## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Пчелинцев С. В.** Нильпотентность ассоциаторного идеала свободного конечнопорожденного (—1, 1)-кольца // Алгебра и логика.— 1975.— Т. 14, № 5.— С. 543—571.
2. **Пчелинцев С. В.** О многообразиях, порожденных свободными алгебрами типа (—1, 1) конечного ранга // Сиб. мат. журн.— 1987.— Т. 28, № 2.— С. 211—220.
3. **Пчелинцев С. В.** О многообразии, порожденном свободной алгеброй типа (—1, 1) ранга 2 // Сиб. мат. журн.— 1981.— Т. 22, № 3.— С. 162—178.
4. **Роомельди Р. Э.** Центры свободного (—1, 1)-кольца // Сиб. мат. журн.— 1977.— Т. 18, № 4.— С. 861—876.
5. **Hentzel J. R.** The characterization of (—1, 1) rings // J. Algebra.— 1974.— V. 30, N 1—3.— P. 236—258.
6. **Kleinfeld E.** Right alternative rings // Proc. Amer. Math. Soc.— 1953.— V. 4, N 6.— P. 939—944.
7. **Пчелинцев С. В.** О многообразии алгебр типа (—1, 1) // Алгебра и логика.— 1986.— Т. 25, № 2.— С. 154—171.
8. **Пчелинцев С. В.** Нильпотентность ассоциаторов в свободном (1, 1)-кольце // Алгебра и логика.— 1974.— Т. 13, № 2.— С. 217—223.
9. **Thedy A.** Right alternative rings // J. Algebra.— 1975.— V. 37, N 1.— P. 1—43.
10. **Роомельди Р. Э.** Кольца типа (—1, 1): Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Новосибирск, 1974.
11. **Пчелинцев С. В.** Абсолютные делители нуля специальных йордановых алгебр // Алгебра и логика.— 1982.— Т. 21, № 6.— С. 706—720.
12. **Пчелинцев С. В.** Свободная (—1, 1)-алгебра с двумя порождающими // Алгебра и логика.— 1974.— Т. 13, № 4.— С. 425—449.



*В. Г. СКОСЫРСКИЙ*


# СТРОГО ПЕРВИЧНЫЕ НЕКОММУТАТИВНЫЕ ЙОРДАНОВЫ АЛГЕБРЫ

Общие исследования класса некоммутативных йордановых алгебр берут свое начало с работ А. А. Алберта и Р. Д. Шейфера [1, 2]. Так названы алгебры, удовлетворяющие тождествам $(x, y, x) = (x^2, y, x) = 0$ и их линеаризациям.

Отметим здесь другой, также достаточно хорошо известный, подход к определению некоммутативных йордановых алгебр. Если на том же пространстве $A$ некоммутативной йордановой алгебры ввести новое умножение $a \odot b = (ab + ba)/2$, то новая алгебра $A^{(+)}$ будет, как известно, коммутативной йордановой алгеброй [1], при этом будет справедливо тождество $[x^2, y] = 2[x, y] \odot x$, где $[x, y] = xy - yx$. Легко видеть, что верно и обратное. А именно, если у некоторой алгебры $A$ алгебра $A^{(+)}$ является йордановой и отображения $\mathrm{adj}(a)$: $x \mapsto [x, a]$ для всех $a \in A$ — дифференцирования алгебры $A^{(+)}$, то алгебра $A$ некоммутативная йорданова. С этой точки зрения на некоммутативную йорданову алгебру $A$ можно смотреть как на йорданову (коммутативную) алгебру $J$ с определенной на ней дополнительной кососимметрической операцией $[\ ,\ ]$: $J \times J \to J$ такой, что $[x^2, y] = 2[x, y] \odot x$ для всех $x, y \in J$. Исходное умножение алгебры $A$ легко при этом восстанавливается: $xy = x \odot y + (1/2)[x, y]$, где $x \odot y$ — умножение в $J$.

Строение конечномерных некоммутативных йордановых алгебр изучено в работах А. А. Алберта, Р. Д. Шейфера, А. А. Кокориса, Р. Х. Оемки, К. С. Смита, К. Мак-Криммона, И. П. Шестакова. Обзор результатов и литературу по этому вопросу можно найти в [3]. Нынешнее состояние этой теории вполне сравнимо с классической теорией Веддерберна конечномерных ассоциативных алгебр.

Наличие же достаточно содержательной теории некоммутативных йордановых алгебр без условий конечности долгое время казалось маловероятным (см., например, [4]). Поэтому часто на исследуемые некоммутативные йордановы алгебры накладывались достаточно сильные ограничения, например дополнительные тождества. Это приводило к изучению собственных подклассов некоммутативных йордановых алгебр таких, как стандартные, обобщенно стандартные алгебры. Обзор результатов по этому направлению содержится в [4]. Рассматривались и другие ограничения — разложение единицы на сумму трех ортогональных идемпотентов [5] или наличие ненулевого цоколя [6].

В целом можно заметить, что в работах по бесконечномерным некоммутативным йордановым алгебрам, особенно когда накладывались дополнительные тождества, мало использовался переход к алгебрам $A^{(+)}$, являющийся центральным для конечномерной теории. Это, безусловно, определялось имевшимся состоянием теории йордановых алгебр. К настоящему времени теория бесконечномерных йордановых алгебр весьма плодотворно развита. Так, в работах Е. И. Зельманова [7, 8] описаны первичные невырожденные йордановы алгебры. Это позволяет вновь обратиться к некоммутативным йордановым алгебрам через алгебру $A^{(+)}$.

Назовем первичную некоммутативную йорданову алгебру $A$ *строго первичной*, если в алгебре $A$ нет ненулевых идеалов, содержащихся в строго полупервичном радикале $\operatorname{rad}(A^{(+)})$, или, что то же самое, радикалам Мак-Криммона ее присоединенной йордановой алгебры $A^{(+)}$. Определение и ряд важных свойств радикала $\operatorname{rad}(J)$ для йордановой (коммутативной) алгебры $J$ можно найти в [9—14].

В данной работе доказано, что для всякой строго первичной некоммутативной йордановой алгебры $A$ справедливо одно из следующих утверждений:

1) $A$ — коммутативная йорданова первичная невырожденная алгебра,

2) $A$ — первичная квазиассоциативная алгебра над ее расширенным центроидом,

3) $A$ — центральный порядок в некоторой простой эластичной квадратичной алгебре,

4) присоединенная йорданова алгебра $A^{(+)}$ ассоциативна.

Пользуясь случаем, автор выражает благодарность профессору И. П. Шестакову за постановку задачи и ценные обсуждения результатов.

## § 1. РЯД ВВОДНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И ЗАМЕЧАНИЙ

Все алгебры мы будем рассматривать над некоторым фиксированным кольцом скаляров $\Phi$, $1/2 \in \Phi$. Стандартные определения и обозначения, используемые в работе без пояснений, можно найти в [14, 15].

Всюду ниже, если не оговорено противное, через $A$ обозначим произвольную некоммутативную йорданову $\Phi$-алгебру. Ассоциатор элементов $x, y, z \in A$ в алгебре $A^{(+)}$ обозначим $(x, y, z)^+ = (x \odot y) \odot z - x \odot \odot (y \odot z)$. Отображения $\operatorname{Inder}(x, z)$: $y \mapsto (x, y, z)^+$ и $\operatorname{adj}(x)$: $y \mapsto [y, x]$ как известно, являются дифференцированиями алгебры $A^{(+)}$. Множество всех дифференцирований йордановой алгебры $J$ будем обозначать $\operatorname{Der}(J)$. Через $D(A^{(+)}) = (A, A, A)^+ + (A, A, A)^+ \odot A$ обозначим ассоциаторный идеал алгебры $A^{(+)}$.

**1.1.** Пусть $M(A)$ — алгебра умножений алгебры $A$, т. е. подалгебра $\operatorname{End}_\Phi(A)$, порожденная всеми операторами правого $R(a)$ и левого $L(a)$ умножения, и тождественным на $A$ отображением $1_A$. Аналогично $M(A^{(-)})$ и $M(A^{(+)})$ — алгебры умножений алгебр $A^{(-)}$ и $A^{(+)}$. Они соответственно порождаются множествами $\operatorname{adj}(A) \cup \{1_A\}$ и

$$\{1_A\} \cup R^{(+)}(A),\ R^{(+)}(A) = \{R^+(a) \mid a \in A,\ xR^+(a) = x \odot a\}.$$

Так как $\operatorname{adj}(A) \subseteq \operatorname{Der}(A^{(+)})$, то $[R^+(x), \operatorname{adj}(a)] = R^+(x \operatorname{adj}(a))$. Следовательно, $M(A) = M(A^{(-)}) M(A^{(+)}) = M(A^{(+)}) M(A^{(-)})$.

**1.2.** Пусть $U \subseteq A$. Обозначим: $\operatorname{id}_A(U) = UM(A)$ — идеал алгебры $A$, порожденный множеством $U$; $\operatorname{id}_{A^{(+)}}(U) = UM(A^{(+)})$ — соответствующий идеал в $A^{(+)}$. Ввиду 1.1 имеем

$$\mathrm{id}_A(U)=\mathrm{id}_{A^{(+)}}(U)M(A^{(-)})=\mathrm{id}_{A^{(+)}}(UM(A^{(-)})).$$

Если $[U, A]\subseteq U$, то $\mathrm{id}_A(U)=\mathrm{id}_{A^{(+)}}(U)$.

Хорошо известно, что для йордановой алгебры $J$ ее алгебра умножения $M(J)$ имеет вид

$$M(J)=R(J)+R(J)R(J)+\mathrm{alg}(\mathrm{Inder}(J, J)),$$

где $\mathrm{alg}(\mathrm{Inder}(J, J))$ — подалгебра $M(J)$, порожденная всеми $\mathrm{Inder}(x, y)$, $x, y\in J$. Используя это, получим, что если $U\,\mathrm{Der}(A^{(+)})\subseteq U$, то

$$\mathrm{id}_A(U)=\mathrm{id}_{A^{(+)}}(U)=U+U\odot A+(U, A, A)^{+}.$$

**1.3.** Если $I\lhd A$, то $I\lhd A^{(+)}$ и $A^{(+)}/I\simeq(A/I)^{(+)}$. Отсюда $(I^{(+)})^3=(I\odot I)\odot I\lhd A^{(+)}$, кроме того, $[(I^{(+)})^3, A]\subseteq(I^{(+)})^3$. Следовательно, $(I^{(+)})^3\lhd A$.

Пусть теперь для $I\lhd A$ и $v\in A$ имеем $v\odot I=0$. Докажем, что

$$\mathrm{id}_A(v)\,(I^{(+)})^3=(I^{(+)})^3\,\mathrm{id}_A(v)=0.$$

Положим $(I, I)=R^{(+)}(I)R^{(+)}(I)+R^{(+)}(I\odot I)$. Для йордановых алгебр, как известно [14], $M(A^{(+)})(I, I)=(I, I)M(A^{(+)})$. Из тождества

$$[R^{(+)}(x), \mathrm{adj}(y)]=R^{(+)}(x\,\mathrm{adj}(y))$$

следует, что

$$(I, I)+(I, I)\mathrm{adj}(A)=\mathrm{adj}(A)\,(I, I)+(I, I).$$

Ввиду 1.1. имеем $M(A)\,(I, I)=(I, I)M(A)$. Поэтому

$$\mathrm{id}_A(v)\,(I, I)=vM(A)\,(I, I)=v(I, I)M(A)=0.$$

Отсюда $\mathrm{id}_A(v)\odot(I^{(+)})^3=0$. Из тождества $[x, y^2]=2[x\odot y, y]$ получим

$$[\mathrm{id}_A(v), (I^{(+)})^3]=[\mathrm{id}_A(v)\,(I, I), I]=0.$$

Следовательно, $\mathrm{id}_A(v)\,(I^{(+)})^3=(I^{(+)})^3\,\mathrm{id}_A(v)=0$.

**1.4.** Свободную (коммутативную) йорданову алгебру от счетного множества порождающих $X$ обозначим $\mathrm{Jord}(X)$. Пусть $I$ — однородный $T$-идеал алгебры $A^{(+)}$ (см. [14]). Положим по определению: $I(A^{(+)})$ — вербальный идеал алгебры $A^{(+)}$, построенный по идеалу $I$. Элементы $I(A^{(+)})$ — это множество всевозможных значений $f(a_1, \ldots, a_n)$ элементов $f(x_1, \ldots, x_n)\in I$, когда $x_1, \ldots, x_n$ пробегают $A$.

Для всякого однородного многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)\in\mathrm{Jord}(X)$ и произвольного $D\in\mathrm{Der}(\mathrm{Jord}(X))$ тривиальной индукцией по степени многочлена устанавливается справедливость формулы

$$f(x_1, \ldots, x_n)D=\sum_{i=1}^{n} f(x_1, \ldots, x_n)\,\Delta^1_{x_i}(x_iD),$$

где $\Delta^1_{x_i}(x_iD)$ — оператор частичной линеаризации [14]. Поэтому для всякой йордановой алгебры $J$ и произвольного однородного $T$-идеала $J$ имеем

$$I(J)\,\mathrm{Der}(J)\subseteq I(J).$$

В частности, в алгебре $A$ выполняется $I(A^{(+)})\lhd A$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)\in\mathrm{Jord}(X)$ и $\Delta(f)=\{f_0=f, f_1, \ldots, f_n\}$ — совокупность всех частичных линеаризаций многочлена $f$. Допуская некоторую вольность, через $f(A^{(+)})$ будем обозначать $\Phi$-подпространство в $A$, порожденное всеми значениями многочленов из $\Delta(f)$. Пусть теперь $f$ — однородный многочлен. Тогда $f(J)\mathrm{Der}(J)\subseteq f(J)$ для всякой йордановой алгебры $J$. Отсюда $[f(A^{(+)}), A]\subseteq f(A^{(+)})$ и $f(A^{(+)})\,\mathrm{Inder}(A^{(+)}, A^{(+)})\subseteq$

$\subseteq f(A^{(+)})$. Ввиду 1.2 имеем

$$\mathrm{id}_A(f(A^{(+)})) = \mathrm{id}_{A^{(+)}}(f(A^{(+)})) = f(A^{(+)}) + f(A^{(+)}) \odot A + \\ + (f(A^{(+)}), A, A)^+ = F(A^{(+)}),$$

где $F$ — однородный $T$-идеал $\mathrm{Jord}(X)$, порожденный многочленом $f$.

**1.5.** Для всякой алгебры $A$ через $\mathrm{rad}(A)$ обозначим наибольший идеал алгебры $A$, содержащийся в радикале $\mathrm{rad}(A^{(+)})$. Используя, что для всякого $I \lhd A$ справедливы $I \lhd A^{(+)}$ и $(A/I)^{(+)} \simeq A^{(+)}/I^{(+)}$, а также свойства радикала $\mathrm{rad}(A^{(+)})$ для (коммутативных) йордановых алгебр (см. [9, 10, 14]), легко убедиться, что класс алгебр $\{A \mid A = \mathrm{rad}(A)\}$ является радикальным в смысле Амицура — Куроша в многообразии некоммутативных йордановых алгебр. В частности, $\mathrm{rad}(A/\mathrm{rad}(A)) = 0$ и $\mathrm{rad}(A) \subseteq \mathrm{Nil}(A)$. Идеал $\mathrm{rad}(A)$ будем называть *строго полупервичным радикалом алгебры* $A$.

Ограничение $\mathrm{rad}(A) = 0$ при изучении первичных некоммутативных йордановых алгебр кажется на данный момент наиболее естественным. Для конечномерных алгебр оно эквивалентно нильполупростоте, а для коммутативных — невырожденности.

## § 2. НЕКОММУТАТИВНЫЕ ЙОРДАНОВЫ АЛГЕБРЫ С ТОЖДЕСТВОМ $(x^2[x, y], y)^+ = 0$

В этом параграфе, носящем вспомогательный характер, будет построен однородный $T$-идеал $P$ алгебры $\mathrm{Jord}(X)$ такой, что вербальный идеал $P(A^{(+)})$ лежит в коммутативном центре всякой алгебры этого класса.

Пусть $k(x, y)$ — многочлен $\mathrm{Jord}(X)$, равный по определению $2(x, y, y)^+ \odot x - (x^2, y, y)^+$. Хорошо известно, что во всякой ассоциативной алгебре $R$ справедливо равенство $k(x, y) = (1/2)[x, y]^2$, где $[x, y]$ — коммутатор в $R$.

**Лемма 2.1.** *Во всякой некоммутативной йордановой алгебре $A$ справедливы тождества*

$$(x, [x, y], y)^+ = 0, \tag{2.1}$$

$$[x, (x, z, y)^+] + ([x, y], x, z)^+ = 0, \tag{2.2}$$

$$[k(x, y), x] + 2(x, [x^2, y], y)^+ = 0, \tag{2.3}$$

$$[(x, a, y)^+, b] + [a, (x, b, y)^+] + [(a, x, b)^+, y] + [x, (a, y, b)^+] = 0. \tag{2.4}$$

Доказательство. В силу тождества $[x^2, y] = 2[x, y] \odot x$ имеем $([x, y] \odot x) \odot y = (1/4)[x^2, y^2] = ([x, y] \odot y) \odot x$. Тем самым (2.1) доказано.

Еще раз используя тождество $[x^2, y] = 2[x, y] \odot x$, получим $[x, (x \odot z) \odot y] = [x, y] \odot (x \odot z) + [x, x \odot z] \odot y = (1/2)[x^2, z] \odot y + [x, y] \odot \odot (x \odot z) = [x, (z \odot y) \odot x] - ([x, y] \odot x) \odot z + [x, y] \odot (x \odot z) = [x, (z \odot y) \odot \odot x] - ([x, y], x, z)^+$. Отсюда $[x, (x, z, y)^+] = -([x, y], x, z)^+$. Следовательно, (2.2) доказано.

Так как $\mathrm{adj}(b) \in \mathrm{Der}(A^{(+)})$, то $[(x, a, y)^+, b] = ([x, b], a, y)^+ + (x, [a, b], y)^+ + (x, a, [y, b])^+ = [x, (b, a, y)^+] + (y, [x, a], b)^+ - (b, a, [x, y])^+ + + (x, [a, b], y)^+ + (x, a, [y, b])^+$. В силу равенства $(a, b, x)^+ - (b, a, x)^+ = = (a, x, b)^+$ получим $[(x, a, y)^+, b] - [(x, b, y)^+, a] = -[x, (a, y, b)^+] - - (b, [x, a], y)^+ + (a, [x, b], y)^+ + (a, [x, y], b)^+ + 2(x, [a, b], y)^+ + [y, (a, x, b)^+] + (a, [x, y], b)^+ - (x, [y, a], b)^+ + (x, [y, b], a)^+$. Таким образом, $[(x, a, y)^+, b] + [a, (x, b, y)^+] + [x, (a, y, b)^+] + [(a, x, b)^+, y] = 2(a, [x, y], b)^+ + 2(x, [a, b], y)^+ - (b, [x, a], y)^+ + (a, [x, b], y)^+ - (x, [y, a], b)^+ + + (x, [y, b], a)^+ = p(a, x, y, b) - p(a, y, x, b)$, где $p(x_1, x_2, y_1, y_2)$ — полная линеаризация многочлена $(x, [x, y], y)^+$. Ввиду (2.1) $p \equiv 0$ на $A$, т. е. (2.4) доказано.

Докажем теперь тождество (2.3). Применяя (2.2), получим $[k(x, y), x] = -[(x^2, y, y)^+, x] + [(x, y, y)^+, x^2] = (x^2, [x, y], y)^+ + (x^2, y, [x, y])^+ - (x, [x^2, y], y)^+ - (x, y, [x^2, y])^+ = 2(x^2, [x, y], y)^+ = -2(x, [x^2, y], y)^+$. Лемма доказана.

**Следствие 2.2.** *Для любых $u, v \in A$ из равенства $[u, v] = 0$ следует $[u, (u, a, v)^+] = 0$ для всех $a \in A$.*

*Пусть $u, v$ — многочлены из $\mathrm{Jord}(X)$ такие, что в алгебре $A$ выполняется тождество $[u, v] = 0$ со всеми своими частичными линеаризациями. Тогда в алгебре $A$ справедливо тождество $[(u, a, v)^+, b] + [a, (u, b, v)^+] = 0$.*

Доказательство. Первое утверждение следует из (2.2). Докажем второе. Используя тождество (2.4), имеем

$$[(u, a, v)^+, b] + [a, (u, b, v)^+] = -[(a, u, b)^+, v] - [u, (a, v, b)^+] = -[u\,\mathrm{Inder}(a, b), v] - [u, v\,\mathrm{Inder}(a, b)] = -[u, v]\left(\sum \Delta^1_{x_i}((a, x_i, b)^+)\right) = 0, \quad \text{где} \quad \Delta^1_{x_i}(w) -$$

оператор частичной линеаризации [14]. Следствие доказано.

**Лемма 2.3.** *Пусть $A$ — некоммутативная йорданова алгебра, $f$ — многочлен из $\mathrm{Jord}(X)$. Тогда из равенства $[f(A^{(+)}), A] = 0$ следует, что $[(f(A^{(+)}), A, A)^+, A] = 0$.*

Доказательство. Пусть $u \in f(A^{(+)})$, $a$, $b$, $c \in A$. Так как $f(A^{(+)})\mathrm{Der}(A^{(+)}) \subseteq f(A^{(+)})$, то $[(a, u, b)^+, c] = 0$. В силу 2.2 имеем $[(u, a, b)^+, a] = ([u, a], a, b)^+ + (u, a, [b, a])^+ = ([u, a], a, b)^+ - [a, (a, u, b)^+] = 0$. Отсюда $[(u, a, b)^+, c] = -[(u, c, b)^+, a]$. Теперь из (2.4) получим $[(u, a, b)^+, c] + [a, (u, c, b)^+] = -[u, (a, b, c)^+] - [(a, u, c)^+, b] = 0$. Следовательно, $[(u, a, b)^+, c] = 0$ для всех $u \in f(A^{(+)})$, $a$, $b$, $c \in A$. Лемма доказана.

**Лемма 2.4.** *Пусть $f_1, f_2 \in \mathrm{Jord}(X)$ такие, что $[f_i(A^{(+)}), A] = 0$, $i = 1, 2$. Тогда*

$$[\mathrm{id}_A((f_1(A^{(+)}), f_2(A^{(+)}), A)^+), A] = 0.$$

Доказательство. Пусть $M = (f_1(A^{(+)}), f_2(A^{(+)}), A)^+$. Так как $M\,\mathrm{Der}(A^{(+)}) \subseteq M$, то, как это отмечено в 1.2, $\mathrm{id}_A(M) = M + M \odot A + (M \odot A) \odot A$. В силу леммы 2.3, имеем $[(f_1(A^{(+)}), A, A)^+, A] = 0$. Поэтому $[M, A] = 0$ и

$$[M \odot A, A] \subseteq [(f_1(A^{(+)}), f_2(A^{(+)}), A)^+ \odot A, A] \subseteq$$

$\subseteq [f_1(A^{(+)}), (f_2(A^{(+)}) \odot A, A)^+, A] + [(f_1(A^{(+)}), A, A)^+ \odot f_2(A^{(+)}), A] = 0$. Опять же из леммы 2.3 получим $[(M, A, A)^+, A] = 0$. Отсюда $[(M \odot A) \odot A, A] \subseteq [(M, A, A)^+, A] + [M \odot A, A] = 0$. Лемма доказана.

Обозначим через $P$ однородный $T$-идеал алгебры $\mathrm{Jord}(X)$, порожденный многочленом $p(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (k(k(x_1, x_2), x_1), k(k(x_3, x_4), x_3), x_5)^+)$.

**Предложение 2.5.** *Пусть $A$ — некоммутативная йорданова алгебра, удовлетворяющая тождеству*

$$(x, [x^2, y], y)^+ = 0. \tag{2.5}$$

*Тогда $[P(A^{(+)}), A] = 0$.*

Доказательство. Так как мы рассматриваем алгебры над кольцом $\Phi$, $1/2 \in \Phi$, то все частичные линеаризации (2.5) также тождества в $A$ [см. 14].

В силу (2.3) и (2.5) имеем $[k(x, y), x] = 0$ — тождество в $A$, причем в нем справедливы и все его частичные линеаризации.

Покажем теперь, что в алгебре $A$ для любых $u, v \in A$ из равенства $[u, v] = 0$ следует $[k(u, v), A] = 0$. Действительно, ввиду тождества $(x, y^2, z)^+ = 2(x, y, z) \odot y$ в алгебре $\mathrm{Jord}(X)$ имеем $k(x, y)\,\Delta^1_y(z) = 4(x, z,$

$y)^+ \odot x - 2(x^2, z, y)^+ = 4(x, y, z)^+ \odot x - 2(x^2, y, z)^+$. С другой стороны, линеаризуя тождество $[k(x, y), x] = 0$, получим $[k(x, y), z] + [k(x, y)\Delta_y^1(z), y] = 0$ — тождество в $A$. Следовательно, $[k(u, v), a] = -4[(u, a, v)^+ \cdot u, v] + 2[(u^2, a, v)^+, v]$. В силу следствия 2.2 из равенства $[u, v] = 0$ вытекает, что $[(u, a, v)^+, v] = [(u^2, a, v)^+, v] = 0$. Поэтому $[k(u, v), A] = 0$. Таким образом, многочлен $p_0(x_1, x_2) = k(k(x_1, x_2), x_1)$ удовлетворяет условию $[p_0(A^{(+)}), A] = 0$. Теперь по лемме 2.4 (см. также 1.4), получим $[P(A^{(+)}), A] = 0$. Предложение доказано.

Отметим теперь один часто встречающийся класс некоммутативных йордановых алгебр, удовлетворяющих тождеству (2.5). Пусть $J$ — йорданова алгебра, $\langle\ ,\ ,\ \rangle$: $J \times J \times J \to J$ — трилинейная кососимметрическая операция на $J$ такая, что для любых $a$, $b$, $x \in J$ справедливо равенство $\langle x^2, a, b\rangle = 2\langle x, a, b\rangle \odot x$. Такую ситуацию можно рассматривать как семейство некоммутативных йордановых алгебр $(J, [\ ,\ ]_a, a \in J)$, где $[x, y]_a = \langle x, y, a\rangle$. Все алгебры $(J, [\ ,\ ]_a)$ удовлетворяют тождеству (2.5). Действительно, $(x, [x^2, y]_a, y)^+ = (x, \langle x^2, y, a\rangle, y)^+ = 2(x, \langle x, y, x \odot a\rangle, y)^+ = 2(x, [x, y]_{a\odot x}, y)^+ = 0$, последнее равенство справедливо ввиду (2.1). Поэтому для всякой такой операции $\langle\ ,\ ,\ \rangle$: $J \times J \times J \to J$ имеем $\langle P(J), J, J\rangle = 0$. Укажем попутно и более простой однородный $T$-идеал $\Lambda$ алгебры $\mathrm{Jord}(X)$, удовлетворяющий этому же свойству.

**Предложение 2.6.** *Пусть $\Lambda$ — однородный $T$-идеал $\mathrm{Jord}(X)$, порожденный многочленом $\lambda(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (k(x_1, x_2), (k(x_3, x_4), x_5, x_3)^+, x_1)^+$. Тогда для всякой йордановой алгебры $J$ и трилинейной кососимметрической операции $\langle\ ,\ ,\ \rangle$: $J \times J \times J \to J$ такой, что $\langle x^2, y, z\rangle = 2\langle x, y, z\rangle \odot x$ для всех $x$, $y$, $z \in J$ имеет место равенство $\langle \Lambda(J), J, J\rangle = 0$.*

Доказательство. Пусть $u = k(x_1, x_2)$, $v = x_1$. Так как алгебры $(J, [\ ,\ ]_a)$ удовлетворяют тождеству (2.5), то $[u, v] = 0$ — тождество на $(J, [\ ,\ ]_a)$ для всех $a \in J$. По следствию 2.2 имеем $[(u, b, v)^+, c]_a + [b, (u, c, v)^+]_a = 0$. Следовательно, $[(u, b, v)^+, c]_a = [(u, c, v)^+, b]_a$. С другой стороны, $[(u, b, v)^+, b]_a = \langle (u, b, v)^+, b, a\rangle = -\langle (u, b, v)^+, a, b\rangle = -[(u, b, v)^+, a]_b = -[(u, a, v)^+), b]_b = -\langle (u, a, v)^+, b, b\rangle = 0$. Поэтому $[(u, b, v)^+, c]_a = 0$.

Таким образом, для многочлена $\lambda_0(x_1, x_2, x_3) = (k(x_1, x_2), x_3, x_1)^+ \in \mathrm{Jord}(X)$ в алгебре $(J, [\ ,\ ]_a)$ справедливо равенство $[\lambda_0(J), J]_a = 0$. В силу леммы 2.3 имеем $[(\lambda_0(J), J, J)^+, J] = 0$. Теперь доказательство предложения завершается аналогично предложению 2.5. Предложение доказано.

**Следствие 2.7.** *Пусть $J$ — йорданова алгебра, $M_J$ — ее бимодуль. Для всякого кососимметрического трилинейного отображения $f$: $J \times J \times J \to M_J$ такого, что $f(x^2, y, z) = 2f(x, y, z) \odot x$ для всех $x$, $y$, $z \in J$, справедливо равенство $f(\Lambda(J), J, J) = f(P(J), J, J) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{J} = J + M_J$ — расщепляемое расширение алгебры $J$ посредством бимодуля $M_J$. Отображение $f$ распространим до трилинейной кососимметрической операции над $\mathcal{J}$. Для этого положим $\langle a_1 + m_1, a_2 + m_2, a_3 + m_3\rangle = f(a_1, a_2, a_3)$ для всех $a_i \in J$, $m_i \in M_J$. По предположению 2.5 имеем $f(\Lambda(J), J, J) = \langle \Lambda(\mathcal{J}), \mathcal{J}, \mathcal{J}\rangle = 0$. Следствие доказано.

**Следствие 2.8.** *Пусть $J = SJ[X]$ — свободная специальная йорданова алгебра. Тогда вербальный идеал $\Lambda(J)$, как и идеал $P(J)$, «аннулирует тетрады», т. е. $\{\Lambda(J), J, J, J\} \subseteq J$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть $J$-бимодуль $M_J = \mathrm{Ass}[X]/J$ и отображение $f$: $J \times J \times J \times J \to M_J$ такое, что $f(a_1, a_2, a_3, a_4) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} + J$. Отображение $f$ удовлетворяет условию следствия 2.7.

Замечание. Другой идеал, аннулирующий тетрады, ранее построен Е. И. Зельмановым [8]. Степень порождающего тождества у идеала Зельманова весьма большая. Идеал $\Lambda$ порождается многочленом степени 11. Это позволяет использовать следствие 2.8 и в ряде конкретных вычислений. Отметим также, что $\Lambda(\Phi_3^{(+)}) \neq 0$ и $P(\Phi_3^{(+)}) \neq 0$. Поэтому, как и в [8], первичные невырожденные йордановы алгебры $J$ с условием $\Lambda(J)=0$ или $P(J)=0$ либо ассоциативны, либо имеют ненулевой центр $Z(J)$ и их центральное замыкание $Z(J)^{-1}J=B_F(f, V)$ является йордановой алгеброй невырожденной билинейной формы $f$ на пространстве $V$, $\dim_F V>1$, где $F=Z(J)^{-1}Z(J)$.

Приведем теперь ряд применений предложений 2.5, 2.6. Пусть $A$ — некоммутативная йорданова алгебра, $J(x, y, z)=[[x, y], z]+[[y, z], x]+[[z, x], y]$ — якобиан элементов $x, y, z \in A$ и $S(x, y, z)=(x, y, z)+(y, z, x)+(z, x, y)$. Как доказал И. П. Шестаков [16], во всякой эластичной алгебре справедливо тождество $S(x^2, y, z)=2S(x, y, z)\odot x$. Кроме того, $J(x, y, z)=2S(x, y, z)$ — кососимметрическая функция. Ввиду предложений 2.5, 2.6 имеем $J(\Lambda(A^{(+)}), A, A)=J(P(A^{(+)}), A, A)=0$. Отсюда $J(A, A, A)\odot\Lambda(A^{(+)})=J(A, A, A)\odot P(A^{(+)})=0$. Теперь, используя 1.3, получим $\mathrm{id}_A(J(A, A, A))\Lambda^3(A^{(+)})=\mathrm{id}_A(J(A, A, A))P^3(A^{(+)})=0$ и $\Lambda^3(A^{(+)}), P^3(A^{(+)}) \lhd A$. Таким образом, доказана следующая

**Теорема 2.9.** *Пусть $A$ — первичная некоммутативная йорданова алгебра. Тогда либо $A^{(-)}$ лиева, либо $\Lambda^3(A^{(+)})=P^3(A^{(+)})=0$.*

Напомним, что *внутренним идеалом йордановой алгебры* $J$ называется такая ее подалгебра $K$, для которой $\{K, J, K\}\subseteq K$ (см. [14]). Обозначается это так: $K\lhd_{\text{вн}}J$.

**Предложение 2.10.** *Пусть $A$ — некоммутативная йорданова алгебра. Тогда для всякого внутреннего идеала $K$ алгебры $A^{(+)}$ справедливо включение $P(K)K+KP(K)\subseteq K$.*

Доказательство. Обозначим через $J=K+M$ расщепляемое нулевое расширение алгебры $K$ посредством $K$-бимодуля $M=A^{(+)}/K$ (см. [15]). Для всяких $k_1, k_2\in K$ и $m_1, m_2\in M$ положим $[k_1+m_1, k_2+m_2]=\overline{[k_1, k_2]}$, где $\overline{[k_1, k_2]}=[k_1, k_2]+K\in M$. Тем самым задана кососимметрическая операция $[\ ,\ ]$: $J\times J\to J$. Ясно, что $(J, [\ ,\ ])$ — некоммутативная йорданова алгебра. Проверим, что алгебра $(J, [\ ,\ ])$ удовлетворяет тождеству (2.5).

Пусть $a'$ — оператор правого умножения в алгебре $J$. В силу тождества (2.1) имеем $\overline{[k_1, k_2]}\,[k_1', k_2']=0$ для всех $k_1, k_2\in K$. С другой стороны, так как $K\lhd_{\text{вн}}A^{(+)}$, то для всякого $m\in M=A^{(+)}/K$ и $k_1, k_2\in K$ справедливо равенство

$$m(k_1\odot k_2)'=mk_1'k_2'+mk_2'k_1'.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\overline{[k_1^2, k_2]}\,[k_1', k_2'] &= 2\,\overline{[k_1, k_2]}\,k_1'\,[k_1', k_2'] = 2\,\overline{[k_1, k_2]}\,((k_1, k_1, k_2)^+)' = \\ &= 2\,\overline{[k_1, k_2]}\,\left((k_1^2\odot k_2)' - (k_1\odot(k_1\odot k_2))'\right) = \overline{[k_1, k_2]}\,\left(2k_1^{2'}k_2' + 2k_2'k_1^{2'} - \right.\\ &\quad \left. - 2k_1'\,(k_1\odot k_2)' - 2(k_1\odot k_2)'\,k_1'\right) = \overline{[k_1, k_2]}\,\left(2k_1^{2'}k_2' + 2k_2'k_1^{2'} - 2k_1'k_1'k_2' - \right.\\ &\quad \left. - 2k_2'k_1'k_1' - 4k_1'k_2'k_1'\right) = \overline{[k_1, k_2]}\,[k_1^{2'}, k_2'] = -\overline{[k_1^2, k_2]}\,[k_1', k_2'].\end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо ввиду тождества (2.1). Таким образом, $\overline{[k_1^2, k_2]}\,[k_1', k_2']=0$. А значит, алгебра $(J, [,])$ удовлетворяет тождеству (2.5). Следовательно, $[P(K), K]\subseteq K$. Предложение доказано.

**Предложение 2.11.** *Пусть $J$ — специальная йорданова алгебра с единицей, $R$ — ее ассоциативная обертывающая алгебра. Тогда для всякого максимального внутреннего идеала $K$ либо $RK\cap J=K$ или $KR\cap J=K$, либо $\mathrm{id}_R([P(K)]^6)\cap J\subseteq K$.*

Доказательство. Для всякого подмножества $M\subseteq J$ через $\tilde{M}$ обозначим подалгебру алгебры $R$, порожденную множеством $M$. Предположим, что $RK\cap J\neq K$, $KR\cap J\neq K$ и $J\cap\mathrm{id}_R([P(K)]^6)\not\subseteq K$. Так как $KR\cap J$ и $RK\cap J\lhd_{\text{вн}}J$ и $K\subseteq KR\cap J$, $RK\cap J$, то $KR\cap J=J=RK\cap J$, т. е. $RK=KR=R$.

**Лемма 2.12.** *Для всякого* $T \triangleleft_{\text{вн}} J$ *справедливо включение* $TJP(T) + P(T)JT \subseteq \tilde{T}$.

Доказательство. Известно [15], что всякую ассоциативную обертывающую алгебру $R$ йордановой алгебры $J$ можно рассматривать как $J$-бимодуль относительно представления $x \mapsto (1/2)x'$, где $x'$ — оператор правого умножения в алгебре $R$ на элемент $x$. Пусть $M = A/\tilde{T}$ — фактор-бимодуль $T$-бимодулей $A$ и $\tilde{T}$ и $\mathcal{J} = T + M$ — расщепляемое посредством бимодуля нулевое расширение алгебры $T$. Для всякого фиксированного $a \in J$ и произвольных $t_1, t_2 \in T$, $m_1, m_2 \in M$ положим $[t_1 + m_1, t_2 + m_2] = \overline{t_1at_2}$, где $\overline{t_1at_2} = t_1at_2 + \tilde{T} \in M$. Тривиальная проверка показывает, что полученные алгебры $(\mathcal{J}, [\ ,\ ]_a, a \in J)$ некоммутативные йордановы. Более того, $[t_1^2, t_2]_a = 2[t_1, t_2]_{t_1 \odot a}$ для всех $t_1, t_2 \in T$, $a \in J$. Отсюда, как и при доказательстве предложения 2.10, получим, что справедливость тождества (2.5) на алгебрах $(\mathcal{J}, [\ ,\ ]_a)$ следует из тождества (2.1). Таким образом, $(\mathcal{J}, [\ ,\ ]_a)$ удовлетворяют тождеству (2.5). По предложению 2.5 имеем $[P(\mathcal{J}), \mathcal{J}]_a = 0$. Следовательно, $P(T)JT + TJP(T) \subseteq \tilde{T}$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство предложения 2.11. Так как $P(J) \not\subseteq K$, то ввиду максимальности $K$ имеем $P(J) + K = J$. Следовательно,

$$R = \widetilde{KP(J)}^{\#} = \widetilde{P(J)}^{\#}\tilde{K},$$

где $P(J)^{\#} = P(J) + \Phi 1$. По следствию 2.8

$$\widetilde{P(J)} = P(J) + [P(J)]^2 + [P(J)]^3,$$

где степень $[P(J)]^i$ понимается относительно умножения в алгебре $R$. Кроме того, $\{P(K), J, J, J\} \subseteq J$, где $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = (1/2)(x_1x_2x_3x_4 + x_4x_3x_2x_1)$.

В силу очевидных равенств

$$k^2a_1a_2a_3 = 2k\{k, a_1, a_2, a_3\} - 2ka_3\{a_2, a_1, k\} + ka_3ka_1a_2,$$

$$(1/2)[k_1, k_2]a_1a_2 = \{k_1, k_2, a_1, a_2\} - \{a_2, a_1, k_2\}k_1 + k_2\{a_1, a_2, k_1\} - k_2k_1(a_1 \odot a_2)$$

последовательно заключаем, что $[P(K)]^3R \subseteq [P(K)]^2(P(J) + [P(J)]^2)\tilde{K} \subseteq P(K)P(J)\tilde{K} + P(K)\tilde{K} \subseteq \tilde{K}$, где последнее включение имеет место в силу леммы 2.12. Значит, $R[P(K)]^6R \subseteq \tilde{K}$. Так как $R[P(K)]^6R \cap J \not\subseteq K$, то $J = K + R[P(K)]^6R \cap J \subseteq \tilde{K}$. Следовательно, $\tilde{K} = R$.

Покажем теперь, что для всякого $v \in \mathrm{id}_R(\widetilde{P(K)})$ найдется натуральное число $n$ такое, что $v^n \in \widetilde{P(K)}$. Действительно, $\mathrm{id}_R(P(K)) = P(K)R = RP(K)$. Для всякого $v \in P(K)R$ найдутся конечные множества $F \subseteq P(K)$ и $S \subseteq K$ такие, что $v \in \langle F, S\rangle$, где $\langle F, S\rangle = \sum_{t=0}^{m} FS^t$, $m = |S|$. Пусть $W_{2m}(y, X)$ — множество линейных по $y$ слов из $\mathrm{Jord}(X \cup \{y\})$, чья степень по $X$ не превосходит $2m$. Как доказано в [17, лемма 2], для всякого $k$ справедливо включение $\langle F, S\rangle^k \subseteq \langle [W_{2m}(F, S)]^k, S\rangle$. Еще раз применяя эту же лемму, получим для некоторого $n$

$$\langle F, S\rangle^n \subseteq \langle [W \odot W]^m \tilde{W}, S\rangle,$$

где $W = W_{2m}(F, S)$. Так как $x^2a = 2x(x \odot a) - xax$, то $(W \odot W)S \subseteq (P(K) \odot P(K))K \subseteq \widetilde{P(K)}$. Отсюда $\langle F, S\rangle^n \subseteq \langle (W \odot W)^m\tilde{W}, S\rangle \subseteq \widetilde{P(K)}$. Следовательно, $v^n \in \widetilde{P(K)}$.

Ясно, что $\widetilde{P(K)} = P(K) + [P(K), P(K)] + [P(K), P(K)] \odot P(K)$. Учитывая, что $[P(K), P(K)] \odot [P(K), P(K)] \subseteq P(K) + \{P(K), P(K), P(K), P(K)\} \subseteq P(K)$, получим, что для всякого $v \in [P(K), P(K)] + [P(K), P(K)] \odot P(K)$ справедливо включение $v^2 \in P(K)$. Таким образом, для всякого $v \in \widetilde{P(K)}$ найдется $u \in P(K)$ такой, что $(v - u)^2 \in P(K)$.

Так как $\mathrm{id}_R(P(K))\cap J\neq K$, то $\mathrm{id}_R(P(K))\cap J+K=J$. Поэтому найдутся такие $v\in\mathrm{id}_R(P(K))\cap J$ и $k_1\in K$, что $1=v+k_1$. Пусть натуральное число $n$ удовлетворяет условию $v^n\in\widetilde{P(K)}$. Тогда $(1-k_1)^n\in\widetilde{P(K)}$. По доказанному найдется $k_2\in K$, для которого

$$((1-k_1)^n-k_2)^2\in P(K)\subseteq K.$$

Отсюда $1\in K$; противоречие. Предложение доказано.

## § 3. СВЕДЕНИЕ К ПЕРВИЧНОСТИ $A^+$ И $PI^{(+)}$-АЛГЕБРЫ

В качестве некоторой аналогии для последующего отметим один результат А. Тэди [18]. Пусть $\mathfrak{A}$ — правоальтернативная алгебра, $I\lhd\mathfrak{A}^{(+)}$ и фактор-алгебра $\mathfrak{A}^{(+)}/_I$ невырождена. Тогда $I\lhd\mathfrak{A}$. В этом параграфе мы рассмотрим похожие вопросы для некоммутативных йордановых алгебр.

Напомним, что идеал $I$ называется *первичным идеалом алгебры* $\mathfrak{A}$, если фактор-алгебра $\mathfrak{A}/_I$ первична. Через $Z(\mathfrak{A})$ обозначим ассоциативно коммутативный центр алгебры $\mathfrak{A}$ [14].

**Предложение 3.1.** *Пусть $I$ — первичный идеал алгебры $A^{(+)}$, не содержащий ненулевых идеалов алгебры $A$. Тогда либо $Z(A)=Z(A^{(+)})$, либо $(A,A,A)^+=0$.*

Доказательство. Для любых $a$, $x$, $y$, $z\in A$

$$\begin{aligned}[a,y]\odot(x,y,z)^+&=-[a,(x,y,z)^+]\odot y+[a,(x,y,z)^+\odot y]=\\&=-[a,(x,y,z)^+]\odot y+(1/2)[a,(x,y^2,z)^+].\end{aligned}\tag{3.1}$$

Очевидно, что $Z(A^{(+)})\mathrm{Der}(A^{(+)})\subseteq Z(A^{(+)})$. Значит, $[Z(A^{(+)}),A]\subseteq Z(A^{(+)})$. Так как $[a,(x,y,z)^+]=([a,x],y,z)^++(x,y,[a,z])^++(x,[a,y],z)^+$, то $[Z(A^{(+)}),(A,A,A)^+]=0$. Применяя (3.1), отсюда для всякого $y\in A$ получим

$$\mathrm{id}_{A^{(+)}}([Z(A^{(+)}),y])\odot\mathrm{id}_{A^{(+)}}((A,y,A)^+)=0.\tag{3.2}$$

Ввиду первичности идеала $I$ либо $[Z(A^{(+)}),y]\subseteq I$, либо $(A,y,A)^+\subseteq I$. В последнем случае, используя линеаризованное по $y$ соотношение (3.2), для любого $x\in A$ имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_{A^{(+)}}([Z(A^{(+)}),y])\odot\mathrm{id}_{A^{(+)}}((A,x,A)^+)\subseteq\mathrm{id}_{A^{(+)}}([Z(A^{(+)}),x])\odot\\\odot\mathrm{id}_{A^{(+)}}((A,y,A)^+)=0.\end{aligned}$$

Вновь используя первичность идеала $I$, заключаем, что либо $\mathrm{id}_{A^{(+)}}([Z(A^{(+)}),A])\subseteq I$, либо $\mathrm{Id}_{A^{(+)}}((A,A,A)^+)=D(A^{(+)})\subseteq I$.

Так как оба идеала выдерживают дифференцирования алгебры $A^{(+)}$, то они являются идеалами и в $A$. Тогда по условию либо $(A,A,A)^+=0$, либо $[Z(A^{(+)}),A]=0$. Во всякой неассоциативной алгебре справедливо равенство

$$(x,y,z)^-+4(x,y,z)^+=2(x,y,z)-2(z,y,x),$$

где $(x,y,z)^-=[[x,y],z]-[x,[y,z]]$ — ассоциатор в алгебре $A^{(-)}$. Поэтому во всякой эластичной алгебре справедливо тождество

$$4(x,y,z)=4(x,y,z)^++(x,y,z)^-.\tag{3.3}$$

Используя (3.3), получим, что если $[Z(A^{(+)}),A]=0$, то $Z(A^{(+)})\subseteq Z(A)$. А так как всегда $Z(A)\subseteq Z(A^{(+)})$, то и $Z(A)=Z(A^{(+)})$. Предложение доказано.

**Предложение 3.2.** *Пусть $I$ — первичный идеал алгебры $A^{(+)}$. Тогда либо $P(A^{(+)})\subseteq I$ (или $\Lambda(A^{(+)})\subseteq I$), либо $I$ — первичный идеал алгебры $A$.*

Доказательство. Для всякого $x \in I$ рассмотрим отображение $f_x$: $A^{(+)} \times A^{(+)} \times A^{(+)} \to J = A^{(+)}/_I$, полагая $f_x(a, b, c) = (a^\varphi, [b, x]^\varphi, c^\varphi)^+$, где $\varphi$: $A^{(+)} \to J$ — естественный гомоморфизм $A^{(+)}$ на $J = A^{(+)}/_I$. Ясно, что $f_x(a, b, a) = 0$. В силу (2.1) $(a, [a, x], c)^+ = -(a, [a, c], x)^+ \in I$. Значит, $f_x(a, a, c) = 0$, т. е. $f_x(a, b, c)$ — кососимметрическое отображение.

Заметим теперь, что $[y, a] \odot (a, y, b)^+ = -y \odot (a, [y, a], b)^+ + (1/2)(a, [y^2, a], b)^+ = y \odot (a, [b, a], y)^+ - (1/2)(a, [b, a], y^2)^+$ для всех $a, b, y \in A$. Отсюда для любых $a, b, c \in A$, $x \in I$ имеем

$$[x, a] \odot (a, b, c)^+ \in \mathrm{id}_{A^{(+)}}(x) \subseteq I. \tag{3.4}$$

Следовательно, $(b, [x, a^2], c)^+ - 2(b, [x, a], c)^+ \odot a = 2(b, a, c)^+ \odot [x, a] = -2(a, c, b)^+ \odot [x, a] - 2(c, b, a)^+ \odot [x, a] \in I$. Таким образом, $f_x(a^2, b, c) = 2f(a, b, c) \odot a^\varphi$ для всех $a, b, c \in A$.

Алгебра $J$ естественно является $A^{(+)}$-бимодулем. В силу следствия 2.7 получим $f_x(A^{(+)}, A^{(+)}, A^{(+)}) \odot P(J) = 0$. Значит (см. 1.3),

$$\mathrm{id}_J(f_x(A^{(+)}, A^{(+)}, A^{(+)})) \odot P^3(J) = 0.$$

Ввиду первичности алгебры $J$ либо $P(J) \subseteq I$, либо $(A, [I, A], A)^+ \subseteq I$. В последнем случае, применяя [19], имеем $[I, A]^\varphi \subseteq Z(J)$. По (3.4) $[I, A] \odot (A, A, A)^+ \subseteq I$. Следовательно, $\mathrm{id}_{A^{(+)}}([I, A]) \odot D(A^{(+)}) \subseteq I$. Отсюда либо $D(A^{(+)}) \subseteq I$, а значит, и $P(A^{(+)}) \subseteq I$, либо $[I, A] \subseteq I$, т. е. $I \lhd A$.

Остается доказать, что $I$ — первичный идеал в $A$. Пусть $B, C \lhd A$. Тогда $B, C \lhd A^{(+)}$. Если $B^2 \subseteq I$, то $(B^{(+)})^2 = B \odot B \subseteq B^2 \subseteq I$. Отсюда и $B \subseteq I$. Предположим, что $BC \subseteq I$. Тогда $(B \cap C)^2 \subseteq I$ и $B \cap C \subseteq I$, как отмечено выше. Поэтому $CB \subseteq I$ и $B \odot C \subseteq I$. Используя первичность идеала $I$ в алгебре $A^{(+)}$, получим, что либо $B \subseteq I$, либо $C \subseteq I$. Предложение доказано.

**Предложение 3.3.** *Пусть $I$ — идеал алгебры $A^{(+)}$ такой, что фактор-алгебра $A^{(+)}/_I$ — первичная невырожденная йорданова алгебра. Тогда либо $(A, A, A)^+ \subseteq I$, либо $I$ — первичный идеал алгебры $A$.*

Доказательство. В силу предложения 3.2 нам достаточно рассмотреть случай, когда $P(A^{(+)}) \subseteq I$. В этом случае фактор-алгебра $J = A^{(+)}/_I$ — первичная невырожденная йорданова алгебра такая, что $P(J) = 0$. Такие алгбры ввиду результатов Е. И. Зельманова [8] либо ассоциативны, либо центр $Z = Z(J)$ отличен от нуля и центральное замыкание $Z^{-1}J = B_F(f, V)$ является йордановой алгебры невырожденной билинейной формы над полем $F = Z^{-1}Z$. В последнем случае $k(x_1, x_2; y_1, y_2) = (1/2) k(x_1, y_1) \Delta^1_{x_1}(x_2) \Delta^1_{y_1}(y_2) = (x_1, y_1, y_2)^+ \odot x_2 + (x_2, y_1, y_2) \odot x_1 - (x_1 \odot x_2, y_1, y_2)^+$ — центральная функция в алгебре $Z^{-1}J$.

Предположим, что $I$ не является идеалом в $A$ и $(A, A, A)^+ \not\subseteq I$. Не теряя общности, можем считать, что в $I$ нет ненулевых идеалов алгебры $A$. Тогда по предложению 3.1 имеем $Z(A) = Z(A^{(+)})$.

Докажем теперь, что $Z(A) \cap I = 0$ и $k(x_1, x_2; y_1, y_2)$ — центральная функция на $A$. Так как

$$\mathrm{id}_A(Z(A) \cap I) = \mathrm{id}_{A^{(+)}}(Z(A) \cap I) \subseteq I,$$

то $Z(A) \cap I = 0$. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_6) = (k(x_1, x_2; x_3, x_4), x_5, x_6)^+$. Тогда $f(A^{(+)}) \subseteq I$ и идеал $\mathrm{id}_{A^{(+)}}(f(A^{(+)}))$ выдерживает дифференцирования алгебры $A^{(+)}$, т. е. (см. 1.2) $\mathrm{id}_{A^{(+)}}(f(A^{(+)})) \lhd A$. Следовательно, $f(A^{(+)}) = 0$ и $k(x_1, x_2; x_3, x_4)$ — центральная функция на $A$. В частности,

$$k(I, A; A, A) \subseteq Z(A) \cap I = 0.$$

Так как $M(A) = M(A^{(+)}) M(A^{(-)})$ (см. 1.1) и $k(x_1 D, x_2; x_3, x_4) = k(x_1, x_2; x_3, x_4)D - k(x_1, x_2 D; x_3, x_4) - k(x_1, x_2; x_3 D, x_4) - k(x_1, x_2; x_3, x_4 D)$ для любого $D \in \mathrm{Der}(A^{(+)})$, то

$$k(IM(A), A; A; A) \subseteq k(I, A; A, A) M(A),$$

т. е. $\overline{k(\mathrm{id}_A(I),\ A;\ A,\ A)}=0$. Алгебра $Z^{-1}J=B_F(f,\ V)$ проста, поэтому $Z^{-1}\,\overline{\mathrm{id}_A(I)}=Z^{-1}J$, где $\overline{\mathrm{id}_A(I)}$ — гомоморфный образ идеала $\mathrm{id}_A(I)$ при гомоморфизме $A^{(+)}\to J={}^{A^{(+)}}/_{I}$. Функция $k(x_1,\ x_2;\ x_3,\ x_4)$ полилинейна, поэтому

$$k(Z^{-1}J)=Z^{-1}k(\overline{\mathrm{id}_A(I)})=0,$$

т. е. $k(x_1,\ x_2;\ x_3,\ x_4)=0$ — тождество на $B_F(f,\ V)$. В этом случае алгебра $B_F(f,\ A)$ ассоциативна. Следовательно, $D(A^{(+)})\subseteq I$; противоречие. Предложение доказано.

**Предложение 3.4.** *Пусть $A$ — строго первичная некоммутативная йорданова алгебра. Тогда либо $(A,\ A,\ A)^+=0$, либо $A^{(+)}$ — первичная невырожденная йорданова алгебра.*

Доказательство. Как известно [20], радикал $\mathrm{rad}(A^{(+)})$ специален, т. е. существует семейство первичных идеалов $\{I_\alpha|\alpha\in\Omega\}$ алгебры $A^{(+)}$ такое, что фактор-алгебры $A_\alpha^{(+)}={}^{A^{(+)}}/_{I_\alpha}$. невырождены и $\mathrm{rad}\left(A^{(+)}\right)=\bigcap\limits_{\alpha\in\Omega}I_\alpha$. Через $\mathrm{rad}(A)$ мы обозначаем наибольший идеал алгебры $A$, содержащийся в $\mathrm{rad}(A^{(+)})$. По условию $\mathrm{rad}(A)=0$.

Пусть $\Omega_1=\{\alpha\in\Omega|D(A^{(+)})\subseteq I_\alpha\}$, и $\Omega_2=\Omega-\Omega_1$. В силу предложения 3.3 для любого $\alpha\in\Omega_2$ имеем $I_\alpha\lhd A$. Тогда $B=D\left(A^{(+)}\right)\cap\bigcap\limits_{\alpha\in\Omega_2}I_\alpha\subseteq$ $\subseteq\bigcap\limits_{\alpha\in\Omega}I_\alpha=\mathrm{rad}\left(A^{(+)}\right)$ и $B\lhd A$. Поэтому либо $D(A^{(+)})=(A,\ A,\ A)^+=0$, либо $\mathrm{rad}\left(A^{(+)}\right)\subseteq\bigcap\limits_{\alpha\in\Omega_2}I_\alpha=0$. В последнем случае осталось доказать, что $A^{(+)}$ первична. Пусть $B$, $C$ — идеалы $A^{(+)}$ такие, что $B\odot C=0$. Положим $\Omega_2'=\{\alpha\in\Omega_2\,|\,B\subseteq I_\alpha\}$, $\Omega_2''=\{\alpha\in\Omega_2\,|\,C\subseteq I_\alpha\}$. Ввиду первичности идеалов $I_\alpha$ получим $\Omega_2=\Omega_2'\cup\Omega_2''$. Значит, либо $B\subseteq\bigcap\limits_{\alpha\in\Omega_2'}I_\alpha=0$, либо $C\subseteq\bigcap\limits_{\alpha\in\Omega_2''}I_\alpha=0$ т. е. $A^{(+)}$ первичная алгебра. Предложение доказано.

Алгебру $A$ назовем *$PI^{(+)}$-алгеброй*, если $A^{(+)}$ — $PI$-алгебра, т. е. йорданова алгебра $A^{(+)}$ удовлетворяет существенному полилинейному тождеству [14]. Строение первичных невырожденных $PI$-алгебр описано Е. И. Зельмановым [8]. А именно всякая такая алгебра имеет ненулевой центр $Z(J)$ и центральное замыкание $Z(J)^{-1}J$ — либо йорданова алгебра билинейной невырожденной формы, либо простая центральная конечномерная над полем $Z^{-1}(J)Z(J)$ йорданова алгебра. Сейчас мы можем получить аналогичный результат для некоммутативных йордановых $PI^{(+)}$-алгебр.

**Теорема 3.5.** *Пусть $A$ — строго первичная некоммутативная йорданова $PI^{(+)}$-алгебра такая, что $(A,\ A,\ A)^+\neq0$. Тогда ее центр $Z(A)=$ $=Z(A^{(+)})\neq0$, а центральное замыкание $Z^{-1}(A)A$ является либо простой квадратичной эластичной алгеброй, у которой $(Z(A)^{-1}A)^+$ — йорданова алгебра невырожденной билинейной формы; либо центральной простой конечномерной алгеброй, у которой $(Z^{-1}(A)A)^{(+)}$ — центральная простая конечномерная над полем $Z^{-1}(A)Z(A)$ йорданова алгебра.*

Доказательство вытекает из предложений 3.1, 3.4 и соответствующего результата Е. И. Зельманова о (коммутативных) йордановых $PI$-алгебрах.

Отметим, что конечномерные алгебры $A$, у которых $A^{(+)}$ — простая йорданова алгебра, описаны А. А. Албертом [1]. Они или коммутативны, или квазиассоциативны над центром.

## § 4. О КВАЗИАССОЦИАТИВНОСТИ АЛГЕБРЫ $Q_C(A)$

В этом параграфе найдем некоторые «внутренние» условия на алгебру $A$ так, чтобы ее центральное замыкание $Q_C(A)$ являлось квазиассоциативной алгеброй над полем $C$, где $C = C(A)$ — расширенный центроид алгебры $A$ [21, 22].

Отметим, что квазиассоциативные алгебры над полем описаны Мак-Криммоном [23]. А именно алгебра $Q_C(A)$ квазиассоциативна над полем $C$ тогда и только тогда, когда в алгебре $Q_C(A)$ для некоторого ненулевого $\delta \in C$ выполняется тождество $(x, y, z) = (1-\delta)(x, y, z)^+$. Более того, если уравнение $\Delta^2 = \delta$ разрешимо в $C$, то $Q_C(A)$ — мутация некоторой ассоциативной алгебры $D^{(\lambda)}$ над полем $C$, т. е. $Q_C(A) = D^{(\lambda)}$, где умножение в $D^{(\lambda)}$ определяется так:

$$x \underset{\lambda}{\cdot} y = \lambda xy + (1-\lambda) yx, \ \lambda = (\Delta + 1)/2.$$

Иначе существуют ассоциативная алгебра $D$ над полем $C$ с инволюцией $*$ и элемент $\lambda$ из центроида $\Gamma(D)$ алгебры $D$ такие, что

$$Q_C(A) = H(D^{(\lambda)}, *), \quad \lambda^* + \lambda = 1.$$

Напомним также конструкцию центрального замыкания $Q_C(A)$ для неассоциативной первичной алгебры $A$ [21]. Пусть $I \lhd A$ и Доп$(I, A)$ — множество допустимых отображений $\varphi$: $I \to A$, т. е. $\varphi(ua) = \varphi(u)a$ и $\varphi(au) = a\varphi(u)$ для всех $a \in A$, $u \in I$. Два допустимых отображения $\varphi \in$ Доп$(I, A)$ и $\psi \in$ Доп$(J, A)$ называются *эквивалентными*, если тождественно равны на некотором $P \lhd A$, $P \neq 0$, $P \subseteq I \cap J$. На множестве классов эквивалентности

$$C(A) = \{[(\varphi, I)] | \varphi \in \text{Доп}(I, A), I \lhd A, I \neq 0\}$$

вводится структура алгебры:

$$[(\varphi, I)] + [(\psi, J)] = [(\varphi + \psi, I \cap J)],$$
$$[(\varphi, I)] \cdot [(\psi, J)] = [(\varphi\psi, \psi^{-1}I)],$$

где $\psi^{-1}I = \{x \in J | \psi(x) \in I\} \lhd A$. Полученная алгебра $C(A)$ называется *расширенным центроидом алгебры* $A$. Если $A$ первична, то $C(A)$ — поле. Пусть $\mathcal{P}$ — максимальный идеал $A \otimes C(A)$ такой, что $\mathcal{P} \cap A \otimes 1 = 0$. Тогда $Q_C(A) = {}^{A\otimes C(A)}/_{\mathcal{P}}$ называется *центральным замыканием алгебры* $A$. Алгебра $A$ называется *центрально замкнутой*, если $\Gamma(A) = C(A)$. Для первичной алгебры $A$ алгебра $Q_C(A)$ первична и центрально замкнута. Всякая простая алгебра центрально замкнута.

В дальнейшем нам удобно будет, как это отмечалось выше, представлять алгебру $A$ в виде $(J, \langle\ ,\ \rangle)$, где $J = A^{(+)}$, $\langle\ ,\ \rangle$ — коммутатор алгебры $A$. Тем самым алгебру $A$ мы будем рассматривать (вместо ее исходной кольцевой сигнатуры) в сигнатуре $\Sigma_0 = \{+, \odot, \langle\ ,\ \rangle\}$, где $\{+, \odot\}$ — «йорданова» сигнатура алгебры $J$ и $\langle\ ,\ \rangle$: $J \times J \to J$ — кососимметрическая операция на $J$ такая, что $\langle x^2, y\rangle = 2\langle x, y\rangle \odot x$ для всех $x$, $y \in J$. В связи с этим рассмотрим следующее определение. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная алгебра. Билинейную операцию $\langle\ ,\ \rangle$: $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ назовем *D-согласованной со структурой алгебры* $\mathfrak{A}$ (или просто *DC-операцией*), если для всех $a$, $b \in \mathfrak{A}$ отображения $x \to \langle x, a\rangle$ и $y \to \langle b, y\rangle$ являются дифференцированиями алгебры $\mathfrak{A}$.

**Предложение 4.1.** *Пусть $R$ — первичная некоммутативная ассоциативная алгебра. Операция $\langle\ ,\ \rangle$: $R \times R \to R$ является D-согласованной на $R$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:

1) *в алгебре $R$ справедливо тождество $\langle a, b\rangle r[c, d] = [a, b] r\langle c, d\rangle$;*

2) *существует $\lambda \in C(R)$ такой, что в алгебре $Q_C(R)$ для всех $a$, $b \in R$ справедливо равенство $\langle a, b\rangle = \lambda[a, b]$.*

Доказательство. Пусть $\langle\ ,\ \rangle$: $R \times R \to R$ — $DC$-операция на $R$. Тогда для любых $a, b, c, d \in R$ имеем $\langle ac, bd\rangle = a\langle c, bd\rangle + \langle a, bd\rangle c = \langle ac, b\rangle d + b\langle ac, d\rangle = a(\langle c, b\rangle d + b\langle c, d\rangle) + (b\langle a, d\rangle + \langle a, b\rangle d)c = (a\langle c, b\rangle + \langle a, b\rangle c)d + b(a\langle c, d\rangle + \langle a, d\rangle c)$, откуда $[a, b]\langle c, d\rangle =$

$= \langle a, b\rangle [c, d]$. Теперь $\langle a, b\rangle x [c, d] = \langle ax, b\rangle [c, d] - a\langle x, b\rangle [c, d] = ([ax, b] - a[x, b])\langle c, d\rangle = [a, b] x\langle c, d\rangle$. Тем самым условие 1 выполнено.

Пусть выполнено условие 1. Рассмотрим идеал $U = \mathrm{id}_R([R, R])$. Для $t = \sum p_i [x_i, y_i] q_i$, где $x_i, y_i, p_i, q_i \in R$, положим

$$\varphi(t) = \sum p_i \langle x_i, y_i\rangle q_i.$$

Если $t = 0$, то

$$\varphi(t) R [R, R] = \sum p_i \langle x_i, y_i\rangle q_i R [R, R] = \sum p_i [x_i, y_i] q_i R \langle R, R\rangle = 0.$$

Ввиду первичности $R$ имеем $[R, R] \neq 0$ по условию, поэтому $\varphi(t) = 0$. Таким образом $\varphi$ — корректно определенное отображение из $U$ в $R$. Очевидно, оно является допустимым. Пусть $\lambda = [(\varphi, U)] \in C(R)$. Тогда в $Q_C(R)$ имеем $\langle a, b\rangle = \lambda [a, b]$, и условие 2 выполнено. Из него сразу же получаем, что $\langle\ ,\ \rangle$ — $DC$-операция на $R$. Более того, она всегда кососимметрична. Предложение доказано.

Пусть теперь $J$ — йорданова алгебра, $R$ — ее ассоциативная обертывающая алгебра. Пусть $\langle\ ,\ \rangle$ — $DC$-операция на $R$ и $\langle J, J\rangle \subseteq J$. Тогда ограничение $\langle\ ,\ \rangle|_J$, очевидно, является $D$-согласованной операцией на $J$. Так полученную операцию на $J$ будем называть *$DC$-операцией, индуцированной $DC$-операцией из $R$*. И, наоборот, операцию $\langle\ ,\ \rangle$ на $R$ будем называть *продолжением операции* $\langle\ ,\ \rangle|_J$.

**Лемма 4.2.** *Пусть $J$ — йорданова алгебра, $R$ — ее первичная некоммутативная ассоциативная обертывающая алгебра. Ненулевая операция $\langle\ ,\ \rangle\colon J \times J \to J$ продолжается до $DC$-операции на $R$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) *для любых $a, b, c, d \in J$ и $r \in R$ в алгебре $R$ справедливо равенство $\langle a, b\rangle r [c, d] = [a, b] r \langle c, d\rangle$;*

2) *для любого конечного набора $x_i, y_i \in J$ и $p_i, q_i \in R$ равенство $\sum p_i \langle x_i, y_i\rangle q_i = 0$ имеет место в $R$ тогда и только тогда, когда $\sum p_i [x_i, y_i] q_i = 0$.*

Доказательство. Предположим, что в алгебре $R$ справедливо условие 2. Для любых элементов $x, y \in R$, имеющих запись $x = \sum\limits_i x_1^{(i)} \ldots x_{n_i}^{(i)}$,

$$y = \sum_j y_1^{(j)} \ldots y_{m_j}^{(j)},$$

где $x_k^{(i)}, y_t^{(j)} \in J$, по определению положим

$$\widetilde{\langle x, y\rangle} = \sum_{i,j} \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{t=1}^{m_j} x_1^{(i)} \ldots x_{k-1}^{(i)} y_1^{(j)} \ldots y_{t-1}^{(j)} \langle x_k^{(i)}, y_t^{(j)}\rangle y_{t+1}^{(j)} \ldots y_{m_j}^{(j)} x_{k+1}^{(i)} \ldots x_{n_i}^{(i)}. \tag{4.1}$$

Заметим, во-первых, что если в правой части (4.1) заменить элементы $\langle x_k^{(i)}, y_t^{(j)}\rangle$ на $[x_k^{(i)}, y_t^{(j)}]$, то полученное выражение будет равно $[x, y]$. По предположению равенство выражений типа (4.1) в $R$ эквивалентно равенству таких же сумм, в которых элементы $\langle x_k^{(i)}, y_t^{(j)}\rangle$ заменены на $[x_k^{(i)}, y_t^{(j)}]$. Отсюда следует, что значение $\widetilde{\langle x, y\rangle}$ не зависит от различных записей $x$, $y$ через порождающие из $J$. Более того, проверка тождества $\widetilde{\langle xy, z\rangle} = \widetilde{\langle x, z\rangle} y + x\widetilde{\langle y, z\rangle}$, очевидно, сводится к некоторому равенству сумм типа (4.1). Это, в свою очередь, эквивалентно равенству, если в этих суммах заменить операцию $\langle\ ,\ \rangle$ на $[\ ,\ ]$. Теперь, учитывая, что коммутатор $[\ ,\ ]$ — $DC$-операция на $R$, получим, что и $\widetilde{\langle\ ,\ \rangle}$ — $DC$-операция на $R$. Ясно, что $\widetilde{\langle\ ,\ \rangle}$ — продолжение на $R$ операции $\langle\ ,\ \rangle$.

Теперь по предложению 4.1 в алгебре $R$ справедливо тождество $\langle\widetilde{a, b}\rangle r[c, d]=[a, b]r\langle\widetilde{c, d}\rangle$. Тем более оно справедливо для $a, b, c, d\in J$.

Осталось доказать, что из условия 1 следует условие 2. Пусть $x_i, y_i\in J$, $p_i, q_i\in R$, и $\sum p_i\langle x_i, y_i\rangle q_i=0$. Для любых $a, b\in J$ и $r\in R$ по предположению имеем

$$\sum p_i[x_i, y_i]q_ir\langle a, b\rangle=\sum p_i\langle x_i, y_i\rangle q_i r[a, b]=0,$$

т. е. $\left(\sum p_i[x_i, y_i]q_i\right)R\langle J, J\rangle=0$.

По условию $\langle J, J\rangle\neq 0$ ввиду первичности $R$

$$\sum p_i[x_i, y_i]q_i=0.$$

Аналогично доказывается и обратная импликация. Условие 2 справедливо. Лемма доказана.

Следующий факт хорошо известен, приведем его здесь для полноты изложения.

**Лемма 4.3.** *Пусть $J$ — подалгебра алгебры $R^{(+)}$, где $R$ — первичная ассоциативная алгебра, причем $R$ порождается множеством $J$. Тогда $J$ — первичная алгебра.*

Доказательство. Пусть $B, C\lhd J$ и $B\odot C=0$. Тогда $BR(C\odot C)=RB(C\odot C)\subseteq R(B\odot C)R=0$. Значит, либо $B=0$, либо $C\odot C=0$. В последнем случае $[[x, y], J]=(x, J, y)^+=0$ для $x, y\in C$. Отсюда $[[x, y], R]=0$ и $[x, y]=2k(x, y)=0$. Следовательно, $[C, C]=0$ и $CC=0$, а значит, $CRC=CCR=0$, т. е. $C=0$. Таким образом, $J$ — первичная алгебра. Лемма доказана.

**Лемма 4.4.** *Пусть $J$ — специальная йорданова алгебра, $R$ — ее первичная ассоциативная обертывающая алгебра, $I$ — ненулевой идеал $J$, $\langle\ ,\ \rangle$: $J\times J\to J$ — DC-операция на $J$, причем $\langle I, J\rangle+\langle J, I\rangle\subseteq I$ и подалгебра $A$, порожденная в $R$ множеством $I$, первична. Тогда операция $\langle\ ,\ \rangle$ продолжается до DC-операции на $R$ в том и только том случае, когда ее ограничение $\langle\ ,\ \rangle|_I$ на $I$ продолжается до DC-операции на $A$.*

Доказательство. Заметим, что для всякого $r\in R$ найдется $n$, для которого $I^{(n)}r+rI^{(n)}\subseteq A$, где $I^{(n)}$ — разрешимая степень идеала $I$. Действительно, так как $x^2a=2x(x\odot a)-xax$, то $(I\odot I)J\subseteq A$. Отсюда $(I\odot I)^nJ^n\subseteq A$; здесь $(I\odot I)^n$, $J^n$ — степени в алгебре $R$. Теперь, так как $R$ порождается множеством $J$, то для всякого $r\in R$ найдется $n$, для которого $r\in J^n$. Следовательно, $I^{(n)}r\subseteq(I\odot I)^nr\subseteq A$. Аналогично $rI^{(n)}\subseteq A$.

Пусть $f(x, y)$ обозначает произвольную кососимметрическую функцию $f$: $J\times J\to R$ такую, что $f(x^2, y)=2f(x, y)\odot x$. Докажем, что для всех $a_i, b_i\in J$ и $r_i, s_i\in R$ существует такое число $n$, что для любых $u, v\in I^{(n)}$ найдутся элементы $x_j, y_j\in I$ и $p_j, q_j\in A$, для которых справедливо равенство

$$\sum vr_if(a_i, b_i)s_iu=\sum p_jf(x_j, y_j)q_j$$

при любой указанной функции $f$. Выберем вначале $m$ такое, что $I^{(m)}r_i\subseteq A$, $s_iI^{(m)}\subseteq A$ для всех $r_i, s_i$. Так как $(I\odot I)A+I\odot I\subseteq I\odot I+A(I\odot I)$, то $(I\odot I)^4I^{(m)}r_if(a_i, b_i)s_iI^{(m)}(I\odot I)^2\subseteq(I\odot I)^4Af(a_i, b_i)A(I\odot I)^2\subseteq A(I\odot I)^4f(a_i, b_i)(I\odot I)^2A$. Теперь $(I\odot I)f(a_i, b_i)\subseteq A(f(a_i, b_i)\odot I)A\subseteq Af(I\odot a_i, b_i)A+A(f(I, b_i)\odot a_i)A$. Поэтому $(I\odot I)^2f(a_i, b_i)(I\odot I)\subseteq Af(I, b_i)A+(I\odot I)a_if(I, b_i)A+Af(I, b_i)a_i(I\odot I)\subseteq Af(I, b_i)A$. Аналогично $(I\odot I)^2f(I, b_i)(I\odot I)\subseteq Af(I, I)A$. Таким образом, для всех $a_i$, $b_i$ имеем

$$(I\odot I)^4I^{(m)}r_if(a_i, b_i)s_iI^{(m)}(I\odot I)^2\subseteq Af(I, I)A.$$

Следовательно, для $n=m+4$ выполняется

$$I^{(m)}\left(\sum r_if(a_i, b_i)s_i\right)I^{(m)}\subseteq Af(I, I)A.$$

Требуемое представление доказано.

Теперь непосредственно приступим к доказательству рассматриваемой леммы. В одну сторону она тривиальна. Действительно, если операция $\langle\ ,\ \rangle$: $J\times J\to J$ продолжается до $DC$-операции в $R$, то по лемме 4.2 в алгебре $R$ справедливо тождество $\langle a,\ b\rangle r[c,\ d]=[a,\ b]r\langle c,\ d\rangle$ для всех $a,\ b,\ c,\ d\in J$ и $r\in A$. Тем более оно справедливо и для $a,\ b,\ c,\ d\in I$, $r\in A$. Значит, операция $\langle\ ,\ \rangle|_I$ продолжается до $DC$-операции на $A$.

Обратно, пусть операция $\langle\ ,\ \rangle|_I$ продолжается до $DC$-операции на $A$. Рассмотрим элементы $a_i,\ b_i\in J$ и $r_i,\ s_i\in R$ такие, что

$$\sum r_i\,[a,\ b_i]\,s_i=0,\quad t=\sum r_i\,\langle a_i,\ b_i\rangle\,s_i\neq 0.$$

По доказанному выше найдется такое число $n$, что для любых $u,\ v\in I^{(n)}$ имеют место представления

$$\sum ur_i\,[a_i,\ b_i]\,s_iv=\sum p_j\,[x_j,\ y_j]\,q_j,$$
$$\sum ur_i\,\langle a_i,\ b_i\rangle\,s_iv=\sum p_j\,\langle x_j,\ y_j\rangle\,q_j,$$

где $x_j,\ y_j\in I,\ p_j,\ q_j\in A$. По допущению $\sum p_j\,[x_j,\ y_j]\,q_j=0$. Отсюда ввиду леммы 4.2 $\sum p_j\,\langle x_j,\ y_j\rangle\,q_j=0$. Таким образом, $I^{(n)}tI^{(n)}=0$. Значит,

$$I^{(n)}RtRI^{(n)}=RI^{(n)}tI^{(n)}R=0,$$

так как $I^{(n)}\lhd J$. Как мы уже отметили (см. лемму 4.3), из первичности $R$ следует первичность $J$. Следовательно, либо $I=0$, либо $t=0$; противоречие. Поэтому из равенства $\sum r_i\,[a_i,\ b_i]\,s_i=0$ следует $\sum r_i\,\langle a_i,\ b_i\rangle\,s_i=0$. Аналогично доказывается и обратное утверждение. Теперь по лемме 4.2 получим, что операция $\langle\ ,\ \rangle$: $J\times J\to J$ продолжается до $DC$-операции на $R$. Лемма доказана.

**Предложение 4.5.** *Пусть $A=(J,\ \langle\ ,\ \rangle)$ — некоммутативная йорданова алгебра такая, что алгебра $J$ специальная и $P(J)\neq 0$. Существует первичная ассоциативная обертывающая алгебра $R$ для $J$, в которой для любых $a,\ b,\ c,\ d\in J$ и $r\in R$ справедливо равенство $\langle a,\ b\rangle r[c,\ d]=[a,\ b]r\langle c,\ d\rangle$. Тогда центральное замыкание $Q_C(A)$ — квазиассоциативная алгебра над полем $C=C(A)$.*

Доказательство. Из леммы 4.3 имеем: $J$ — первичная алгебра. Отсюда и $A$ — первичная алгебра.

В силу леммы 4.2 операция $\langle\ ,\ \rangle$ имеет продолжение до $DC$-операции на $R$. Это продолжение мы также будем обозначать $\langle\ ,\ \rangle$. Так как отображение $\mathrm{adj}\,(a)$: $r\mapsto\langle r,\ a\rangle$ — дифференцирование алгебры $R$, в частности и для $a\in J$, то $\mathrm{adj}\,(J)\subseteq\mathrm{Der}\,(R)\subseteq\mathrm{End}\,(R)$. Алгебра умножений $M(J)$ алгебры $J$ имеет естественное вложение в $\mathrm{End}\,(R)$. Поэтому мы можем считать, что $M(A)\subseteq\mathrm{End}\,(R)$.

Алгебра $A$, как и алгебра $J$, первична, и $P(J)\neq 0$. По теореме 2.9 алгебра $A^{(-)}$ лиева. В частности, $\mathrm{adj}\,(a)$ — дифференцирование алгебры $A$ для всех $a\in J$. Пусть $x,\ y\in J,\ a\in J$. Тогда

$$\langle x,\ y\rangle\mathrm{adj}\,(a)=\langle x\,\mathrm{adj}\,(a),\ y\rangle+\langle x,\ y\,\mathrm{adj}\,(a)\rangle,$$
$$[x,\ y]\,\mathrm{adj}\,(a)=[x\,\mathrm{adj}\,(a),\ y]+[x,\ y\,\mathrm{adj}\,(a)].$$

Итерируя, получим, что для любых $x,\ y\in J$ и $w\in M(A^{(-)})$ найдутся такие элементы $x_i,\ y_i\in J$, что $\langle x,\ y\rangle\,w=\sum\langle x_i,\ y_i\rangle$ и $[x,\ y]\,w=\sum[x_i,\ y_i]$.

Пусть $U=\mathrm{id}_R([J,\ J]\,M(A))$. Так как $M(A)=M(A^{(-)})M(A^{(+)})$ (см. 1.1), то $U=\mathrm{id}_R([J,\ J]\,M(A^{(-)}))$. Для всякого $t\in U$, имеющего запись $t=\sum r_i([x_i,\ y_i]\,w_i)\,s_i$, где $r_i,\ s_i\in R,\ x_i,\ y_i\in J,\ w_i\in M(A^{(-)})$, положим по определению

$$\varphi\,(t)=\sum r_i\,(\langle x_i,\ y_i\rangle\,w_i)\,s_i.$$

Если $t=0$, то, представляя каждый элемент $[x_i, y_i]\, w_i = \sum_{i,j} [x_{ij}, y_{ij}]$, получим $\sum_{i,j} r_i [x_{ij}, y_{ij}]\, s_i = 0$. По лемме 4.2 отсюда имеем $\sum_{i,j} r_i \langle x_{ij}, y_{ij}\rangle s_i = 0$. Но каждая сумма $\sum_j \langle x_{ij}, y_{ij}\rangle$ равна $\langle x_i, y_i\rangle w_i$. Поэтому

$$\varphi(t) = \sum r_i (\langle x_i, y_i\rangle w_i)\, s_i = 0.$$

Таким образом, $\varphi$ — корректно определенное отображение из $U$ в $R$. Очевидно, что для любых $u \in U$ и $r \in R$

$$\varphi(ur) = \varphi(u)r, \quad \varphi(ru) = r\varphi(u), \quad \varphi(\langle u, r\rangle) = \langle \varphi(u), r\rangle.$$

В частности, $\Delta = [(\varphi, U)] \in C(R)$. Ясно, что

$$\varphi^{-1}U \supseteq [J, J, J] = (J, J, J)^+,$$

т. е. $D(J) \subseteq \varphi^{-1}U$. Рассмотрим ограничение $\varphi^2$ на идеале $D(J)$, $D(J) \triangleleft A$ (см. 1.2). Очевидно, что $\varphi^2(D(J)) \subseteq J$ и $\varphi^2|_{D(J)}$ — допустимое в $A$ отображение из $D(J)$ в $A$. Пусть $\delta = [(\varphi^2|_{D(J)}, D(J))] \in C(A)$. Если $\delta = 0$, то $D(J) = 0$ (см., например, [22, лемма 2.2]), а значит, и $P(J) = 0$, что противоречит условию. Следовательно, $\delta \neq 0$ и

$$4\delta(a, c, b)^+ = -\delta\, [a, b, c] = -\langle\langle a, b\rangle, c\rangle$$

для любых $a, b, c \in A$. Мы уже отмечали, что $A^{(-)}$ лиева, поэтому, используя (3.3), получим

$$4(a, b, c) = 4(a, b, c)^+ + \langle\langle a, c\rangle, b\rangle = 4(1-\delta)(a, b, c)^+.$$

Таким образом, в алгебре $Q_C(A)$ справедливо тождество $(a, b, c) = (1-\delta)(a, b, c)^+$. По теореме Мак-Криммона [23] $Q_C(A)$ — квазиассоциативная алгебра над полем $C = C(A)$. Предложение доказано.

## § 5. ОБ ОПИСАНИИ ПЕРВИЧНЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР И ИХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯХ

Строение специальных первичных невырожденных йордановых алгебр описано Е. И. Зельмановым [8]. А именно пусть $\mathscr{Z}$ — произвольный однородный $T$-идеал $\mathrm{Jord}(X)$ такой, что $\{\mathscr{Z}(SJ[X]), SJ[X], SJ[X], SJ[X]\} \subseteq SJ[X]$. Тогда всякая первичная невырожденная специальная йорданова алгебра $J$ с условием $\mathscr{Z}(J) \neq 0$ имеет строение одного из следующих типов.

I. Существует первичная ассоциативная алгебра $A$ с инволюцией $*$ такая, что $H(A, *) \triangleleft J \subseteq H(Q(A), *)$.

II. Существует первичная ассоциативная алгебра $B$ такая, что $B^{(+)} \triangleleft J \subseteq (Q(B))^{(+)}$, где $Q(A)$, $Q(B)$ — двусторонние мартиндейловы кольца частных алгебр $A$ и $B$.

При этом идеалы $H(A, *)$ и $B^{(+)}$ устойчивы относительно действия произвольных дифференцирований и эпиморфизмов алгебры $J$.

К сожалению, доказательства устойчивости идеалов $H(A, *)$ и $B^{(+)}$ относительно действия $\mathrm{Der}(J)$ в [8] опущены. Использование же этих фактов в следующем параграфе может вызвать у читателя определенное недоумение. Поэтому приведем здесь несколько соответствующих пояснений.

В случае I $H(A, *) = \mathscr{Z}(J)$ (см. [8]) и устойчивость $H(A, *)$ относительно действия $\mathrm{Der}(J)$ вытекает из очевидного свойства вербальных идеалов (см. 1.4). В другом случае идеал $B^{(+)}$ не является вербальным идеалом алгебры $J$. Для алгебры $J$ предварительно строится некоторая полупервичная ассоциативная обертывающая алгебра $R$ с инволюцией $*$, удовлетворяющая условию $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ann}_R(\mathscr{Z}^{(n)}(J)) = 0$ и $J \subseteq H(R, *)$ [8, стр 98]. Сама же алгебра $B$ определяется как $(A_{\mathrm{ner}} \cap \mathscr{P})^3$, где $\mathscr{P}$ — максимальный идеал $R$ такой, что $H(R, *)\cap\mathcal{P}=0$, и $A_{\text{ner}}$ — Ф-модуль в $R$, порожденный элементами вида $z_1\dots z_{2n+1}$, $n\geqslant 1$, $z_i\in\mathcal{Z}(J)$. Отметим, что алгебра $B$ допускает и более простую запись: $B=A_0\cap\mathcal{P}$, где $A_0=[\mathcal{Z}(J)]^3$ (степень $[\mathcal{Z}(J)]^3$ понимается в смысле алгебры $R$). Действительно, из свойств идеалов $\mathcal{Z}$ следует, что $[\mathcal{Z}(J)]^3$ — всегда подалгебра в ассоциативной обертывающей алгебре для $J$ и $(A_{\text{ner}}\cap\mathcal{P})^3=A_0\cap\mathcal{P}$.

Таким образом, устойчивость идеала $B^{(+)}$ относительно действия $\mathrm{Der}(J)$ связана с двумя моментами — с продолжением дифференцирований алгебры $J$ до дифференцирований алгебры $R$ и инвариантностью идеала $\mathcal{P}$ относительно действия дифференцирований $R$, переводящих $J$ в $J$. Что касается второго утверждения, то оно несложно. Действительно, пусть $d\in\mathrm{Der}(R)$ и $d(J)\subseteq J$. Тогда $(d(r))^*=d(r^*)$ для всех $r\in R$ и $\mathcal{P}(\mathcal{P}^*)^d\subseteq(\mathcal{P}\mathcal{P}^*)^d-\mathcal{P}^d\mathcal{P}^*=-\mathcal{P}^d\mathcal{P}^*=0$, так как $\mathcal{P}\cap\mathcal{P}^*=0$. Аналогично $\mathcal{P}^*\mathcal{P}^d=\mathcal{P}^d(\mathcal{P}^*)^d=0$. Значит, $(\mathcal{P}+\mathcal{P}^d)(\mathcal{P}^*+(\mathcal{P}^*)^d)=0$. Отсюда $(\mathcal{P}+\mathcal{P}^d)\cap H(R, *)=0$. Теперь по выбору $\mathcal{P}$ и меем $\mathcal{P}^d+\mathcal{P}=\mathcal{P}$, т. е. $\mathcal{P}^d\subseteq\mathcal{P}$.

Чтобы иметь свойство о продолжении дифференцирований, проще всего изменить построение алгебры $R$. А именно в качестве $R$ можно взять, например, фактор-алгебру универсальной ассоциативной обертывающей алгебры $\mathrm{ass}(J)$ по максимальному ее идеалу $U$ такому, что $U^*\subseteq U$ и $U\cap J=0$. В этом случае доказательство о продолжении дифференцирований достаточно простое. Мы сейчас изберем другой путь — найдем некоторые условия, при которых всякое дифференцирование йордановой алгебры продолжается до дифференцирований ее обертывающей алгебры. При этом, с одной стороны, докажем справедливость искомого утверждения и для построенной в [8] алгебры $R$, с другой стороны, в качестве следствия получим и результат Лагутиной [24] о дифференцированиях алгебр $H(R, *)$, также используемый в следующем параграфе.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая алгебра, $\mathfrak{B}$ — ее подалгебра. *Дифференцированием из* $\mathfrak{B}$ *в* $\mathfrak{A}$ назовем такое линейное отображение $d\colon\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}$, что $d(xy)=d(x)y+xd(y)$ для всех $x, y\in\mathfrak{B}$. Множество всех дифференцирований из $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$ обозначим $\mathrm{Der}(\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$. Так, если $\mathfrak{A}$ — йорданова алгебра, то $d\in\mathrm{Der}(\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$ в том и только том случае, когда $d(x^2)=2d(x)\odot x$ для всех $x\in\mathfrak{B}$.

Пусть $P$ — однородный $T$-идеал $\mathrm{Jord}(X)$ такой, что $\{P(SJ[X]), SJ[X], SJ[X], SJ[X]\}\subseteq SJ[X]$ и $P\subseteq D(\mathrm{Jord}(X))$. Таким условиям удовлетворяет не только идеал, введенный в предложении 2.5, но и идеал $\Lambda$ из предложения 2.6, как и идеал, построенный Е. И. Зельмановым в [8]. Как обычно, через $P^{(n)}$ обозначим разрешимую степень идеала $P$, т. е. $P^{(1)}=P$, $P^{(n+1)}=(P^{(n)})^3$. Для ассоциативной алгебры $R$ через $\mathrm{Ann}_R(M)$ обозначим двусторонний аннулятор множества $M$, а через $\mathrm{alg}_R(M)$ — ее подалгебру, порожденную $M$.

**Теорема 5.1.** *Пусть $J$ — подалгебра алгебры $H(R, *)$, где $R$ — ассоциативная алгебра с инволюцией $*$ такая, что* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{Ann}_R\left(P^{(n)}(J)\right)=0$. *Тогда для любого дифференцирования $d$ из $J$ в $R^{(+)}$ существует дифференцирование $\tilde d$ из $R_0=\mathrm{alg}_R(J)$ в $R$ такое, что $\tilde d|_J=d$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Ass}[X\cup Y]$ — свободная ассоциативная алгебра от множества порождающих $X\cup Y$, где $X=\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, $Y=\{y_1, y_2, y_3, \dots\}$ и $*$ — инволюция на $\mathrm{Ass}[X\cup Y]$, тождественная на порождающих $X\cup Y$. Значение многочлена $g(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ в алгебре $R$ при $x_i=a_i$, $y_j=b_j$, $a_i, b_j\in R$ будем обозначать

$$g\begin{pmatrix}x_1\dots x_n y_1\dots y_m\\ a_1\dots a_n b_1\dots b_m\end{pmatrix}.$$

Как обычно, $\Delta^1_{x_k}(x_{n+1})=\Delta^{x_k}_{x_{n+1}}$ — оператор частичной линеаризации (или дифференциальной подстановки) первого порядка, заменяющий одно вхождение элемента $x_k$ на $x_{n+1}$ [14].

Покажем, что для всякого симметрического относительно * многочлена $h = h(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Ass}[X \cup Y]$ и любых $a_1, \ldots, a_n \in J$ из равенства $h\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ a_1 \ldots a_n \end{pmatrix} = 0$ следует

$$\sum_{k=1}^{n} h\Delta^{x_k}_{x_{n+1}} \begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n x_{n+1} \\ a_1 \ldots a_n a_k^d \end{pmatrix} = 0.$$

Для всякого $h \in \mathrm{Ass}[X \cup Y]$ такого, что $h^* = h$, найдется такое $n$, для которого

$$h \odot P^{(n)}(SJ[Y]) \subseteq SJ[X \cup Y].$$

Отсюда для любого $f(y_1, \ldots, y_m) \in P^{(n)}(SJ[Y])$ существует йорданов многочлен $j_{f,h} = j_{f,h}(x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_m)$ такой, что

$$h(x_1, \ldots, x_n) \odot f(y_1, \ldots, y_m) = j_{h,f}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m). \qquad (5.1)$$

Заметим, что для любых йорданова многочлена $j(z_1, \ldots, z_m) \in SJ[X \cup Y]$, $z_i \in X \cup Y$ и значений $z_i = a_i$ справедливо равенство

$$d\left(j\begin{pmatrix} z_1 \ldots z_m \\ a_1 \ldots a_m \end{pmatrix}\right) = \sum_{k=1}^{m} j\Delta^{z_k}_{z_{m+1}} \begin{pmatrix} z_1 \ldots z_m z_{m+1} \\ a_1 \ldots a_m a_k^d \end{pmatrix}. \qquad (5.2)$$

Пусть теперь $a_1, \ldots, a_n \in J$ такие, что

$$h\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ a_1 \ldots a_n \end{pmatrix} = 0.$$

Тогда для любых $b_1, \ldots, b_m \in J$ ввиду (5.1) (5.2) имеем

$$\sum_{k=1}^{n} h\Delta^{x_k}_{x_{n+1}} \begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n x_{n+1} \\ a_1 \ldots a_n a_k^d \end{pmatrix} \odot f\begin{pmatrix} y_1 \ldots y_m \\ b_1 \ldots b_m \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (h \odot f)\,\Delta^{x_k}_{x_{n+1}} \begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n x_{n+1} y_1 \ldots y_m \\ a_1 \ldots a_n a_k^d b_1 \ldots b_m \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} j_{h,f}\Delta^{x_k}_{x_{n+1}} \begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n x_{n+1} y_1 \ldots y_m \\ a_1 \ldots a_n a_k^d b_1 \ldots b_m \end{pmatrix} = d\left(j_{h,f}\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_m \\ a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_m \end{pmatrix} -\right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m} j_{h,f}\Delta^{y_k}_{y_{m+1}} \begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_m y_{m+1} \\ a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_m b_k^d \end{pmatrix}\right) =$$

$$= d\left(h\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ a_1 \ldots a_n \end{pmatrix} \odot f\begin{pmatrix} y_1 \ldots y_m \\ b_1 \ldots b_m \end{pmatrix}\right) -$$

$$- h\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ a_1 \ldots a_n \end{pmatrix} \odot \left(\sum_{k=1}^{n} f\Delta^{y_k}_{y_{m+1}} \begin{pmatrix} y_1 \ldots y_m y_{m+1} \\ b_1 \ldots b_m b_k^d \end{pmatrix}\right) = 0.$$

Таким образом,

$$r = \sum_{k=1}^{n} h\Delta^{x_k}_{x_{n+1}} \begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n x_{n+1} \\ a_1 \ldots a_n a_k^d \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условию $r \odot f(b_1, \ldots, b_m) = 0$ для всех $f(y_1, \ldots, y_m) \in P^{(n)}(SJ[Y])$, $b_1, \ldots, b_m \in J$, т. е. $r \odot P^{(n)}(J) = 0$. Отсюда

$$rP^{(n+1)}(J) = P^{(n+1)}(J)r = 0, \quad r \in \mathrm{Ann}_R(P^{(n+1)}(J)) = 0.$$

Требуемое утверждение для симметрического многочлена $h$ доказано.

Пусть $k(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Ass}[X \cup Y]$ такой, что $k^* = -k$ и $a_1, \ldots, a_n \in J$:

$$k\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ a_1 \ldots a_n \end{pmatrix} = 0.$$

Рассмотрим многочлены $h_1(x_1, \ldots, x_{n+1}) = [k, x_{n+1}]$ и $h_2(x_1, \ldots, x_{n+2}) = [k \odot x_{n+1}, x_{n+2}]$. Ясно, что $h_i^* = h_i$. По доказанному имеем

$$\left[\sum_{k=1}^{n} k\Delta_y^{x_k}\begin{pmatrix}x_1 \ldots x_n y\\ a_1 \ldots a_n a_k^d\end{pmatrix}, b\right] = \sum_{k=1}^{n+1} h_1\Delta_y^{x_k}\begin{pmatrix}x_1 \ldots x_n x_{n+1} y\\ a_1 \ldots a_n b \quad a_k^d\end{pmatrix} - \left[k\begin{pmatrix}x_1 \ldots x_n\\ a_1 \ldots a_n\end{pmatrix}, b^d\right] = 0,$$

$$\left[\sum_{k=1}^{n} k\Delta_y^{x_k}\begin{pmatrix}x_1 \ldots x_n y\\ a_1 \ldots a_n a_k^d\end{pmatrix} \odot b, c\right] = \sum_{k=1}^{n+2} h_2\Delta_y^{x_k}\begin{pmatrix}x_1 \ldots x_n x_{n+1} x_{n+2} y\\ a_1 \ldots a_n \; b \quad c \quad a_k^d\end{pmatrix} - \left[k\begin{pmatrix}x_1 \ldots x_n\\ a_1 \ldots a_n\end{pmatrix} \odot b^d, c\right] - \left[k\begin{pmatrix}x_1 \ldots x_n\\ a_1 \ldots a_n\end{pmatrix} \odot b, c^d\right] = 0.$$

Отсюда для

$$[r, J] = \sum_{k=1}^{n} k\Delta_y^{x_k}\begin{pmatrix}x_1 \ldots x_n y\\ a_1 \ldots a_n a_k^d\end{pmatrix}$$

имеем $[r, J] = [r \odot J, J] = 0$. Так как

$$P(J) \subseteq D(J) = (J, J, J)^+ + (J, J, J)^+ \odot J,$$

то

$$r \odot P(J) = r \odot (J, J, J)^+ + (r, J, J)^+ + (r \odot (J, J, J)^+) \odot J \subseteq$$
$$\subseteq R(r \odot [J, J])R + R[r, J]R = 0.$$

Значит, $r \in \mathrm{Ann}_R(P^{(2)}(J)) = 0$.

Пусть теперь $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Ass}[X \cup Y]$ и $a_1, \ldots, a_n \in J$ такие, что

$$f\begin{pmatrix}x_1 \ldots x_n\\ a_1 \ldots a_n\end{pmatrix} = 0.$$

Тогда

$$f^*\begin{pmatrix}x_1 \ldots x_n\\ a_1 \ldots a_n\end{pmatrix} = 0,$$

так как $R$ — алгебра с инволюцией и $J \subseteq H(R, *)$. Отсюда $r = h + k$, где $h = h^* = (f + f^*)/2$ и $k = -k^* = (f - f^*)/2$,

$$h\begin{pmatrix}x_1 \ldots x_n\\ a_1 \ldots a_n\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}x_1 \ldots x_n\\ a_1 \ldots a_u\end{pmatrix} = 0.$$

По доказанному получаем

$$\sum_{k=1}^{n} f\Delta_y^{x_k}\begin{pmatrix}x_1 \ldots x_n y\\ a_1 \ldots a_n a_k^d\end{pmatrix} = 0.$$

Для любого $r \in R_0 = \mathrm{alg}(J)$ найдутся многочлен $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Ass}[X \cup Y]$ и $a_1, \ldots, a_n \in J$ такие, что $r = f\begin{pmatrix}x_1 \ldots x_n\\ a_1 \ldots a_n\end{pmatrix}$. По определению положим

$$\tilde{d}(r) = \sum_{k=1}^{n} f\Delta_y^{x_k}\begin{pmatrix}x_1 \ldots x_n y\\ a_1 \ldots a_n a_k^d\end{pmatrix}.$$

В силу доказанного выше $\tilde{d}$ — корректно определенное отображение из $R_0$ в $R$. Так как операторы $\Delta_y^{x_k}$ являются дифференцированиями в $\mathrm{Ass}[X \cup Y]$ [14], то $\tilde{d}$: $R_0 \to R$ — дифференцирование из подалгебры $R_0$ в $R$. Ясно, что для всякого $a \in J$ имеем $\tilde{d}(a) = d(a)$. Теорема доказана.

Пусть $J$ — йорданова алгебра, $R$ — ее ассоциативная обертывающая алгебра. Алгебру $R$ назовем *$*$-редуцированной для $J$*, если она имеет инволюцию $*$ такую, что $J \subseteq H(R, *)$, и для любого $U \lhd R$, $U \neq 0$, $U^* \subseteq U$ справедливо $U \cap J \neq 0$. Так как

$$[\mathrm{Ann}_R(P^{(n)}(J))]^* \subseteq \mathrm{Ann}_R(P^{(n)}(J)),$$

то верно

**Следствие 5.2.** *Пусть $J$ — первичная йорданова алгебра с условием $P(J) \neq 0$, $R$ — ее $*$-редуцированная обертывающая алгебра. Тогда справедливо вложение*

$$\mathrm{Der}(J, R^{(+)}) \subseteq \mathrm{Der}(R),$$

*в частности*, $\mathrm{Der}(J) \subseteq \mathrm{Der}(R)$.

**Следствие 5.3** (Лагутина [24]). *Пусть $R$ — ассоциативная первичная алгебра с инволюцией $*$. Если $P(H(R, *)) \neq 0$, то для всякого дифференцирования из $H(R, *)$ в $R^{(+)}$ существует дифференцирование $\tilde{d}$ из $R_0 = \mathrm{alg}_R(H(R, *))$ в $R$ такое, что $\tilde{d}|_{H(R,*)} = d$.*

Докажем попутно и такое утверждение.

**Предложение 5.4.** *Пусть $J$ — первичная специальная йорданова алгебра с условием $P(J) \neq 0$, $R$ — ее первичная ассоциативная обертывающая алгебра. Тогда для всякого дифференцирования $d$ из $J$ в $R^{(+)}$ существует дифференцирование $\tilde{d}$ алгебры $R$ такое, что $\tilde{d}|_J = d$. В частности*, $\mathrm{Der}(J) \subseteq \mathrm{Der}(R)$.

Доказательство. Пусть $R_2 = R \oplus \bar{R}$, где $\bar{R}$ — алгебра антиизоморфная $R$ и $R_1$ — подалгебра $R_2$, порожденная множеством $J_1 = \{(a, a) \mid a \in J\}$. Через $*$ обозначим инволюцию в $R_2$ такую, что $(r_1, r_2)^* = (r_2, r_1)$. Ясно, что $J_1$ — подалгебра $H(R_2, *)$ и $J_1 \simeq J$.

Проверим, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ann}_{R_2}(P^n(J_1)) = 0$. Пусть $(r_1, r_2)P^{(n)}(J_1) = P^{(n)}(J_1)(r_1, r_2) = 0$ для некоторых $r_1, r_2 \in R$. Очевидно, что для любого $a \in P^{(n)}(J)$ справедливо $(a, a) \in P^{(n)}(J_1)$. Отсюда для всякого $a \in P^{(n)}(J)$ имеем $ar_1 = ar_2 = r_2a = r_1a = 0$, т. е. $r_1, r_2 \in \mathrm{Ann}_R(P^{(n)}(J))$. Так как $P^{(n)}(J) \lhd J$ и $R = \mathrm{alg}(J)$, то $\mathrm{Ann}_R(P^{(n)}(J))RP^{(n)}(J) = 0$. Теперь ввиду первичности $R$ и $P(J) \neq 0$ получим $\mathrm{Ann}_R(P^{(n)}(J)) = 0$. Таким образом, условие $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ann}_{R_2}(P^{(n)}(J_1)) = 0$ доказано.

Пусть $\hat{d}\colon J_1 \to R_2^{(+)}$ такое, что $\hat{d}((a, a)) = (d(a), d(a))$ для $a \in J$. Тогда $\hat{d}((a, a)^2) = 2d((a, a)) \odot (a, a)$, т. е. $\hat{d}$ дифференцирование из $J_1$ в $R_2^{(+)}$. По теореме 5.1 существует дифференцирование из $R_1$ в $R_2$ (по-прежнему будем его обозначать $\hat{d}$), для которого $\hat{d}((a,a)) = (d(a), d(a))$, если $a \in J$.

Пусть $U = \{u \in R \mid (0, u) \in R_1\}$ и $T$ — множество таких $t \in R$, для которых существует $u \in U$, и $t' \in R$, для которых $\hat{d}((0, u)) = (t, t')$. Покажем, что $URT = 0$. Ясно, что для всякого $r \in R$ найдется $r' \in \bar{R}$ такой, что $(r, r') \in R_1$. Пусть $u \in U$, $t \in T$ и $r \in R$. Тогда $(t, t') = \hat{d}((0, v))$ для некоторых $v \in U$, $t' \in R$ и $(r, r') \in R_1$. Так как $R_1^* \subseteq R_1$, то для всякого $u \in U$ имеем $(u, 0) \in R_1$. Отсюда $(ur, 0) = (u, 0) \cdot (r, r') \in R_1$. Следовательно,

$$(urt, 0) = (ur, 0)(t, t') = (ur, 0)\hat{d}((0, v)) =$$
$$= \hat{d}((ur, 0))(0, v) - \hat{d}((ur, 0)) \cdot (0, v) = -\hat{d}((ur, 0))(0, v) = (0, w)$$

для некоторого $w \in R$. Значит, $urt = 0$, т. е. $URT = 0$. Ввиду первичности $R$ имеем либо $U = 0$, либо $T = 0$. Если $U = 0$, то по построению $T = 0$. Поэтому всегда $T = 0$. Таким образом, для всякого $(0, u) \in R_1$ верно $\hat{d}((0, u)) \in (0, \bar{R})$.

Для всякого $r \in R$ найдется $r' \in \bar{R}$ такой, что $(r, r') \in R_1$. По определению положим $\tilde{d}(r) = t$, где $t$ — первая компонента в $\widehat{d}((r, r'))$ для некоторого $r' \in \bar{R}$ такого, что $(r, r') \in R_1$, т. е. $d((r, r')) = (t, t')$. По доказанному выше $\tilde{d}$ — корректно определенное линейное отображение на $R$. Прямая проверка показывает, что $\tilde{d}$ — дифференцирование алгебры $R$ и для всякого $a \in J$ справедливо $\tilde{d}(a) = d(a)$. Предложение доказано.

## § 6. О ПРОДОЛЖЕНИИ КОСОСИММЕТРИЧЕСКИХ $DC$-ОПЕРАЦИЙ

Основная наша цель сейчас — доказать следующую теорему.

**Теорема 6.1.** *Пусть $J$ — первичная невырожденная специальная йорданова алгебра такая, что $P(J) \neq 0$, и $R$ — произвольная ее первичная ассоциативная обертывающая алгебра. Тогда всякая ненулевая кососимметрическая DC-операция алгебры $J$ продолжается до DC-операции алгебры $R$.*

Сделаем вначале несколько общих замечаний. Пусть $J$ — специальная йорданова алгебра, $R$ — некоторая ее ассоциативная обертывающая алгебра и на алгебре $J$, кроме операций «$+$», «$\odot$», определена еще некоторая совокупность полилинейных операций $\Sigma'' = \{\sigma_\alpha | \alpha \in \Delta\}$. В этом случае алгебру $J$ можно рассматривать как некоторую алгебру $\mathfrak{A} = (J, \Sigma)$ сигнатуры $\Sigma = \{+\} \cup \Sigma'$, $\Sigma' = \{\odot\} \cup \Sigma''$. Со всяким множеством переменных $X$ рассмотрим множество $X\Sigma'$-термов, сигнатуры $\Sigma'$, или $\Sigma'$-одночленов, от этих переменных [25]. Пусть $\Phi(X\Sigma')$ — свободный $\Phi$-модуль и $\mathrm{Ass}[X\Sigma']$ — свободная ассоциативная $\Phi$-алгебра от множества порождающих $X\Sigma'$. Отметим, что $\Phi(X\Sigma')$ — свободная алгебра в многообразии $\Sigma$-алгебр.

*Слабым тождеством сигнатуры* $\Sigma$ пары $(\mathfrak{A}, R)$ будем называть такой многочлен $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Ass}[X\Sigma']$, который в алгебре $R$ обращается в нуль при любых подстановках $x_i = a_i \in J$. Обозначать это будем $(\mathfrak{A}, R) \models f$. Аналогично *тождеством алгебры* $\mathfrak{A} = (J, \Sigma)$ будем называть многочлен $f(x_1, \ldots, x_n) \in \Phi(X\Sigma')$ такой, что $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ для всех $a_i \in J$. Обозначать это будем также $\mathfrak{A} \models f$.

Заметим, что выполнение тождества $\langle a, b\rangle r[c, d] = [a, b] r\langle c, d\rangle$ в алгебре $R$ для любых $a, b, c, d \in J$ и $r \in R$, где $\langle\ ,\ \rangle\colon J \times J \to J$ — некоторая билинейная операция на $J$, эквивалентно при некоторых ограничениях на $R$, тому что пара $((J, \langle\ ,\ \rangle), R)$ удовлетворяет некоторой совокупности слабых тождеств сигнатуры $\Sigma_0 = \{+, \odot, \langle\ ,\ \rangle\}$. Такой совокупностью $G_0$ является множество многочленов $\mathrm{Ass}[X\Sigma_0']$, имеющих вид

$$f(y_1, \ldots, y_n) = \langle y_1, y_2\rangle y_5 \ldots y_n [y_3, y_4] - [y_1, y_2] y_5 \ldots y_n \langle y_3, y_4\rangle,$$

где $y_i \in X$ и $n = 4, 5, 6, \ldots$.

Сейчас мы покажем, что справедливость на паре $((J, \langle\ ,\ \rangle), R)$ системы слабых тождеств $G_0$ эквивалентна тому, что алгебра $(J, \langle\ ,\ \rangle)$ удовлетворяет некоторой вполне определенной совокупности тождеств $JSG_0$ сигнатуры $\Sigma_0$.

Рассмотрим эту ситуацию в общем виде. Пусть $G \subseteq \mathrm{Ass}[X\Sigma']$ и $*\colon \mathrm{Ass}[X\Sigma'] \to \mathrm{Ass}[X\Sigma']$ — инволюция алгебры $\mathrm{Ass}[X\Sigma']$, тождественная на множестве порождающих $X\Sigma'$. Через $SG$ обозначим совокупность симметрических многочленов вида $f + f^*$, $[f - f^*, y]$, $[(f - f^*) \odot y, z]$, где $f \in G$, $y, z \in X$. Пусть, как и в предыдущем параграфе, $P = P(X\Sigma') \subseteq D(SJ[X\Sigma']) \subseteq \mathrm{Ass}[X\Sigma']$ — однородный $T$-идеал алгебры $SJ[X\Sigma']$, «аннулирующий тетрады», т. е. $\{P, J, J, J\} \subseteq J$, где $J = SJ[X\Sigma']$. Как мы уже отмечали, для любого $h \in H(\mathrm{Ass}[X\Sigma'], *)$ существует такое $n$, что $h \odot P^{(n)} \subseteq SJ[X\Sigma']$.

Пусть теперь $JSG$ — совокупность многочленов $SJ[X\Sigma']$ следующего вида: $h \odot v$, где $h \in SG$ и $v \in P^{(n)}$ причем $n$ такое, что $h \odot P^{(n)} \subseteq SJ[X\Sigma']$. Алгебра $SJ[X\Sigma']$, очевидно, является гомоморфным образом $\Phi(X\Sigma')$. Поэтому, не меняя обозначений, будем считать, что $JSG \subseteq \Phi(X\Sigma')$.

**Предложение 6.2.** *Пусть* $\mathfrak{A}=(J, \Sigma)$ — *некоторая* $\Sigma$-*алгебра, где* $J=(J, +, \odot)$ — *специальная йорданова алгебра и* $R$ — *некоторая ассоциативная обертывающая алгебра для* $\mathfrak{A}$. *Если* $G \subseteq \mathrm{Ass}[X\Sigma']$ — *совокупность слабых тождеств пары* $(\mathfrak{A}, R)$ *и* $G^* \subseteq G$, *то все элементы* $JSG$ — *тождества на* $\mathfrak{A}$. *Если обертывающая алгебра* $R$ *удовлетворяет условию* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ann}_R\left(P^{(n)}(\mathfrak{A})\right)=0$, *то справедливо и обратное утверждение.*

Доказательство. В одну сторону это непосредственно следует из построения системы $JSG$. Пусть, наоборот, $\mathfrak{A}=(J, \Sigma) \models JSG$. Тогда для всякого $h \in SG$ найдется такое $n$, что $h(\mathfrak{A}) \odot P^{(n)}(\mathfrak{A})=0$. Отсюда $h(\mathfrak{A}) P^{(n+1)}(\mathfrak{A})=P^{(n+1)}(\mathfrak{A}) h(\mathfrak{A})=0$. Значит, $h(\mathfrak{A})=0$. Следовательно, для всякого $f=f(x_1, \ldots, x_n) \in G$ имеем $(J, R) \models f+f^*$, $[f-f^*, y]$, $[(f-f^*) \odot y, z]$. Для любых $a_1, \ldots, a_n \in J$ элемент $t=f(a_1, \ldots, a_n)+f^*(a_1, \ldots, a_n)$ удовлетворяет условию $[t, J]=[t \odot J, J]=0$. Отсюда $t \odot P(\mathfrak{A})=0$ (см. доказательство теоремы 5.1). Поэтому $(J, R) \models f-f^*$ и окончательно $(J, R) \models f, f^*$. Предложение доказано.

Отметим, что если $R$ первична и $P(\mathfrak{A})=0$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Ann}_R\left(P^{(n)}(\mathfrak{A})\right)=0$.

**Следствие 6.3.** *Пусть* $A=(J, \langle\ ,\ \rangle)$ — *некоммутативная йорданова алгебра,* $J$ — *специальная первичная невырожденная алгебра и* $P(J) \neq 0$. *Если для какой-то одной ассоциативной обертывающей алгебры* $R$ *выполняется тождество* $\langle a, b\rangle r[c, d]=[a, b] r\langle c, d\rangle$, *где* $a, b, c, d \in J$, $r \in R$, *то оно выполняется и во всякой первичной ассоциативной обертывающей алгебре* $R$ *для алгебры* $J$.

**Следствие 6.4.** *Пусть* $J$ — *специальная йорданова алгебра,* $P(J) \neq 0$. *Для любого* $f \in \mathrm{Ass}[X]$ *из условия* $(J, R) \models f, f^*$ *для какой-то ассоциативной обертывающей алгебры* $R$ *следует, что* $(J, \tilde{R}) \models f, f^*$ *для всякой первичной ассоциативной обертывающей* $\tilde{R}$ *алгебры* $J$.

Доказательство теоремы 6.1. Рассмотрим случай, когда $J$ — первичная алгебра типа II. По условию существует первичная ассоциативная алгебра $B$ такая, что $B^{(+)} \triangleleft J \subseteq Q(B)^{(+)}$. Через $R$ обозначим подалгебру $Q(B)$, порожденную множеством $J$. Так как для любого $\varphi \in Q(B)$ существует $I \triangleleft B$, $I \neq 0$, такой, что $I\varphi+\varphi I \subseteq B$, то для любого $U \triangleleft R$, $U \neq 0$, имеем $U \cap J \neq 0$. Таким образом, $R$ — редуцированная обертывающая для $J$ и, следовательно, первична. Ввиду следствия 5.4 любое дифференцирование алгебры $J$ продолжается до дифференцирования алгебры $R$. Поэтому мы можем считать, что для любых $a \in J$ и $r \in R$ определены выражения $\langle a, r\rangle$, $\langle r, a\rangle$. Учитывая, что алгебра $R$ порождается $J$ и $\langle\ ,\ \rangle$ — кососимметрическая операция на $J$, получим $\langle a, r\rangle=-\langle r, a\rangle$. Более того, $B \subseteq R$ и $\langle B, J\rangle \subseteq B$, так как идеал $B^{(+)}$ устойчив относительно действия $\mathrm{Der}(J)$. Отображение $b \mapsto \langle b, a\rangle$ для всех $a \in J$ является дифференцированием алгебры $B$, в частности и для $a \in B$. Следовательно, $\langle\ ,\ \rangle|_B$ — $DC$-операция на $B$. Из леммы 5.3 следует, что операция $\langle\ ,\ \rangle\colon J \times J \to J$ продолжается до $DC$-операции на $R$. В силу следствия 6.3 она продолжается до $DC$-операции в любой другой первичной ассоциативной обертывающей для алгебры $R$. В этом случае теорема 6.1 доказана.

Для доказательства теоремы 6.1 в оставшемся случае нам понадобится сведение к полупримитивным алгебрам. Введем вначале несколько определений. Пусть $\mathfrak{A}=(J, \Sigma)$ — алгебра сигнатуры $\Sigma$, где $J=(J, +, \odot)$ — йорданова алгебра. Через $\mathrm{rad}_\Sigma(\mathfrak{A})$ обозначим наибольший идеал алгебры $\mathfrak{A}$ ($\Sigma$-идеал), содержащийся в строго полупервичном радикале $\mathrm{rad}(J)$ алгебры $J$. Аналогично $\mathrm{Rad}_\Sigma(\mathfrak{A})$ — наибольший $\Sigma$-идеал, лежащий в квазирегулярном радикале $\mathrm{Rad}(J)$ алгебры $J$. Из свойств радикалов $\mathrm{rad}(J)$ и $\mathrm{Rad}(J)$ [14] тривиально вытекает, что $\mathrm{Rad}_\Sigma$ и $\mathrm{rad}_\Sigma$ — радикалы в смысле Амицура — Куроша в классе $\Sigma$-алгебр. В частности,

$$\mathrm{rad}_\Sigma(I)=I \cap \mathrm{rad}_\Sigma(\mathfrak{A}), \quad \mathrm{Rad}_\Sigma(I)=I \cap \mathrm{Rad}_\Sigma(\mathfrak{A}),$$

если $I \lhd \mathfrak{A}$ и

$$\mathrm{Rad}_\Sigma(\mathfrak{A}/\mathrm{Rad}_\Sigma(\mathfrak{A}))=0, \quad \mathrm{rad}_\Sigma(\mathfrak{A}/\mathrm{rad}_\Sigma(\mathfrak{A}))=0.$$

Внутренний идеал $K(K\lhd_{\text{вн}}J)$ йордановой алгебры $J$ называется *$x$-модулярным* для некоторого $x$, если $\{1-x, J, 1-x\}+\{1-x, J, K\}+\Phi(x^2-x)\subseteq K$ [26]. Пусть $\mathrm{int}(K)$ — наибольший идеал $J$, содержащийся в $K$. Аналогично $\mathrm{int}_\Sigma(K)$ — наибольший $\Sigma$-идеал $\mathfrak{A}=(J, \Sigma)$, содержащийся в $K$. Алгебру $\mathfrak{A}=(J, \Sigma)$ назовем *$\Sigma$-примитивной*, если существует $K\lhd_{\text{вн}}J$, являющийся максимальным среди собственных $x$-модулярных идеалов для некоторого $x\in J$, что $\mathrm{int}_\Sigma(K)=0$. В [26] доказано, что $\mathrm{Rad}(J)=\bigcap \mathrm{int}(K)$, где $K$ пробегает множество всех максимальных $x$-модулярных идеалов. Тогда

$$\bigcap \mathrm{int}_\Sigma(K)\subseteq \bigcap \mathrm{int}(K)=\mathrm{Rad}(J)$$

и $\bigcap \mathrm{int}_\Sigma(K)$ — $\Sigma$-идеал алгебры $\mathfrak{A}$. Поэтому $\bigcap \mathrm{int}_\Sigma(K)\subseteq \mathrm{Rad}_\Sigma(\mathfrak{A})$. Если $\mathrm{Rad}_\Sigma(\mathfrak{A})$ $K$ для некоторого максимального x-модулярного $K\lhd_{\text{вн}}J$, то $\mathrm{Rad}_\Sigma(\mathfrak{A})+K$, являясь $x$-модулярным внутренним идеалом $J$, обязан совпадать с $J$. Отсюда для некоторого $t\in \mathrm{Rad}_\Sigma(\mathfrak{A})$ и $k\in K$ имеем $x=t+k$. Элемент $1-t$ обратим в $J^{\#}$, откуда $J=\{1-x-k, J, 1-x-k\}\subseteq \{1-x, J, 1-x\}+\{1-x, J, K\}+\{k, J, k\}\subseteq K$; противоречие. Следовательно, также имеем

$$\mathrm{Rad}_\Sigma(\mathfrak{A})=\bigcap \mathrm{int}_\Sigma(K).$$

Для некоммутативных йордановых алгебр этот факт отмечен и в [6].

Будем говорить, что *$F$-алгебра $\mathfrak{A}$ рассматривается над большим полем $F$*, если $F$ — алгебраически замкнутое поле и $\dim_F(\mathfrak{A})<|F|$.

Пусть сейчас $\Phi$ — область целостности.

**Предложение 6.5.** *Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое однородное многообразие $\Sigma$-алгебр и $W$ — некоторая совокупность многочленов свободной $\Sigma$-алгебры $\Phi(X\Sigma')$. Если для любой $\Sigma$-примитивной $F$-алгебры $\mathfrak{A}\in\mathfrak{M}$ над большим полем $F$ справедливо $\mathfrak{A}\models W$, то и для любой $\mathrm{rad}_\Sigma$-полупростой $\mathfrak{A}\in\mathfrak{M}$* (т. е. $\mathrm{rad}_\Sigma(\mathfrak{A})=0$) *имеем $\mathfrak{A}\models W$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}\in\mathfrak{M}$, $\mathrm{rad}_\Sigma(\mathfrak{A})=0$. Рассмотрим алгебраически замкнутое поле $F$, содержащее $\Phi$, такое, что $|F|>(|\mathfrak{B}|\chi_0)^{\chi_0}$, где $\chi_0$ — «счетный ординал», и следующую цепочку $\Sigma$-алгебр:

$$\mathfrak{A}_1=\mathfrak{A}\otimes F[t_1], \quad \mathfrak{A}_2=\Pi_1^\infty\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{A}_3=\mathfrak{A}_2\otimes F[t_2],$$

где $t_1$, $t_2$ — некоторые переменные. Обозначим соответствующие йордановы алгебры, т. е. обеднение $\mathfrak{A}_i$ до сигнатуры $\{+, \odot\}$ через $J_0$, $J_1$, $J_2$, $J_3$. Считаем, что

$$\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{A}_0\subseteq\mathfrak{A}_1\subseteq\mathfrak{A}_2\subseteq\mathfrak{A}_3,$$

где $\mathfrak{A}_1\subseteq\mathfrak{A}_2$ — «диагональное вложение», т. е. $a\mapsto(a, a, \ldots)$. Как доказано в [13],

$$\mathrm{Rad}(J_3)\cap J_0\subseteq \mathrm{rad}(J_0).$$

Отсюда

$$\mathrm{Rad}_\Sigma(\mathfrak{A}_3)\cap\mathfrak{A}_0\subseteq \mathrm{rad}_\Sigma(\mathfrak{A}_0).$$

Так как $\mathfrak{A}\lhd\mathfrak{A}_1$, то $\mathrm{rad}_\Sigma(\mathfrak{A})=\mathfrak{A}\cap\mathrm{rad}_\Sigma(\mathfrak{A}_1)$. Пусть $\mathfrak{A}_{3,\alpha}={}^{\mathfrak{A}_3}\!/_{\mathrm{int}_\Sigma(K_\alpha)}$, где $K_\alpha$ пробегает все максимальные $x$-модулярные внутренние идеалы $J_3$. Тогда из отмеченного выше вытекает, что

$$\mathfrak{A}/_{\mathrm{rad}_\Sigma(\mathfrak{A})}\subseteq_{\to}\textstyle\sum_s\mathfrak{A}_{3,\alpha},$$

где $\sum_s\mathfrak{A}_{3,\alpha}$ — подпрямая сумма алгебр $\mathfrak{A}_{3,\alpha}$. Очевидно, что $\dim_F(\mathfrak{A}_{3,\alpha})<\dim_F(\mathfrak{A}_3)<|F|$. Все алгебры $\mathfrak{A}_{3,\alpha}$ примитивны и рассматриваются над большим полем $F$. По условию $\mathfrak{A}_{3,\alpha}\models W$. Значит, и $\mathfrak{A}={}^{\mathfrak{A}}\!/_{\mathrm{rad}_\Sigma(\mathfrak{A})}\models W$. Предложение доказано.

**Предложение 6.6.** *Пусть $J$ — примитивная йорданова $F$-алгебра с единицей над большим полем $F$. На алгебре задано отображение $f$, сопоставляющее каждому набору $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in J$, идеал $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ алгебры $J$, причем выполнены следующие условия:*

1) *для любого максимального внутреннего идеала $K$ алгебры $J$ имеет место включение $f(K, \ldots, K) \subseteq \operatorname{int}(K)$;*

2) *для любого ненулевого идеала $B$ алгебры $J$ существует число $s$ такое, что для всех $k$*

$$f(\underbrace{J, \ldots, J}_{k}, B^{(s)}, \underbrace{J, \ldots, J}_{n-1-k}) \subseteq B;$$

3) *для произвольных $a$, $b$, $x_1, \ldots, x_{n-1}$ и всякого $k$ выполняется включение*

$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, a+b, x_k, \ldots, x_{n-1}) \subseteq f(x_1, \ldots, x_{k-1}, a, x_k, \ldots, x_{n-1}) + \\ + f(x_1, \ldots, x_{k-1}, b, x_k, \ldots, x_{n-1}),$$

*где*

$$f(U_1, \ldots, U_n) = \sum_{u_i \in U_i} f(u_1, \ldots, u_n)$$

*для всех $U_i \subseteq J$. Тогда если $f(J, \ldots, J) \neq 0$, то $J$ — центральная простая алгебра, более того, либо $J = H(C_3)$, либо $J = B_F(f, V)$, либо $J = F_k^{(+)}$ или $H(F_k, J_a)$, где $k \leqslant 2n$.*

Доказательство. Отметим, что доказательство этого предложения во многом навеяно доказательством основной леммы в [7]. Пусть $K$ — максимальный собственный внутренний идеал $J\left(K \lhd_{\text{вн}}^{\max} J\right)$ такой, что $\operatorname{int}(K) = 0$. Обозначим $E = f(J, \ldots, J) \lhd J$. Для любого ненулевого $I \lhd J$ имеем $J = K + I^{(s)}$ для всех $s$. Ввиду условия 2 $E = f(K, \ldots, K) + I \subseteq I$, т. е. $E$ — сердцевина алгебры $J$.

Пусть $t - \alpha 1$ необратим в $J$ для некоторых $t \in E$, $\alpha \in F$, $\alpha \neq 0$. Положим $P = J\mathcal{U}(t - \alpha 1)$. Тогда $P \lhd_{\text{вн}} J$ и $P \neq J$. Существует $U \lhd_{\text{вн}}^{\max} J$ такой, что $P \subseteq U$. Если $\operatorname{int}(U) \neq 0$, то $E \subseteq \operatorname{int}(U)$. Следовательно, $t$, $(t - \alpha 1)^2 \in U$, т. е. $1 \in U$; противоречие. Значит, $\operatorname{int}(U) = 0$. Отсюда

$$f(P, \ldots, P) \subseteq f(U, \ldots, U) \subseteq \operatorname{int}(U) = 0.$$

Через $\operatorname{Spec}(t)$ обозначим множество таких $\alpha \in F$, что $\alpha \neq 0$ и элемент $t - \alpha 1$ необратим в $J$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n+1}$ — различные элементы из $\operatorname{Spec}_J(t)$. Тогда $f(P_i, \ldots, P_i) = 0$ для всех $P_i = J\mathcal{U}(t - \alpha_i 1)$. Положим $g_i(t) = \prod_{j \neq i} (t - \alpha_j 1)$. Существуют $u_i(t) \in F[t]$ такие, что $\sum g_i(t) u_i(t) = 1$. Тогда для любых $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)} \in J$ имеем $x^{(s)} = \sum x_{ij}^{(s)}$, где $x_{ij}^{(s)} = x^{(s)}\mathcal{U}(g_i u_i, g_j u_j) \in P_k$ для всех $k \neq j$, $i$. Используя условие 3, получим

$$f(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) = \sum f\left(x_{i_1, j_1}^{(1)}, \ldots, x_{i_n, j_n}^{(n)}\right).$$

Очевидно, для всякого набора $x_{i_1, j_1}^{(1)}, \ldots, x_{i_n, j_n}^{(n)}$ найдется такое $k$, что все $x_{i_s, j_s}^{(s)}$ принадлежат $P_k$. Отсюда

$$f\left(x_{i_1, j_1}^{(1)}, \ldots, x_{i_n, j_n}^{(n)}\right) \subseteq f(P_k, \ldots, P_k) = 0.$$

Следовательно, $f(J, \ldots, J) = 0$, что противоречит условию. Значит, $|\operatorname{Spec}_J(t)| \leqslant 2n$ для любого $t \in E$.

Как и в указанной выше лемме Зельманова, получим, что $J$ — простая алгебраическая йорданова алгебра, имеющая емкость не более чем $2n$. Отсюда $J$ — центральная простая алгебра, и по теореме Джекобсона [15] $J$ — либо $B_F(f, V)$, либо $H(C_3)$, либо алгебра вида $R^{(+)}$ или $H(R, *)$, где $R$ — простая ассоциативная алгебра, полупростая в смысле радикала Джекобсона.

Известно [14], что обратимость элемента $t-\alpha 1$ в $R$ эквивалентна его обратимости в $R^{(+)}$. Поэтому в случае, когда $J=R^{(+)}$, имеем $|\mathrm{Spec}_R(t)|\leqslant 2n$ для всякого $t\in R$.

Докажем, что при $J=H(R,*)$ имеет место неравенство $|\mathrm{Spec}_R(t)|\leqslant 2n$ для всех $t\in R$. Допустим вначале, что для некоторых ненулевых различных элементов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n+1}\in F$ элементы $t-\alpha_i 1$ необратимы справа. Положим $P_i=(t-\alpha_i 1)H(R,*)(t^*-\alpha_i 1)$. Очевидно, что $P_i \triangleleft_{\text{вн}} H(R,*)$ и $P_i\neq H(R,*)$. Рассмотрим $g_i(t)=\prod_{j\neq i}(t-\alpha_j 1)$ и соответствующие $u_i(t)\in F[t]$ такие, что $\sum g_i(t)u_i(t)=1$. Тогда для любого $h\in H(R,*)$ имеем $h=\sum h_{ij}$, где

$$h_{ij}=(1/2)\left(g_iu_ihu_j^*g_j^*+g_ju_jhu_i^*g_i^*\right).$$

Ясно, что $h_{ij}\in P_k$ для всех $k\neq i, j$. Это, как и ранее, приводит к противоречию с условием $E\neq 0$. Если найдутся $2n+1$ элементов $t-\alpha_i 1$, одновременно необратимых слева, положим

$$P_i=(t^*-\alpha_i 1)H(R,*)(t-\alpha_i 1).$$

Повторяя такие же рассуждения, придем к противоречию. Таким образом, для всякого $t\in R$ имеем $|\mathrm{Spec}_R(t)|\leqslant 4n$. В силу условий на поле $F$ получим, что $R$ — алгебраическая алгебра. Так как в этом случае обратимость элементов $R$ слева эквивалентна обратимости справа, получим окончательно, что $|\mathrm{Spec}_R(t)|\leqslant 2n$ для всех $t\in R$.

Осталось показать, что если $R$ — простая ассоциативная $F$-алгебра такая, что $|\mathrm{Spec}_R(t)|\leqslant 2n$ для всех $t\in R$, то $R\simeq F_r$, где $r\leqslant 2n$. Как и ранее, алгебра $R$ не содержит более чем $2n$ попарно ортогональных идемпонтентов. Ввиду примитивности $R$ по теореме плотности Джекобсона [27] получим, что $R$ — либо полная матричная F-алгебра, либо для всякого $k$ в $R$ найдется подалгебра $R_k$, гомоморфно накрывающая алгебру $F_k$. В последнем случае, используем очевидное свойство: если элемент $t-\alpha 1$, $t\in R_k$, необратим в некотором гомоморфном образе, то он необратим и в $R_k$, а следовательно, ввиду алгебраичности — и в $R$. Таким образом, гомоморфный образ алгебры $R_{2n+1}$ не может содержать более чем $2n$ попарно ортогональных идемпотентов; противоречие. Предложение доказано.

Пусть $T_{2n}$ — однородный $T$-идеал $\mathrm{Jord}(X)$ такой, что $T_{2n}(H(C_3))=T_{2n}(B_F(f,V))=T_{2n}(F_r{}^{(+)})=T_{2n}(H(F_r,J_a))=0$, где $r\leqslant 2n$.

**Следствие 6.7.** *Пусть $J$ — йорданова $F$-алгебра с единицей над большим полем $F$. На алгебре $J$ задано отображение $f\colon (x_1,\ldots,x_n)\mapsto f(x_1,\ldots,x_n)\triangleleft J$, удовлетворяющее условиям 1—3 из предложения 6.6. Тогда*

$$f(J,\ldots,J)\cap T_{2n}(J)\subseteq \mathrm{Rad}(J).$$

Доказательство. Заметим, что отображение $f$, заданное на алгебре $J$, индуцирует аналогичное отображение $\bar f$ в любом гомоморфном образе $\bar J={}^J/_I$. Пусть $\varphi\colon J\to\bar J$ — естественный гомоморфизм $J$ на $\bar J$. Положим $\bar f(\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n))=\varphi(f(x_1+I,\ldots,x_n+I))$ для всех $x_1,\ldots$ $\ldots, x_n\in J$. Тривиальная проверка показывает, что отображение $\bar f$, определенное на алгебре $J$, удовлетворяет условиям 1—3.

Так как $\mathrm{Rad}(J)=\cap I_\alpha$, где $I_\alpha$ — примитивные идеалы (см. [26]), то во всяком примитивном гомоморфном образе $\bar J_\alpha={}^J/_{I_\alpha}$ имеем либо $T_{2n}(\bar J_\alpha)=0$, либо $\bar f(\bar J_\alpha,\ldots,\bar J_\alpha)=0$. В последнем случае $f(J,\ldots,J)\subseteq I_\alpha$. Поэтому

$$f(J,\ldots,J)\cap T_{2n}(J)\subseteq \cap I_\alpha=\mathrm{Rad}(J).$$

Следствие доказано.

**Лемма 6.8.** *Пусть $J$ — специальная йорданова алгебра, $\mathrm{ass}(J)$ — ее универсальная ассоциативная обертывающая алгебра и $\langle\ ,\ \rangle\colon J\times J\to$*

$\to J$ — *некоторая кососимметрическая DC-операция на J. Тогда в алгебре* ass$(J)$ *справедливы тождества*

$$[\langle a, b\rangle, [a, b]]=0, \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}2\{\langle a, b\rangle x[a, b]\} &= [\langle a, b\rangle \odot x, [a, b]]+[\langle a, b\rangle, [a, b]\odot x]=\\ &=[\langle a, x\rangle \odot [a, b]-[a, x]\odot \langle a, b\rangle, b]=\\ &=\langle a, [b, x]\rangle \odot [a, b]-[a, [b, x]]\odot \langle a, b\rangle,\end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\langle a, [b, x]\rangle \odot a-(1/2)\langle a^2, [b, x]\rangle = \langle a, x\rangle \odot [a, b]-[a, x]\odot \langle a, b\rangle, \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned}&\{\langle a^2, b\rangle x[a, b]\}+\{\langle a, b\rangle x[a^2, b]\}=\\ &=4\{\langle a, b\rangle (x\odot a)[a, b]\}=4\{\langle a, b\rangle x[a, b]\}\odot a,\end{aligned} \tag{6.4}$$

$$f(a, b, x)=f(b, a, x)=f(a, x, b),$$

*где*

$$f(a, b, x)=2\{\langle a, b\rangle x[a, b]\}\odot x-\{\langle a, b\rangle x^2[a, b]\}, \tag{6.5}$$

$$(\{\langle a, b\rangle x[a, b]\}, a, x)^+=\{\langle a, b\rangle (x, x, a)^+[a, b]\}, \tag{6.6}$$

*где* $\{r\}=(r^*+r)/2$, $*$ — *инволюция в* ass$(J)$.

Доказательство. Отображения $x\mapsto \langle x, a\rangle$ являются дифференцированиями алгебры $J$. Всякое дифференцирование алгебры $J$ однозначно продолжается до дифференцирования алгебры ass$(J)$ [15]. Поэтому, не меняя обозначений, мы будем считать, что отображения $x\mapsto \langle x, a\rangle$ и $y\mapsto \langle a, y\rangle$ для всех $a\in J$ являются дифференцированиями ass$(J)$. В частности, $\langle x, a\rangle = -\langle a, x\rangle$ для всех $x\in$ ass$(J)$, $a\in J$.

Так как $(x, y, z)^+=(1/4)[y, [x, z]]$, то тождество (6.1) следует из (2.1).

Для произвольных $a, b, x\in J$ имеем $\{\langle a, b\rangle x[a, b]\}=\{(\langle a, b\rangle \odot x)[a, b]\}+(1/2)\{[\langle a, b\rangle, x][a, b]\}=(1/2)[\langle a, b\rangle \odot x, [a, b]]+(1/2)[\langle a, b\rangle, x]\odot [a, b]=(1/2)[\langle a, b\rangle \odot x, [a, b]]+(1/2)[\langle a, b\rangle, x\odot [a, b]]$. Следовательно, $2\{\langle a, b\rangle x[a, b]\}=[\langle a, b\rangle \odot x, [a, b]]+[\langle a, b\rangle, x\odot [a, b]]=[\langle a, b\odot x\rangle, [a, b]]+[\langle a, b\rangle, [a, b\odot x]]-[\langle a, x\rangle \odot b, [a, b]]-[\langle a, b\rangle, [a, x]\odot b]=[\langle a, x\rangle \odot [a, b], b]+(1/2)[\langle a, b^2\rangle, [a, x]]+(1/2)[[a^2, b^2], \langle a, x\rangle]-[\langle a, b\rangle \odot [a, x], b]=[\langle a, x\rangle \odot [a, b]-\langle a, b\rangle \odot [a, x], b]$.

Покажем предварительно, что верно тождество (6.4). Действительно, $\langle a, [b, x]\rangle \odot a-(1/2)\langle a^2, [b, x]\rangle = [\langle a, b\rangle, x]\odot a+[b, \langle a, x\rangle]\odot a-(1/2)\langle a^2, [b, x]\rangle = -\langle a, b\rangle \odot [a, x]-[b, a]\odot \langle a, x\rangle = \langle a, x]\odot [a, b]-\langle a, b\rangle \odot [a, x]$. Продолжим доказательство (6.2). Имеем $2\{\langle a, b\rangle x[a, b]\}=[\langle a, x\rangle \odot [a, b]-\langle a, b\rangle \odot [a, x], b]=[\langle a, [b, x]\rangle \odot a-(1/2)\langle a^2, [b, x]\rangle, b]=\langle a, [b, x]\rangle \odot [a, b]+[\langle a, [b, x]\rangle, b]\odot a-(1/2)[\langle a^2, [b, x]\rangle, b]$. Поскольку $[\langle a, [b, x]\rangle, b]\odot a=\langle a, [[b, x], b]\rangle \odot a-[[b, x], \langle a, b\rangle]\odot a=(1/2)\langle a^2, [[b, x], b]\rangle -(1/2)[[b, x], \langle a^2, b\rangle]+[[b, x], a]\odot \langle a, b\rangle =(1/2)[\langle a^2, [b, x]\rangle, b]-[a, [b, x]]\odot \langle a, b\rangle$, тождество (6.2) доказано.

Пусть $f(a, b, x)=2\{\langle a, b\rangle x[a, b]\}\odot x-\{\langle a, b\rangle x^2[a, b]\}$. Очевидно, что $f(a, b, x)=f(b, a, x)$. Так как

$$2\{\langle a, b\rangle x[a, b]\}=[\langle a, x\rangle \odot [a, b]-\langle a, b\rangle \odot [a, x], b],$$

то

$$\{\langle a, b\rangle a[a, b]\}=0. \tag{6.7}$$

Линеаризуя тождество (6.2), для любых $a, x, b_1, b_2\in J$ имеем $[\langle a, x\rangle \odot [a, b_1]-\langle a, b_1\rangle \odot [a, x], b_2]+[\langle a, x\rangle \odot [a, b_2]-\langle a, b_2\rangle \odot [a, x], b_1]=2\{\langle a, b_1\rangle x[a, b_2]\}+2\{\langle a, b_2\rangle x[a, b_1]\}$. Отсюда

$$[\langle a, x\rangle \odot [a, b]-\langle a, b\rangle \odot [a, x], a]=0. \tag{6.8}$$

Ввиду (6.2) $2\{\langle a, b\rangle x[a, b]\}\odot x=[\langle a, x\rangle \odot [a, b]-\langle a, b\rangle \odot [a, x], b]\odot x=[\langle a, x\rangle \odot [a, b]-\langle a, b\rangle \odot [a, x], b\odot x]-[\langle a, x\rangle \odot [a, b]-\langle a, b\rangle \odot [a, x], x]\odot b$. Используя линеаризованное по $a$ тождество (6.8), мы можем продолжить выкладки:

$$2\{\langle a, b\rangle x[a, b]\}\odot x = -[\langle b\odot x, x\rangle \odot [a, b] + \langle a, x\rangle \odot [b\odot x, b] - \langle b\odot x, b\rangle \odot [a, x] - \langle a, b\rangle \odot [b\odot x, x], a] + [\langle a, b\rangle \odot [a, x] - \langle a, x\rangle \odot [a, b], x]\odot b = (-1/2)[\langle b, x^2\rangle \odot [a, b] - \langle a, b\rangle \odot [b, x^2], a] - (1/2)[\langle a, x\rangle \odot [x, b^2] - \langle x, b^2\rangle \odot [a, x], a] + 2\{\langle a, x\rangle b[a, x]\}\odot b = \{\langle b, a\rangle x^2[b, a]\} - \{\langle x, a\rangle b^2[x, a]\} + 2\{\langle a, x\rangle b[a, x]\}\odot b.$$

Таким образом, (6.5) доказано.

Линеаризуя (6.5) по $x$

$$2\{\langle a, b\rangle x_1[a, b]\}\odot x_2 + 2\{\langle a, b\rangle x_2[a, b]\}\odot x_1 - 2\{\langle a, b\rangle (x_1\odot x_2)[a, b]\} = 2\{\langle a, x_1\rangle b[a, x_2]\}\odot b + 2\{\langle a, x_2\rangle b[a, x_1]\}\odot b - \{\langle a, x_1\rangle b^2[a, x_2]\} - \{\langle a, x_2\rangle b^2[a, x_1]\} \tag{6.9}$$

и подставляя в (6.9) $x_1 = x$, $x_2 = a$, получим

$$\{\langle a, b\rangle x[a, b]\}\odot a = \{\langle a, b\rangle (x\odot a)[a, b]\} = (1/2)[\langle a, a\odot x\rangle \odot [a, b] - \langle a, b\rangle \odot [a, a\odot x], b] = (1/4)[\langle a^2, x\rangle \odot [a, b] - \langle a, b\rangle \odot [a^2, x], b].$$

Так как

$$\langle a^2, x\rangle \odot [a, b] = 2(\langle a, x\rangle \odot a)\odot [a, b] = 2(\langle a, x\rangle, a, [a, b])^+ + \langle a, x\rangle \odot [a^2, b],$$
$$\langle a, b\rangle \odot [a^2, x] = 2\langle a, b\rangle \odot (a\odot [a, b]) = -2(\langle a, b\rangle, x, [a, x])^+ + \langle a^2, b\rangle \odot [a, x],$$

то $\langle a^2, x\rangle \odot [a, b] - \langle a, b\rangle \odot [a^2, x] = (1/2)[a, [\langle a, x\rangle, [a, b]]] + (1/2)[a, [\langle a, b\rangle, [a, x]]] + \langle a, x\rangle \odot [a^2, b] - \langle a^2, b\rangle \odot [a, x] = \langle a, x\rangle \odot [a^2, b] - \langle a^2, b\rangle \odot [a, x]$. Поэтому $\{\langle a, b\rangle x[a, b]\}\odot a = (1/8)[\langle a^2, x\rangle \odot [a, b] + \langle a, x\rangle \odot [a^2, b] - \langle a, b\rangle \odot [a^2, b] - \langle a^2, b\rangle \odot [a, x], b] = (1/4)\{\langle a^2, b\rangle x[a, b]\} + (1/4)\{\langle a, b\rangle x[a^2, b]\}$. Тождество (6.4) доказано.

Положим $L = \{\langle a, b\rangle x[a, b]\}\odot (a\odot x) + \{\langle a, b\rangle (a\odot x)[a, b]\}\odot x - \{\langle a, b\rangle (x\odot (x\odot a))[a, b]\}$. Ввиду (6.9) имеем $L = \{\langle a, a\odot x\rangle b[a, x]\}\odot b + \{\langle a, x\rangle b[a, a\odot x]\}\odot b - (1/2)\{\langle a, a\odot x\rangle b^2[a, x]\} - (1/2)\{\langle a, x\rangle b^2\times [a, a\odot x]\} = (1/2)\{\langle a^2, x\rangle b[a, x]\}\odot b + (1/2)\{\langle a, x\rangle b[a^2, x]\}\odot b - (1/4)\{\langle a^2, x\rangle b^2[a, x]\} - (1/4)\{\langle a, x\rangle b^2[a^2, x]\}$. Применим теперь линеаризованное по $a$ тождество (6.5). Получим, что $L = (1/2)\{\langle a^2, b\rangle x[a, b]\}\odot x + (1/2)\{\langle a, b\rangle x[a^2, b]\}\odot x - (1/4)\{\langle a^2, b\rangle x^2[a, b]\} - (1/4)\{\langle a, b\rangle x^2\times [a^2, b]\} = 2\{\langle a, b\rangle (x\odot a)[a, b]\}\odot x - \{\langle a, b\rangle (x^2\odot a)[a, b]\}$. Таким образом, $\{\langle a, b\rangle x[a, b]\}\odot (a\odot x) + \{\langle a, b\rangle (a\odot x)[a, b]\}\odot x - \{\langle a, b\rangle \times (x\odot (x\odot a))[a, b]\} = 2(\{\langle a, b\rangle x[a, b]\}\odot a)\odot x) - \{\langle a, b\rangle (x^2\odot a)[a, b]\}$. Следовательно, $(\{\langle a, b\rangle x[a, b]\}, a, x)^+ = \{\langle a, b\rangle (x, x, a)^+[a, b]\}$. Лемма доказана.

Пусть сейчас $P$ — однородный $T$-идеал $\mathrm{Jord}(X)$, введенный в предложении 2.5 и $P^{(2)} = (P^3)^3$.

**Лемма 6.9.** *Пусть $J$ — полупримитивная йорданова $F$-алгебра, над большим полем $F$, не являющаяся PI-алгеброй, и $J = H(R, *)$, где $R$ — первичная ассоциативная обертывающая для $J$ с инволюцией $*$. Тогда для любых кососимметрической DC-операции $\langle\ ,\ \rangle$ на $J$, $x, y\in J$ и $a\in P^{(2)}(J)$ имеют место равенства*

$$\{\langle x, a\rangle y[x, a]\} = 0, \tag{6.10}$$
$$2\langle [x, y], a\rangle \odot a = \langle [x, y], a^2\rangle. \tag{6.11}$$

Доказательство. Покажем вначале, что, не теряя общности, можно считать, что $J$ — алгебра с единицей. Пусть в $J$ нет единицы. Рассмотрим алгебру $R^{\#} = R + F1$ — унитальное расширение алгебры $R$. Естественным образом определим действие $*$ на $R^{\#}$: $1^* = 1$. Тогда $H(R^{\#}, *) = J + F1$ — унитальное расширение алгебры $J$. Покажем, что $R^{\#}$ первична. Действительно, если $B, C \lhd R^{\#}$ и $BC = 0$, то либо $B \cap R = 0$, либо $C \cap R = 0$. Если $u = \alpha 1 + b \in B$, $u \neq 0$, то $uR \subseteq B \cap R$. Пусть $B \cap R = 0$. Тогда для всякого $v \in R$ имеем $\alpha v = -bv$. Если $\alpha = 0$, то и $b \in B \cap R = 0$. Отсюда $e = \alpha^{-1} b$ — единица в алгебре $R$; противоречие. Значит, $R^{\#}$ первична. Так как $\mathrm{Rad}(J + F1) \cap J = \mathrm{Rad}(J) = 0$, то $\mathrm{Rad}(J + F1) = 0$. Для элементов $\alpha 1 + x$, $\beta 1 + y \in J + F1$ по определению положим $\langle \alpha 1 + x, \beta 1 + y \rangle = \langle x, y \rangle$. Тогда $\langle (\alpha 1 + x)^2, \beta 1 + y \rangle = \langle 2\alpha x, y \rangle + \langle x^2, y \rangle = 2(\alpha 1 + x) \odot \langle x + \alpha 1, y + \beta 1 \rangle$, т. е. $\langle \ , \ \rangle$ — $DC$-операция на $J + F1$.

Пусть теперь $J$ — алгебра с единицей. Докажем, что для произвольного максимального $K \lhd_{\text{вн}} J$ и любых $x, y, z \in K$ и $a \in P^{(2)}(K)$ справедливо включение

$$\mathrm{id}_R(z\{\langle x, a \rangle y [x, a]\} x) \cap J \subseteq K. \tag{6.12}$$

В силу предложения 2.11 имеем либо $\mathrm{id}_R(P^{(2)}(K)) \cap J \subseteq K$, либо $RK \cap \cap J \subseteq K$ или $KR \cap J \subseteq K$. Так как $R$ — алгебра с инволюцией и $K \subseteq J = H(R, *)$, то последние два условия эквивалентны. Если $\mathrm{id}_R(P^{(2)}(K)) \cap \cap T \subseteq K$, то (6.12) справедливо. Пусть $KR \cap J = K$. Согласно лемме 6.8 и формуле (6.6) $(\{\langle x, a \rangle y [x, a]\}, x, y)^+ = \{\langle x, a \rangle (y, y, x)^+ [x, a]\}$. Следовательно, $y\{\langle x, a \rangle y [x, a]\} x \in \langle x, a \rangle R + xR + aR$. Из предложения 2.10 получим $\langle P^{(2)}(K), K \rangle \subseteq \langle P(K), K \rangle \subseteq K$. Поэтому для произвольных $x, y \in K$, $a \in P^{(2)}(K)$ и $z \in J$ справедливо включение $z\{\langle x, a \rangle y [x, a]\} x \in \in KR$. Так как $\{Rz\} \subseteq J$, то для любых $x, y, z \in K$ и $a \in P^{(2)}(K)$

$$Rz\{\langle x, a \rangle y [x, a]\} x \in J\{\langle x, a \rangle y [x, a]\} x + zR \subseteq KR.$$

Таким образом, (6.12) доказано.

Зафиксируем $a = a(x_1, \ldots, x_m)$ — некоторый однородный многочлен из $\mathrm{Jord}(X)$, лежащий в $P^{(2)}(X)$. Рассмотрим на алгебре $J$ однородное отображение, сопоставляющее каждому набору $(x_1, \ldots, x_{m+3})$, $x_i \in J$, элемент $g(x_1, \ldots, x_{m+3}) = x_{m+3}\{\langle x_{m+1}, a \rangle x_{m+2} [x_{m+1}, a]\} x_{m+1}$, где $a = a(x_1, \ldots, x_m)$. Докажем, что $g$ — тождественно нулевое отображение. Пусть это не так. Тогда обозначим через $\tilde{g}(x_1, \ldots, x_n)$ либо полную линеаризацию $g$, либо такую частичную линеаризацию $g$, которая еще нетождественно равна нулю, но всякая ее частичная линеаризация уже тождественно нулевая. Рассмотрим отображение $f(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{id}_R(\tilde{g}(x_1, \ldots, x_n)) \cap J$. Проверим, что оно удовлетворяет свойствам 1—3 из условий предложения 6.6.

Ввиду (6.12) для всякого максимального внутреннего идеала $K$ выполнимо $f(x_1, \ldots, x_n) \subseteq K$, если $x_i \in K$. Значит, $f$ удовлетворяет свойству 1.

Если $\tilde{g}$ — полилинейное отображение, то свойство 3 для отображения $f$ автоматически справедливо. Иначе, как и в [14, с. 20],

$$\tilde{g}(x_1, \ldots, x_k), a + b, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}) - \tilde{g}(x_1, \ldots, x_k, a, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}) - \tilde{g}(x_1, \ldots, x_k, b, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}) = \\ = \sum_{t \geqslant 1} \tilde{g}(x_1, \ldots, x_k, y, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}) \Delta_y^{(t)}(b) \mid y = a,$$

где $\Delta_y^{(t)}(b)$ — операторы частичной линеаризации. По построению $\tilde{g}$ имеем $\tilde{g}\Delta_y^{(t)}(b) \equiv 0$. Следовательно, отображение $f$ удовлетворяет свойству 3.

Как доказал К. Мак-Криммон [28], для всякого $B \lhd H(R, *)$ имеет место $\mathrm{id}_R(B^3) \cap H(R, *) \subseteq B$. Учитывая, что $\langle B^{(2)}, J \rangle \subseteq B^3 \odot \langle B, J \rangle \subseteq B^3$, получим, что свойство 2 справедливо для любого $B \lhd J$ при $s = 2$.

В силу следствия 6.7 $f(J, \ldots, J) \cap T_{2n}(J) \subseteq \mathrm{Rad}(J) = 0$. Так как $J$ первична (см. лемму 5.3) и не является $PI$-алгеброй, то $f(J, \ldots, J) = 0$.

Теперь нам достаточно доказать, что для любого $U \lhd R$ $U \neq 0$ следует $U \cap J \neq 0$, т. е. $R$ — редуцированная обертывающая. Пусть $U \cap J = 0$. Тогда для $u \in U \cap U^*$ имеем $u + u^*$, $uu^* \in U \cap J = 0$. Отсюда $u^2 = u(u + u^*) - uu^* = 0$. Значит, $(U^* \cap U) \odot (U^* \cap U) = 0$. Следовательно, $U = 0$.

Таким образом, $\tilde{g} \equiv 0$ на $J$; противоречие. Поэтому и $g \equiv 0$. Следовательно, для любых $x, y, z \in J$ и $a \in P^{(2)}(J)$ имеем $z\{\langle x, a\rangle y[x, a]\} x = 0$. Положим $z = 1$ и, линеаризуя по $x$, получим

$$\{\langle x, a\rangle\, y\,[x, a]\} = (\{\langle x, a\rangle\, y\,[x, a]\}\, x)\, \Delta_x^1(1) = 0,$$

то тождество (6.10) доказано.

Приступим к доказательству тождества (6.11). Ввиду предложения 5.4 $\mathrm{Der}(J) \subseteq \mathrm{Der}(R)$. Поэтому для всякого $x \in J$ и $r \in R$ определены выражения $\langle a, r\rangle$ и $\langle r, a\rangle$, причем $\langle r, a\rangle = -\langle a, r\rangle$. В частности, это верно и для $r = [x, J]$.

Теперь, следуя той же схеме, что и при доказательстве (6.10), нам достаточно для всякого максимального $K \lhd_{\text{вн}} J$ доказать включение

$$\mathrm{id}_R(z(\langle a, [x, y]\rangle \odot a - (1/2)\langle a^2, [x, y]\rangle)) \cap J \subseteq K, \tag{6.13}$$

где $x, y, z \in K$, $a \in P^{(2)}(K)$.

Если для $K$ имеет место включение $\mathrm{id}_R(P^{(2)}(K)) \cap J \subseteq K$, то включение (6.13) также истинно, ввиду того, что $\langle a^2, [x, y]\rangle = [\langle a^2, x\rangle, y] + [x, \langle a^2, y\rangle] = 2[\langle a, x\rangle \odot a, y] + 2[x, \langle a, y\rangle \odot a] \in \mathrm{id}_R(P^{(2)}(K))$. Пусть $KR \cap J = K$. Покажем, что для всех $x \in K$, $a \in P^{(2)}(K)$ и $y \in J$ справедливо включение

$$\langle a, [x, y]\rangle \odot a - (1/2)\langle a^2, [x, y]\rangle \in KR. \tag{6.14}$$

Положим для краткости $v_1 \equiv v_2 (v_1, v_2 \in R)$, если $v_1 - v_2 \in KR$. Тогда $\langle a, [x, y]\rangle \odot a = 2\langle a, xy\rangle \odot a - 2\langle a, x \odot y\rangle \odot a = 2\langle a, xy\rangle \odot a - \langle a^2, x \odot y\rangle = 2\langle a, xy\rangle \odot a + (1/2)\langle a^2, [x, y]\rangle - \langle a^2, xy\rangle$. По предложению 2.10 $\langle a, K\rangle \subseteq \langle P^{(2)}(K), K\rangle \subseteq K$. Поэтому $\langle a, xy\rangle = \langle a, x\rangle y + x\langle a, y\rangle \in KR$, т. е. (6.14) доказано.

В силу тождеств (6.2), (6.3) из леммы 6.2 и тождества (6.10) имеем $[\langle a, [x, y]\rangle \odot a - (1/2)\langle a^2, [x, y]\rangle, x] = 2\{\langle a, x\rangle y [a, x]\} = 0$. Следовательно, для всяких $x, y \in K$ и $z \in J$

$$[\langle a, [x, y]\rangle \odot a - (1/2)\langle a^2, [x, y]\rangle, z] = \\ = -[\langle a, [z, y]\rangle \odot a - (1/2)\langle a^2, [z, y]\rangle, x] \in KR.$$

Отсюда $z(\langle a, [x, y]\rangle \odot a - (1/2)\langle a^2, [x, y]\rangle) \in KR$. И наконец, для всех $x, y, z \in K$ и $a \in P^{(2)}(K)$ имеем $Rz(\langle a, [x, y]\rangle \odot a - (1/2)\langle a^2, [x, y]\rangle) \subseteq \{Rz\}(\langle a, [x, y]\rangle \odot a - (1/2)\langle a^2, [x, y]\rangle) + KR \subseteq KR$. Таким образом, (6.13) доказано. Точно так же, как и при доказательстве (6.10), получим, что $z(\langle a, [x, y]\rangle \odot a - (1/2)\langle a^2, [x, y]\rangle) = 0$ для всех $x, y, z \in J$ и $a \in P^{(2)}(J)$. Положим $z = 1$ и получим тождество (6.11). Лемма доказана.

**Лемма 6.10.** *Пусть $R$ — первичная ассоциативная алгебра с инволюцией $*$, причем алгебра $R$ порождается множеством $H = H(R, *)$ и $P(H(R, *)) \neq 0$. Если $\langle\ ,\ \rangle$: $H \times H \to H$ — кососимметрическая DC-операция на алгебре $H(R, *)$ такая, что $\langle [x, y], z^2\rangle = 2\langle [x, y], z\rangle \odot z$ для всех $x, y, z \in H(R, *)$, то операция $\langle\ ,\ \rangle$ продолжается до DC-операции на $R$.*

Доказательство. Так как $\langle x, ab\rangle = (1/2)\langle x, [a, b]\rangle + \langle x, a \odot b\rangle$, то из условий следует, что отображения $x \mapsto \langle x, ab\rangle$ для всех $a, b \in H(R, *)$ являются дифференцированиями из $H(R, *)$ в $R^{(+)}$. По результату Лагутиной [24] (см. также теорему 5.1) эти отображения продолжаются до дифференцирований алгебры $R$. Таким образом, для всех $a, b \in H(R, *)$ отображение $r \mapsto \langle r, ab\rangle = -\langle ab, r\rangle$ — дифференцирование алгебры $R$.

Так же как и при доказательстве предложения 4.1, рассмотрим элемент $\langle ax, by\rangle = a\langle x, b\rangle y + ab\langle x, y\rangle + \langle a, b\rangle yx + b\langle a, y\rangle x = \langle a, b\rangle xy +$

$+a\langle x, b\rangle y+b\langle a, y\rangle x+ba\langle x, y\rangle$. Из последней формулы следует, что для всех $a, b, x, y\in H(R, *)$

$$[a, b]\langle x, y\rangle=\langle a, b\rangle[x, y]. \qquad (6.15)$$

Докажем теперь, что

$$[\langle x, y\rangle, z]=\langle[x, z], y\rangle+\langle x, [y, z]\rangle \qquad (6.16)$$

для всех $x, y, z\in H(R, *)$. Для этого рассмотрим функцию $f(x, y, z)=[\langle x, y\rangle, z]-\langle[x, z], y\rangle-\langle x, [y, z]\rangle$. Так как $f(x, x, z)=-\langle[x, z], x\rangle-\langle x[x, z]\rangle=0$ и $f(x, y, y)=[\langle x, y\rangle, y]-\langle[x, y], y\rangle$, то $f(x, y, z)$ кососимметрическая функция. Более того, $f(x^2, y, z)-2f(x, y, z)\odot x=2([\langle x, y\rangle\odot x, z]-\langle[x, z]\odot x, y\rangle-[\langle x, y\rangle, z]\odot x+\langle[x, z], y\rangle\odot x-\langle x^2, [y, z]\rangle+2\langle x, [y, z]\rangle\odot x)=0$.

По следствию 2.7 $f(P(H), H, H)=0$. Следовательно (см. 1.3), $\mathrm{id}_R(f(H, H, H))P^3(H)=0$. Ввиду первичности $R$ и $P(H)\neq 0$ имеем $f(H, H, H)=0$, т. е. (6.16) доказано.

Используя (6.16), видим, что $\langle x, [y, z]\rangle=[\langle x, y\rangle, z]+[y, \langle x, z\rangle]=\langle[x, z], y\rangle+\langle x, [y, z]\rangle+[y, \langle x, z\rangle]$. Откуда получим, что для всех $x, y, z\in H(R, *)$ справедливо равенство

$$[\langle x, z\rangle, y]=\langle[x, z], y\rangle. \qquad (6.17)$$

Пусть $K(R, *)=\{a\in R\mid a^*=-a\}$. Покажем, что $K(R, *)=[H, H]+[H, H]\odot H$, где $H=H(R, *)$. Для $r\in R$ по определению положим $[r]=(1/2)(r-r^*)$. Нам надо доказать, что $[r]\in[H, H]+[H, H]\odot H$ для всех $r\in R$. Если $r=xy$, $x, y\in H$, то $[xy]=(1/2)[x, y]\in[H, H]$. Пусть для некоторого $r\in R$ справедливо включение $[r]\in[H, H]+[H, H]\odot H$. Так как $[ax]=[a]\odot x+[\{a\}, x]$, если $x\in H(R, *)$, то нам достаточно доказать, что $[H, H]\odot H\odot H\subseteq[H, H]+[H, H]\odot H$. Но последнее включение вытекает из равенства $4(a, b, c)^+=[b, [a, c]]$. Таким образом, $K(R, *)=[H, H]+[H, H]\odot H$.

Докажем сейчас, что для всякого $r\in R$ и $a\in H(R, *)$ имеет место равенство

$$2\langle r, a\rangle\odot a=\langle r, a^2\rangle. \qquad (6.18)$$

Для любого $r\in R$ справедливо разложение $r=\{r\}+[r]$. Для элементов $r\in H\cup[H, H]$ равенство (6.18) истинно. Поэтому, не теряя общности, считаем, что $r\in[H, H]\odot H$.

Пусть $r=[x, y]\odot z$, $x, y, z\in H$. Так как $2\langle a, [x, y]\odot z\rangle\odot a-\langle a^2, [x, y]\odot z\rangle=2(\langle a, [x, y]\rangle\odot z)\odot a+2(\langle a, z\rangle\odot[x, y])\odot a-\langle a^2, [x, y]\rangle\odot z-\langle a^2, z\rangle\odot[x, y]=2(z, \langle a, [x, y]\rangle, a)^++2([x, y], \langle a, z\rangle, a)^+$, то нам достаточно доказать равенство

$$[\langle a, [x, y]\rangle, [z, a]]+[\langle a, z\rangle, [[x, y], a]]=0. \qquad (6.19)$$

Согласно (6.15) $[z, a]a\langle x, y\rangle=[z, a^2]\langle x, y\rangle-a[z, a]\langle x, y\rangle=\langle z, a^2\rangle[x, y]-a\langle z, a\rangle[x, y]=\langle z, a\rangle a[x, y]$. Отсюда $[[z, a], a]\langle x, y\rangle=[\langle z, a\rangle, a][x, y]$. Аналогично $[x, y][\langle z, a\rangle, a]=\langle x, y\rangle[[z, a], a]$. Таким образом,

$$[[[z, a], a], \langle x, y\rangle]=[[\langle z, a\rangle, a], [x, y]]. \qquad (6.20)$$

Применяя (6.17), получим, что $[\langle a, [x, y]\rangle, [z, a]]=[[a, \langle x, y\rangle], [z, a]]=[a, [[a, z], \langle x, y\rangle]]+[[a, [z, a]], \langle x, y\rangle]$. Так как $[\langle x, y\rangle, [z, a]]=[[x, y], \langle z, a\rangle]$ (см. (6.15)), то, используя (6.20), получим $[\langle a, [x, y]\rangle, [z, a]]=[a, [\langle x, y\rangle, [z, a]]]+[[a, \langle z, a\rangle], [x, y]]=-[[a, [x, y]], \langle z, a\rangle]=-[\langle a, z\rangle, [[x, y], a]]$. Таким образом, (6.19) доказано, а вместе с ним доказано и (6.18).

В силу (6.19) отображения $x\mapsto\langle x, r\rangle$ для всех $r\in R$ являются дифференцированиями из $H(R, *)$ в $R$. Отсюда, как и ранее, эти отображения продолжаются до дифференцирований алгебры $R$. Следовательно, для всех $r_1, r_2\in R$ определены выражения $\langle r_1, r_2\rangle$. Так как алгебра $R$ порождается множеством $H(R, *)$, то $\langle r_1, r_2\rangle$ определено однозначно и $\langle r_1, r_2\rangle=\langle r_2, r_1\rangle$. Значит, $(r_1, r_2)\mapsto\langle r_1, r_2\rangle$ — кососимметрическая $DC$-операция на $R$. Ясно, что ее ограничение на $H(R, *)$ совпадает с исходной операцией $\langle\ ,\ \rangle$. Лемма доказана.

Окончание доказательства теоремы 6.1. Осталось рассмотреть случай, когда $J$ — первичная алгебра типа I. Пусть $R_0$ — первичная ассоциативная алгебра с инволюцией $*$ такая, что $H(R_0, *)\triangleleft \triangleleft J \subseteq H(Q(R_0), *)$. При этом мы можем считать, что $H(R_0, *) = P(J)$, где $P$ — идеал, введенный в предложение 2.5 и алгебра $R_0$ порождается множеством $P(J)$ (см. [8]). Через $R$ обозначим подалгебру алгебры $Q(R_0)$, порожденную множеством $J$. Покажем, что $R$ редуцированная, а следовательно, и первичная обертывающая для $J$. По определению $Q(R_0)$ для всякого $\varphi \in Q(R_0)$, $\varphi \neq 0$, существует $I \triangleleft R_0$, $I \neq 0$, такой, что $0 \neq \varphi I + I\varphi \subseteq R_0$. Если $U \triangleleft R$ и $U \cap H(R_0, *) = 0$, то $U \cap U^* \cap \cap H(R_0, *) = 0$. Отсюда стандартно следует, что $(U \cap U^*) \odot (U \cap U^*) = 0$. Значит, $[U \cap R_0 \cap U^* \cap R_0]^2 = 0$. Ввиду первичности алгебры $R_0$ получим $U \cap R_0 = 0$. Но для всякого $\varphi \in U$, $\varphi \neq 0$, найдется $I \triangleleft R_0$, $I \neq 0$, такой, что $0 \neq \varphi I \subseteq UR_0$. Значит, $U = 0$. Следовательно, $R$ — редуцированная обертывающая для $J$.

Учитывая следствие 6.3, нам достаточно доказать, что $((J, \langle\ ,\ \rangle), R) \models G_0$. Это, в свою очередь, эквивалентно (см. предложение 6.2) тому, что $(J, \langle\ ,\ \rangle) \models JSG_0$. Предположим, что для всякой примитивной некоммутативной йордановой $F$-алгебры $A_\alpha = (J_\alpha, \langle\ ,\ \rangle)$ над большим полем $F$, удовлетворяющей условию $P(J) \neq 0$, доказано, что $(J_\alpha, \langle\ ,\ \rangle) \models JSG_0$. Тогда из предложения 6.5 получим, что $A = (J, \langle\ ,\ \rangle) \models JSG_0 \odot P$, т. е. $JSG_0(A) \odot P(A^{(+)}) = 0$. Отсюда

$$\mathrm{id}_J(JSG_0(A)) \odot P^3(A^{(+)}) = 0.$$

Ввиду первичности алгебры $J$ и $P(J) \neq 0$ получаем, что $(J, \langle\ ,\ \rangle) \models JSG_0$.

Таким образом, не теряя общности, мы можем считать, что $A = (J, \langle\ ,\ \rangle)$ — примитивная некоммутативная йорданова $F$-алгебра, над большим полем $F$ с условием $P(J) \neq 0$. Пусть $K$ — максимальный внутренний модулярный идеал $J$ такой, что $\mathrm{int}_{\Sigma_0}(K) = 0$, где $\Sigma_0 = \{+, \odot, \langle\ ,\ \rangle\}$. Так как $\mathrm{int}(K)$ — идеал $A^{(+)} = J$ такой, что фактор-алгебра $J/_{\mathrm{int}(K)}$ — примитивная йорданова алгебра, в частности, первичная и невырожденная, то по предложению 3.3 имеем либо $P(J) \subseteq D(J) \subseteq \mathrm{int}(K)$, либо $\mathrm{int}(K) \triangleleft A$. Так как $P(J) \triangleleft A$ и $P(J) \neq 0$, то выполняется второй случай. Значит, $\mathrm{int}(K) = \mathrm{int}_{\Sigma_0}(K) = 0$, т. е. $J$ — примитивная йорданова алгебра.

Если $J$ — $PI$-алгебра и $P(J) \neq 0$, то по теореме 3.5 $Z(A) \neq 0$ и $A_Z = Z(A)^{-1}A$ — конечномерная центральная простая некоммутативная йорданова алгебра. В силу структурной теории конечномерных алгебр (см. [1]) либо $A_Z$ коммутативна, либо $A_Z$ квазиассоциативна. Если $A_Z$ коммутативна, то $A_Z \models JSG_0$, значит, и $A \models JSG_0$. Если $A_Z$ квазиассоциативна над $Z^{-1}Z$, то по определению существуют расширение $K$ поля $Z^{-1}Z$ и скаляр $\lambda \in K$, $\lambda \neq 1/2$, такие, что $\mathscr{D} = (A_Z)_K^{(+)} = (A_Z \otimes K)^{(\lambda)}$ — ассоциативная алгебра. Так как $\mathscr{D}^{(+)} = ((A_Z)_K)^{(+)}$, то $\mathscr{D}$ — ассоциативная обертывающая для $(A_Z)_K^{(+)}$. Коммутатор $\langle\ ,\ \rangle$ в $(A_Z)_K$ связан с коммутатором $[\ ,\ ]$ в $\mathscr{D}$ соотношением $[x, y] = (2\lambda - 1)\langle x, y\rangle$. Поэтому $\left((A_Z)_K^+, \mathscr{D}\right) \models G_0$. Отсюда $(A_Z)_K \models JSG_0$ и $A \models JSG_0$.

Нам осталось рассмотреть случай, когда $J$ — примитивная йорданова $F$-алгебра над большим полем $F$ и $J$ не является $PI$-алгеброй. В частности, $J$ — специальная йорданова алгебра. Причем алгебра $J$ имеет строение как первичная алгебра, типа I, так как другой случай уже разобран. Как и выше, $H(R_0, *) \triangleleft J \subseteq H(R, *)$, где $R$ — подалгебра $Q(R_0)$, порожденная множеством $J$, $H(R_0, *) = P(J)$ и $R_0$ — первичная алгебра, имеющая множеством порождающих $P(J)$.

Так как $H(R_0, *)\mathrm{Der}(J) \subseteq H(R_0, *)$, то $H(R_0, *) \triangleleft (J, \langle\ ,\ \rangle)$. В силу леммы 5.4 и следствия 6.3 нам достаточно доказать, что $H(R_0, *) \models \models JSG_0$. Так как $\mathrm{Rad}(H(R_0, *)) \subseteq \mathrm{Rad}(J) = 0$, то алгебра $J_0 = H(R_0, *)$ удовлетворяет условиям леммы 6.9. Пусть $J_1 = P^{(2)}(J_0)$ и $R_1$ — подалгебра $R_0$, порожденная множеством $J_1$. Тогда $H(R_1, *) = J_1$ и ввиду леммы 6.9 для любых $x, y, z \in J_1$ справедливо равенство

$$\langle [x, y], z^2 \rangle = 2\langle [x, y], z \rangle \odot z.$$

Для применения леммы 6.10 надо доказать, что $R_1$ — первичная алгебра. Так как $J_1 \lhd J_0 \lhd J$, то $J_1$ — первичная невырожденная алгебра (см. [8]). Поэтому нам достаточно доказать, что $R_1$ — редуцированная обертывающая для $J_1$. Пусть $U \lhd R_1$ и $U \cap J_1 = 0$. Рассмотрим $t \in \mathrm{id}_{R_0}(U) \cap J_0$. Тогда для некоторых $r_i$, $s_i \in R_0$ и $u_i \in U$ справедливо равенство $t = \sum r_i u_i s_i$. Так как идеал $P$ «аннулирует тетрады» (см. следствие 2.8), то, как и в [8], найдется такое $n$, $n \geqslant 2$, что

$$P^{(n)}(J_0) r_i \cup s_i P^{(n)}(J_0) \subseteq R_1$$

для всех $r_i$, $s_i$. Значит,

$$\{J_1^{(n)}, t, J_1^{(n)}\} \subseteq \sum P^{(n)}(J_0) r_i u_i s_i P^{(n)}(J_0) \subseteq R_0 U R_0 \subseteq U$$

и $\{J_1^{(n)}, t, J_1^{(n)}\} \subseteq J_1$. Следовательно, $\{J_1^{(n)}, t, J_1^{(n)}\} = 0$. Ввиду первичности и невырожденности $J_0$ получили, что либо $\mathrm{id}_{R_0}(U) \cap J_0 = 0$, либо $J_1 = 0$. В последнем случае $J$ — $PI$-алгебра. Алгебра $R_0$ редуцированная обертывающая для $J_0$. Поэтому $U = 0$ и $R_1$ — первичная алгебра.

Теперь по лемме 6.10 и предложению 6.2 имеем $H(R_1, *) \vDash JSG_0$. В силу леммы 4.4 получим $H(R_0, *) \vDash JSG_0$ и $(J, \langle\ ,\ \rangle) \vDash JSG_0$. Теорема 6.1 доказана.

## § 7. СТРОГО ПЕРВИЧНЫЕ НЕКОММУТАТИВНЫЕ ЙОРДАНОВЫ АЛГЕБРЫ

Суммируем факты о строении строго первичных некоммутативных йордановых алгебр в следующей теореме.

**Теорема 7.1.** *Пусть $A$ — строго первичная некоммутативная йорданова алгебра. Тогда алгебра $A$ удовлетворяет одному из следующих условий.*

1. *Алгебра $A^{(+)}$ ассоциативна.*

2. *Центр $Z(A) \neq 0$, и центральное замыкание $A_Z = Z(A)^{-1}A$ есть центральная простая эластичная квадратичная алгебра над полем $Z(A)^{-1}Z(A)$ такая, что $(A_Z)^{(+)}$ — йорданова алгебра невырожденной билинейной формы над полем $Z(A)^{-1}Z(A)$.*

3. *Алгебра $A$ — коммутативная первичная невырожденная йорданова алгебра. Поэтому:*

3.1. *алгебра $A$ — центральный порядок исключительной простой 27-мерной над центром йордановой алгебры;*

3.2. *существует первичная ассоциативная алгебра $R_1$ с инволюцией $*$ такая, что $H(R_1, *) \lhd A \subseteq H(Q(R_1), *)$;*

3.3. *существует первичная ассоциативная алгебра $R_2$ такая, что $R_2^{(+)} \lhd A \subseteq (Q(R_2))^{(+)}$.*

4. *Центральное замыкание $Q_C(A)$ алгебры $A$ — квазиассоциативная алгебра над полем $C$, где $C = C(A)$ — расширенный центроид алгебры $A$, а значит:*

4.1. *существуют ассоциативная первичная $C(A)$-алгебра $\mathscr{D}_1$ и скаляр $\lambda \in C(A)$, $\lambda \neq 1/2$, такие, что $Q_C(A) = \mathscr{D}_1^{(\lambda)}$, где $D_1^{(\lambda)}$ — $\lambda$-мутация алгебры $\mathscr{D}_1$;*

4.2. *существуют первичная ассоциативная $C(A)$-алгебра $\mathscr{D}_2$ с инволюцией $*$ и скаляр $\lambda$ из центроида $\mathscr{D}_2$ такие, что $Q_C(A) = H(\mathscr{D}_2^{\lambda}, *)$ и $\lambda + \lambda^* = 1$.*

Доказательство. Пусть $A$ — строго первичная некоммутативная йорданова алгебра. По предложению 3.4 алгебра $A^{(+)}$ либо ассоциативна, либо $A^{(+)}$ — первичная невырожденная йорданова. Первичные невырожденные йордановы (коммутативные) алгебры описаны

Е. И. Зельмановым [8]. Из этого описания следует, что алгебра $A^{(+)}$ либо $PI$-алгебра, либо $A^{(+)}$ — специальная йорданова алгебра.

Если $A^{(+)}$ — $PI$-алгебра и $(A, A, A)^+ \neq 0$, то по теореме 4.5 центр $Z(A) = Z(A^{(+)}) \neq 0$ и центральное замыкание $A_Z = Z(A)^{-1}A$ — простая центральная алгебра над полем $Z(A)^{-1}Z(A)$. Более того, если $P(A^{(+)}) = 0$, то $A_Z^{(+)}$ —йорданова алгебра невырожденной билинейной формы над полем $Z(A)^{-1}Z(A)$. Иначе $A_Z^{(+)}$ — конечномерная центральная простая йорданова алгебра над полем $Z(A)^{-1}Z(A)$. Такие некоммутативные йордановы алгебры $A_Z$ описаны А. А. Албертом [1]. Ввиду этого описания алгебра $A_Z$ либо коммутативна, либо квазиассоциативна над полем $Z(A)^{-1}Z(A)$. В частности, для алгебры $A$ такой, что $A^{(+)}$ — $PI$-алгебра и $P(A^{(+)}) \neq 0$, получим, что либо $A$ коммутативна и удовлетворяет условию 3.1, либо $A^{(+)}$ — специальная первичная невырожденная йорданова алгебра.

В случае, когда $A^{(+)}$ — специальная первичная невырожденная алгебра с условием $P(A^{(+)}) \neq 0$, как и при доказательстве теоремы 6.1, существует первичная ассоциативная обертывающая алгебра $R$ для $A^{(+)}$. Если алгебра $A$ не является коммутативной, то коммутатор алгебры $A$ будет кососимметричной $DC$-операцией на $A^{(+)}$. В силу теоремы 6.1 и предложения 4.5 алгебра $Q_C(A)$ будет квазиассоциативной алгеброй над полем $C$, где $C = C(A)$ — расширенный центроид алгебры $A$. По теореме К. Мак-Криммона [23] такие алгебры удовлетворяют 4.1 и 4.2. Если алгебра $A$ коммутативна, то она имеет строение типа 3.2, 3.3 в силу описания Е. И. Зельманова [8]. Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Albert A. A.** Power associative rings // Trans. Amer. Math. Soc.— 1948.— V. 64.— P. 552—593.
2. **Schafer R. D.** Noncommutative Jordan algebras of characteristic 0 // Proc. Amer. Math. Soc.— 1955.— V. 6.— P. 552—593.
3. **Schafer R. D.** An introduction to nonassociative algebras.— N. Y.: Acad. Press, 1966.
4. **Шестаков И. П.** Некоммутативные йордановы и правоальтернативные кольца. I.— Новосибирск, 1973.— 21 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 25).
5. **McCrimmon K.** Noncommutative Jordan rings // Trans. Amer. Math. Soc.— 1971.— V. 158.— P. 1—33.
6. **Lopez A. F., Palacious A. R.** Primitive noncommutative Jordan algebras with nonzero socle // Proc. Amer. Math. Soc.— 1986.— V. 96.— P. 199—205.
7. **Зельманов Е. И.** О первичных йордановых алгебрах // Алгебра и логика.— 1979.— Т. 18.— С. 162—175.
8. **Зельманов Е. И.** О первичных йордановых алгебрах. II // Сиб. мат. журн.— 1983.— Т. 24.— С. 83—104.
9. **Слинько А. М.** О радикалах йордановых колец // Алгебра и логика.— 1972.— Т. 11.— С. 206—215.
10. **McCrimmon K.** The radical of a Jordan algebras // Proc. Nat. Acad. Soc. USA.— 1969.— P. 671—678.
11. **McCrimmon K.** Amitsur shrinkage of Jordan radicals // Communs algebra.— 1984.— V. 12.— P. 777—826.
12. **McCrimmon K.** A characterization of the nondegenerate radical in quadratic Jordan triple systems // Communs algebra.— 1984.— V. 12.— P. 827—828.
13. **Martindale W. S. 3-d, McCrimmon K.** Imbedding nondenerate Jordan algebras in semiprimitive algebras.— Preprint.
14. **Кольца,** близкие к ассоциативным/Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.— М.: Наука, 1978.
15. **Jacobson N.** Structure and representations of Jordan algebras // Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.— V. 39.— Providence, R. I., 1968.
16. **Шестаков И. П.** Обобщенно-стандартные кольца // Алгебра и логика.— 1974.— Т. 13.— С. 88—103.
17. **Скосырский В. Г.** О нильпотентности в йордановых и правоальтернативных алгебрах // Алгебра и логика.— 1979.— Т. 18.— С. 73—85.
18. **Thedy A.** Radical of right alternetive and Jordan rings // Communs algebra.— 1984.— V. 12.— P. 857—887.
19. **Ng Seong Nam.** Middle nucleus of semiprime Jordan rings // Nanta Mathematica.— 1976.— V. 9.— P. 1—3.
20. **Зельманов Е. И.** Характеризация радикала Маккриммона // Сиб. мат. журн.— 1984.— Т. 25.— С. 190—192.

21. **Erickson T. E., Martindale W. S. 3-rd, Osborn J. M.** Prime nonassociative algebras // Pacif. J. Math.— 1975.— V. 60.— P. 49—63.
22. **Baxter W. E., Martindale M. S. 3-rd.** Sentral closure of semiprimitive non-associative rings // Communs algebra.— 1979.— V. 7.— P. 49—63.
23. **McCrimmon K.** A note on quasi-associative algebras // Proc. Amer. Math. Soc.— 1966.— V. 17.— P. 1455—1459.
24. **Лагутина Л. А.** Йордановы гомоморфизмы колец с инволюцией // XIX Всесоюз. алгебр. конф., ч. 2, Львов, 1987: Тез. докл.— Львов, 1987.— С. 158.
25. **Мальцев А. И.** Алгебраические системы.— М.: Наука, 1970.
26. **Hogben L., McCrimmon K.** Maximal modular inner ideals and Jacobson radical of a Jordan algebra // J. Algebra.— 1981.— V. 68.— P. 155—169.
27. **Джекобсон Н.** Строение кольца.— М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
28. **McCrimmon K.** On Herstein's theorems relating Jordan and associative algebras // J. Algebra.— 1969.— V. 13.— P. 382—392.

*В. Т. ФИЛИППОВ*

# ОДНОРОДНЫЕ ТРОЙНЫЕ СИСТЕМЫ *)

В 1958 г. К. Ямагути [1] ввел общие лиевы тройные системы, которые являются естественным обобщением лиевых тройных систем, играющих важную роль в современной дифференциальной геометрии [2]. В настоящее время общие лиевы тройные системы используются при изучении некоторых обобщений симметрических пространств (см., например, [3] **)).

*Общей лиевой тройной системой* (ОТС) *над полем* Ф называется линейное пространство $V$ над Ф с определенными на нем билинейной операцией $xy$ и трилинейной операцией $[x, y, z]$, которые удовлетворяют тождествам:

$$[x, x, y]=0, \tag{1}$$

$$x^2=0, \tag{2}$$

$$[x, y, z]+[y, z, x]+[z, x, y]=J(x, y, z), \tag{3}$$

$$[wx, y, z]+[xy, w, z]+[yw, x, z]=0, \tag{4}$$

$$[u, v, [w, x, y]]=[[u, v, w], x, y]+[w, [u, v, x], y]+[w, x, [u, v, y]], \tag{5}$$

$$[w, x, yz]=[w, x, y]z+y[w, x, z], \tag{6}$$

где $J(x, y, z)=(xy)z+(yz)x+(zx)y$ — якобиан элементов $x$, $y$ и $z$.

Одним из основных свойств ОТС является то, что для любой ОТС $V$ над полем Ф найдется такая алгебра Ли $L$ над Ф, что $V$ изоморфно вкладывается (как подпространство) в $L$ и $L$ является прямой суммой $V$ и ее алгебры внутренних дифференцирований [1, 4].

Любая алгебра Ли $L$ становится ОТС, если кроме ее операции умножения $xy$ еще определить на $L$ трилинейную операцию формулой $[x, y, z]=(xy)z$, а лиева тройная система $V$ становится ОТС, если в $V$ положить $xy=0$ для любых $x, y \in V$ [4].

*Дифференцированием* ОТС $V$ называется линейное отображение $\mathscr{D}$ такое, что

$$xy\mathscr{D}=(x\mathscr{D})y+x(y\mathscr{D}),$$

$$[x, y, z]\mathscr{D}=[x\mathscr{D}, y, z]+[x, y\mathscr{D}, z]+[x, y, z\mathscr{D}]$$

для любых $x, y, z \in V$.

Смысл тождеств (5) и (6) из определения ОТС $V$ заключается в том, что отображение $\mathscr{D}(x, y)$: $z \to [x, y, z]$ является ее дифференцированием.

---

*) Основные результаты статьи были доложены 17 декабря 1986 г. на семинаре им. А. И. Ширшова по теории колец Института математики СО АН СССР.— *Примеч. ответств. ред. И. П. Шестакова.*

**) В [3] эти системы называются общими тройными системами.