10. **Цуккерман И. И.** Анаморфотная электронная оптика // ЖТФ.— 1963.— Т. 33, вып. 5.— С. 505—511.
11. **Фрейнкман Б. Г.** Метод главного луча в траекторном анализе электронно-оптических систем // ЖТФ.— 1987.— Т. 57, вып. 3.— С. 574—577.
12. **Монастырский М. А., Щелев М. Я.** Теория временных аберраций катодных линз.— М., 1980.— 30 с.— (Препринт/АН СССР. Физический ин-т; № 128).
13. **Иванов В. Я.** Методы автоматизированного проектирования приборов электроники. Ч. I: Расчеты физических полей.— Новосибирск: Изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1986.— 193 с.
14. **Иванов В. Я.** Методы автоматизированного проектирования приборов электроники. Ч. II: Методы математического моделирования задач электронной оптики.— Новосибирск: Изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1986.— 184 с.
15. **Мокин Ю. И.** Алгоритм определения плотности тока эмиссии в задаче о фокусировке пучка // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1980.— Т. 20, № 3.— С. 671—681.
16. **Головин Г. Т.** О точности и эффективности различных методов решения стационарных самосогласованных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1985.— Т. 25, № 8.— С. 1220—1234.
17. **Головин Г. Т.** Комбинированный метод решения двумерных стационарных самосогласованных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1987.— Т. 27, № 5.— С. 700—710.
18. **Рошаль А. С.** Моделирование заряженных пучков.— М.: Атомиздат, 1979.— 224 с.
19. **Астрелин В. Т., Иванов В. Я.** Пакет программ для расчета характеристик интенсивных пучков релятивистских заряженных частиц // Автометрия.— 1980.— № 3.— С. 92—99.
20. **Тиунов М. А., Фомель Б. М., Яковлев В. П.** SAM-интерактивная программа для расчета электронных пушек на мини-ЭВМ.— Новосибирск, 1987.— 63 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т ядерн. физики; № 35).

В. Н. БРЕЖНЕВ, В. Я. ИВАНОВ

ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ВВЕДЕНИЕ

Процедуры расчета и проектирования приборов различного назначения принято подразделять на задачи анализа, оптимизации и синтеза. Примером наиболее простой задачи проектирования электронно-оптических систем (ЭОС) является задача анализа, в которой требуется определить распределение электромагнитных полей и форму траекторий заряженных частиц при заданной геометрии системы, фиксированных потенциалах электродов, токах возбуждения магнитных линз и известных характеристиках диэлектрических и магнитных материалов. Более сложными выглядят постановки задач оптимизации параметров ЭОС, в которых требуется обеспечить оптимальные значения критериев качества оптической системы путем варьирования геометрических параметров, потенциалов электродов и токов возбуждения. Однако в этих задачах структурная схема прибора навязана заранее, и потому здесь трудно ожидать появления принципиально новых конструкторских решений. Кроме того, чаще всего при общих предположениях относительно свойств функционалов задачи остается открытым вопрос о выборе начального приближения, обеспечивающего существование и единственность решения поставленной задачи, который определяет успех решения в случае нелинейных функционалов цели и ограничений задачи.

Наиболее полный ответ на возникающие при проектировании прибора вопросы дает решение задачи синтеза, в которой структура оптической системы не является априорно определенной, а задаются лишь функционалы, характеризующие оптические параметры прибора. До появления ЭВМ и развитых численных методов задачи проектирования ЭОС чаще всего формулировались как задачи синтеза. Основные результаты в этом направлении были заложены в работах Пирса [1], Мельцера [2], Ломакса [3], Кирштейна [4, 5], Харкера [6], Третнера [7], Зилаги [8—10], а также советских исследователей — Овчарова [11—16], Данилова и Сырового [17—22], Шантурина [23] и др.

Общепринятая формулировка задачи синтеза ЭОС заключается в решении внутренней задачи, в которой требуется определить характеристики движения пучка заряженных частиц с заданным фазовым объемом, а также распределение полей внутри и на границе пучка, и внешней задачи распространения полей вне пучка с целью определения конфигурации электродов, магнитопроводов и соленоидов, формирующих пучок с заданными свойствами. При решении внутренней задачи разработчик задает систему функционалов Φ_i, $i=1, \ldots, M$, зависящих от распределений электрических и магнитных полей в области прохождения пучка. В качестве таких критериев могут выступать форма траекторий и энергетические характеристики пучка или функционалы качества, создаваемого пучком изображения: увеличение, положение кроссовера и плоскости Гаусса, величины аберраций, разрешающая способность прибора. Цель данного этапа состоит в определении конфигурации полей на оси или границе пучка, отвечающих заданным значениям функционалов Φ_i. При дискретизации задачи на некоторой поверхности s_0 выбираются N точек и система функций ψ_j, $j=1, \ldots, N$, восполняющих конечномерное представление поля. Чаще всего в качестве базисных функций ψ_j используются полиномиальные представления. Теперь задача сведена к параметрической оптимизации функционалов Φ_i путем варьирования коэффициентов полиномов. Она решается известными методами оптимального управления [24—25].

Внешняя задача синтеза распадается на несколько этапов. На первом из них требуется экстраполировать поле с границы пучка во внешнее пространство, затем построить эквипотенциали этого поля и выбрать достаточно технологичные в исполнении конфигурации электродов, соленоидов и магнитопроводов, приближающие с заданной точностью картину синтезированного поля. Погрешности решения всех указанных этапов: замена синтезированных поверхностей более простыми формами, появление не предусмотренных в исходной постановке задачи апертурных отверстий, «обрезание» электродов с целью ограничения габаритов прибора — все это приводит к более или менее значительному отклонению электронно-оптических функционалов качества системы, вычисленных путем прямого расчета синтезированной системы, от априорно заданных в постановке значений функционалов. По этой причине на завершающем этапе проектирования требуется решение задачи оптимизации синтезированной системы. Важным отличием данного этапа от решения обычной задачи оптимизации является то, что начальное приближение, которым в данном случае служит решение задачи синтеза, гарантирует существование решения в окрестности начального приближения и быструю сходимость оптимизационной задачи. Одновременно с решением последнего этапа извлекается информация о допусках на изготовление отдельных элементов конструкции прибора.

Наиболее сложным и трудоемким при решении задачи синтеза ЭОС является этап экстраполяции гармонических полей с некоторой заданной границы в пространство. Если поверхностью является ось цилиндрической системы координат, то решение дается рядом Шерцера для скалярного потенциала

$$\varphi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} \Phi^{(2n)}(z).$$

В более общих случаях можно выписать соответствующие мультипольные разложения. Наиболее узким местом практического использования ряда Шерцера является вычисление высших производных осевого поля $\Phi^{(k)}(z)$ для данных Коши, известных с определенными погрешностями измерений. Как показано в работе [26], погрешность восстановления поля до 1 % локализуется на расстоянии r/L 0,15, где L — длина отрезка с начальными данными. В ряде работ [27, 28] решение указанной задачи осуществляется с помощью разностных аппроксимаций задачи Коши для уравнения Лапласа с использованием регуляризирующих алгоритмов сглаживания разностного решения или сведением к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений для метода прямых. При этом удается увеличить интервал устойчивости до величины $r/L < 0{,}4$ при достаточно гладких начальных данных. Пример сведения задачи Коши к интегральному уравнению Фредгольма можно найти в работе [29].

Значительные усилия большинства исследователей задачи синтеза были направлены на преодоление чисто математических трудностей, связанных с необходимостью решения условно-корректных задач, и построение различных вариантов алгоритмов регуляризации. С нашей точки зрения, многие работы подобного рода отличает значительная доля академичности постановки задачи, слабо отражающая конструктивные ограничения, обязательно возникающие на практике. Поясним нашу мысль на примерах. Классическим образцом решения задачи синтеза служит модель пушки Пирса. Так, для пушки, формирующей цилиндрический пучок, решение внутренней задачи определяется «законом трех-вторых»

$$j(z) = \frac{4}{3}\varepsilon_0 \sqrt{\frac{2|Q|}{m}}\,\frac{\Phi(z)^{3/2}}{z^2},$$

а для внешней задачи распределение поля имеет вид

$$\varphi(r, z) = C(r^2 + z^2)^{2/3}\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{r}{z}\right).$$

Здесь φ — электростатический потенциал, j — плотность тока эмиссии, Q — заряд частицы, m — ее масса, ε_0 — диэлектрическая постоянная вакуума. Видно, что буквальная реализация данной модели представляет пару бесконечно протяженных электродов определенной формы. На практике такую систему можно воспроизвести лишь приближенно, поскольку на некотором расстоянии от оси электроды следует ограничить, продумав систему их крепления, и деформировать, чтобы скомпенсировать возмущения поля, обусловленные ограничением электродов. Кроме того, в анодном электроде необходимо предусмотреть апертурное отверстие для прохождения пучка. При малых отношениях длины пирсовского диода к его радиусу анодное отверстие оказывает действие сильной рассеивающей линзы, влияние которой можно ослабить введением промежуточных корректирующих электродов или деформацией анодной поверхности. Примеры реальных конструкций пушек подобного типа приведены в книге Молоковского и Сушкова [30]. Очевидно, что конструкции идеального диода Пирса и реальных квазипирсовских пушек настолько сильно отличаются друг от друга (рис. 1), что спроектировать реальную конструкцию с помощью расчета можно лишь путем решения дополнительной задачи оптимизации, учитывающей конструктивные ограничения задачи, так как от решения Пирса приближенно сохранилась лишь приосевая область. Введение промежуточных электродов вносит ряд принципиально новых моментов в постановку задачи синтеза, поскольку их получение путем экстраполяции гладких распределений поля с оси оказывается просто невозможным. Основываясь на принципе максимума для гармонических функций, легко показать, что решение краевой задачи или задачи Коши для уравнения Лапласа не может содержать не соприкасающиеся с границей области замкнутых или просто ограниченных эквипотенциальных поверхностей, которые будем называть электродоподобными. Очевидно, существование такой поверхности предполагает нахождение

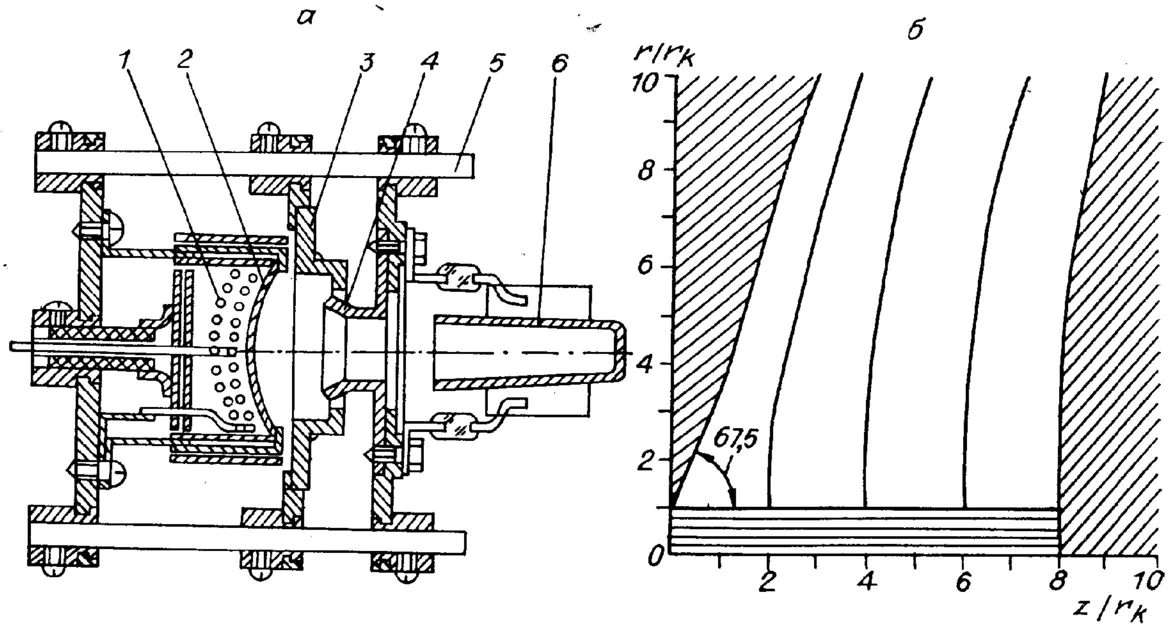


Рис. 1. Диод Пирса.

а — экспериментальная модель пирсовской пушки: *1* — подогреватель, *2* — катод, *3* — фокусирующий электрод, *4* — анод, *5* — керамический стержень, *6* — коллектор; *б* — аналитическое решение для цилиндрического пучка.

внутри нее или в пределе на поверхности источников поля. Такие поверхности с источниками, необходимые для получения электродоподобных эквипотенциалей, будем называть скелетными поверхностями.

Проведенные нами рассуждения имеют своей целью показать, что задачи синтеза ЭОС, возникающие в практике проектирования приборов, заключаются не столько в преодолении чисто математических трудностей решения некорректных задач экстраполяции гармонических полей в пространство, сколько в формировании новой, принципиально иной постановки задач синтеза, полнее отвечающей потребностям конструирования реальных приборов. Основные идеи такого подхода, называемого конструктивным, опубликованы авторами в работе [31]. В настоящей публикации приведено детальное изложение численного алгоритма решения задач синтеза, численные модели электронных линз с минимальными аберрациями, формирующих цилиндрические пучки. В работе уделено внимание и такой постановке задачи, в которой отдельные узлы или подсистемы прибора рассматриваются как априорно заданные, и проблема заключается в экстраполяции поля вне таких подсистем с сохранением свойств гладкости на границах, т. е. в задаче аналитического продолжения через границы сложной формы.

В заключение приведены результаты расчетов некоторых практических систем с помощью разработанного авторами пакета прикладных программ «СИНТЕЗ-2», который, как и реализованный ранее пакет «POISSON-2», предназначенный для решения задач анализа двумерных задач электронной оптики [32], является составной частью математического и программного обеспечения системы автоматизированного проектирования «ТОПАЗ», описанной в монографиях [33, 34]. Рассмотренные здесь идеи конструктивного подхода к решению задач синтеза двумерных систем без каких-либо принципиальных ограничений применимы и для проектирования приборов в трехмерной постановке, например, на основе пакета прикладных программ «POISSON-3» [35].

§ 1. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ЛИНЗ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПУЧКОВ

При формировании цилиндрических пучков основное требование к полю заключается в том, чтобы компонента E_r была пропорциональна величине r. Наиболее простой моделью такого поля служит линза Батлера длиной L, осевое распределение поля которой представляется кубической параболой

$$\Phi(z) = 3\left(\frac{z}{L}\right)^2\left(1 - \frac{2}{3}\frac{z}{L}\right), \quad 0 \leqslant z \leqslant L. \tag{1}$$

Если к этой линзе добавить симметричное продолжение

$$\Phi^+(z) = 1 - 3\left(\frac{z}{L} - 1\right)^2\left[1 - \frac{2}{3}\left(\frac{z}{L} - 1\right)\right], \quad L \leqslant z \leqslant 2L, \tag{2}$$

в результате получим систему из двух линз — рассеивающей и собирающей, причем в точке склейки имеется непрерывность как самой функции, так и ее производных до второго порядка. Пространственное распределение поля такой системы имеет вид

$$\varphi^+_{(r,z)} = \begin{cases} 3\left(\frac{z}{L}\right)^2\left(1 - \frac{2}{3}\frac{z}{L}\right) - 3r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{L}\right), & z \leqslant L, \\ 1 - 3\left(\frac{z}{L} - 1\right)^2\left[1 - \frac{2}{3}\left(\frac{z}{L} - 1\right)\right] - 3r^2\left(\frac{3}{2} - \frac{z}{L}\right), & z > L. \end{cases} \tag{3}$$

Очевидно, что, несмотря на непрерывность осевого распределения и первой производной, при решении задачи Коши в стандартной постановке никакими ухищрениями не удастся получить форму электрода, разделяющего обе линзы, т. е. получить точку ветвления эквипотенциальной линии в центре отрезка с начальными данными и эквипотенциальную область внутри данной линии. Единственный выход из этого положения состоит в том, чтобы поместить внутри данной области источники поля в виде зарядов простого слоя с плотностью σ, которую предстоит определить, удовлетворяя данным Коши на оси. Примечательным в этой задаче является то обстоятельство, что области обеих линз фактически изолированы друг от друга и возмущение поля в одной из них не может сказываться на поле в другой. Однако гладкое осевое распределение поля «не знает» об этом, так как из его вида трудно сделать заключение об изолированности линз. Разумеется, реальная система содержит апертурное отверстие, соединяющее пару линз, для обеспечения прохождения пучка заряженных частиц (рис. 2). Форма вспомогательной поверхности с источниками σ не фиксирована, и ее вариации могут порождать различные семейства эквипотенциалей, отвечающие одному и тому же распределению поля на оси (рис. 3).

Следующий пример включает вариант антисимметричного расположения пары линз Батлера, осевое распределение которого показано на рис. 2 кривой Φ^-. Поскольку и здесь обе линзы пространственно не связаны друг с другом, такую же напряженность поля с непрерывной производной $\Phi'(z)$ создает система, в которой на электродах правой линзы заданы потенциалы 0 и 1, т. е. в центральной точке на оси существует

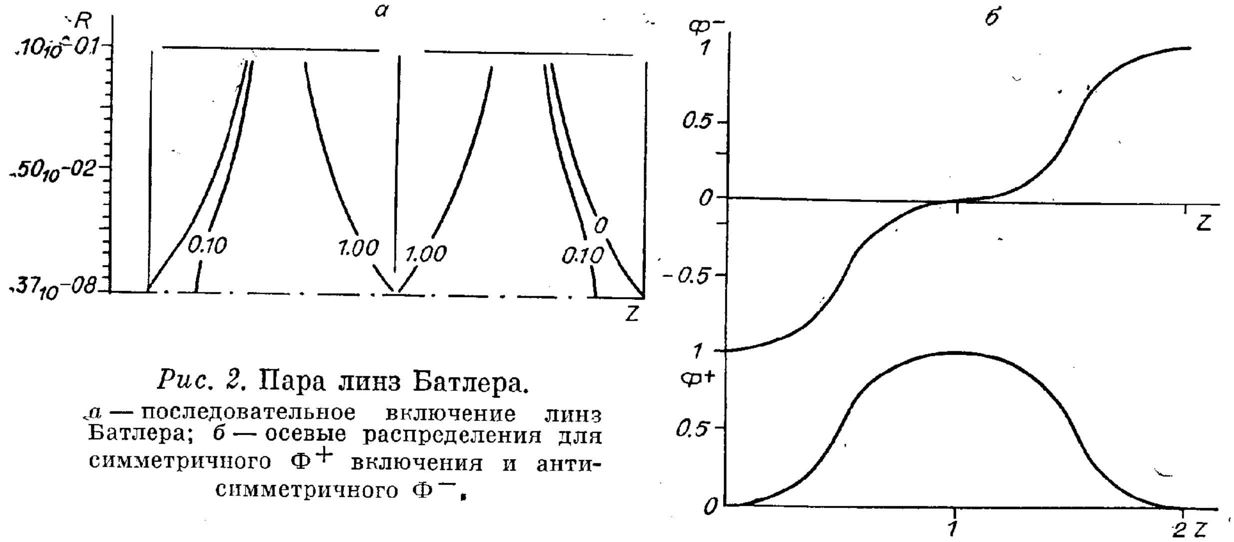


Рис. 2. Пара линз Батлера.
а — последовательное включение линз Батлера; *б* — осевые распределения для симметричного Φ^+ включения и антисимметричного Φ^-.

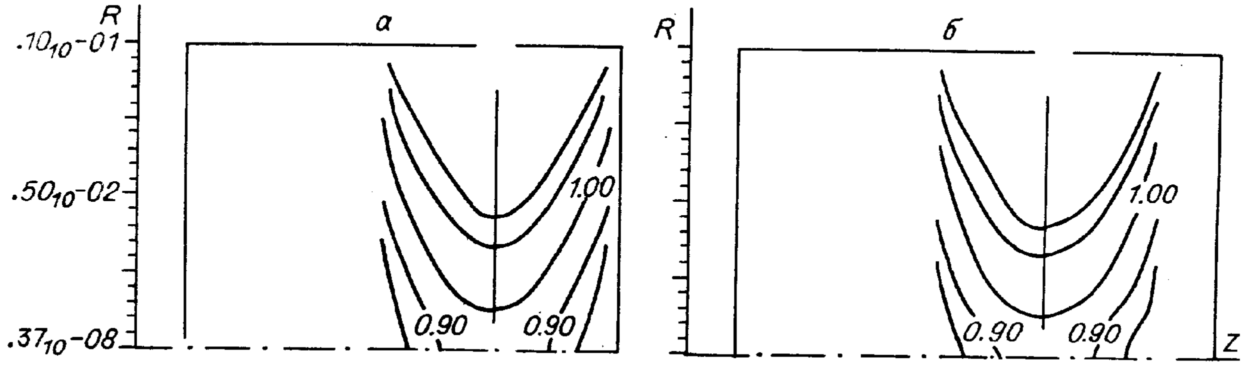


Рис. 3. Эквипотенциали симметричного включения линз с различными значениями весовых множителей ws.
a — $ws = 0.09$; $б$ — $ws = 0.02$.

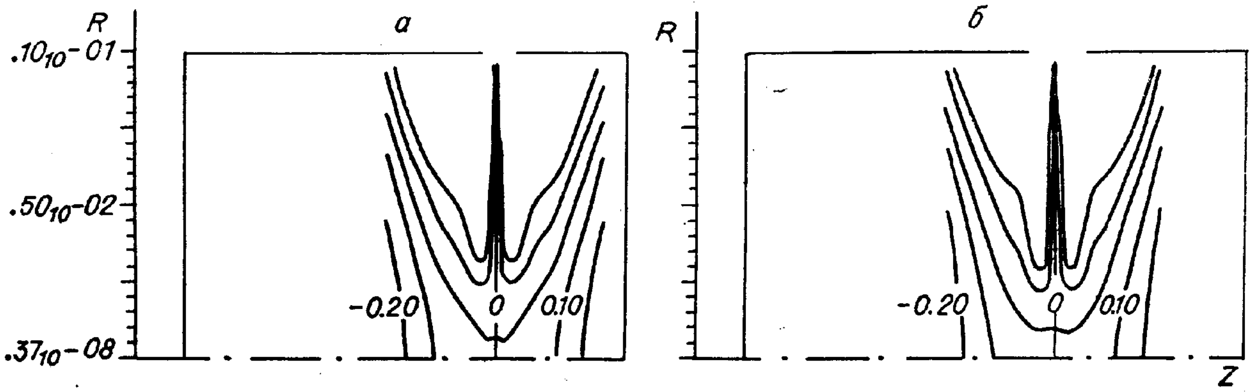


Рис. 4. **Картина поля антисимметричного включения линз с различными значениями весовых множителей wA.**
a — $wA = 0.09$; $б$ — $wA = 0.2$.

разрыв осевого распределения $\Phi''(z)$. Поле такой системы определяется формулами

$$\varphi^-(r,z) = \begin{cases} 3\left(\frac{z}{L}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\frac{z}{L}\right) - 3r^2\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{L}\right) \quad 1, & z \leqslant L, \\ 3\left(\frac{z}{L}-1\right)^2\left[1-\frac{2}{3}\left(\frac{z}{L}-1\right)\right] - 3r^2\left(\frac{3}{2}-\frac{z}{L}\right), & z > L. \end{cases} \tag{4}$$

Такая постановка задачи в классическом варианте решения задачи Коши ранее вообще не рассматривалась. В то же время удовлетворить условиям поставленной задачи нетрудно введением в область разрыва двойного слоя диполей плотностью ν, который также будет определен из условий удовлетворения данным Коши. Примеры синтеза таких систем показаны на рис. 4.

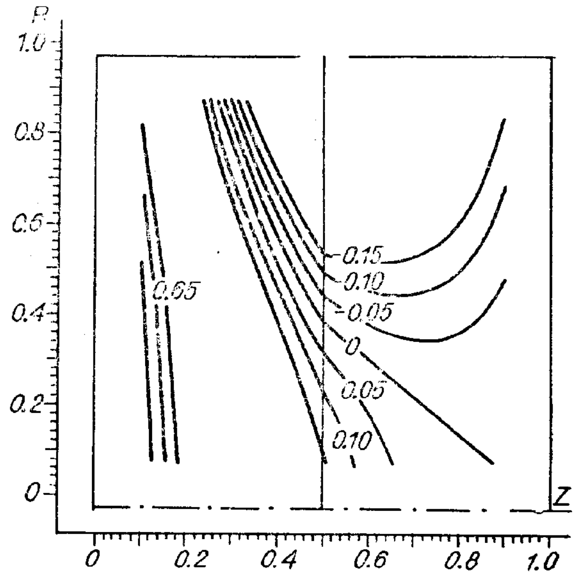
Рассмотренные простейшие системы из линз Батлера обладают рядом недостатков, основной из которых состоит в том, что на границах такой пары линз с внешним эквипотенциальным пространством или однородным полем существуют разрывы вторых производных осевого распределения потенциала, что приводит к возникновению геометрических аберраций. Далее рассмотрим более сложные системы, у которых подобные разрывы отсутствуют. Первой из таких систем будет согласующая линза, назначение ее состоит в согласовании гладкого перехода из области однородного поля в эквипотенциальное пространство. Представим осевое распределение поля такой линзы кусочками кубических парабол

$$\Phi(z) = \begin{cases} 1-\alpha z+\beta z^3, & 0 \leqslant z \leqslant \lambda, \\ \gamma-(z-1)^3, & \lambda \leqslant z \leqslant 1. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь величина λ характеризует положение точки сшивки. Пространственное распределение поля дается формулами

$$\varphi(r,z) = \begin{cases} 1-\alpha z+\beta z^3-\frac{3}{2}r^2\beta z, & 0 \leqslant z \leqslant \lambda, \\ \gamma(z-1)^3-\frac{3}{2}r^2\gamma(z-1), & \lambda \leqslant z \leqslant 1. \end{cases} \tag{6}$$

Рис. 5. Эквипотенциали идеальной согласующей линзы.



Выполнение условий непрерывности дают следующие соотношения на коэффициенты поля:

$$\alpha = \frac{3}{1+\lambda},\quad \beta = \frac{1}{\lambda(1+\lambda)},\quad \gamma = \frac{1}{\lambda^2-1}. \tag{7}$$

Легко убедиться, что на границах линзы и в точке $z=\lambda$ существуют пространственные разрывы ускоряющей компоненты напряженности поля $E_z(r, z)$. Если отнести величину этих разрывов к максимуму фокусирующей компоненты поля и вычислить среднее значение данной величины по размеру апертуры величиной a, то дефект поля такой линзы можно представить функционалом

$$I(\lambda) = \frac{1}{a}\sum_i \int_0^a \left(r\,\frac{\delta E_{z_i}}{\max Er}\right)^2 dr = a^4 f(\lambda), \tag{8}$$

где суммирование проводится по всем поверхностям разрывов.

Назовем оптимальной такую линзу, для которой функция $f(\lambda)$ достигает минимума. Подставляя в функционал значения полей, получим

$$I(\lambda) = \frac{1}{a}\int_0^a \frac{r^4}{(3\beta\lambda)^2}\left[\left(\frac{3}{2}\beta\right)^2 + \left(\frac{3}{2}(\beta-\gamma)\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\gamma\right)^2\right] dr =$$

$$= \frac{a^4}{20}\left[\frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda-1}\right)^2 + \frac{1}{(\lambda-1)^2}\right], \tag{9}$$

откуда находим условия экстремума

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{a^4}{20}\left[\frac{1}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda(\lambda-1)}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{(\lambda-1)^2}\right) + \frac{1}{(\lambda-1)^3}\right] = 0. \tag{10}$$

Кубическое уравнение

$$\lambda^3 + (\lambda-1)^3 + \lambda^2 - (\lambda-1)^2 = 0 \tag{11}$$

имеет единственный действительный корень $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, откуда следует, что оптимальная линза характеризуется параметрами

$$\alpha_0 = 2,\quad \beta_0 = \frac{4}{3},\quad \gamma_0 = -\frac{4}{3},\quad I(\lambda_0) = \frac{6}{5}a^4. \tag{12}$$

Пример расчета такой линзы показан на рис. 5, из которого видно, что эквипотенциаль $\varphi = 0$ представляет собой прямую линию $(z-1)^2 = \frac{3}{2}r^2$, отделяющую ограниченные электродоподобные поверхности от эквипотенциалей, пересекающих ось. Следовательно, при оптимальном значении параметра λ_0 существует минимальное значение апертуры $a_0 = \sqrt{2/3}(1-\lambda_0)$, ниже которого электродоподобные поверхности отсутствуют. Такое значение апертуры a_0 назовем критическим. Если реальный радиус пучка r_0 меньше a_0, то уменьшение поперечных размеров линзы потребует уменьшения величины критической апертуры a_0, которое возможно за счет неоптимальности выбора параметра $\lambda > \lambda_0$. С другой стороны, степень нелинейных искажений пучка пропорциональна отноше-

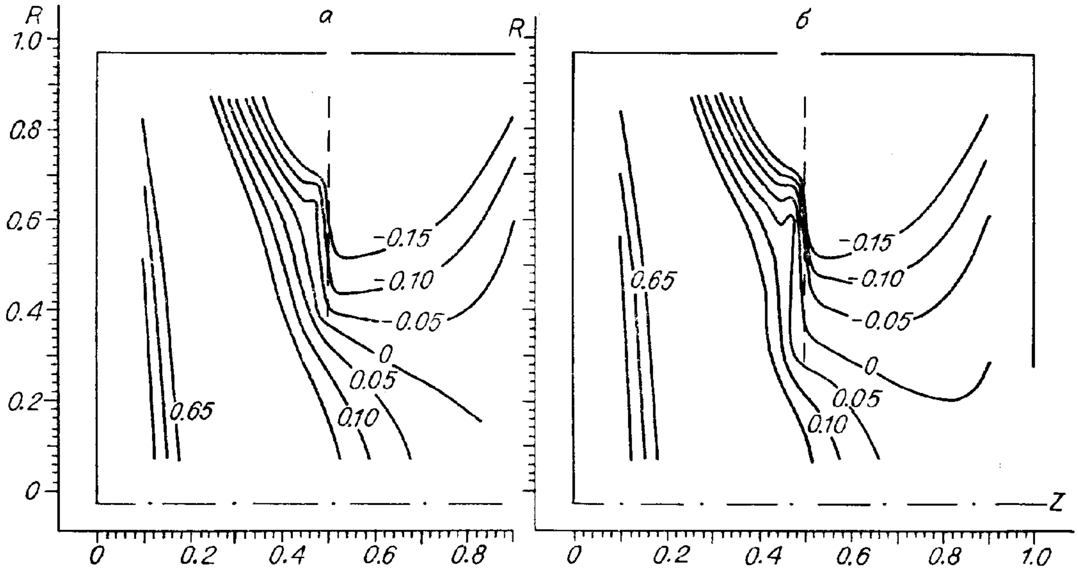


Рис. 6. Согласующая линза.
а — $ws = 0.4$; *б* — $ws = 0.3$.

нию $(r_0/a_0)^4$, которое более чувствительно к изменению апертуры, чем рост функции $f(\lambda)$ при отклонении λ от оптимального значения, поэтому рекомендуется выбирать оптимальное соотношение между геометрической апертурой линзы a_0 и физической апертурой пучка из условия

$$a = \begin{cases} r_0, & r_0 > a_0, \\ a_0, & r_0 \leqslant a_0. \end{cases} \tag{13}$$

Примеры синтеза линз с докритическим и сверхкритическим значением апертуры показаны на рис. 6.

Следующим элементом электронно-оптического тракта будет ускоряющая линза, по обе стороны которой находятся эквипотенциальные области с различными потенциалами. Осевое распределение поля такой линзы дается выражениями

$$2\Phi(z) = \begin{cases} 1 - \alpha z + \beta z^3, & 0 \leqslant z \leqslant \lambda, \\ \gamma(1 - z)^3, & \lambda \leqslant z \leqslant 1, \end{cases} \tag{14}$$
$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z), \quad 0 \leqslant z \leqslant 1.$$

Выполнение условий непрерывности поля и производных приводит к следующим соотношениям на коэффициенты:

$$\alpha = \frac{3}{1+\lambda}, \quad \beta = \frac{1}{\lambda(1+\lambda)}, \quad \gamma = \frac{1}{\lambda^2 - 1}. \tag{15}$$

Функционал дефекта поля определяется формулой

$$I(\lambda) = \frac{a^4}{10\beta^2\lambda^2}\left[(\beta - \gamma)^2 + \gamma^2\right] = \frac{a^4}{10}\left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda(1-\lambda)^2}\right], \tag{16}$$

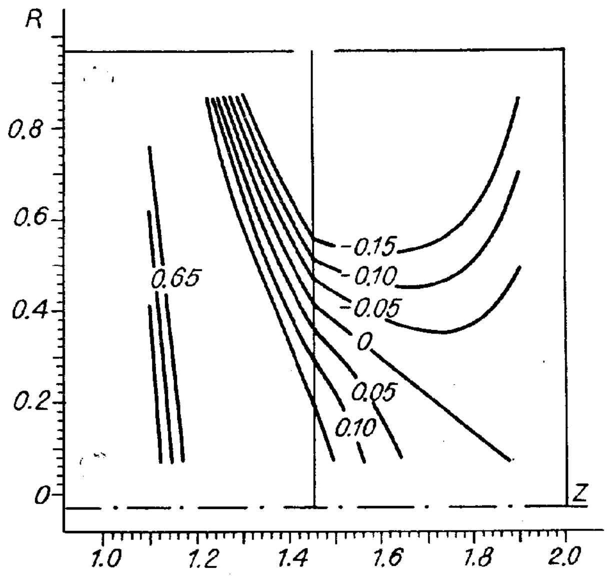
которая приводит к уравнению оптимальности линзы

$$-\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{a^4}{5}\left[\frac{1}{\lambda^3} + \frac{3\lambda^2 - 4\lambda + 1}{\lambda^2(1-\lambda)^4}\right] = 0. \tag{17}$$

Действительный корень этого уравнения имеет вид

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}\left[\sqrt[3]{4 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{59}{3}}} + \sqrt[3]{4 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{59}{3}}}\right] \approx 0{,}4534. \tag{18}$$

Рис. 7. Эквипотенциали ускоряющей линзы с минимальными аберрациями.



Критическое значение апертуры ускоряющей линзы удовлетворяет соотношению

$$\frac{a_0}{L}=\sqrt{\frac{2}{3}}(1-\lambda_0)\approx 0{,}4463. \quad (19)$$

Картина эквипотенциалей такой линзы, рассчитанной на ЭВМ, которая на практике может быть реализована симметрично отраженной парой двухэлектродных систем, показана на рис. 7.

Рассмотрим далее одиночную симметричную линзу, которая задается осевым распределением потенциала

$$\Phi(z)=\begin{cases}1-\alpha z+\beta z^3, & 0\leqslant z\leqslant\lambda,\\ \gamma(z-1)^3, & \lambda\leqslant z\leqslant 1,\end{cases} \quad (20)$$
$$\Phi(-z)=\Phi(z), \quad 0\leqslant z\leqslant 1.$$

Выполнение условий гладкости в точке $z=\lambda$ дает соотношения на коэффициенты

$$\alpha=\frac{3}{\lambda},\ \beta=\frac{\lambda+1}{\lambda^2},\ \gamma=\frac{1}{\lambda-1}. \quad (21)$$

Пространственное распределение поля имеет вид

$$\varphi(r,z)=\begin{cases}1-\alpha z+\beta z^3-\frac{1}{2}r^2(3\beta z-\alpha), & 0\leqslant z\leqslant\lambda,\\ \gamma(z-1)^3-\frac{3}{2}r^2(z-1)\gamma, & \lambda\leqslant z\leqslant 1.\end{cases} \quad (22)$$
$$\varphi(r,-z)=\varphi(r,z), \quad 0\leqslant z\leqslant 1.$$

Функционал дефекта поля приводит к выражению

$$I(\lambda)=\frac{a^4}{5}\left[\left(3\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+2\left(\frac{3}{2}\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\right)^2+2\left(\frac{3}{2}\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2\right]=$$
$$=\frac{a^4}{10}\left[\frac{3}{\lambda^2}(\lambda+1)^2+\frac{2}{(\lambda-1)^2}\right]. \quad (23)$$

Из условия оптимальности

$$-\frac{\partial I}{\partial\lambda}=\frac{a^4}{5}\left[\frac{3}{\lambda^3}(\lambda+1)+\frac{2}{(\lambda-1)^3}\right]=0 \quad (24)$$

находим действительный корень уравнения

$$2\lambda^3+3(\lambda^2-1)(\lambda-1)^2=0, \quad (25)$$

который равен $\lambda_0\approx 0{,}57095$, откуда следует ограничение на величину критической апертуры

$$\frac{a_0}{L}=\sqrt{\frac{2}{3}}(1-\lambda_0)\approx 0{,}3503178;\ I(\lambda_0)\approx a_0^4\cdot 3{,}357632. \quad (26)$$

Расчет эквипотенциалей симметричной одиночной линзы приведен на рис. 8. Один из вариантов синтеза такой линзы с конечной апертурой a и полной длиной $2L$ показан на рис. 9. Здесь отношение радиуса апер-

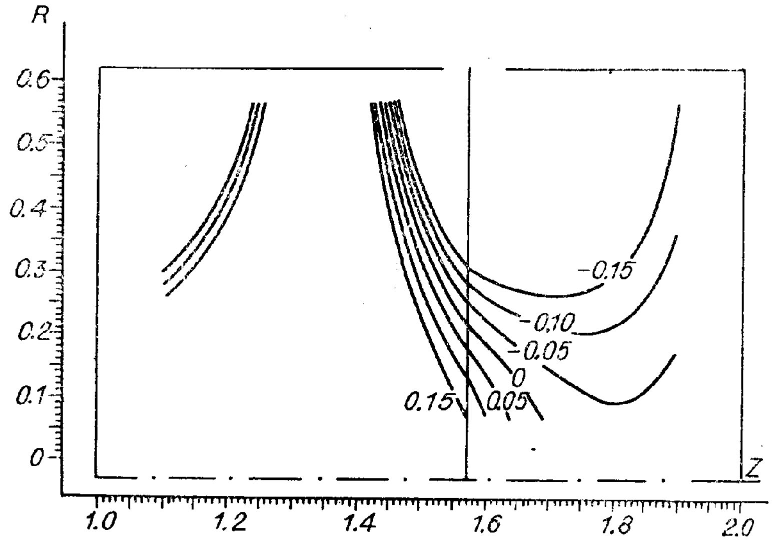


Рис. 8. Картина поля одиночной идеальной линзы.

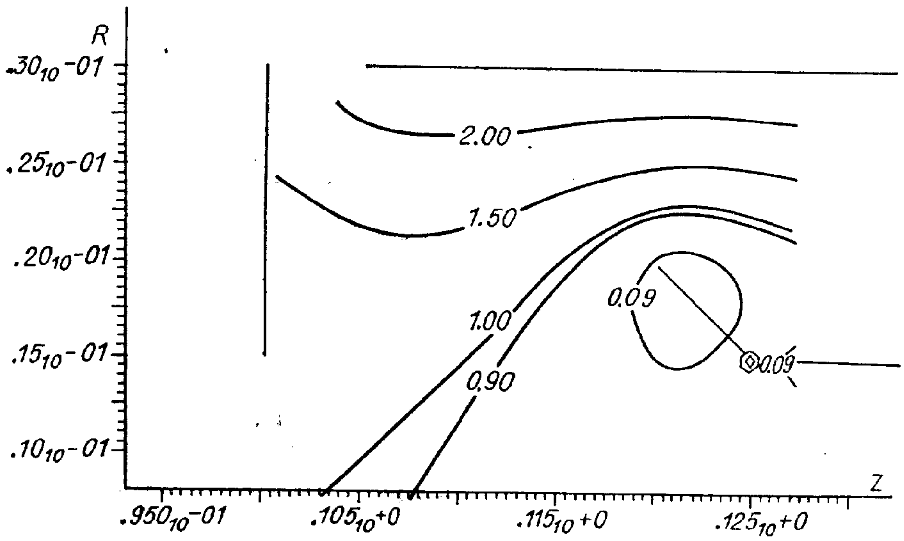


Рис. 9. Вариант синтеза одиночной линзы с конечной апертурой.

туры к длине a/L равно 1,5. Вышеперечисленные типы линз с минимальными аберрациями позволяют комбинировать из них электронно-оптическую систему достаточно произвольной конфигурации, которая формирует цилиндрические пучки с заданными энергетическими свойствами.

§ 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В АЛГОРИТМАХ СИНТЕЗА

Необходимость учета априорных конструктивных ограничений задачи приводит к тому, что решение задачи синтеза следует формулировать в виде смешанной постановки, в которой одна часть априорной информации имеет вид данных Коши и отвечает за воспроизведение качества поля в параксиальной области пучка, а другая — имеет вид краевых условий на поверхностях априорно заданной формы. Это дает возможность выделить основные этапы предлагаемого метода.

1. На основе априорной информации об ЭОС ввести три типа граничных поверхностей:

a) «обычная поверхность» — поверхность, несущая источники поля и смешанные краевые условия, которая служит для описания априорно заданных элементов конструкции — электродов или их фрагментов, границ диэлектриков и т. д.;

b) «скелетная поверхность» — поверхность, несущая распределения плотностей зарядов и диполей, непрерывные участки которых служат «остовами» синтезируемых электродов;

с) «дополнительная поверхность» — поверхность, несущая только данные Коши, которая служит для ввода электронно-оптических критериев качества заданием осевого распределения, распределения на границе пучка или условий гладкости на свободных границах «встраиваемого» фрагмента, через которые осуществляется аналитическое продолжение решения.

2. Найти распределение источников поля на поверхностях *a*, *b*, минимизирующее погрешность выполнения условий на поверхностях *a*, *c*, при дополнительных ограничениях на величину разрывов на поверхностях *b* и с учетом влияния собственных полей пучка заряженных частиц.

3. Построив эквипотенциали по найденному распределению источников поля, вариацией ограничений задачи получить «полосы допусков» — области смещений эквипотенциалей, вызванных этими вариациями. Наконец, вписав достаточно «технологичные» при изготовлении формы электродов в эти «полосы допусков», получить конфигурацию искомых электродов.

В самом общем виде математическая постановка задачи синтеза ЭОС может выглядеть так. Пусть имеется не обязательно односвязная кусочно-гладкая граница s, на которой заданы краевые условия вида

$$\left(\alpha\varphi + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_s = \Psi(s) \tag{27}$$

с фиксированными константами α, β и функцией $\Psi(s)$, на поверхности s_0 определены данные Коши

$$\varphi|_{s_0} = \Phi(z). \tag{28}$$

Если теперь ввести поверхность Γ с источниками поля в виде зарядов плотностью σ и диполей плотностью ν, то относительно неизвестных поверхностных плотностей источников можно записать систему интегральных уравнений

$$\Psi(\tau) = \int_\Gamma \sigma(t)\left[\alpha G_\sigma(\tau, t) + \beta\frac{\partial}{\partial n} G_\sigma(\tau, t)\right] d\Gamma + 2\pi\beta\sigma(\tau) + \\ + \int_\Gamma \nu(t)\left(\alpha + \beta\frac{\partial}{\partial n}\right) G_\nu(\tau, t)\, d\Gamma + 2\pi\alpha\nu(\tau),\ t \in \Gamma,\ \tau \in s, \tag{29}$$

$$\Phi(\tau) = \int_\Gamma [\sigma(t) G_\sigma(\tau, t) + \nu(t) G_\nu(\tau, t)]\, d\Gamma + 2\pi\nu(\tau),\ t \in \Gamma,\ \tau \in s_0. \tag{30}$$

В операторном виде эта система может быть представлена уравнением

$$GX = F, \tag{31}$$

где $X = \begin{Bmatrix}\sigma\\ \nu\end{Bmatrix}$ — вектор источников, $F = \begin{Bmatrix}\Psi\\ \Phi\end{Bmatrix}$ — вектор правой части, а G — интегральный оператор, отвечающий системе (29), (30).

Ядра потенциалов простого и двойного слоя в декартовой системе координат имеют вид

$$G_\sigma = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_{PQ}},\quad G_\nu = \frac{\partial}{\partial n_Q}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_{PQ}}\right). \tag{32}$$

Здесь R_{PQ} — расстояние между точками P и Q, h_Q — вектор нормали к границе в точке Q.

Устойчивость решения системы (31) повышается, если исходную задачу определить в терминах слабой или вариационной формулировки, т. е. из условия минимума функционала

$$\mathscr{L} = (X^*G^* - F^*)(GX - F), \tag{33}$$

которому соответствует уравнение Эйлера

$$G^*GX = G^*X. \tag{34}$$

Расширение класса допустимых решений осуществляется введением модифицированного функционала

$$\mathscr{L}_D = (X^*G^* - F^*)D(GX - F), \tag{35}$$

где D — диагональный оператор, содержащий весовые множители w_i, отвечающие отдельным фрагментам поверхности Г. Введение этих весовых множителей отражает степень влияния отдельных электродов или вспомогательных поверхностей с источниками на качество синтезируемого решения. Варьирование величин w_i в процессе решения задачи синтеза позволяет определить границы допусков на отклонение геометрии электродов при заданных допустимых отклонениях электронно-оптических параметров системы.

§ 3. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА

Полная система уравнений электронной оптики интенсивных пучков релятивистских заряженных частиц кроме уравнений поля включает также уравнения движения заряженных частиц и законы сохранения полного заряда системы. Движение частиц с массой покоя M_0 и зарядом подчиняется уравнениям Лоренца

$$\dot{\vec{p}} = z(\vec{E} + [\vec{v} + \vec{B}]),\ \vec{p} = \frac{M_0\vec{v}}{\sqrt{1 - (\vec{v}\vec{v})/c^2}}, \tag{36}$$

где $\vec{E}$ — напряженность электрического, а $\vec{B}$ — индукция магнитного поля, $\vec{p}$ — импульс частицы, $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ — ее скорость, c — скорость света в пустоте.

Закон сохранения заряда имеет вид уравнения неразрывности

$$\operatorname{div}\vec{j} = 0, \quad \vec{j} = \rho\vec{v}, \tag{37}$$

в котором начальные условия для тока эмиссии $\vec{j}$ в случае ограничения тока пространственным зарядом определяются из условия равенства нулю нормальной компоненты полного электрического поля E_n на поверхности эмиттера

$$(E_n)_s = 0. \tag{38}$$

Полное поле самосогласованной задачи определяется соотношением

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla(\varphi + \varphi_\rho) = -\nabla\varphi - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \rho(\vec{r}')\,\nabla\,\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\,d_3\vec{r}', \tag{39}$$

в котором φ — потенциал поля внешних источников, а φ_ρ — потенциал поля объемных зарядов пучка. Аналогичным образом определяется магнитное поле

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0(\vec{r}) + 4\pi\mu_0\int\limits_V \frac{\vec{j}\times(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\,d^3\vec{r}'. \tag{40}$$

Здесь $\vec{B}_0$ — магнитная индукция внешних источников в виде соленоидов или постоянных магнитов, а объемный интеграл отвечает собственному магнитному полю пучка; ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные вакуума. Численная модель уравнений самосогласованного поля подробно описана в монографии автора [34]. Дискретизация собственных полей пучка стационарной задачи электронной оптики осуществляется па основе квазигидродинамической модели «трубок тока». Такая модель имеет более общую сферу применений, чем обычная гидродинамическая модель, описывающая только случаи движения ламинарных потоков, для которых вектор скорости в каждой точке потока определен однозначно.

При численной аппроксимации системы интегральных уравнений поля (29), (30) используется метод интерполяции и коллокаций, подробно описанный в монографии [33]. Поверхности границ s и Γ описываются параметрическими уравнениями кусочно-гладких фрагментов

$$x = x_i(\tau), \quad y = y_i(\tau), \\ \alpha_i \leqslant \tau \leqslant \beta_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{41}$$

На каждом из фрагментов задана некоторая сетка $\{\tau_{ij}, j = 1, \ldots, n_i\}$. Искомая плотность поверхностных источников $X(t)$ аппроксимируется кубическими сплайнами

$$X(t) = M_{j-1}\frac{(t_j - t)^3}{6_{h_j}} + M_j\frac{(t - t_{j-1})^3}{6_{h_j}} + \left(X_{j-1} - M_{j-1}\frac{h_j^2}{6}\right)\frac{t_j - t}{h_j} + \\ + \left(X_j - M_j\frac{h_j^2}{6}\right)\frac{t - t_{j-1}}{h_j}, \quad h_j = t_j - t_j, \; X_j = X(t_j), \tag{42}$$

коэффициенты M_j которых находятся из условия непрерывности функций $X'(t)$ в узлах интерполяции и краевых условий вида $X''' = 0$ на концах интервала. Применяя квадратурные формулы Гаусса для вычисления интегралов по границе Γ, сведем систему интегральных уравнений задачи к системе линейных алгебраических уравнений

$$AX = F \tag{43}$$

с прямоугольной матрицей размерности $M \times N$, где M — число узлов на поверхностях s и s_0, где удовлетворяются краевые условия и данные Коши, а N — число узлов на поверхностях с источниками s и Γ.

Уравнению Эйлера (34) соответствует система уравнений

$$A^{\tau}AX = A^{\tau}F \tag{44}$$

с квадратной матрицей $N \times N$. Здесь символ «τ» означает операцию транспонирования. К диагональным членам матрицы $C = A^{\tau}A$ для модифицированного функционала (35) следует добавить весовые множители w_i соответствующих поверхностей.

Ядро потенциала простого слоя для случая плоскопараллельной геометрии имеет вид

$$G_\sigma(x, y; x', y') = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln[(x - x')^2 + (y - y')^2], \tag{45}$$

а для двойного слоя оно определяется формулой

$$G_\nu(x, y; x', y') = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{(x - x')\cos(\overrightarrow{n}\overrightarrow{e_x}) + (y - y')\cos(\overrightarrow{n}\overrightarrow{e_y})}{(x - x')^2 + (y - y')^2}. \tag{46}$$

В осесимметричном случае эти ядра даются выражениями

$$G_\sigma(r, z; r', z') = \frac{r'K(k)}{\pi\varepsilon_0\rho}, \; \rho^2 = (r + r')^2 + (z - z')^2, \tag{47}$$

$$G_\nu(r, z; r', z') = \frac{1}{\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{r'}{2r\rho}\left[\frac{r'^2 - r^2 + (z - z')^2}{\rho}E(k) - K(k)\right]\cos(\overrightarrow{n}\overrightarrow{e_r}) + \right. \\ \left. + \frac{r'(z' - z)E(k)}{\rho[(r - r')^2 + (z - z')^2]}\cos(\overrightarrow{n}\overrightarrow{e_z})\right\}, \tag{48}$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, зависящие от параметра $k^2 = 4rr'/\rho$.

Для получения высокой точности решения необходимо использовать технику выделения особенностей, описанную в работе [33].

§ 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Описанные нами постановки задач и математические модели реализованы в пакете прикладных программ SINTEZ-2, предназначенном для численного решения задач синтеза двумерных плоскопараллельных и осесимметричных статических полей с учетом влияния собственных электрических и магнитных полей интенсивных пучков релятивистских заряженных частиц. Алгоритмы траекторной части задачи синтеза основаны на моделях, реализованных в пакете POISSON-2 системы автоматизированного проектирования ТОПАЗ.

При численном моделировании задачи симметричного включения линз Батлера, изображенной на рис. 2, для общего числа неизвестных узловых значений поверхностной плотности $N=48$ точность восстановления решения в области $\{z\in(0,\ 2)\times r\in(0,\ 1)\}$ составила величину $\delta\varphi/\varphi\approx 5\cdot 10^{-4}$ при значении веса $w^2=2\cdot 10^{-3}$ на «скелетной поверхности», которая представляет собой прямую $z=1$. При проверке точности решение вычисляется в узлах прямоугольной сетки 11×12, покрывающей расчетную область. Время решения задачи на ЕС-1060 составляет 1 мин 19 с.

В связи с отсутствием отверстия, соединяющего обе линзы, такая задача лишена практического интереса, поэтому в дальнейшем исследовалась модифицированная задача, в которой данные Коши определены на отрезке оси $0{,}5\leqslant z\leqslant 1{,}5$, «скелетная поверхность» обрывается на расстоянии $r=0{,}1$ от оси, а внешняя граница представляет собой два боковых и верхний электроды, на которых заданы условия Дирихле (3). На рис. 3 приведены картины изолиний синтезированных полей с весами $w^2=0{,}09$ и $w^2=0{,}2$ соответственно на «скелетной поверхности». Относительная погрешность решения в этом случае составляет $\delta\varphi/\varphi\approx$ $\approx 5\cdot 10^{-3}$.

Менее очевидная картина электродоподобных эквипотенциалей отвечает антисимметричному включению линз Батлера, изображенному на рис. 4 также с различными значениями весовых множителей. Здесь введение «скелетной поверхности» с поверхностными источниками в виде диполей порождает пары электродоподобных эквипотенциалей с потенциалами противоположного знака.

Для идеальной согласующей линзы, изображенной на рис. 5, решалась задача синтеза системы с конечной апертурой. На рис 6, *а* показаны эквипотенциали линзы с критическим значением апертурного отверстия a_0, а рис. 6, *б* отвечает линзе с апертурой меньше критической $a=0{,}3$. Здесь ясно виден характер понижения устойчивости поведения эквипотенциали, что влечет за собой увеличение нелинейных искажений поля в области прохождения пучка. Аналогичная картина наблюдается и для ускоряющей линзы, изображенной на рис. 7. Картина эквипотенциалей одиночной линзы показана на рис. 8, а следующий рис. 9 отражает один из вариантов синтеза одиночной линзы с широкой апертурной $a/L=0{,}15$.

В ряде случаев задача синтеза ставится таким образом, что после синтезируемого фрагмента конструкции встраивается в априорно заданное поле конструкции в целом. Здесь необходимо решать задачу аналитического продолжения заданного решения через внешнюю границу линзы. Например, можно потребовать, чтобы поле синтезируемых электродов в верхней части линзы гладким образом переходило в однородное поле, отвечающее оптимальным условиям электрической прочности системы крепления электродов. Нами были рассмотрены примеры аналитического продолжения решения на моделях линз Батлера, в которых на верхней границе мы требуем выполнения однородного условия Неймана и линейности потенциала

$$\varphi(1,z)=\begin{cases}4z-1{,}5, & z\leqslant 1,\\ -4(z-1)+2{,}5, & z>1\end{cases}\qquad(49)$$

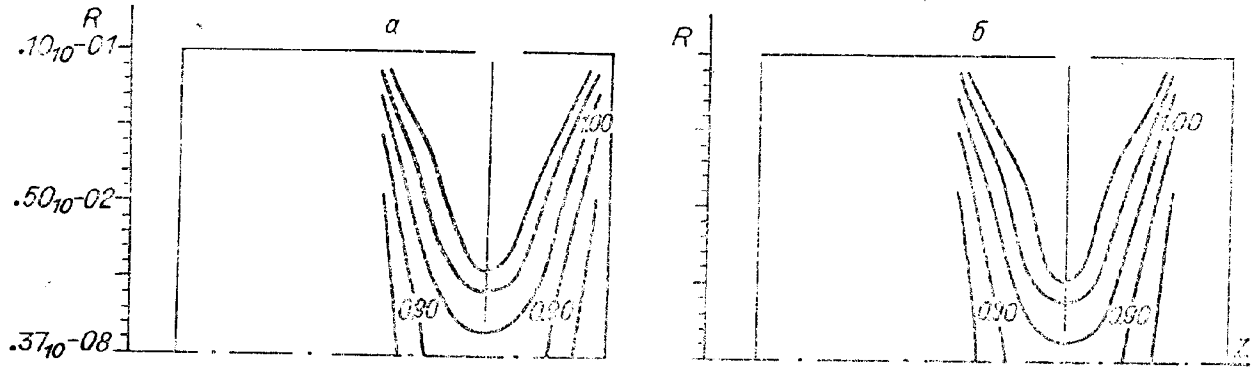


Рис. 10. Задача аналитического продолжения для симметричной пары линз Батлера с различными значениями весовых множителей ws.

a — $ws = 0.9$; $б$ — $ws = 0.25$.

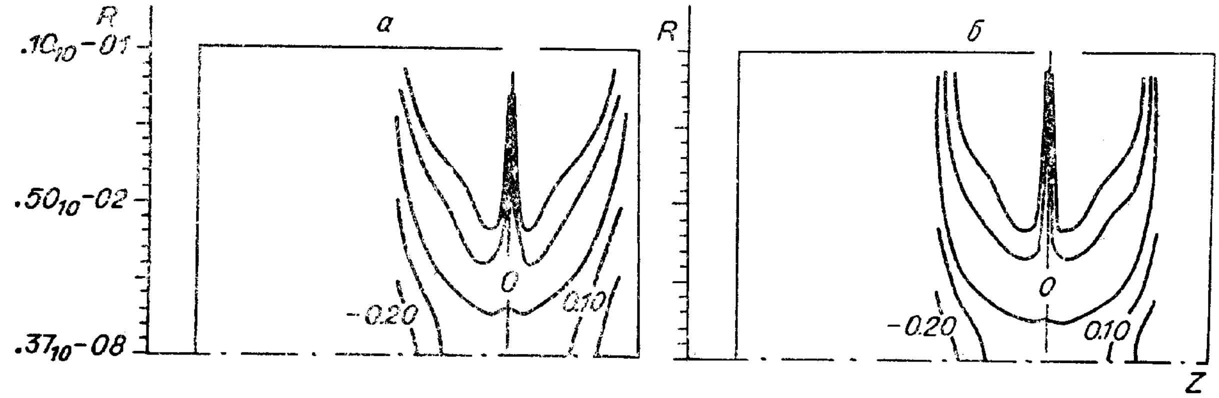


Рис. 11. Поле аналитического продолжения для антисимметричного включения линз Батлера с различными значениями весовых множителей wA.

a — $wA = 0.15$; $б$ — $wA = 0.2$.

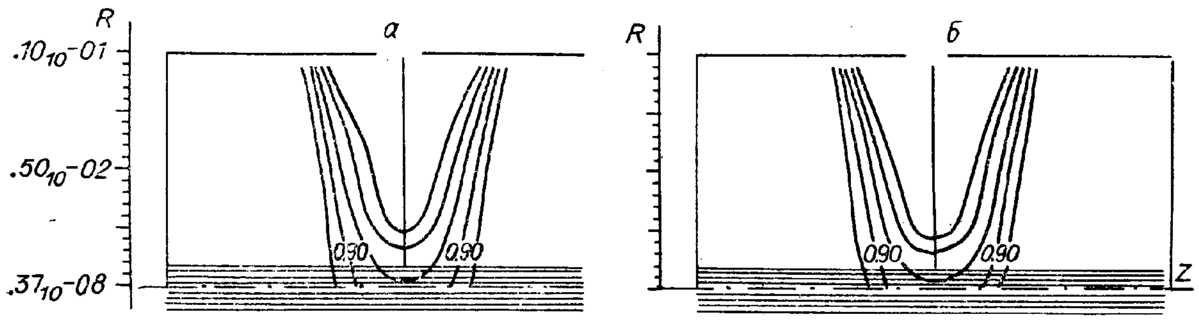


Рис. 12. Решение самосогласованной задачи для цилиндрического пучка с различными весами Bs.

a — $Bs = 0.2$; $б$ — $Bs = 0.30$.

для симметричного включения линз и

$$\varphi(1, z) = \begin{cases} 4z - 2{,}5, & z \leqslant 1, \\ 4(z-1) - 1{,}5, & z > 1 \end{cases} \qquad (50)$$

для антисимметричного.

Во избежание недоразумений заметим, что требование выполнения двух условий на одной поверхности не противоречит корректности задачи, так как верхняя поверхность в данном случае играет ту же роль, что и отрезок оси с данными Коши. На рис. 10 и 11 показаны примеры численного решения сформулированных задач аналитического продолжения.

Решение самосогласованной задачи формирования пучка частиц заданной формы не вносит в полевую часть алгоритма синтеза принципиальных элементов новизны. Отметим, что для пучков с распределением плотности заряда вида

$$\rho(r, z) = f(z) + r^2 g(z), \quad r \leqslant R_0 \qquad (51)$$

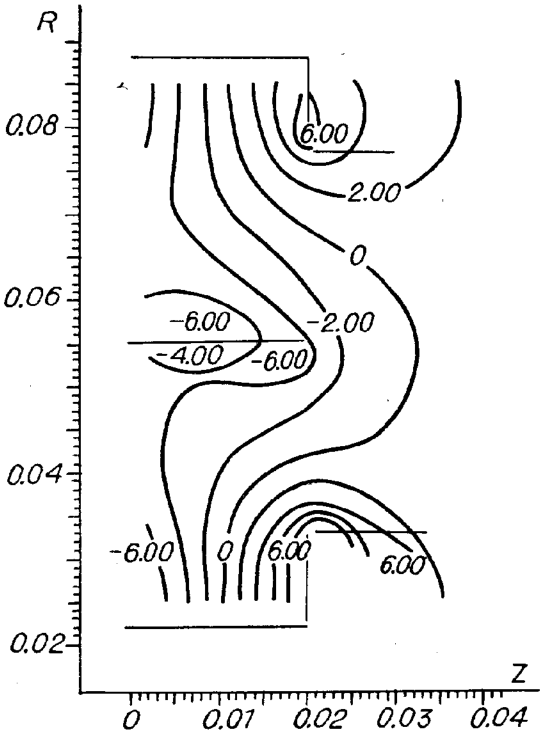


Рис. 13. Пример синтеза изолятора ускорительной трубки.

построение осевого поля самосогласованной задачи, являющегося кубическим по z полиномом, во внутренней области пучка приводит также к линейным по r фокусирующим компонентам поля E_r. Это позволяет скомпенсировать геометрические аберрации, вызванные влиянием объемного заряда, за счет соответствующего изменения конфигурации электродов синтезируемого поля. На рис. 12 приведены варианты решения самосогласованной задачи о прохождении цилиндрического пучка в ускоряющем поле линзы батлеровского типа. В нашем случае первеанс пучка P составляет величину 0,55, а траектории частиц были практически параллельными. Начальная энергия пучка составляла 4 кэВ.

На рис. 13 показан синтез изолятора ускорительной трубки. Верхняя граница секции изолятора представляет собой керамическую вставку, нижняя часть — ускоряющий электрод. Цель задачи состоит в том, чтобы в промежутке между ускоряющим электродом и керамикой синтезировать электрод с минимально возможной напряженностью поля, который перекрывал бы область прямой светимости пучка на керамику, так как при высоком вакууме основной причиной пробоя служат фоновые частицы, пересекающие промежуток между пучком и изоляцией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пирс Дж.** Теория и расчет электронных пучков.— М.: Сов. радио, 1956.— 180 с.
2. **Meltzer B.** Electron flow in Curved Path under Space-Charge Conditions // Proc. Phys. Soc.— 1949.— Vol. 62, N 355.— P. 431—437.
3. **Lomax P. J.** Exact Electrode systems for the Formation of a Curved Space-Charge Beam // J. Electronics.— 1957.— Vol. 3, N 4.— P. 367—371.
4. **Kirstein P. T.** On the Determination of the Electrodes Required to Produce a Given Electric Field Distribution along a Prescribed Curve // Proc. IRE.— 1958.— Vol. 46, N 10.— P. 1716—1767.
5. **Kirstein P. T., Kino G. S.** Solution to the Equation of Space-Charge Flow by the Method of the Separation of Variables // J. Appl. Phys.— 1958.— Vol. 29, N 12.— P. 1758—1767.
6. **Harker K. J.** Determination of Electrode Shapes for Axially Symmetric Electron Guns // J. Appl. Phys.— 1958.— Vol. 31, N 12.— P. 2865—2870.
7. **Tretner von W.** Existenzbereiche Rotationsymmetrischer Electronenlinsen // Optik.— 1959.— Bd 16, N 3.— S. 155—184.
8. **Szilagyi M.** A New Approach to Electron Optical Optimization // Optik.— 1977.— Bd 48, N 2.— S. 215—224.
9. **Szilagyi M.** A Dynamic Programming Search for Electrostatic Immersion Lenses with Minimum Aberration // Optik.— 1978.— Bd 50, N 1.— S. 35—51.
10. **Szilagyi M., Yakowitz S. J., Duff M. O.** Procedure for Electron and Ion Lense Optimization // Appl. Phys. Lett.— 1984.— Vol. 44, N 1.— P. 7—9.
11. **Овчаров В. Т.** Аксиально-симметричные электронные пучки заданной формы // ДАН СССР.— 1956.— Т. 107, № 1.— С. 47—50.
12. **Овчаров В. Т.** Теория формирования электронных пучков // РЭ.— 1957.— № 6.— С. 696—704.
13. **Кормилицын Б. Т., Овчаров В. Т.** Об уравнении параксиальной электронной оптики пучков с большой плотностью тока // РЭ.— 1960.— № 7.— С. 1112—1117.
14. **Овчаров В. Т.** Уравнения электронной оптики для плоскосимметричных и осесимметричных пучков с большой плотностью тока // РЭ.— 1962.— № 8.— С. 1367—1378.

15. **Овчаров В. Т., Пензяков В. В.** Приближенное решение внутренней задачи теории формирования электронных пучков // РЭ.— 1970.— № 8.— С. 1651—1658.
16. **Овчаров В. Т., Пензяков В. В.** Приближенное решение внешней задачи теории формирования электронных пучков // РЭ.— 1970.— № 9.— С. 1897—1902.
17. **Данилов В. Н., Сыровой В. А.** Приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа применительно к проблеме формирования плотных пространственно-неоднородных пучков заряженных частиц // Прикл. математика и механика.— 1971.— Т. 35, № 4.— С. 656—668.
18. **Данилов В. Н., Сыровой В. А.** О параксиальном приближении во внешней задаче формирования пространственных электронных пучков // Радиофизика.— 1977.— Т. 20, № 11.— С. 1727—1739.
19. **Данилов В. Н., Дроздов С. С., Лаврентьев Ю. В. и др.** Расчет трехмерной электростатической электронной пушки с криволинейной осью методом синтеза // Электрон. техника. Сер. 1, Электроника СВЧ.— 1976.— № 2.— С. 33—57.
20. **Сыровой В. А.** Решение задачи Коши для уравнения Лапласа в трехмерном случае применительно к проблеме формирования интенсивных пучков заряженных частиц // Прикл. математика и механика.— 1971.— Т. 34, № 1.— С. 4—12.
21. **Сыровой В. А.** Методы решения внешней задачи теории формирования в трехмерном случае // Новые методы расчета электронно-оптических систем.— М.: Наука, 1983.— С. 55—60.
22. **Сыровой В. А.** О синтезе непараксиальных релятивистских пучков заряженных частиц // РЭ.— 1985.— Т. 30, № 4.— С. 793—804.
23. **Шантурин Л. П.** Синтез анодно-плазменных систем формирования электронных потоков // РЭ.— 1980.— № 3.— С. 612—622.
24. **Монастырский М. А.** Принцип максимума Понтрягина в задачах синтеза катодных линз // ЖТФ.— 1986.— Т. 56, № 4.— С. 625—633.
25. **Монастырский М. А., Корнеева М. В.** Принцип максимума Понтрягина в задачах синтеза катодных линз // Там же.— С. 634—643.
26. **Гурбанов Г. Г., Касьянков П. П., Таганов И. Н.** Распространение потенциала поля в пространство по заданному его распределению на оси // РЭ.— 1967.— № 4.— С. 659—661.
27. **Вабишевич П. Н.** Разностные методы решения задачи Коши для эллиптических уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1981.— Т. 21, № 2.— С. 509—511.
28. **Володин А. И., Данилов В. А., Славянский В. В.** Восстановление магнитного поля по распределению на оси методом сеток // Алгоритмы и методы расчета электронно-оптических систем: Сб. науч. тр. Вычисл. центра СО АН СССР; Сб. тр. VII Всесоюз. сем. по числ. методам решения задач электронной оптики.— Новосибирск, 1983.— С. 108—113.
29. **Попова Г. С., Урев М. В.** Расчет магнитного поля по его значениям на оси симметрии // Численные методы решения задач электронной оптики: Сб. науч. тр. Вычисл. центра СО АН СССР.— Новосибирск, 1979.— С. 89—98.
30. **Молоковский С. И., Сушков А. Д.** Интенсивные электронные и ионные пучки.— Л.: Энергия, 1972.— 271 с.
31. **Брежнев В. Н., Диканский Н. С., Иванов В. Я.** Конструктивный подход в задаче синтеза ЭОС.— Новосибирск, 1986.— 25 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т ядерной физики; № 103).
32. **Астрелин В. Т., Иванов В. Я.** Пакет программ для расчета характеристик интенсивных пучков релятивистских заряженных частиц // Автометрия.— 1980.— № 3.— С. 92—96.
33. **Иванов В. Я.** Методы автоматизированного проектирования приборов электроники. Ч. I: Расчеты физических полей.— Новосибирск: Изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1986.— 198 с.
34. **Иванов В. Я.** Методы автоматизированного проектирования приборов электроники. Ч. II: Методы решения задач электронной оптики.— Новосибирск: Изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1986.— 200 с.
35. **Иванов В. Я.** Пакет прикладных программ «POISSON-3» для трехмерных задач электростатики и электронной оптики // Тез. докл. VIII Всесоюз. сем. по методам расчета электронно-оптических систем, Ленинград, янв. 1985.— Л., 1985.— С. 98.