9. **Зельманов Е. И.** Абсолютные делители нуля и алгебраические йордановы алгебры // Сиб. мат. журн.— 1982.— Т. 23, № 6.— С. 100—116.
10. **Днестровская тетрадь.** Нерешенные проблемы колец.— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1976.
11. **Зельманов Е. И.** Йордановы ниль-алгебры ограниченного индекса // Многообразия алгебраических систем.— Новосибирск, 1986.— С. 11.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычислительный центр; № 647).
12. **Зельманов Е. И., Скосырский В. Г.** Специальные йордановы ниль-алгебры ограниченного индекса // Алгебра и логика.— 1983.— Т. 22, № 6.— С. 626—635.
13. **Зельманов Е. И.** Об энгелевых алгебрах Ли // Докл. АН СССР.— 1987.— Т. 292. № 2.— С. 265—268.
14. **Зельманов Е. И., Шестаков И. П.** Первичные альтернативные супералгебры и нильпотентность радикала свободной альтернативной алгебры // 19 Всесоюз. алгебр. конф., Львов, 1987 г.: Тез. докл.— Львов, 1987.— С. 99—100.
15. **Jacobson N.** Structure and representations of Jordan algebra's.— Providence, R. I., 1968.
16. **Медведев Ю. А.** Ниль-радикалы конечно-порожденных йордановых PI-алгебр.— Новосибирск, 1985.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 25).
17. **Жевлаков К. А.** Разрешимость и нильпотентность йордановых колец // Алгебра и логика.— 1966.— Т. 5, № 3.— С. 37—58.
18. **Kač V. G.** Lie Superalebras // Adv. math.— 1977.— V. 26.— N 1.— P. 8—97.
19. **Kač V. G.** Classification of simple Z-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras // Communs algebra.— 1977.— V. 13.— P. 1375—1400.
20. **Зельманов Е. И.** Йордановы алгебры с условиями конечности // Алгебра и логика.— 1978.— Т. 17, № 6.— С. 693—703.
21. **Medvedev Yu. A., Zel'manov E. I.** Solvable Jordan algebras // Communs algebra.— 1985.— V. 13, N 6.— P. 1389—1414.
22. **Бахтурин Ю. А.** Тождества в алгебрах Ли.— М.: Наука, 1985.
23. **Кемер А. Р.** Многообразия и Z_2-градуированные алгебры // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1984.— Т. 48, № 5.— С. 1042—1059.

И. Л. КАНТОР

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ $\mathfrak{L}$-ФУНКТОРА

В статье вводятся два понятия, связанные с $\mathfrak{L}$-функтором. Одно из них — обобщенно-йорданова пара J, возникающая естественным образом при рассмотрении градуированных алгебр Ли общего вида $G=\sum\limits_{-\infty}^{\infty} U_i$ аналогично тому, как возникают йордановы пары в случае алгебр Ли с «короткой» градуировкой $G=U_{-1}+U_0+U_1$. Другое понятие — конструкция, позволяющая по данной консервативной алгебре A с левой единицей построить серию консервативных алгебр A_λ, зависящих от непрерывного параметра λ. Сопоставление $A\to A_\lambda$ разбивает консервативные алгебры на классы эквивалентности и является возможным подходом к классификации консервативных алгебр. Статья посвящена изучению алгебр Ли $\mathfrak{L}(J)$ и $\mathfrak{L}(A_\lambda)$.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Универсальная градуированная алгебра Ли $\tilde U^{(n)}$. По определению (см. [1, 2]), *алгебра Ли* $\tilde U^{(n)}$ — это градуированная алгебра Ли $\tilde U^{(n)}=\sum\limits_{-\infty}^{\infty} U_i$, в которой две подалгебры $\tilde U_-=\sum\limits_{i=-1}^{-\infty}\tilde U_i$ и $\tilde U_+=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\tilde U_i$ существенно отличаются друг от друга. Именно, $\tilde U_-$ есть свободная алгебра Ли с n образующими $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и естественной градуировкой. Последнее означает, что подпространство $\tilde U_{-k}$ в алгебре Ли $\tilde U_-=\sum\limits_{i=-1}^{-\infty}\tilde U_i$ составлено k-кратными коммутаторами $e_{i_1}\circ e_{i_2}\circ\ldots\circ e_{i_k}\equiv[[\ldots[e_{i_1},e_{i_2}],\ldots],e_{i_k}]$. В частности, $\tilde U_{-1}\equiv E^n$ — n-мерное линейное пространство с базисом из образующих $e_1, e_2, \ldots, e_n$. В подалгебре $\tilde{U}_+$ каждая однородная компонента $\tilde{U}_{i-1}$ есть пространство i-линейных операций на пространстве E^n со значениями в E^n. В частности, $\tilde{U}_0$ составлено линейными операторами, действующими в E^n, $\tilde{U}_1$ — билинейными операциями, действующими в E^n, и т. д.

Определим операцию коммутирования между элементами $\tilde{U}_+$ и $\tilde{U}_-$. Сначала приведем частные случаи. Пусть $a \in \tilde{U}_{-1}$, $a_1 \circ a_2 = a_1 a_2 - a_2 a_1 \in \tilde{U}_{-2}$, $A(x) \in \tilde{U}_0$, $A_l(x_1, x_2, \ldots, x_l) \in \tilde{U}_{l-1}$. По определению

$$[A, a] = A(a), \ [A_l, a](x_1, \ldots, x_{l-1}) = A_l(a, x_1, \ldots, x_{l-1}),$$

$$[A, a_1a_2 - a_2a_1] = A(a_1) \circ a_2 - A(a_2) \circ a_1, \ [A_l, a_1a_2 - a_2a_1](x_1, \ldots, x_{l-2}) = \\ = A_l(a_1, a_2, x_1, \ldots, x_{l-2}) - A_l(a_2, a_1, x_1, \ldots, x_{l-2}), \tag{1.1}$$

т. е. операция коммутирования сводится к последовательной подстановке векторов на места аргументов линейных операций. Если же число векторов больше числа аргументов, то подстановка заменяется коммутатором в свободной алгебре Ли. В общем случае операция коммутирования между l-линейным оператором $A_l(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ и ассоциативным элементом $\varphi = a_1 a_2 \ldots a_k$ задается формулами

$$[A_l, \varphi](x_1, \ldots, x_{l-k}) = A_l(a_1, \ldots, a_k, x_1, \ldots, x_{l-k}), \quad l \geqslant k, \tag{1.2}$$

$$[A_l, \varphi] = A_l(a_1, \ldots, a_l) \circ a_{l+1} \circ \ldots \circ a_k, \quad l < k. \tag{1.3}$$

Так как элемент Ли есть сумма ассоциативных элементов, то операция коммутирования между $\tilde{U}_-$ и $\tilde{U}_+$ однозначно определяется формулами (1.2) и (1.3).

Операция коммутирования между элементами алгебры $\tilde{U}_+$ выглядит естественно, когда один из элементов принадлежит $\tilde{U}_0$. Пусть $A_1 \in \tilde{U}_0$, $B_l \in \tilde{U}_{l-1}$, тогда

$$[A_1, B_l](x_1, \ldots, x_l) = A_1(B_l(x_1, \ldots, x_l)) - \sum_{i=1}^{l} B_l(x_1, \ldots, A_1(x_i), \ldots, x_l). \tag{1.4}$$

В частности, $[A_1, B_1](x) = A_1 B_1(x) - B_1 A_1(x)$. В общем случае пусть $A_k \in \tilde{U}_{k-1}$, $B_l \in \tilde{U}_{l-1}$. Тогда

$$[A_k, B_l] = A_k \square B_l - B_l \square A_k, \tag{1.5}$$

где

$$A_k \square B_l(x_1, x_2, \ldots, x_{k+l-1}) = \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots i_s}^{l+s-1} A_k\big(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}, B_l(x_1, x_2, \ldots \\ \ldots, \widehat{x}_{i_1}, \ldots, \widehat{x}_{i_s}, \ldots, x_{l+s}), \ x_{l+s+1}, \ldots, x_{k+l-1}\big). \tag{1.6}$$

Символ $\sum\limits_{i_1 < i_2 < \ldots < i_s}^{l+s-1}$ означает суммирование по всевозможным упорядоченным наборам из s индексов, каждый из которых не больше $l + s - 1$, а символ $\widehat{x}_{i_p}$ означает, что в последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{l+s-1}$ член с номером i_p пропускается. Например,

$$[A_2, B_2](x_1, x_2, x_3) = A_2(B_2(x_1, x_2), x_3) + A_2(x_1, B_2(x_2, x_3)) + \\ + A_2(x_2, B_2(x_1, x_3)) - B_2(A_2(x_1, x_2), x_3) - B_2(x_1, A_2(x_2, x_3)) - \\ - B_2(x_2, A_2(x_1, x_3)).$$

Отметим, что операция коммутирования (1.5) однозначно определяется формулами (1.2), (1.3) и градуированностью алгебры Ли $\tilde{U}^{(n)}$.

Универсальность алгебры Ли $\widetilde{U}^{(n)}$ означает следующее: любая другая алгебра Ли

$$U=\sum_{-\infty}^{\infty} U_i = U_- \dotplus U_+$$

типа A (т. е. такая, что подалгебра U_- порождена U_{-1}, а подалгебра U_+ не содержит идеалов всей алгебры U), для которой $\dim U_{-1}=n$ связана с $\widetilde{U}^{(n)}$ способом, указанным в теореме 1.1.

Для того чтобы сформулировать теорему, рассмотрим отображение F подалгебры Ли $U_+=\sum_{i=0}^{\infty} U_i$ в подалгебру $\widetilde{U}_+$ универсальной алгебры Ли $\widetilde{U}^{(n)}$:

$$a \in U_k \xrightarrow{F} A(x_1, \ldots, x_{k+1}) \equiv [\ldots [a, x_1], \ldots, x_{k+1}]. \qquad (1.7)$$

Оказывается, F изоморфно отображает подалгебру U_+ в $U_+^* \subset \widetilde{U}_+$.

Теорема 1.1 (об универсальности). *Пусть U — алгебра Ли типа A. Тогда алгебра U изоморфна фактор-алгебре* $\left(\widetilde{U}_- \dotplus U_+^*\right)/_D$, *где D — идеал алгебры $\widetilde{U}_- \dotplus U_+^*$, принадлежащий подалгебре* $\sum_{i=-2}^{-\infty} \widetilde{U}_i$.

1.2. $\mathfrak{L}$-функтор. Для определения $\mathfrak{L}$-функтора существенно отметить, что универсальная алгебра Ли $\widetilde{U}^{(n)}$ содержит в качестве своего элемента $A \in \widetilde{U}_{k-1}$ любую k-линейную операцию $A(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, определенную на n-мерном пространстве E^n со значениями в E^n, а следовательно, содержит и любой набор $\omega=\{A_s\}$ полилинейных операций в качестве элементов $A_s \in \widetilde{U}_{t_s-1}$, где t_s — порядок полилинейной операции $A_s(x_1, x_2, \ldots, x_{t_s})$.

Следуя А. И. Мальцеву [3], будем называть *линейной алгебраической системой* линейное пространство E^n вместе с заданным набором $\omega=\{A_s\}$ полилинейных операций.

Определение 1.1. Пусть $\omega=\{A_s\}$ — линейная алгебраическая система. *Алгеброй Ли* $\mathfrak{L}(\omega)$ называется градуированная алгебра Ли $U^*/_D$, где U^* — подалгебра $\widetilde{U}^{(n)}$, порожденная всеми элементами $A_s \in \widetilde{U}_{t_s-1}$ и подпространством $\widetilde{U}_{-1}$, а D — максимальный градуированный идеал алгебры U^*, принадлежащий подалгебре $\sum_{i=-2}^{-\infty} \widetilde{U}_i$.

Когда ω состоит из одной билинейной операции $A \in \widetilde{U}_1$, возникает отображение, сопоставляющее алгебре (в обычном смысле слова) $A(x, y)$ градуированную алгебру Ли $\mathfrak{L}(A)$. В частности, если A — йорданова алгебра, то алгебра Ли $\mathfrak{L}(A)$ имеет вид

$$\mathfrak{L}(A) = U_{-1} \dotplus U_0 \dotplus U_1. \qquad (1.8)$$

Отображение, сопоставляющее йордановой алгебре A лиеву алгебру вида (1.8), было найдено в работах [4—7]. В общем случае отображение $A \to \mathfrak{L}(A)$ было определено в работе [8], где кроме случая, когда A состоит из одной билинейной операции, рассматривался еще случай, когда ω состоит из всех билинейных операций $\varphi(a, x, y)$, где $\varphi(x, y, z)$ — фиксированная трилинейная операция.

1.3. Функторность отображения $\mathfrak{L}$. Пусть $V \equiv V_{-1} \subset U_{-1}$ — идеал алгебраической системы $\omega=\{A_s\}$, т. е. для любых операций A_s и индекса $1 \leqslant i \leqslant t_s$

$$A_s(x_1, \ldots, x_{i-1}, V, x_{i+1}, \ldots, x_{t_s}) \subset V \quad \forall i, \ x_j. \qquad (1.9)$$

Тогда естественным образом определена фактор-система $\omega^*=\left(A_s^*\right)$, определенная на фактор-пространстве $U_{-1}/_V$. Каждый полилинейный оператор $A_s \in \omega$ на пространстве U_{-1} со значениями в U_{-1} однозначно определяет полилинейный оператор A_s^* на фактор-пространстве U_{-1}/V со значениями в U_{-1}/V.

Обозначим через $D_V = \sum_{-\infty}^{\infty} V_i$, $V_i \subset U_i$, $V_{-1} \equiv V$ градуированный идеал алгебры $\mathfrak{L}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} U_i$, у которого $V_- = \sum_{i=-1}^{-\infty} V_i$ есть идеал подалгебры $U_- = \sum_{i=-1}^{-\infty} U_i$, порожденный подпространством $V \equiv V_{-1} \subset U_{-1}$, а подпространство V_i, $i \geqslant 0$, составлено такими $A \in U_i$, для которых $A(x_1, \ldots, x_t, V, x_{t+1}, \ldots, x_{i+1}) \subset V$ $\forall t$, x_j. Через $\tilde{\varphi}$ обозначим гомоморфизм $\mathfrak{L}(\omega) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathfrak{L}(\omega)/D_V$.

Имеет место следующая

Теорема 1.2. *Пусть V — идеал алгебраической системы ω, определенной на пространстве U_{-1}. Тогда диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \omega & \xrightarrow{\varphi} & \omega^* \\ \mathfrak{L}\downarrow & & \downarrow\mathfrak{L} \\ \mathfrak{L}(\omega) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathfrak{L}(\omega^*) \end{array}$$

коммутативна; здесь φ — гомоморфизм алгебраических систем, определяемый идеалом V, а $\tilde{\varphi}$ — гомоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{L}(\omega) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathfrak{L}(\omega)/D_V$.

Когда ω состоит из одной билинейной операции, теорема 1.2 доказана в [8]. В общем случае доказательство аналогично.

§ 2. ОБОБЩЕННО-ЙОРДАНОВЫ ПАРЫ

2.1. Обобщенно-йорданова пара $J(G)$, определяемая градуированной алгеброй Ли G. Понятие йордановой пары возникло при рассмотрении таких градуированных алгебр Ли G вида $U_{-1} + U_0 + U_1$, которые не порождаются элементом $a \in U_1$ и подпространством U_{-1} (т. е. G непредставима в виде $G = \mathfrak{L}(A)$, где A — йорданова алгебра). По аналогичной причине, но уже относительно градуированных алгебр Ли общего вида $G = \sum_{-\infty}^{\infty} U_i$, возникает и обобщение понятия йордановой пары.

Определение 2.1. Пара линейных пространств U_{-1}, U_1 и две трилинейные операции

$$\{U_1, U_{-1}, U_1\} \subset U_1, \quad (U_{-1}, U_1, U_{-1}) \subset U_{-1}$$

называются *обобщенно-йордановой парой*, если

$$(u\alpha(x\beta y)) = ((u\alpha x)\beta y) - (x\{\alpha u\beta\}y) + (x\beta(u\alpha y)), \tag{2.1}$$

$$\{\lambda x\{\alpha y\beta\}\} = \{\{\lambda x\alpha\}y\beta\} - \{\alpha(x\lambda y)\beta\} + \{\alpha y(\lambda x\beta)\}$$
$$\forall x, y, u \in U_{-1}, \alpha, \beta, \lambda \in U_1. \tag{2.2}$$

Замечание 2.1. Если дополнительно выполняются соотношения

$$(x\lambda y) = (y\lambda x), \quad \{\alpha u\beta\} = \{\beta u\alpha\}, \tag{2.3}$$

то операции ( ) и { } задают обычную йорданову пару.

Замечание 2.2. Если существует взаимно однозначное соответствие F: $U_{-1} \to U_1$ такое, что $F(x, Fu, y) = \{Fx, u, Fy\}$, то операция $[xuy] = (x, Fu, y)$ является обобщенно-йордановой трилинейной операцией (см. [8]); если при этом выполняются условия (2.3), то $[xuy]$ — йорданова тройная система.

Йордановы тройные системы и йордановы пары рассматривались во многих работах (см., например, [9—13]).

Каждой градуированной алгебре Ли можно однозначно поставить в соответствие обобщенно-йорданову пару. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть* $G=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}U_i$ — *градуированная алгебра Ли. Тогда пространства* U_{-1}, U_1 *и две трилинейные операции*

$$(U_{-1},\ U_1,\ U_{-1})=[[U_{-1},\ U_1],\ U_{-1}],\tag{2.4}$$

$$\{U_1,\ U_{-1},\ U_1\}=[[U_1,\ U_{-1}],\ U_1]\tag{2.5}$$

образуют обобщенно-йорданову пару, обозначаемую $J(G)$.

Доказательство. Справедливость тождеств (2.1) и (2.2) легко следует, если преобразовать выражения

$$(u\alpha(x\beta y))=[[u,\alpha],[[x,\beta],y]],\quad \{\lambda x\{\alpha y\beta\}\}=[[\lambda,x],[[\alpha,y],\beta]],$$

учитывая, что $\mathrm{ad}_{[u,\alpha]}$ и $\mathrm{ad}_{[\lambda,b]}$ являются дифференцированиями алгебры Ли G.

2.2. Алгебры Ли $\mathfrak{L}(J)$ и $\widetilde{\mathfrak{L}(J)}$. Отображение, обратное к отображению $G\to J(G)$, конечно, неоднозначное. Однако (с некоторыми ограничениями) его можно описать с помощью одной «максимальной» алгебры Ли $\widetilde{\mathfrak{L}(J)}$; при этом «минимальная» алгебра Ли есть действие функтора $\mathfrak{L}$ на обобщенно-йорданову пару J.

Пусть $J=(V_{-1},\ V_1,\ (\ ),\ \{\ \})$ — обобщенно-йорданова пара. *Алгеброй Ли* $\mathfrak{L}(J)$ назовем алгебру Ли $\mathfrak{L}(\omega)$, где ω — алгебраическая система, определенная на пространстве V_{-1} и состоящая из всех билинейных операций на V_{-1} вида $A_\alpha(x,y)=(x\alpha y)$ $\forall\alpha\in V_1$.

Для описания алгебры Ли $\mathfrak{L}(J)$ определим сначала более широкую (в некотором смысле универсальную) градуированную алгебру Ли $\mathfrak{L}(J)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}U_i$. Алгебра Ли $\widetilde{\mathfrak{L}(J)}$ есть подалгебра универсальной алгебры $\tilde{U}^{(n)}$, где $n=\dim V_{-1}$.

Подалгебра $U_-=\sum\limits_{i=-1}^{-\infty}U_i$ алгебры $\widetilde{\mathfrak{L}(J)}$ есть свободная алгебра Ли, порожденная n-мерным подпространством U_{-1}, т. е. совпадает с подалгеброй $\tilde{U}_-$.

В подалгебре $U_+=\sum\limits_{i=0}^{\infty}U_i$ подпространство U_0 составлено всеми линейными операторами вида

$$L_{a\alpha}(x)=(a\alpha x),\ a,\ x\in V_{-1}\equiv U_{-1},\ \alpha\in V_1.\tag{2.6}$$

Подпространства U_k, $k=1,\ 2,\ \ldots$, составлены всеми $(k+1)$-линейными операторами, действующими на $V_{-1}\equiv U_{-1}$ со значениями в V_{-1} вида

$$A_T(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{k+1})=(x_k,\ T(x_1,\ \ldots,\ x_{k-1}),\ x_{k+1}),\tag{2.7}$$

где $T(x_1,\ \ldots,\ x_{k-1})$ — $(k-1)$-линейный оператор, действующий на V_{-1} со значениями в V_1. В частности, подпространство U_1 составлено билинейными операторами вида

$$A_\alpha(x_1,x_2)=(x_1,\ \alpha,\ x_2),\ \alpha\in V_1,\ x_1,\ x_2\in V_{-1}.$$

Лемма 2.1. *Подпространство* $\widetilde{\mathfrak{L}(J)}$ *является подалгеброй универсальной градуированной алгебры Ли* $\tilde{U}^{(n)}$.

Доказательство. Утверждение леммы является частным случаем леммы 12 [2], где построена «максимальная» градуированная алгебра Ли с заданной тройкой подпространств U_{-1}, U_0, U_1 и заданными коммутаторами между ними, для которых выполнены необходимые соотношения.

В остальной части этого пункта дадим несколько другое, более конкретное определение алгебры Ли $\widetilde{\mathfrak{L}(J)}$. Для этого вначале явно вычислим коммутаторы операторов вида (2.6) и (2.7).

Во-первых, заметим, что линейные операторы (2.6) замкнуты относительно операции коммутирования. Полагая в формуле (2.1) $u=a$, $x=b$, получим

$$[L_{a\alpha},\ L_{b\beta}]=L_{(a\alpha b),\beta}-L_{b,\{\alpha a\beta\}}. \tag{2.8}$$

Далее, коммутируя линейный оператор $L_{a\alpha}$ с оператором (2.7) по формуле (1.4) и пользуясь соотношением (2.1), имеем

$$\begin{aligned}
&[L_{a\alpha},A](x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1})=(a,\alpha,(x_k,T(x_1,\ldots,x_{k-1}),x_{k+1})-\\
&-((a,\alpha,x_k),T(x_1,\ldots,x_{k-1}),x_{k+1})-(x_k,T(x_1,\ldots,x_{k-1}),(a,\alpha,x_{k+1}))-\\
&\qquad-\sum_{i=1}^{k-1}(x_k,T(x_1,\ldots,x_{i-1},(a\alpha x_i),x_{i+1},\ldots,x_{k-1}),x_{k+1})=\\
&\qquad\qquad=-(x_k,\{\alpha,a,T(x_1,\ldots,x_{k-1})\},x_{k+1})-\\
&\qquad-\sum_{i=1}^{k-1}(x_k,T(x_1,\ldots,x_{i-1},(a\alpha x_i),x_{i+1},\ldots,x_{k-1}),x_{k+1}).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что коммутатор есть линейный оператор вида (2.7) $A_{\widetilde{T}}$, причем внутренний оператор $\widetilde{T}$, который мы обозначим $\widetilde{T}=[L_{a\alpha},T]$, имеет вид

$$\begin{aligned}
[L_{a\alpha},T](x_1,\ldots,x_{k-1})=-\{\alpha,a,T(x_1,\ldots,x_{k-1})\}-\\
-\sum_{i=1}^{k-1}T(x_1,\ldots,(a\alpha x_i),\ldots,x_{k-1}).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Покажем теперь, что коммутатор двух операторов вида (2.7) A_T и A_S есть снова оператор такого же вида A_P, причем внутренний оператор, который мы обозначим $P=-[T,C]$*), определяется формулой

$$[T,S]=T*S-S*T. \tag{2.10}$$

При этом

$$\begin{aligned}
&(T*S)(x_1,x_2,\ldots,x_{k+l+1})=\\
&=\sum_{i_1<\ldots<i_{k+1}\leqslant k+l+1}\{T(x_{i_1},\ldots,x_{i_k}),x_{i_{k+1}},S(x_1,\ldots\\
&\qquad\ldots,\widehat{x}_{i_1},\ldots,\widehat{x}_{i_{k+1}},\ldots,x_{k+l+1})\}+\\
&+\sum_{p=k+2}^{k+l+1}\ \sum_{i_1<\ldots<i_{k+1}\leqslant p-1}S(x_1,\ldots,\widehat{x}_{i_1},\ldots,\widehat{x}_{i_{k+1}},\ldots\\
&\ldots,x_{p-1},(x_{i_{k+1}},T(x_{i_1},\ldots,x_{i_k}),x_p),x_{p+1},\ldots,x_{k+l+1}),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

где знак $\sum\limits_{i_1<\ldots<i_{k+1}\leqslant t}$ означает суммирование по всем возрастающим наборам из $k+1$ индексов, не больших t, а символ $\widehat{x}_{i_j}$ означает, что в последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_t$ член с номером i_j пропущен.

Приведем примеры. Пусть α, $\beta\in V_1$, $A(x)$, $B(x)$ — линейные, $C(x_1, x_2)$ — билинейный оператор на V_{-1} со значениями в V_1. Тогда

$$(\alpha*\beta)(x)=\{\alpha x\beta\},$$

$$(A*\alpha)(x_1,x_2)=\{A(x_1),x_2,\alpha\},$$

*) Знак «—» поставлен для большей естественности последующих формул.

$$(C*\alpha)(x_1, x_2, x_3) = \{C(x_1, x_2), x_3, \alpha\},$$
$$(T*\alpha)(x_1, \ldots, x_k) = \{T(x_1, \ldots, x_{k-1}), x_k, \alpha\},$$
$$(\alpha * A)(x_1, x_2) = \{\alpha x_1 A(x_2)\} + \{\alpha x_2 A(x_1)\} + A((x_1 \alpha x_2)),$$
$$(\alpha * C)(x_1, x_2, x_3) = \{\alpha x_1 C(x_2, x_3)\} + \{\alpha x_2 C(x_1, x_3)\} + \{\alpha x_3 C(x_1, x_2)\} + \\ + C((x_1\alpha x_2), x_3) + C(x_1, (x_2 \alpha x_3)) + C(x_2, (x_1 \alpha x_3)),$$
$$(\alpha * T)(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} \{\alpha x_i T(x_1, x_2, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_k)\} + \\ + \sum_{p=2}^{k+1} \sum_{i \leqslant p-1} T(x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_{p-1}, (x_i \alpha x_p), x_{p+1}, \ldots, x_k),$$
$$(A*B)(x_1, x_2) = \{A(x_1) x_2 B(x_3)\} + \{A(x_1) x_3 B(x_2)\} + \\ + \{A(x_2) x_3 B(x_1)\} + B((x_2 A(x_1) x_3)),$$
$$(A*C)(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{A(x_1) x_2 C(x_3, x_4)\} + \{A(x_1) x_3 C(x_2, x_4)\} + \\ + \{A(x_1) x_4 C(x_2, x_3)\} + \{A(x_2) x_3 C(x_1, x_4)\} + \{A(x_2) x_4 C(x_1, x_3)\} + \\ + \{A(x_3) x_4 C(x_1, x_2)\} + C((x_2 A(x_1) x_3), x_4) + C(x_3, (x_2 A(x_1) x_4)) + \\ + C(x_2, (x_3 A(x_1) x_4) + C(x_1, (x_3 A(x_2) x_4)),$$
$$(C*A)(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{C(x_1, x_2) x_3 A(x_4)\} + \{C(x_1, x_2) x_4 A(x_3)\} + \\ + \{C(x_1, x_3) x_4 A(x_2)\} + \{C(x_2, x_3) x_4 A(x_1)\} + A((x_3 C(x_1, x_2) x_4)).$$

Докажем формулы (2.10), (2.11). Для этого рассмотрим оператор

$$(A_S \square A_T)(x_1, x_2, \ldots, x_{k+l+3}) = \\ = \sum_{p=k+2}^{k+l+1} \sum_{i_1 < \ldots < i_{k+1} \leqslant p-1} \big(x_{k+l+2} S\big(x_1, \ldots, \widehat{x}_{i_1}, \ldots, \widehat{x}_{i_{k+1}}, \ldots \\ \ldots, x_{p-1}, \big(x_{i_{k+1}}, T\big(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\big), x_p\big), x_{p+1}, \ldots, x_{k+l+1}\big), x_{k+l+3}\big) + \\ + \sum_{i_1 < \ldots < i_{k+1} \leqslant k+l+1} \big(x_{i_{k+1}}, T\big(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\big), x_{k+l+2}\big), S\big(x_1, \ldots \\ \ldots \widehat{x}_{i_1}, \ldots, \widehat{x}_{i_{k+1}}, x_{k+l+1}\big), x_{k+l+3}\big) + \\ + \sum_{i_1 < \ldots < i_{k+1} \leqslant k+l+2} \big(x_{k+l+2}, S\big(x_1, \ldots, \widehat{x}_{i_1}, \ldots, \widehat{x}_{i_{k+1}}, \ldots \\ \ldots, x_{k+l+1}\big), \big(x_{i_{k+1}} T\big(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\big), x_{k+l+3}\big)\big).$$

В отличие от (1.6) здесь порядки оператора A_T и A_S равны $k+2$ и $l+2$, а не k и l. С учетом этого обстоятельства первое слагаемое суммы — это члены формулы (1.6) при $s = 0, 1, \ldots, k-3$, второе — при $s = k-2$, третье — при $s = k-1$.

Разобьем третье слагаемое еще на два, полагая $i_{k+1} < k + l + 2$ и $i_{k+1} = k + l + 2$. Тогда оно представится в виде

$$\sum_{i_1 < \ldots < i_{k+1} \leqslant k+l+1} \big(x_{k+l+2}, S\big(x_1, \widehat{x}_{i_1}, \ldots, \widehat{x}_{i_{k+1}}, \ldots \\ \ldots, x_{k+l+1}\big), \big(x_{i_{k+1}}, T\big(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\big), x_{k+l+3}\big)\big) + \\ + \sum_{i_1 < \ldots < i_k \leqslant k+l+1} \big(x_{k+l+1}, S\big(x_1, \ldots \widehat{x}_{i_1}, \ldots, \widehat{x}_{i_k}, \ldots \\ \ldots, x_{k+l}\big), \big(x_{k+l+2} T\big(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\big) x_{k+l+3}\big)\big).$$

Теперь учтем, что коммутатор $[A_S, A_T]$ равен $A_S \square A_T - A_T \square A_S$. Поэтому, меняя ролями операторы S и T, последнее слагаемое можно заменить на выражение

$$-\sum_{i_1<\ldots<i_{k+1}\leqslant k+l+1}\left(x_{i_{k+1}}, T\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\right), \left(x_{k+l+2}, S\left(x_1, \ldots\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\ldots, \widehat{x}_{i_1}, \ldots, \widehat{x}_{i_{k+1}}, \ldots, x_{k+l+1}\right), x_{k+l+3}\right)\right).$$

Применим далее формулу (2.1) при $U = x_{i_{k+1}}$, $\alpha = T$, $x = x_{k+l+2}$, $\beta = S$, $y = x_{k+l+3}$; тогда получим, что с учетом указанной замены $A_S \square A_T$ равно $(x_{k+l+2}, B, x_{k+l+3})$, где B есть выражение (2.11). Это заканчивает доказательство формулы (2.10), так как

$$[A_S, A_T] = A_S \square A_T - A_T \square A_S = -A_{-[S,T]}.$$

Теперь запишем формулы коммутирования в универсальной алгебре Ли операторов (2.6), (2.7) с ассоциативным элементом $a_1a_2\ldots a_l$. При этом будем обозначать операторы вида (2.7) через $T(x_1, \ldots, x_{k-1})$. Согласно (1.2), (1.3)

$$[L_{a\alpha}, a_1a_2\ldots a_l] = \{a\alpha a_1\} \circ a_2 \circ \ldots \circ a_l, \tag{2.12}$$

$$[T, a_1a_2\ldots a_l] = \begin{cases} T(a_1, \ldots, a_l, x_1, \ldots, x_{k-l-1}), & l \leqslant k-1, \\ L_{a_k}, \quad T(a_1, \ldots, a_{k-1}), & l = k, \\ -\{a_kT(a_1, \ldots, a_{k-1})a_{k+1}\} \circ a_{k+2} \circ \ldots \circ a_l, & l > k. \end{cases} \tag{2.13}$$

Тем самым определены коммутаторы и с любыми элементами свободной алгебры Ли.

Для формулировки теоремы обозначим через V_1' фактор-пространство $V_1' = {}^{V_1}\big/_{V_1^0}$, где

$$V_1^0 = \{\alpha \in V_1 \,|\, (x_1\alpha x_2) = 0 \ \ \forall x_1, x_2 \in V_{-1}\}.$$

Тогда пространство U_i, $i = 1, 2, \ldots$, отождествляется с пространством $(i-1)$-линейных операторов на пространстве V_{-1} со значениями в V_1'. При этом коммутаторы, как вытекает из формул (2.9)—(2.13), определяются в терминах этих же операторов.

Обозначим далее через W алгебру Ли, определенную на градуированном пространстве

$$W = \ldots \dotplus W_{-k} \dotplus \ldots \dotplus W_{-1} \dotplus W_0 \dotplus W_1 \dotplus \ldots \dotplus W_l \dotplus \ldots,$$

в котором подпространство $W_- = \sum_{i=-1}^{-\infty} W_i$ совпадает со свободной алгеброй Ли, порожденной подпространством $W_{-1} \equiv V_{-1}$, подпространство W_0 есть подпространство линейных операторов вида (2.6), а подпространство W_k, $k > 0$, есть подпространство всех $(k-1)$-линейных операторов на V_{-1} со значениями V_1'; коммутаторы определены формулами (2.9)—(2.13).

Из предыдущих выкладок и леммы 2.1 вытекает

Теорема 2.2. *Алгебра Ли W изоморфна алгебры Ли $\widetilde{\mathfrak{L}}(J)$.*

2.3. Алгебра Ли $\mathfrak{L}(J)$. С помощью $\widetilde{\mathfrak{L}(J)}$ легко описать и алгебру $\mathfrak{L}(J)$. Для этого обозначим через U_+' подалгебру, порожденную в алгебре $\widetilde{\mathfrak{L}(J)}$ подпространствами U_0 и U_1. (Фактически вся подалгебра U_+' порождается одним пространством U_1, за исключением $U_0' \equiv U_0$.) Через $U^* = \widetilde{U}_- \dotplus U_+'$ обозначим подалгебру алгебры $\widetilde{\mathfrak{L}}(J)$, где $\widetilde{U}_- = \sum_{i=-1}^{-\infty} \widetilde{U}_i$ — свободная алгебра Ли.

Из определений алгебры $\mathfrak{L}(J)$ и $\mathfrak{L}$-функтора вытекает следующая

Теорема 2.3. *Пусть J — обобщенно-йорданова пара. Алгебра Ли $\mathfrak{L}(J)$ есть фактор-алгебра* $\mathfrak{L}(J) = U^*/_D$, *где* $D = \sum_{i=-2}^{-\infty} D_i$ — *максимальный идеал алгебры* U^*, *лежащий в подалгебре* $\sum_{i=-2}^{-\infty} U_i$.

Из теоремы 2.3 и формул коммутирования (2.10), (2.11) очевидным образом вытекают такие следствия.

Следствие 2.1. *Алгебра Ли $\mathfrak{L}(J)$ имеет вид*

$$\ldots \dotplus U_{-k} \dotplus \ldots \dotplus U_{-1} \dotplus U_0 \dotplus U_1 \tag{2.14}$$

(т. е. обрывается при $U_2 = 0$) *в том и только том случае, если*

$$\{\alpha x \beta\} - \{\beta x \alpha\} = 0 \quad \forall \alpha,\ \beta \in V_1,\ x \in V_{-1}. \tag{2.15}$$

Алгебра Ли $\mathfrak{L}(J)$ имеет вид

$$\ldots \dotplus U_{-k} \dotplus \ldots \dotplus U_{-1} \dotplus U_0 \dotplus U_1 \dotplus U_2 \tag{2.16}$$

(т. е. обрывается при $U_3 = 0$) *в том и только том случае, если*

$$\{\gamma x_1 T(x_2)\} + \{\gamma x_2 T(x_1)\} + T\{(x_1 \gamma x_2)\} - \{T(x_1) x_2 \gamma\} = 0 \quad \forall \gamma,\ T,\ x_i, \tag{2.17}$$

где $T(x) \equiv T_{\alpha\beta}(x) = \{\alpha x \beta\} - \{\beta x \alpha\}$.

Приведем еще рекуррентное соотношение, выражающее условие «обрыва» в общем виде. Обозначим через

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_{t-1}) \equiv T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t}(x_1, x_2, \ldots, x_{t-1}) = 0 \ \forall \alpha_i \in V_1, \quad x_i \in V_{-1}$$

соотношение, необходимое и достаточное для того, чтобы алгебра Ли $\mathfrak{L}(J)$ имела вид

$$\ldots \dotplus U_{-k} \dotplus \ldots \dotplus U_{-1} \dotplus U_0 \dotplus U_1 \dotplus \ldots \dotplus U_{t-1}.$$

Следствие 2.2. *Алгебра Ли $\mathfrak{L}(J)$ имеет вид*

$$\ldots \dotplus U_{-k} \dotplus \ldots \dotplus U_{-1} \dotplus U_0 \dotplus U_1 \dotplus \ldots \dotplus U_t$$

(т. е. обрывается при $U_{t+1} = 0$) *в том и только том случае, если*

$$\sum_{i=1}^{t} \{\alpha_{t+1}, x_i, T(x_1, x_2, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_t)\} +$$
$$+ \sum_{s=2}^{t} \sum_{i<s} T(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{s-1}, (x_i \alpha_{t+1} x_s), x_{s+1}, \ldots, x_t) -$$
$$- \{T(x_1, \ldots, x_{t-1}) x_t \alpha_{t+1}\} = 0 \ \forall \alpha_{t+1}, \quad T, \quad x_i. \tag{2.18}$$

2.4. Квадратичный центр. Подчеркнем, что алгебра Ли $\mathfrak{L}(J)$, вообще говоря, зависит от перемены индексов у подпространств V_{-1} и V_1. Это связано с наличием подпространства $V_1^0 \subset V_1$.

Определение 2.9. *Квадратичным центром обобщенно-йордановой пары* $J(V_{-1}, V_1, (\ ), \{\ \})$ назовем пару подпространств

$$\begin{aligned} V_{-1}^0 &= \{x \in V_- \mid \{\alpha x \beta\} = 0 \ \ \forall \alpha, \beta \in V_1\}, \\ V_1^0 &= \{\alpha \in V_1 \mid (x \alpha y) = 0 \ \ \forall x, y \in V_{-1}\}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Обозначим через $J' = (V'_{-1}, V'_1, (\ )', \{\ \}')$ обобщенно-йорданову пару, которая возникает из обобщенно-йордановой пары $J = (V_{-1}, V_1, (\ ), \{\ \})$ при замене индексов: $V'_{-1} \equiv V_1$, $V'_1 \equiv V_{-1}$, $(\ )' \equiv \{\ \}$, $\{\ \}' \equiv (\ )$.

Теорема 2.4. *Отображение F: $U'_1 \to U_{-1}$, $U'_{-1} \to U_1$ определяет градуированный изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{L}(J') = \sum U'_i$ и $\mathfrak{L}(J) = \Sigma U_i$ в том и только том случае, если квадратичный центр операции J равен нулю.*

Доказательство. Отображение F может быть взаимно однозначным только, если квадратичный центр равен нулю. В противном случае размерность хотя бы одного из подпространств U'_{-1} или U'_1не совпадает с размерностью соответствующего подпространства. Если же квадратичный центр равен нулю, то отображение F является (по определению) изоморфизмом обобщенно-йордановых пар J и J', а несимметричность в определении подалгебр $\sum_{i=-1}^{\infty} U_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} U_i$ алгебры $\mathfrak{L}(J)$ заключается в возможном существовании идеала $D = \sum_{i=-1}^{-\infty} D_i \subset \mathfrak{L}(J)$ (где $D_{-1} \equiv \equiv V^0_{-1}$). Если квадратичный центр равен нулю, то и $D=0$. Следовательно, алгебры Ли $\mathfrak{L}(J)$ и $\mathfrak{L}(J')$ изоморфны.

Замечание 2.3. Конечно, можно сделать определение $\mathfrak{L}(J)$ симметричным по отношению к замене индексов за счет расширения $\mathfrak{L}(J)$ с помощью идеала $D = \sum_{i=1}^{\infty} D_i$, порожденного квадратичным центром, что и делается для обычных йордановых пар. Однако это не соответствовало бы общему определению $\mathfrak{L}$-функтора.

Здесь уместно отметить также следующий факт. Если внимательно проследить построение алгебры Ли $\widetilde{\mathfrak{L}(J)}$, то можно убедиться в том, что использовалось только тождество (2.1) и не использовалось тождество (2.2). Однако после построения этой алгебры тождество (2.2) восстанавливается с помощью теоремы 2.1. Факторизация по компоненте V_1^0 квадратичного центра, которая при этом происходит, не влияет на справедливость исходного тождества в силу самого определения квадратичного центра. Таким образом, из доказательства леммы 2.1 вытекает

Теорема 2.5. *В определении обобщенно-йордановой пары каждое из тождеств* (2.1) *или* (2.2) *является следствием другого тождества.*

2.5. Описание градуированных алгебр Ли с данной обобщенно-йордановой парой. С помощью алгебры Ли $\widetilde{\mathfrak{L}(J)}$ можно (с некоторыми ограничениями) описать градуированные алгебры Ли, соответствующие одной и той же обобщенно-йордановой паре.

Согласно [5], *алгеброй Ли типа А* будем называть такую градуированную алгебру Ли $G = \sum_{-\infty}^{\infty} U_i$, для которой 1) не существует идеалов в подалгебре $U_+ = \sum_{i=0}^{\infty} U_i$, 2) подалгебра $U_- = \sum_{i=-1}^{-\infty} U_i$ порождена подпространством U_{-1}. Через $J(G)$ обозначим обобщенно-йорданову пару, построенную по алгебре Ли G в теореме 2.1.

Теорема 2.6. *Пусть J — обобщенно-йорданова пара и $G = \sum_{-\infty}^{\infty} U_i$ — градуированная алгебра Ли типа A, для которой $J(G) = J$. Тогда существуют градуированная подалгебра $U^* = \sum_{-\infty}^{\infty} U_i^*$ алгебры Ли $\widetilde{\mathfrak{L}(J)}$ (у которой $U_-^* = \sum_{i=-1}^{-\infty} U_i^*$ — свободная алгебра Ли, а $U_+^* = \sum_{i=0}^{\infty} U_i^*$ изоморфна $G_+ = \sum_{i=0}^{\infty} U_i'$) и ее градуированный идеал $D = \sum_{i=-2}^{-\infty} D_i \subset U^*$ такие, что $G = {}^{U^*}/_D$.*

Доказательство. Эта теорема является частным случаем теоремы об универсальности $\tilde{U}^{(n)}$ (см. § 1 и [2, теорема 2]). Надо только проверить, что при отображении (1.7) элементы $a \in U_k$ переходят в операторы вида (2.7). Но это очевидно, так как согласно (2.4) $[[a, x_1], x_2] \equiv \equiv (x_1 a x_2)$, а потому

$$[[A(x_1, \ldots, x_k), x_{k+1}], x_{k+2}] \equiv (x_{k+1} A(x_1, \ldots, x_k) x_{k+2}).$$

Теорема доказана.

Отметим, что теорема 2.6 в другой формулировке фактически доказана в [2, лемма 10].

2.6. Простые обобщенно-йордановы пары.

Определение 2.3. *Минус-идеалом обобщенно-йордановой пары* $J=(V_{-1}, V_1, (\ ), \{\ \})$ будем называть такое подпространство $W_{-1}\subset V_{-1}$, что

$$\{W_{-1}, V_1, V_{-1}\}\subset W_{-1},\quad (V_{-1}, V_1, W_{-1})\subset W_{-1}. \tag{2.20}$$

Аналогично *плюс-идеал* — это такое подпространство $W_1\subset V_1$, что

$$\{W_1 V_{-1} V_1\}\subset W_1,\ \{V_1, V_{-1}, W_1\}\subset W_1. \tag{2.21}$$

Идеал будем называть *собственным*, если он отличен от нуля и не совпадает с подпространством V_{-1} или V_1.

Справедлива

Теорема 2.7. *Компонента V_{-1}^0 квадратичного центра является минус-идеалом, а компонента V_1^0 — плюс-идеалом.*

Доказательство. Следует проверить соотношения

$$(V_{-1}^0, V_1, V_{-1})\subset V_{-1}^0,\quad (V_{-1}, V_1, V_{-1}^0)\subset V_{-1}^0,$$

которые означают согласно (2.19)

$$\{\alpha(a\lambda x)\beta\}=0,\quad \{\alpha(x\lambda a)\beta\}=0\quad \forall\alpha,\ \beta,\ \lambda\in V_1,\quad x\in V_{-1},\quad a\in V_{-1}^0. \tag{2.22}$$

Применяя (2.2), а затем (2.19), получаем

$$\{\alpha(a\lambda x)\beta\}=\{\{\lambda a\alpha\}x\beta\}+\{\alpha x\{\lambda a\beta\}\}-\{\lambda a\{\alpha x\beta\}\}=0,$$
$$\{\alpha(x\lambda a)\beta\}=\{\{\lambda x\alpha\}a\beta\}+\{\alpha a\{\lambda x\beta\}\}-\{\lambda x\{\alpha a\beta\}\}=0,$$

т. е. справедливо (2.22). Аналогично проверяется, что V_1^0 является плюс-идеалом.

Определение 2.4. Обобщенно-йорданову пару будем называть *простой*, если у нее нет собственных идеалов.

Оказывается, что для простоты обобщенно-йордановой пары достаточно отсутствия идеалов какого-либо знака. Этот факт вытекает из следующей теоремы о простоте алгебры Ли $\mathfrak{L}(J)$.

Теорема 2.8. *Алгебра Ли $\mathfrak{L}(J)$ градуированно проста тогда и только тогда, когда обобщенно-йорданова пара не содержит минус-идеалов.*

Доказательство. Согласно [2], алгебра Ли типа A $U=\sum_{-\infty}^{\infty} U_i$ градуированно проста в том и только том случае, если

$$[U_1, U_{-1}]=U_0, \tag{2.23}$$

$$[[U'_{-1}, U_1], U_{-1}]\not\subset U'_{-1} \tag{2.24}$$

для каждого приводимого относительно подалгебры U_0 подпространства $U'_{-1}\subset U_{-1}$.

Условие (2.23) выполняется для алгебры $\mathfrak{L}(J)$ по построению (2.24) приводимость U'_{-1} относительно подалгебры U_0 означает (см. (2.4))

$$(U_{-1}, U_1, U'_{-1})\subset U'_{-1}. \tag{2.25}$$

Но тогда согласно (2.24) и (2.4) $(U'_{-1}, U_1, U_{-1})\not\subset U'_{-1}$, т. е. если выполнено одно из условий (2.20), то обязательно не выполняется другое условие. Теорема доказана.

Следствие 2.3. *Для простоты обобщенно-йордановой пары достаточно отсутствия собственных минус-идеалов и равенства нулю квадратичного центра.*

Доказательство. Рассмотрим наряду с данной обобщенно-йордановой парой $J=(V_{-1}, V_1, (\ ), \{\ \})$ обобщенно-йорданову пару $J'=(V'_{-1}, V'_1, (\ )', \{\ \}')$, которая возникает из J при замене индексов: $V'_{-1}=V_1$, $V'_1=V_{-1}$, $\{\ \}'=(\ )$, $(\ )'=\{\ \}$. Так как квадратичный центр равен нулю, то по теореме 2.4 алгебра Ли $\mathfrak{L}(J')$ градуированно изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{L}(J)$.

В силу теоремы 2.8 алгебра Ли $\mathfrak{L}(J)$, а следовательно, и алгебра $\mathfrak{L}(J')$ градуированно просты. Но из градуированной простоты алгебры $\mathfrak{L}(J')$ вытекает отсутствие собственных минус-идеалов операции J', т. е. собственных плюс-идеалов операции J. Следствие доказано.

§ 3. КЛАССЫ КОНСЕРВАТИВНЫХ АЛГЕБР С ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ АЛГЕБРОЙ ЛИ $(\mathfrak{L}(A))_0$

В этом параграфе для каждой консервативной алгебры A с левой единицей строится серия (вообще говоря, неизоморфных) консервативных алгебр A_λ, для которых $(\mathfrak{L}(A_\lambda))_0=(\mathfrak{L}(A))_0$.

3.1. Консервативные алгебры.

Определение 3.1. Алгебра $A(x, y)\equiv xy$ называется *консервативной*, если существует (вообще говоря, другая) алгебра $A^*(x, y)\equiv\equiv x*y$ такая, что

$$[L_b, [L_a, A]] = -[L_{A^*(a,b)}, A] \quad \forall a, b, \tag{3.1}$$

где $L_a(x)\equiv ax$, а операция коммутирования между линейным и билинейным операторами определена по формуле (1.4).

Консервативными являются ассоциативные, альтернативные, йордановы (в этих случаях $A^*(a, b)=A(a, b)$) и многие другие алгебры.

Замечание 3.1. Алгебра $A^*(x, y)$ определена с точностью до алгебры со значениями в якобиевом подпространстве N.

По определению якобиево подпространство алгебры составлено такими элементами a, для которых

$$a(xy)-(ax)y-x(ay)=0$$

или, что то же самое,

$$[L_a, A]=0. \tag{3.2}$$

Отметим, что во многих случаях якобиево подпространство N является нулевым (например, когда A — алгебра с единицей или когда A — простая консервативная алгебра конечного порядка). Тогда алгебра A^* определяется однозначно.

Если тождество (3.1) проальтернируем по a и b, а затем воспользуемся тождеством Якоби, то получим

$$[[L_a, L_b] - L_{A^*(a,b)-A^*(b,a)}, A] = 0. \tag{3.3}$$

Соотношение (3.3) означает, что линейные преобразования

$$D_{a,b}=[L_a, L_b]-L_{a*b-b*a} \tag{3.4}$$

являются дифференцированиями алгебры A; в [8] дифференцирования (3.4) названы внутренними дифференцированиями.

Далее понадобится справедливое в консервативных алгебрах следующее тождество:

$$[L_b, [L_a, L_c]]-[L_a, L_{bc}]-[L_b, L_{ac}]-[L_c, L_{a*b}]=L_{(a*b)c-a(bc)}. \tag{3.5}$$

Это тождество возникает из (3.1), если прокоммутировать левую и правую части тождества (3.1) с элементом c, а затем воспользоваться тождеством Якоби и тем, что по определению $[A, c]=L_c$, $[L_a, c]=ac$.

Для консервативных алгебр начальные компоненты алгебры Ли $\mathfrak{L}(A)$ устроены особенно просто. А именно (см. [8]) подалгебра $U_0\equiv(\mathfrak{L}(A))_0$

составлена всеми линейными операторами L_a и $[L_b, L_c]$, а подпространство $U_1 \equiv (\mathfrak{L}(A))_1$ состоит (если A — алгебра с левой единицей) из всех билинейных операторов вида $[L_a, A]$.

Отметим, что из (3.5) вытекает замкнутость линейных операторов L_a и $[L_b, L_c]$ относительно операции коммутирования, а из (3.1) — замкнутость билинейных операторов $[L_a, A]$ относительно действия подалгебры U_0.

Дадим более детальное описание начальных компонент алгебры Ли $\mathfrak{L}(A) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} U_i$. Сначала рассмотрим алгебру Ли U_0.

Предложение 3.1. *Алгебра Ли* $U_0 \equiv (\mathfrak{L}(A))_0$ *есть сумма*

$$U_0 = \{L_a\} + \{D\}, \tag{3.6}$$

где $\{L_a\}$ — *множество левых сдвигов*; $\{D\}$ — *множество внутренних дифференцирований, с операцией коммутирования*

$$\begin{aligned} &[D, L_a] = L_{D(a)},\\ &[L_a, L_b] = D_{a,b} + L_{a*b-b*a},\\ &[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Замечание 3.2. Если якобиево пространство алгебры равно нулю, то ни один левый сдвиг не является дифференцированием. Тогда сумма в (3.6) прямая и из формул (3.7) следует, что U_0 есть алгебра Ли редуктивного однородного пространства со стационарной подалгеброй $\{D\}$ и дополнительной плоскостью $\{L_a\}$. В противном случае это может быть неверно.

Доказательство предложения 3.1. Первая формула в (3.7) есть переформулировка определения дифференцирования. Вторая совпадает с (3.4). Третья вытекает из определения линейной алгебры Ли.

Тот факт, что алгебра Ли U_0 представима в виде (3.6), следует из того, что U_0 составлена линейными комбинациями L_a и $[L_b, L_c]$, и справедливости второй формулы (3.7).

Теперь рассмотрим и другие начальные компоненты алгебры Ли $\mathfrak{L}(A) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} U_i$.

Теорема 3.1. *Пусть A — консервативная алгебра с левой единицей. Тогда в алгебре Ли $\mathfrak{L}(A)$ пространство U_{-1} является пространством V алгебры A, пространство U_1 отождествляется с фактор-пространством ${}^V/_N$, алгебра Ли U_0 есть сумма $\{L_a\} + \{D\}$, а коммутаторы между указанными пространствами задаются формулами*

$$[D, a] = D(a),\ [L_a, b] = ab, \tag{3.8}$$

$$[D, \tilde{a}] = \widetilde{D(a)},\ [L_a, \tilde{b}] = -\widetilde{b * a}, \tag{3.9}$$

$$[\tilde{a}, b] = D_{a,b} + L_{a*b-b*a-ab}, \tag{3.10}$$

где $a, b \in U_{-1}$, $\tilde{a}, \tilde{b} \in U_1$.

Доказательство. Пространство U_{-1} является пространством V по определению $\mathfrak{L}$-функтора. Пространство U_1 для консервативной алгебры с левой единицей составлено всеми билинейными операторами $[L_a, A]$. Так как по определению якобиева подпространства N имеем

$$a \in N \Leftrightarrow [L_a, N] = 0,$$

то $U_1 \equiv {}^V/_N$. Алгебра Ли U_0 рассмотрена в предположении 3.1.

Формулы (3.8) следуют из определения коммутирования между $\tilde{U}_0$ и $\tilde{U}_{-1}$ (см. (1.2)).

Первая формула в (3.9) вытекает из определения дифференцирования:

$$[D, [L_a, A]] = [[D, L_a], A] - [[D, A], L_a] = [L_{D(a)}, A] - 0 = [L_{D(a)}, A],$$

вторая является переформулировкой основного тождества (2.1).

Формула (3.10) вытекает из определения коммутирования между $\tilde{U}_1$ и $\tilde{U}_{-1}$ (см. (1.2)) и обозначения $D_{a,b}$:

$$[[L_a, A], b] = [L_a, [A, b]] - [A, [L_a, b]] = [L_a, L_b] - [A, ab] =$$
$$= [L_a, L_b] - L_{ab} = D_{ab} + L_{a*b-b*a-ab}.$$

3.2. След элемента $\mathrm{Sp}(x)$ на консервативной алгебре.

Определение 3.2. *Следом на пространстве консервативной алгебры* будем называть линейную функцию

$$\mathrm{Sp}\, a = \frac{1}{\dim A} \widetilde{\mathrm{Sp}}\, L_a, \tag{3.11}$$

где $\widetilde{\mathrm{Sp}}$ — след линейного оператора. Множитель $1/\dim A$ поставлен для того, чтобы для левой единицы e было справедливо $\mathrm{Sp}\, e = 1$.

Теорема 3.2. *Пусть A — консервативная алгебра с умножением $A(x, y) = xy$. Тогда*

$$\mathrm{Sp}(a(bc) - (a * b)c) = 0 \tag{3.12}$$

(т. е. след обобщенного ассоциатора равен нулю).

Доказательство. Рассмотрим след линейных операторов, стоящих в левой и правой частях соотношения (3.5). Так как след коммутатора равен нулю, то получаем (3.12).

Рассматривая билинейную форму

$$(x, y) = \mathrm{Sp}(xy) \tag{3.13}$$

(которая во многих случаях оказывается невырожденной и симметрической), можно получать из (3.12) различные следствия. Отметим только одно из них, являющееся переформулировкой (3.12).

Следствие 3.1. *Пусть метрика* (3.13) *невырождена. Тогда операция умножения в ассоциированной алгебре выражается через умножение в исходной алгебре следующим образом*:

$$x * y = (Y_y)^T x; \tag{3.14}$$

здесь T — операция транспонирования в метрике (3.13).

Ниже понадобится следующий факт. Пусть N — якобиево подпространство алгебры. Тогда

$$\mathrm{Sp}(ax) = 0 \quad \forall a \in N,\ \forall x, \tag{3.15}$$

т. е. якобиево подпространство принадлежит подпространству вырождения билинейной формы (3.13).

Из (3.2) следует $\widetilde{\mathrm{Sp}}\, L_{ax} = \widetilde{\mathrm{Sp}}\, [L_a, L_x] = 0$ $\forall a \in N$, что означает $\mathrm{Sp}(ax) = 0$.

3.3. Симметричность и невырожденность билинейной формы $(x, y) = \mathrm{Sp}(xy)$. В общем случае форма (x, y) может быть и вырожденной и несимметричной. Однако есть широкий класс алгебр, для которых оба свойства имеют место. Это простые консервативные алгебры конечного порядка, включающие йордановы алгебры.

Алгебра A называется *алгеброй конечного порядка*, если алгебра Ли $\mathfrak{L}(A)$ конечномерна. В [8] доказано, что для простой алгебры A конечного порядка алгебра Ли $\mathfrak{L}(A)$ — простая конечномерная градуированная алгебра Ли вида

$$\mathfrak{L}(A) = U_{-k} \dotplus \ldots \dotplus U_{-1} \dotplus U_0 \dotplus U_1 \dotplus \ldots \dotplus U_k. \tag{3.16}$$

При этом градуировка (3.16) устроена следующим образом. Из множества простых корней $\pi=\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ выделено подмножество θ, и подпространство U_e составлено корневыми векторами l_α такими, что корень α имеет сумму координат при элементах из θ равную e:

$$\alpha = \sum_{\alpha_i \in \theta} t_i\alpha_i + \sum_{\alpha_i \in \pi-\theta} S_i\alpha_i, \quad \sum_i t_i = e;$$

кроме того, элементы картановской подалгебры H входят дополнительно в подпространство U_0.

Теорема 3.3. *Пусть A — простая консервативная алгебра конечного порядка. Тогда билинейная форма $(x, y)=\mathrm{Sp}(xy)$ невырождена и симметрична.*

Доказательство будет рассмотрено для случая, когда градуировка (3.16) определяется системой θ, состоящей из одного простого корня α_p; общий случай нескольких простых корней отличается только технически.

Докажем сначала симметричность. Следует показать, что $\mathrm{Sp}(xy)=\mathrm{Sp}(yx)$. Умножение в алгебре A в терминах алгебры $\mathfrak{L}(A)$ имеет вид $A(x, y)\equiv xy\,[[a, x], y]$, $a\in U_1$, $x, y\in U_{-1}$. Поэтому

$$L_{xy-yx}=[a, [[a, x], y]-[[a, y], x]]=[a, [a, [x, y]]].$$

Нужно доказать, что элемент $[a, [a, [x, y]]]\in U_0$ имеет в представлении на $U^{-}{}_1$ след, равный нулю.

По построению $U_0=\lambda h_{\alpha_p}+U_0'$, где h_{α_p} — элемент картановской подалгебры, соответствующий выделенному простому корню α_p, а U_0' — полупростая подалгебра, соответствующая схеме Дынкина исходной алгебры с исключенным корнем α_p. Картановская подалгебра алгебры U_0' натянута на элементы h_{α_i}, $i\neq p$.

Подалгебра U_0' полупроста. Поэтому матрицы, представляющие ее на U_{-1}, имеют след, равный нулю, и для доказательства симметричности формы достаточно показать, что

$$[a, [a, [x, y]]]\in U_0'.$$

А так как вне U_0' лежит только элемент h_{α_p}, то можно ограничиться случаем, когда $[a, [a, [x, y]]]$ принадлежит картановской подалгебре H и показать, что в разложении по h_{α_i} компонента с h_{α_p} равна нулю.

Пространство U_{-1} натянуто на корневые векторы, так что можно положить $x=e_{-\beta}$, $y=e_{-\gamma}$. Тогда для рассмотрения случая $[a, [a, [x, y]]]$ достаточно выделить в разложении элемента $a\in U_1$ по корневым векторам компоненты с e_β и e_γ. Действительно, случай $2\delta=\beta+\gamma$ невозможен, а случай $\beta'+\gamma'=\beta+\gamma$ совпадает с рассматриваемым, если положить $x=e_{-\beta'}$, $y=e_{-\gamma'}$.

Итак, следует рассмотреть выражение

$$[e_\beta[e_\gamma, [e_{-\beta}, e_{-\gamma}]]]+[e_\gamma, [e_\beta, [e_{-\beta}, e_{-\gamma}]]]. \qquad (3.17)$$

Используя тождество Якоби и применяя следующие формулы коммутирования в простых алгебрах Ли:

$$[[e_\beta, e_{-\beta}], e_{-\gamma}] = -\frac{2(\beta, \gamma)}{(\gamma, \gamma)}, \quad [e_\beta, e_{-\beta}] = h_\beta,$$

получаем, что выражение (3.17) равно

$$2(\beta, \gamma)\left(\frac{h_\beta}{(\beta, \beta)} - \frac{h_\gamma}{(\gamma, \gamma)}\right).$$

Если $(\beta, \beta)=(\gamma, \gamma)$, то остается рассмотреть разность $h_\beta-h_\gamma$. Учтем, что элемент картановской подалгебры h_β раскладывается по элементам

$h_{\alpha_1}, h_{\alpha_2}, \ldots, h_{\alpha_n}$ с такими же коэффициентами, с какими корень β раскладывается по простым корням $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. По построению корни β и γ имеют коэффициент 1 при α_p в разложении по простым корням $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Поэтому $h_\beta - h_\gamma$ имеет коэффициент 0 при h_{α_p} в разложении по $h_{\alpha_1}, h_{\alpha_2}, \ldots, h_{\alpha_n}$.

В случае $(\beta, \beta) \neq (\gamma, \gamma)$ выражение (3.17) равно нулю, так как справедлива

Лемма 3.1. *Пусть β и γ — корни разной длины простой алгебры Ли G и в разложении по простым корням одновременно имеют ненулевой коэффициент при каком-либо простом корне. Тогда $\beta + \gamma$ не является корнем.*

Доказательство можно получить непосредственной проверкой корневых систем простых алгебр Ли.

Из леммы вытекает, что при $(\beta, \beta) \neq (\gamma, \gamma)$ коммутатор $[e_{-\beta}, e_{-\gamma}]$ равен нулю, так как β и γ имеют коэффициент 1 при α_p. Следовательно, выражение (3.17) равно нулю. Таким образом, симметричность формы $(x, y) = \mathrm{Sp}(xy)$ доказана.

Для доказательства невырожденности нужно показать, что если элемент $[a, [[a, x], y]$ имеет след, равный нулю для всех x, то $y = 0$. Так как

$$[a, [[a, x], y] = [[a, [a, x]], y] - [[a, y], [a, x]]$$

и вычитаемое, являясь коммутатором двух элементов из U_0, имеет след равный нулю, то достаточно рассмотреть $[[a, [a, x]], y]$.

Для консервативной алгебры с левой единицей коммутаторы $[L_x, A]$ полностью заполняют подпространство U_1 алгебры Ли $\mathfrak{L}(A)$. В нашем случае коммутаторы $[L_x, A]$ имеют вид $[[a, x], a]$. Поэтому осталось доказать, что для простой градуированной алгебры Ли $\sum_{i=-k}^{k} U_i$, градуировка которой получена с помощью θ, состоящего из одного корня α_p, справедливо соотношение

$$[U_1, y] \subseteq U_0' \Rightarrow y = 0. \tag{3.18}$$

Но оно очевидно, так как y есть сумма корневых векторов $e_{-\beta_i}$ таких, что β_i в разложении по простым корням имеют коэффициент 1 при α_p. Полагая в (3.18) $e_{\beta_s} \in U_1$, где $e_{-\beta_s}$ входит с ненулевым коэффициентом λ в разложение y, получим $[e_\beta, y] = \lambda h_{\alpha_p} + \ldots \notin U_0'$, т. е. справедливо (3.18). Теорема в рассматриваемом случае доказана.

3.4. Конструкция алгебр A_λ. Пусть A — консервативная алгебра с умножением $A(x, y) \equiv xy$ и левой единицей e, $\mathrm{Sp}(x)$ — след элемента x. Рассмотрим семейство алгебр

$$A_\lambda(x, y) = x'y, \tag{3.19}$$

где

$$x' = x + \lambda\,\mathrm{Sp}(x)e. \tag{3.20}$$

Покажем, что A_λ — консервативная алгебра при всех $\lambda \neq -1$. Обозначим $\underset{\lambda}{L_a}(x) \equiv A_\lambda(a, x)$, $L_a(x) \equiv ax$. Тогда

$$[\underset{\lambda}{L_a}, A_\lambda] = a'(x'y) - (a'x)'y - x'(a'y).$$

Используя (3.20), получаем $[\underset{\lambda}{L_a}, A_\lambda] = a'(xy) - (a'x)y - x(a'y) - \lambda\,\mathrm{Sp}(a'x)y$, т. е.

$$[\underset{\lambda}{L_a}, A_\lambda] = [L_{a'}, A] - \lambda\,\mathrm{Sp}(a'x)\,y. \tag{3.21}$$

Теперь рассмотрим двойной коммутатор

$$[\underset{\lambda}{L_b}, [\underset{\lambda}{L_a}, A_\lambda]] = [L_{b'}, [L_{a'}, A] - \lambda\,\mathrm{Sp}(a'x)y] = -[L_{A*(a',b')}, A] -$$

$$- \lambda\,\mathrm{Sp}(a'x)(b'y) + \lambda\,\mathrm{Sp}(a'(b'x))y + \lambda\,\mathrm{Sp}(a'x)(b'y).$$

В силу (3.12)

$$\left[\underset{\lambda}{L_b}, \left[\underset{\lambda}{L_a}, A_\lambda\right]\right] = -\left[L_{A^*_\lambda(a',b')}, A\right] + \lambda \operatorname{Sp}(A^*(a', b')x)y. \tag{3.22}$$

Так как согласно определению консервативной алгебры должно быть

$$\left[\underset{\lambda}{L_b}, \left[\underset{\lambda}{L_a}, A_\lambda\right]\right] = -\left[L_{A^*_\lambda(a,b)}, A_\lambda\right], \tag{3.23}$$

то, сравнивая (3.22) с (3.21), находим, что для консервативности алгебры A_λ достаточно тождества

$$A^*_\lambda(a, b)' \equiv A^*(a', b') \,(\operatorname{mod} N), \tag{3.24}$$

где N — якобиево подпространство исходной алгебры. Действительно, если (3.24) точное равенство, то справедливо (3.23).

Если же $A^*(a', b') \in N$, то в правой части (3.22) оба слагаемых равны нулю в силу (3.2), (3.15).

Отметим теперь следующий вспомогательный факт.

Лемма 3.2. *Ассоциированная алгебра A^* может быть выбрана так, что левая единица e консервативной алгебры A является единицей ассоциированной ей алгебры A^*:*

$$A^*(e, x) = A^*(x, e) = x \quad \forall x. \tag{3.25}$$

Доказательство вытекает из основного тождества (3.1), если учесть, что $L_e \equiv E$ — тождественный линейный оператор, для любого билинейного оператора B имеем $[E, B] = -B$, и положить $a = e$ и $b = e$.

Используя (3.25), можно проверить (выкладки опускаем), что точное равенство в (3.24) достигается, если принять

$$A^*_\lambda(a, b) = A^*(a, b) + \lambda \operatorname{Sp}(a)b + \lambda \operatorname{Sp}(b)a - \\ - \frac{\lambda^2}{1+\lambda}\operatorname{Sp}(a)\operatorname{Sp}(b)e - \frac{\lambda}{1+\lambda}\operatorname{Sp}(ab)e \tag{3.26}$$

или, что то же самое,

$$A^*_\lambda(a, b) = A^*(a', b') - \frac{2\lambda^2+\lambda^3}{1+\lambda}\operatorname{Sp}(a)\operatorname{Sp}(b)e - \frac{\lambda}{1+\lambda}\operatorname{Sp}(ab)e.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3.4. *Пусть $A(x, y) \equiv xy$ — консервативная алгебра с левой единицей e. Тогда алгебры A_λ с умножением*

$$A_\lambda(x, y) = xy + \lambda \operatorname{Sp}(x)y$$

являются консервативными алгебрами при всех $\lambda \neq -1$. При этом умножение в ассоциированной алгебре $A^*_\lambda(x, y)$ задается формулой (3.26).

Замечание 3.3. Как уже отмечалось, уравнение (3.24) имеет точное решение:

$$A^*_\lambda(a, b)' = A^*(a', b').$$

Это означает, что отображение Φ: $a \to a'$ осуществляет изоморфизм алгебр $A^*_\lambda(a, b)$ и $A^*(a, b)$, т. е. справедливо

Следствие 3.2. *Ассоциированные алгебры A^*_λ можно выбрать так, что они будут изоморфны друг другу при всех $\lambda \neq -1$.*

Например, если в качестве исходной возьмем йорданову алгебру A, то все ассоциированные алгебры A^*_λ будут изоморфны A, тогда как сами алгебры A_λ будут неизоморфны (см. п. 3.4).

Замечание 3.4. Класс консервативных алгебр A_λ уже нельзя расширить, применяя такую же процедуру. Более точно, справедливо

Предложение 3.2.

$$P_\mu(P_\lambda(A)) = P_{\lambda+\mu+\lambda\mu}(A), \qquad (3.27)$$

где $P_\lambda(A) = A_\lambda$.

Доказательство. Функция следа $\mathrm{Sp}_\lambda(x)$ в алгебре A_λ равна $(1+\lambda)\,\mathrm{Sp}(x)$.

Поэтому, применяя P_μ к алгебре A_λ, получаем

$$P_\mu(A_\lambda)(x, y) = A_\lambda(x, y) + \mu(1+\lambda)\,\mathrm{Sp}(x)\,y =$$
$$= xy + \lambda\,\mathrm{Sp}(x)\,y + \mu(1+\lambda)\,\mathrm{Sp}(x)\,y = A_{\lambda+\mu+\lambda\mu}(x, y),$$

т. е. (3.27).

Из (3.27) следует, что все алгебры класса A_λ могут быть получены действием P_μ на любую фиксированную алгебру A_λ (не обязательно исходную алгебру $A \equiv A_0$).

3.5. Случай $\lambda = -1$. Уравнение (3.24) при $\lambda = -1$, вообще говоря, решения не имеет, т. е. алгебра A_{-1} не является консервативной. Однако тождество, которому удовлетворяет A_{-1}, «почти» совпадает с (3.1).

Определение 3.2. Алгебру B с умножением $B(x, y) = xy$ будем называть *почти консервативной*, если существуют алгебра $B^*(x, y)$ и билинейная форма $\varphi(x, y)$ такие, что

$$[L_b, [L_a, B]] = -[L_{B^*(a,b)}, B] + \varphi(a, b)\,B. \qquad (3.28)$$

Это понятие имеет смысл для алгебр левой единицы. Если же почти консервативная алгебра B обладает левой единицей e, то она консервативна. Действительно, положим $A^*(a, b) = B^*(a, b) + \varphi(a, b)\,e$, тогда из (3.28) вытекает (3.1).

Отметим, что алгебра A_{-1} отличается от остальных алгебр A_λ, в частности, отсутствием левой единицы.

Покажем, что алгебра A_{-1} почти консервативна. Обозначим

$$\tilde{A}^*(a, b) = A^*(a, b) - \mathrm{Sp}(A^*(a, b))\,e.$$

Тогда соотношение (3.22) при $\lambda = -1$ перепишется в виде

$$\Big[\underset{-1}{L_b}, \Big[\underset{-1}{L_a}, A_{-1}\Big]\Big] = -\big[L_{\tilde{A}^*(a',b')}, A\big] - \mathrm{Sp}(\tilde{A}^*(a', b')\,x)\,y +$$
$$+ \mathrm{Sp}(A^*(a', b'))\,A - \mathrm{Sp}(A^*(a', b'))\,\mathrm{Sp}(x)\,y. \qquad (3.29)$$

Теперь обозначим $A^*_{-1}(a, b) \equiv \tilde{A}^*(a', b')$. Тогда из $\mathrm{Sp}(\tilde{A}^*(a', b')) = 0$ вытекает $A^*_{-1}(a, b)' = A^*_{-1}(a, b)$. Поэтому, учитывая (3.21), получаем, что (3.29) совпадает с (3.28) при $B = A_{-1}$, $B^*(a, b) = A^*_{-1}(a, b)$, $\varphi(a, b) = \mathrm{Sp}(A^*(a', b'))$, т. е. алгебра A_{-1} почти консервативна.

Используя (3.25) и $a' = a - \mathrm{Sp}(a)\,e$, нетрудно получить, что

$$A^*_{-1}(a, b) = \tilde{A}(a', b') = A^*(a, b) - \mathrm{Sp}(a)\,b -$$
$$- \mathrm{Sp}(A^*(a, b))\,e + 2\,\mathrm{Sp}(a)\,\mathrm{Sp}(b)\,e, \qquad (3.30)$$

$$\varphi(a, b) = \mathrm{Sp}(A^*(a', b')) = \mathrm{Sp}(A(a, b)) - \mathrm{Sp}(a)\,\mathrm{Sp}(b). \qquad (3.31)$$

Таким образом, доказана

Теорема 3.5. *Пусть* $A(x, y) \equiv xy$ — *консервативная алгебра с левой единицей* e. *Тогда алгебра* A_{-1} *с умножением*

$$A_{-1}(x, y) \equiv xy - \mathrm{Sp}(x)\,y$$

почти консервативна. При этом умножение в ассоциированной алгебре $A^*_{-1}(x, y)$ *и билинейная форма* $\varphi(x, y)$ *задаются формулами* (3.30), (3.31).

3.6. Неизоморфизм алгебр A_λ. Алгебра A_{-1} неизоморфна другим алгебрам A_λ, так как она неконсервативна. Неизоморфизм остальных алгебр A_λ можно во многих случаях доказать, исходя из следующей теоремы.

Теорема 3.6. *Если в исходной алгебре A левая единица единственна и преобразование R $(R(x)=xe)$ имеет более одного собственного числа, отличного от нуля, то все алгебры A_λ неизоморфны.*

Доказательство. Легко проверить, что если e — левая единица исходной алгебры, то $e_\lambda=(1+\lambda)^{-1}e$ является левой единицей алгебры A_λ.

Напомним, что любая алгебра класса A_λ $(\lambda\neq-1)$ может быть взята за исходную, а другая — получена из нее действием оператора P_μ. Поэтому, если A имеет единственную левую единицу, то и у всех алгебр A_λ левая единица единственна. Следовательно, если две алгебры A_λ изоморфны, то должны быть эквивалентны линейные преобразования $R_\lambda(x)=A_\lambda(x, e_\lambda)$, которые можно представить в виде

$$R_\lambda(x)=A_\lambda(x,\ e_\lambda)=xe_\lambda+\lambda\,\mathrm{Sp}(x)e_\lambda=(1+\lambda)^{-1}xe+\lambda(1+\lambda)^{-1}\,\mathrm{Sp}(x)e. \quad (3.32)$$

Для всех преобразований R_λ вектор $x=e$ является собственным с собственным числом 1. Далее, обозначим набор собственных чисел оператора $R(x)=xe$ в фактор-пространстве $U/_{\{te\}}$, где U — пространство алгебры, через $\{\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_{n-1}\}$. Тогда из (3.32) вытекает, что для оператора $R_\lambda(x)$ этот набор имеет вид $\{(1+\lambda)^{-1}\mu_1,\ (1+\lambda)^{-1}\mu_2,\ \ldots,\ (1+\lambda)^{-1}\mu_{n-1}\}$. Поэтому операторы R_λ неэквивалентны и, следовательно, алгебры A_λ неизоморфны.

Следствие 3.3. *Если A — йорданова или некоммутативная йорданова алгебра с единицей, то все алгебры A_λ неизоморфны.*

Доказательство. В этом случае любая левая единица совпадает с единицей алгебры, а преобразование R имеет все собственные числа, равные 1.

Следствие 3.4. *Если A — простая консервативная алгебра 2-го порядка, то все алгебры A_λ неизоморфны.*

Доказательство. В каждой простой консервативной алгебре конечного порядка якобиево подпространство равно нулю, а значит, равно нулю и подпространство левых аннуляторов, входящее в якобиево подпространство. Так как любые две левые единицы отличаются на левый аннулятор, то левая единица единственна.

Преобразование R для консервативной алгебры второго порядка имеет собственные числа только 1 и 3 (см. [8]). Следовательно, выполняются условия теоремы. Следствие доказано.

3.7. Алгебра Ли $\mathfrak{L}(A_\lambda)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}U_i^\lambda$. Все алгебры A_λ определены на том же пространстве, что и исходная алгебра $A\equiv A_0$. Пространство U_-^λ совпадает по определению с пространством алгебры A_λ. Поэтому можно считать отождествленными пространства $U_{-1}^\lambda\equiv U_{-1}$ (как и ранее для исходной алгебры $U_i^0\equiv U_i$).

Легко видеть тогда, что нулевые компоненты U_0^λ алгебр $\mathfrak{L}(A_\lambda)$ тоже совпадают для всех λ, кроме $\lambda=-1$. Более точно, они совпадают как множества линейных операторов, действующих на одном и том же пространстве U_{-1}. Действительно, алгебра Ли U_0^λ порождается левыми сдвигами

$$\underset{\lambda}{L_a}=L_a+\lambda\,\mathrm{Sp}(a)E,$$

где E — тождественный оператор. Так как для $a=e$ имеет место $L_e=E$, то пространство левых сдвигов является общим для всех алгебр, если $\lambda\neq-1$. Следовательно, в этих случаях является общим и множество операторов линейной алгебры Ли U_0^λ, порожденной левыми сдвигами.

Если же $\lambda=-1$, то пространство операторов $\underset{-1}{L_a}$ имеет на единицу меньшую размерность и состоит из операторов со следом нуль. Из таких же операторов состоит и алгебра Ли U_0^{-1}.

Покажем теперь, что алгебры Ли U_0^λ имеют эквивалентные представления на пространствах U_1^λ (в частности, пространства U_1^λ имеют одинаковые размерности). Для этого введем отображение пространства алгебры A в себя:

$$F\colon\ a \to a_\lambda = a - \frac{\lambda}{\lambda+1}\operatorname{Sp}(a)\,e. \tag{3.33}$$

Нетрудно убедиться, что оно обратно к отображению

$$a \to a' = a + \lambda \operatorname{Sp}(a)\,e. \tag{3.34}$$

Лемма 3.3. *Соответствие F: $a \to a_\lambda$, $a \in A$, $a_\lambda \in A_\lambda$, отождествляет якобиевы подпространства N и N_λ алгебр A и A_λ.*

Доказательство. Если в (3.21) положим $a' \in N$, где N — якобиево подпространство алгебры A, и учтем (3.15), то получим $a \in N_\lambda$. Поскольку отображение F является обратным к отображению $a \to a'$, то $F(N) \subset N_\lambda$.

Теперь воспользуемся формулой (3.27) и запишем $(A_\lambda)_{-\frac{\lambda}{1+\lambda}} = A_0 \equiv A$. Откуда аналогично предыдущему вытекает, что имеет место $F^{-1}(N_\lambda) \subset N$, т. е. F не только вкладывает, но и взаимно однозначно отображает N на N_λ. Лемма доказана.

Подпространства U_1^λ состоят из билинейных операторов $[L_a, A_\lambda]_\lambda$ и потому отождествляются с фактор-пространствами V/N_λ, где V — пространство алгебры. Отсюда и из леммы 3.3 следует, что соответствие F отождествляет подпространства U_1 и U_1^λ.

Более того, покажем, что соответствие F между пространствами U_1 и U_1^λ доказывает эквивалентность представлений алгебры Ли U_0 на подпространствах U_1 и U_1^λ.

Действительно, формула (3.24) с учетом (3.9) и $\underset{\lambda}{L_b} = L_{b'}$ перепишется в виде

$$L_{b'}F^{-1}(\tilde{a}) = F^{-1}L_{b'}(\tilde{a}),$$

что и означает эквивалентность представлений, так как алгебра U_0 порождена левыми сдвигами L_a.

Все сказанное выше приводит к следующей теореме.

Теорема 3.7. *Отождествим начальные компоненты алгебр Ли $\mathfrak{L}(A)$ и $\mathfrak{L}(A_\lambda)$:*

$$U_{-1}^\lambda \equiv U_{-1}, \quad U_0^\lambda \equiv U_0, \quad U_1^\lambda = F(U_1).$$

Тогда в терминах алгебр A и A^* коммутаторы в алгебрах $\mathfrak{L}(A_\lambda)$ будут иметь вид (ср. (3.8), (3.9), (3.10)):

$$[D, a] = D(a), \ [L_a, b] = ab, \tag{3.35}$$

$$[D, \tilde{a}] = \widetilde{D(a)}, \ [L_a, \tilde{b}] = -\widetilde{b * a}, \tag{3.36}$$

$$[\tilde{a}, b] = D_{a,b} + L_{a*b-b*a-ab} - \lambda \operatorname{Sp}(ab)E, \tag{3.37}$$

где a, $b \in U_{-1}$, $\tilde{a}$, $\tilde{b} \in U_1$, L_a, $D \in U_0$.

Доказательство. Формулы (3.35) совпадают с формулами (3.8) в силу отождествления пространств $U_{-1}^\lambda \equiv U_{-1}$ и $U_0^\lambda \equiv U_0$. Аналогично (3.36) совпадают с (3.9) в силу отождествления $U_0^\lambda = U_0$ и эквивалентности действия U_0 на подпространствах U_1^λ и U_1 при отождествлении F.

Для проверки (3.37) нужно подсчитать $[[L_{F(a)}, A_\lambda]_\lambda, b]$. Из (3.21) и $F(a)' = a$ вытекает, что

$$[[L_{F(a)}, A_\lambda]_\lambda, b] = [[L_a, A], b] - \lambda \operatorname{Sp}(ab)E.$$

Сравнивая с (3.10), получаем (3.37).

Замечание 3.5. Совпадение размерностей и «почти» совпадение коммутаторов в алгебрах $\mathfrak{L}(A)$ и $\mathfrak{L}(A_\lambda)$ имеет место, вообще говоря, только для подпространств U_{-1}, U_0, U_1. Даже размерности подпространств U_2 и U_2^λ, U_{-2} и U_{-2}^λ могут быть разными.

Пример. Пусть $A(x, y) \equiv xy$ — йорданова алгебра с единицей. Тогда в алгебре $\mathfrak{L}(A_\lambda)$ все билинейные операторы, составляющие U_1^λ, имеют вид

$$[L_a, A_\lambda]_\lambda = [L_a, A](x, y) - \lambda \operatorname{Sp}(ax) y.$$

Переходя к обобщенно-йордановой паре, соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{L}(A_\lambda)$, по формулам (2.4), (2.5), получаем, что одна из трилинейных операций, определяющих йорданову пару, определяется этой же формулой:

$$(xay) = [L_a, A](x, y) - \lambda \operatorname{Sp}(ax) y. \tag{3.38}$$

Тогда согласно формулам коммутирования (2.10), (2.11) пространство U_{-2} составлено всеми линейными по a операторами вида $(xay) - (yax) = \lambda(\operatorname{Sp}(ay)x - \operatorname{Sp}(ax)y)$ (операторы $[L_a, A](x, y)$ коммутативны в случае йордановой алгебры). Очевидно, что при $\lambda \neq 0$ такой оператор может быть равен нулю, только если x и y принадлежат пространству вырождения билинейной формы $(a, b) = \operatorname{Sp}(ab)$. Поэтому $\dim U_{-2} = C_n^2 - C_k^2$, где $n = \dim A$, k — дефект формы (a, b). Аналогично вычисляется $\dim U_2$.

Теперь заметим, что в случае йордановой алгебры с единицей якобиево подпространство N равно нулю, а потому подпространство U_1, так же как и U_{-1}, отождествляется с пространством алгебры A. Кроме того, ассоциированная алгебра A^* совпадает с исходной алгеброй A. Это упрощает формулы (3.35), (3.36), (3.37).

Приведенные рассуждения доказывают

Следствие 3.5. *Пусть $A(x, y) \equiv xy$ — йорданова алгебра с единицей. Тогда в алгебре $\mathfrak{L}(A_\lambda) = \sum_{-\infty}^{\infty} U_i^\lambda$, где*

$$A_\lambda(x, y) = xy + \lambda \operatorname{Sp}(x) y,$$

пространства U_{-1} и U_1 отождествляются с пространством алгебры A, $U_0 = \{D\} + \{L_a\}$, а коммутаторы между U_{-1}, U_0, U_1 задаются формулами

$$[D, a] = D(a),\ [L_a, b] = ab,$$
$$[D, \tilde{a}] = \widetilde{D(a)},\ [L_a, \tilde{b}] = -\widetilde{ba},$$
$$[\tilde{a}, b] = [L_a, L_b] - L_{ab} - \lambda \operatorname{Sp}(ab) E.$$

Алгебры Ли $\mathfrak{L}(A_\lambda) = \sum_{-\infty}^{\infty} U_i^\lambda$, вообще говоря, бесконечномерны. В частности, размерности подпространств U_2 и U_{-2} равны нулю и $\mathfrak{L}(A_\lambda) = U_{-2} + U_0 + U_1$, только если $\lambda = 0$. В остальных случаях

$$\dim U_2 = \dim U_{-2} = C_n^2 - C_k^2,$$

где $n = \dim A$, k — дефект формы $(x, y) = \operatorname{Sp}(xy)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кантор И. Л.** Простые градуированные бесконечномерные алгебры Ли // Докл. АН СССР.— 1986.— Т. 179, № 3.— С. 534—537.
2. **Кантор И. Л.** Градуированные алгебры Ли // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу.— 1970.— Т. 15.— С. 227—266.
3. **Мальцев А. И.** Алгебраические системы.— М.: Наука, 1970.
4. **Tits A.** Une classe d'algebres de Lie en relation avec les algebres de Jordan // Indag. Math.— 1962.— V. 24.— P. 530—535.

5. **Кантор И. Л.** Классификация неприводимых транзитивно-дифференциальных групп // Докл. АН СССР.— 1964.— Т. 176.— С. 1271—1274.
6. **Кантор И. Л.** Транзитивно-дифференциальные группы Ли и инвариантные связности на однородных пространствах // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу.— 1966.— Т. 13.— С. 310—398.
7. **Koecher M.** Imbedding of Jordan algebras in Lie algebras. I // Amer. j. math.— 1967.— V. 89.— P. 787—815.
8. **Кантор И. Л.** Некоторые обобщения йордановых алгебр // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу.— 1972.— Т. 16.— С. 408—498.
9. **Loos O.** Jordan Paris.— M. Y.— Berlin: Springer-Verlag, 1977.
10. **Loos O., McCrimon K.** Speciality of Jordan triple systems // Communs algebra.— 1977.— V. 5, N 10.— P. 1057—1082.
11. **Meyberg K.** Lectures on algebras and triple systems // Lecture notes, University of Virginia, Charlottsville, 1972.
12. **McCrimon K., Meyberg K.** Coordinatisation of Jordan triple systems // Communs algebra.— 1981.— V. 9, N 14.— P. 1495—1543.
13. **Зельманов Е. И.** О первичных йордановых тройных системах // I.— Сиб. мат. журн.— 1983.— Т. 24, № 4.— С. 23—37; II.— Сиб. мат. журн.— 1984.— Т. 26, № 5.— С. 50—61.

Е. Н. КУЗЬМИН

СТРУКТУРА И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР МАЛЬЦЕВА

Работа [1], в которой намечены основы структурной теории конечномерных алгебр Мальцева, во многом аналогичной структурной теории конечномерных алгебр Ли [2], имела большой резонанс и послужила стимулом для дальнейших исследований в этой области (см. также [3]). Однако детальное доказательство многих результатов в [1] было ради краткости опущено. Со временем отсутствие в печати детально проведенных доказательств стало причинять неудобства и даже вызывать нарекания со стороны отдельных авторов (см., например [4]). Настоящая работа следует в основном плану статьи [1] и призвана заполнить возникший пробел в литературе.

§ 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБР МАЛЬЦЕВА. ПОДАЛГЕБРЫ КАРТАНА

1. Алгебры Мальцева, введенные впервые в [5] под названием муфанг-лиевых алгебр, определяются тождествами

$$x^2=0, \tag{1}$$

$$J(x, y, xz)=J(x, y, z)x, \tag{2}$$

где $J(x, y, z)$ — так называемый якобиан элементов x, y, z:

$$J(x, y, z)=(xy)z+(yz)x+(zx)y.$$

В любой антикоммутативной алгебре якобиан $J(x, y, z)$ является кососимметрической функцией своих аргументов.

Раскрывая якобианы в тождестве Мальцева (2), можно представить это тождество в виде

$$xyzx+yzxx+zxxy=(xy)(xz), \tag{3}$$

где для удобства записи опускаются скобки в левонормированных произведениях: $xyzx=[(xy)z]x$ и т. д.

Выведем, следуя [6], некоторые основные тождества, имеющие место в алгебрах Мальцева. Если A — алгебра Мальцева, $x \in A$ и R_x: $a \mapsto ax$ — оператор правого умножения на x в A, то ассоциативная алгебра A^*, порожденная операторами R_x, называется *алгеброй умножений алгебры* A. Тождество (3) означает, что в алгебре A^* имеют место соотношения