284.
8. Sturrock P. A. The imaging properties of electron beams in arbitrary static electromagnetic fields // Phil. Trans. Roy. Soc.— 1952.— Vol. 245A.— P. 155—187.
9. Цуккерман И. И. К теории электронно-оптических систем с произвольно искривленной осью // ЖТФ.— 1954.— Т. 24, вып. 2.— С. 258—273.

10. Цуккерман И. И. Анаморфотная электронная оптика // ЖТФ.—1963.— Т. 33, вып. 5.— С. 505—511.
11. Фрейнкман Б. Г. Метод главного луча в траекторном анализе электронно-оптических систем // ЖТФ.—1987.— Т. 57, вып. 3.— С. 574—577.
12. Монастырский М. А., Щелев М. Я. Теория временных aberrаций катодных линз.— М., 1980.— 30 с.— (Препринт/АН СССР. Физический ин-т; № 128).
13. Иванов В. Я. Методы автоматизированного проектирования приборов электроники. Ч. I: Расчеты физических полей.— Новосибирск: Изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1986.— 193 с.
14. Иванов В. Я. Методы автоматизированного проектирования приборов электроники. Ч. II: Методы математического моделирования задач электронной оптики.— Новосибирск: Изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1986.— 184 с.
15. Мокин Ю. И. Алгоритм определения плотности тока эмиссии в задаче о фокусировке пучка // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1980.— Т. 20, № 3.— С. 671—681.
16. Головин Г. Т. О точности и эффективности различных методов решения стационарных самосогласованных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1985.— Т. 25, № 8.— С. 1220—1234.
17. Головин Г. Т. Комбинированный метод решения двумерных стационарных самосогласованных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1987.— Т. 27, № 5.— С. 700—710.
18. Рошаль А. С. Моделирование заряженных пучков.— М.: Атомиздат, 1979.— 224 с.
19. Астрелин В. Т., Иванов В. Я. Пакет программ для расчета характеристик интенсивных пучков релятивистских заряженных частиц // Автометрия.— 1980.— № 3.— С. 92—99.
20. Тиунов М. А., Фомель Б. М., Яковлев В. П. SAM-интерактивная программа для расчета электронных пушек на мини-ЭВМ.— Новосибирск, 1987.— 63 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т ядерн. физики; № 35).

В. Н. БРЕЖНЕВ, В. Я. ИВАНОВ

ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ВВЕДЕНИЕ

Процедуры расчета и проектирования приборов различного назначения принято подразделять на задачи анализа, оптимизации и синтеза. Примером наиболее простой задачи проектирования электронно-оптических систем (ЭОС) является задача анализа, в которой требуется определить распределение электромагнитных полей и форму траекторий заряженных частиц при заданной геометрии системы, фиксированных потенциалах электродов, токах возбуждения магнитных линз и известных характеристиках диэлектрических и магнитных материалов. Более сложными выглядят постановки задач оптимизации параметров ЭОС, в которых требуется обеспечить оптимальные значения критериев качества оптической системы путем варьирования геометрических параметров, потенциалов электродов и токов возбуждения. Однако в этих задачах структурная схема прибора навязана заранее, и потому здесь трудно ожидать появления принципиально новых конструкторских решений. Кроме того, чаще всего при общих предположениях относительно свойств функционалов задачи остается открытым вопрос о выборе начального приближения, обеспечивающего существование и единственность решения поставленной задачи, который определяет успех решения в случае нелинейных функционалов цели и ограничений задачи.

Наиболее полный ответ на возникающие при проектировании прибора вопросы дает решение задачи синтеза, в которой структура оптической системы не является априорно определенной, а задаются лишь функционалы, характеризующие оптические параметры прибора. До появления ЭВМ и развитых численных методов задачи проектирования ЭОС чаще всего формулировались как задачи синтеза. Основные результаты в этом