21. **Erickson T. E., Martindale W. S. 3-rd, Osborn J. M.** Prime nonassociative algebras // Pacif. J. Math.— 1975.— V. 60.— P. 49—63.
22. **Baxter W. E., Martindale M. S. 3-rd.** Sentral closure of semiprimitive non-associative rings // Communs algebra.— 1979.— V. 7.— P. 49—63.
23. **McCrimmon K.** A note on quasi-associative algebras // Proc. Amer. Math. Soc.— 1966.— V. 17.— P. 1455—1459.
24. **Лагутина Л. А.** Йордановы гомоморфизмы колец с инволюцией // XIX Всесоюз. алгебр. конф., ч. 2, Львов, 1987: Тез. докл.— Львов, 1987.— С. 158.
25. **Мальцев А. И.** Алгебраические системы.— М.: Наука, 1970.
26. **Hogben L., McCrimmon K.** Maximal modular inner ideals and Jacobson radical of a Jordan algebra // J. Algebra.— 1981.— V. 68.— P. 155—169.
27. **Джекобсон Н.** Строение кольца.— М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
28. **McCrimmon K.** On Herstein's theorems relating Jordan and associative algebras // J. Algebra.— 1969.— V. 13.— P. 382—392.

В. Т. ФИЛИППОВ

ОДНОРОДНЫЕ ТРОЙНЫЕ СИСТЕМЫ *)

В 1958 г. К. Ямагути [1] ввел общие лиевы тройные системы, которые являются естественным обобщением лиевых тройных систем, играющих важную роль в современной дифференциальной геометрии [2]. В настоящее время общие лиевы тройные системы используются при изучении некоторых обобщений симметрических пространств (см., например, [3] **)).

Общей лиевой тройной системой (ОТС) *над полем* Φ называется линейное пространство V над Φ с определенными на нем билинейной операцией xy и трилинейной операцией $[x, y, z]$, которые удовлетворяют тождествам:

$$[x, x, y]=0, \tag{1}$$

$$x^2=0, \tag{2}$$

$$[x, y, z]+[y, z, x]+[z, x, y]=J(x, y, z), \tag{3}$$

$$[wx, y, z]+[xy, w, z]+[yw, x, z]=0, \tag{4}$$

$$[u, v, [w, x, y]]=[[u, v, w], x, y]+[w, [u, v, x], y]+[w, x, [u, v, y]], \tag{5}$$

$$[w, x, yz]=[w, x, y]z+y[w, x, z], \tag{6}$$

где $J(x, y, z)=(xy)z+(yz)x+(zx)y$ — якобиан элементов x, y и z.

Одним из основных свойств ОТС является то, что для любой ОТС V над полем Φ найдется такая алгебра Ли L над Φ, что V изоморфно вкладывается (как подпространство) в L и L является прямой суммой V и ее алгебры внутренних дифференцирований [1, 4].

Любая алгебра Ли L становится ОТС, если кроме ее операции умножения xy еще определить на L трилинейную операцию формулой $[x, y, z]=(xy)z$, а лиева тройная система V становится ОТС, если в V положить $xy=0$ для любых $x, y\in V$ [4].

Дифференцированием ОТС V называется линейное отображение $\mathscr{D}$ такое, что

$$xy\mathscr{D}=(x\mathscr{D})y+x(y\mathscr{D}),$$

$$[x, y, z]\mathscr{D}=[x\mathscr{D}, y, z]+[x, y\mathscr{D}, z]+[x, y, z\mathscr{D}]$$

для любых $x, y, z\in V$.

Смысл тождеств (5) и (6) из определения ОТС V заключается в том, что отображение $\mathscr{D}(x, y)\colon z\to[x, y, z]$ является ее дифференцированием.

---

*) Основные результаты статьи были доложены 17 декабря 1986 г. на семинаре им. А. И. Ширшова по теории колец Института математики СО АН СССР.— *Примеч. ответств. ред. И. П. Шестакова.*

**) В [3] эти системы называются общими тройными системами.

Следуя А. Сейглу [5], ОТС V над полем Φ назовем *однородной*, если ее трилинейная операция выражается через билинейную как однородный многочлен, т. е. она принимает вид (с учетом антикоммутативности билинейной операции)

$$[x, y, z]=\alpha(xy)z+\beta(yz)x+\gamma(zx)y \tag{7}$$

для некоторых фиксированных $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi$.

Напомним, что *алгеброй Мальцева* называется алгебра, удовлетворяющая тождествам $x^2=0$ и

$$J(x, y, z)x=J(x, y, xz). \tag{8}$$

Алгеброй Сейгла в дальнейшем будем называть алгебру, удовлетворяющую тождествам $x^2=0$ и

$$J(x, y, z)w=J(w, x, yz)+J(w, y, zx)+J(w, z, xy). \tag{9}$$

Этот класс алгебр, по-видимому, впервые появился в работе [5], где, в частности, было доказано, что если конечномерная однородная ОТС V над полем Φ характеристики 0 является простой, то V либо алгебра Мальцева, либо алгебра Сейгла.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать, что характеристика основного поля Φ отлична от 2 и 3.

В § 1 настоящей статьи будет доказано, что если ОТС является однородной, то V — либо алгебра Мальцева, либо алгебра Сейгла. Доказательство этого утверждения сходно с доказательством теоремы А. Сейгла [5]. Попутно показывается, что произвольные алгебра Мальцева и алгебра Сейгла становятся однородными ОТС, если на них определить трилинейную операцию (7), соответственно, со значениями $\alpha=-1$, $\beta=\gamma=1$ и $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\gamma=\frac{1}{4}$ *).

В § 2 вводится понятие ассоциированной однородной тройной системы антикоммутативной алгебры, в которой производной трилинейной операцией является якобиан $J(x, y, z)$. Доказывается, что простота нелиевой однородной ОТС V эквивалентна простоте ее ассоциированной тройной системы $L(V)$.

Наибольший интерес представляют ассоциированные тройные системы алгебр Сейгла, поскольку эти системы являются 3-лиевыми алгебрами в смысле работы [7]. Если бы были известны примеры простых нелиевых алгебр Сейгла, то критерий простоты алгебр Сейгла, доказанный в § 2, можно было бы использовать для построения новых примеров простых 3-лиевых алгебр. К сожалению, примеров простых нелиевых алгебр Сейгла до сих пор не найдено. Более того, А. Сейглом [8] было доказано, что простая конечномерная алгебра из этого класса над полем Φ характеристики 0 лиева, если она содержит элемент $u\neq 0$ такой, что правое умножение R_u является линейным преобразованием с базисом из собственных векторов. Как отмечалось в работе [8], этот результат подчеркивает трудность в построении простых конечномерных нелиевых алгебр Сейгла.

Из определения 3-лиевых алгебр следует, что тождество (9) не является необходимым для того, чтобы ассоциированная тройная система антикоммутативной алгебры была 3-лиевой алгеброй. На самом деле, класс антикоммутативных алгебр, имеющих ассоциированную 3-лиеву алгебру, более широк, чем класс алгебр Сейгла, и определяется тождеством

$$J(J(x, y, z), t, v)=J(J(x, t, v), y, z)+J(x, J(y, t, v), z)+$$
$$+J(x, y, J(z, t, v)).$$

---

*) Для алгебр Мальцева последнее утверждение было известно (см. [6]), а для алгебр Сейгла в неявном виде оно содержится в [5].

Такие алгебры будем называть *J-алгебрами*. Далее мы приведем примеры центральных простых J-алгебр для любого поля Φ (в случае нулевой характеристики эти алгебры бесконечномерны). Эти алгебры лежат в классе антикоммутативных алгебр $A(G, g, f)$, построенных А. А. Альбертом и М. С. Франк [9] (алгебры Ли из этого класса также изучались Р. Блоком [10]). Предварительно в § 3 доказывается критерий простоты алгебр $A(G, g, f)$, который ранее был известен только для лиевых алгебр $A(G, g, f)$ [10]. Кроме того, доказывается, что все простые алгебры из этого класса являются центральными.

В § 4 из класса алгебр $A(G, g, f)$ выделяется некоторый подкласс J-алгебр и дается критерий их простоты. Заметим, что каждая J-алгебра $A(G, h_1, h_2, h_3)$ из этого класса имеет ненулевой лиев центр, который по определению совпадает с аннулятором ее ассоциированной 3-лиевой алгебры $L(G, h_1, h_2, h_3)$. Поэтому ассоциированная алгебра $L(G, h_1, h_2, h_3)$ простой J-алгебры $A(G, h_1, h_2, h_3)$ сама не является простой. Следовательно, для J-алгебр не выполняется аналог критерия простоты однородных ОТС, доказанного в § 2.

Ситуация меняется, если мы перейдем к фактор-алгебре $\bar{L}$ алгебры $L(G, h_1, h_2, h_3)$ по ее аннулятору при условии, что J-алгебра $A(G, h_1, h_2, h_3)$ проста. В § 5, в частности, показано, что в этом случае алгебра $\bar{L}$ проста. Это дает новые примеры простых 3-лиевых алгебр над любым полем Φ (бесконечномерных, если характеристика Φ нулевая).

В дальнейшем, как обычно, тройной системой будем называть линейное пространство над полем Φ с трилинейной операцией.

Для упрощения записи будем опускать скобки в правонормированных произведениях и обозначать через M и S соответственно классы алгебр Мальцева и алгебр Сейгла.

§ 1. КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОРОДНЫХ ОБЩИХ ЛИЕВЫХ ТРОЙНЫХ СИСТЕМ

Во-первых, заметим, что если ОТС V однородна, то тождество (5) в ее определении следует из других, поскольку справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть V — линейное пространство над полем Φ с определенными на нем билинейной и трилинейной операциями xy и $[x, y, z]$. Если V удовлетворяет тождеству* (6), *а операция $[x, y, z]$ определена формулой* (7), *то в V выполняется тождество* (5).

Доказательство. Отображение $\mathscr{D}(a, b)\colon x \to [a, b, x]$ является дифференцированием по отношению к билинейной операции xy, а следовательно, и к любой производной полилинейной операции, в частности к тернарной операции $[x, y, z]$, задаваемой формулой (7). Лемма доказана.

Лемма 2. *Если антикоммутативная алгебра A характеристики $p \neq 2$ удовлетворяет тождеству $yx^2 = 0$, то $A^4 = 0$.*

Доказательство. Из антикоммутативности алгебры A и линеаризованного по x тождества $yx^2 = 0$ следует, что функция xyz меняет знак на противоположный при перестановке соседних аргументов, т. е. кососимметрична по всем переменным; тем же свойством обладает и функция $xyzt$. С другой стороны,

$$xyzt = -tz(xy) = zt(xy). \tag{10}$$

Так как левая часть (10) при четной перестановке $(x, y, z, t) \to (z, t, x, y)$ сохраняется, а правая часть умножается на -1, то $xyzt = xy(zt) = 0$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Однородная общая лиева тройная система V над полем Φ характеристики, отличной от 2 и 3, является либо алгеброй Мальцева, либо алгеброй Сейгла.*

Обратно, произвольная алгебра Мальцева и алгебра Сейгла над Φ становятся (однородными) общими лиевыми тройными системами, если *на них задать трилинейную операцию*

$$[x, y, z] = \alpha(xy)z + \beta(yz)x + \gamma(zx)y,$$

соответственно, со значениями параметров $\alpha = -1$, $\beta = \gamma = 1$ *и* $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \gamma = \frac{1}{4}$.

Доказательство. Пусть ОТС V однородна. Положим в (7) $y = x$:

$$[x, x, z] = \alpha xxz + \beta xzx + \gamma zx^2 = (\gamma - \beta) zx^2.$$

Отсюда и из (1) следует тождество $(\gamma - \beta) zx^2 = 0$. Если в V выполняется тождество $zx^2 = 0$, то по лемме 2 $V^4 = 0$ и, следовательно, $V \in M \cap S$. Поэтому можно предположить, что $\gamma - \beta = 0$, т. е. $\gamma = \beta$. Но тогда трилинейная операция (7) принимает вид

$$[x, y, z] = \alpha xyz + \beta yzx + \beta zxy = \beta J(x, y, z) + (\alpha - \beta) xyz. \qquad (11)$$

В любой антикоммутативной алгебре якобиан $J(x, y, z)$ является кососимметрической функцией своих аргументов. Из (11) и кососимметричности якобиана следует тождество

$$\begin{aligned}[x, y, z] + [y, z, x] + [z, x, y] = \beta J(x, y, z) + (\alpha - \beta) xyz + \\ + \beta J(y, z, x) + (\alpha - \beta) yzx + \beta J(z, x, y) + (\alpha - \beta) zxy = \\ = 3\beta J(x, y, z) + (\alpha - \beta) J(x, y, z) = (\alpha + 2\beta) J(x, y, z). \qquad (12)\end{aligned}$$

В силу (12) и (3) $J(x, y, z) = (\alpha + 2\beta) J(x, y, z)$ или, после приведения подобных членов, $(\alpha + 2\beta - 1) J(x, y, z) = 0$. Отсюда следует, что либо V — алгебра Ли и, следовательно, $V \in M \cap S$, либо $\alpha + 2\beta - 1 = 0$, $\alpha = 1 - 2\beta$ и в силу (11)

$$[x, y, z] = \beta J(x, y, z) + (1 - 3\beta) xyz. \qquad (13)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}[wx, y, z] + [xy, w, z] + [yw, x, z] = \beta [J(wx, y, z) + J(xy, w, z) + \\ + J(yw, x, z)] + (1 - 3\beta)[wxyz + xywz + ywxz] = \beta [J(wx, y, z) + \\ + J(xy, w, z) + J(yw, x, z)] + (1 - 3\beta) J(w, x, y) z.\end{aligned}$$

Поскольку в силу (4) левая часть последнего тождества равна нулю, то выполняется тождество

$$\begin{aligned}\beta [J(wx, y, z) + J(xy, w, z) + J(yw, x, z)] + \\ (1 - 3\beta) J(w, x, y) z = 0. \qquad (14)\end{aligned}$$

В силу (13) получим тождество

$$\begin{aligned}[w, x, yz] + z[w, x, y] + y[x, w, z] = \beta [J(w, x, yz) + zJ(w, x, y) + \\ + yJ(x, w, z)] + (1 - 3\beta)[wx(yz) + z(wxy) + y(xwz)] = \beta [J(w, x, yz) + \\ + zJ(w, x, y) + yJ(x, w, z)] - (1 - 3\beta) J(wx, y, z).\end{aligned}$$

По тождеству (6) и линеаризованному тождеству (1) левая часть последнего тождества равна нулю. Поэтому

$$\beta [J(w, x, yz) + zJ(w, x, y) + yJ(x, w, z)] - (1 - 3\beta) J(wx, y, z) = 0. \quad (15)$$

Если $\beta = 0$, то отсюда следует, что $J(wx, y, z) = 0$ и в силу (14) $J(w, x, y) z = 0$. Следовательно, $V \in M \cap S$. Поэтому мы можем предположить, что $\beta \neq 0$. Но тогда, умножив (14) и (15) на β^{-1}, а затем положив $\delta = (1 - 3\beta) \beta^{-1}$, мы можем записать тождества (14) и (15) в виде

$$J(wx, y, z) + J(xy, w, z) + J(yw, x, z) + \delta J(w, x, y) z = 0, \qquad (16)$$

$$J(w, x, yz) + zJ(w, x, y) + yJ(x, w, z) - \delta J(wx, y, z) = 0. \qquad (17)$$

Положим $z=x$ в (16) и (17), сложим полученные тождества и приведем подобные члены:

$$(1-\delta)[J(wx, y, x)-J(w, x, y)x]=0.$$

Отсюда следует, что либо алгебра V удовлетворяет тождеству $J(wx, y, x)-J(w, x, y)x=0$ и тогда по определению $V\in M$, либо $1-\delta=0$, $\delta=(1-3\beta)\beta^{-1}=1$, т. е. $\beta=1/4$. Но тогда (16) принимает вид

$$J(wx, y, z)+J(xy, w, z)+J(yw, x, z)+J(w, x, y)z=0.$$

Следовательно, $V\in S$. Итак, любая однородная ОТС $V\in M\cup S$.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть V — произвольная алгебра Мальцева. Определим на ней трилинейную операцию $[x, y, z]$ по формуле (7) со значениями $\alpha=-1$, $\beta=\gamma=1$ и докажем, что V становится однородной ОТС. В силу леммы 1 достаточно проверить тождества (1), (3), (4) и (6). При заданных значениях α, β и γ трилинейная операция (7) принимает вид

$$[x, y, z]=J(x, y, z)-2xyz. \tag{18}$$

Тождества (1) и (3) легко следуют из (18) и антикоммутативности алгебры V.

В любой алгебре Мальцева выполняются тождества (см. [11, формулы (2.14) и (2.26)])

$$2wJ(x, y, z)=J(w, x, yz)+J(w, y, zx)+J(w, z, xy), \tag{19}$$

$$J(wx, y, z)=wJ(x, y, z)+J(w, y, z)x-2J(yz, w, x). \tag{20}$$

В силу (18)

$$\begin{aligned}[wx, y, z]+[xy, w, z]+[yw, x, z]&=J(wx, y, z)+J(xy, w, z)+\\ &+J(yw, x, z)-2wxyz-2xywz-2ywxz=\\ &=J(wx, y, z)+J(xy, w, z)+J(yw, x, z)-2J(w, x, y)z.\end{aligned}$$

Отсюда и из (19) следует (4). В силу (18) имеем тождество

$$\begin{aligned}[w, x, yz]+z[w, x, y]+y[x, w, z]&=J(w, x, yz)+zJ(w, x, y)+\\ &+yJ(x, w, z)-2wx(yz)-2z(wxy)-2y(xwz)=\\ &=J(w, x, yz)+zJ(w, x, y)+yJ(x, w, z)+2J(wx, y, z).\end{aligned}$$

Отсюда и из (20) вытекает (6). Следовательно, алгебра Мальцева V становится ОТС, если трилинейную операцию на ней задать формулой (18).

Пусть теперь V — произвольная алгебра Сейгла. В V выполняются тождества

$$\begin{aligned}J(w, xy, z)+J(w, yz, x)+J(w, zx, y)&=\\ =J(wx, y, z)+J(wy, z, x)+J(wz, x, y),&\end{aligned} \tag{21}$$

$$J(x, y, z)w-J(w, x, y)z+J(z, w, x)y-J(y, z, w)x=0, \tag{22}$$

$$J(x, y, z)w-J(w, x, y)z=J(w, z, xy)+J(x, y, zw). \tag{23}$$

Доказательство (21) можно найти в [8, с. 1398]. Докажем (22) и (23). В любой антикоммутативной алгебре выполняется тождество

$$\begin{aligned}J(x, y, z)w-J(w, x, y)z+J(z, w, x)y-J(y, z, w)x=J(w, xy, z)+\\ +J(w, yz, x)+J(w, zx, y)-J(wx, y, z)-J(wy, z, x)-J(wz, x, y).\end{aligned}$$

Отсюда и из (21) следует (22). Из (9) заменой переменных имеем

$$\begin{aligned}-J(w, x, y)z&=-J(z, w, xy)-J(z, x, yw)-J(z, y, wx),\\ -J(z, w, x)y&=-J(y, z, wx)-J(y, w, xz)-J(y, x, zw),\\ J(y, z, w)x&=J(x, y, zw)+J(x, z, wy)+J(x, w, yz).\end{aligned}$$

Сложив эти тождества с (9) и приведя подобные члены, получим

$$J(x, y, z)w - J(w, x, y)z - J(z, w, x)y + J(y, z, w)x = \\ = 2J(w, z, xy) + 2J(x, y, zw). \quad (24)$$

Сложив (22) с последним тождеством и сократив на 2, выводим (23).

Поменяем местами y и w в (23):

$$J(x, w, z)y - J(y, x, w)z = J(y, z, xw) + J(x, w, zy).$$

Это тождество запишем в виде

$$J(w, x, yz) + zJ(w, x, y) + yJ(x, w, z) - J(wx, y, z) = 0. \quad (25)$$

Определим на V трилинейную операцию (7) со значениями $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \gamma = \frac{1}{4}$ и докажем, что алгебра V становится ОТС относительно этой операции. Для этого в силу леммы 1 достаточно проверить тождества (1), (3), (4) и (6). При заданных значениях параметров α, β и γ трилинейную операцию (7) можно записать в виде

$$[x, y, z] = \frac{1}{4}[J(x, y, z) + xyz]. \quad (26)$$

Тождества (1) и (3) легко проверяются. В силу (26), имеем тождество

$$[wx, y, z] + [xy, w, z] + [yw, x, z] = \frac{1}{4}[J(wx, y, z) + \\ + J(xy, w, z) + J(yw, x, z) + wxyz + xywz + ywxz] = \\ = \frac{1}{4}[J(wx, y, z) + J(xy, w, z) + J(yw, x, z) + J(w, x, y)z].$$

Отсюда и из (9) следует тождество (4). В силу (26) получим тождество

$$[w, x, yz] + z[w, x, y] + y[x, w, z] = \frac{1}{4}[J(w, x, yz) + \\ + zJ(w, x, y) + yJ(x, w, z) + wx(yz) + z(wxy) + y(xwz)] = \\ = \frac{1}{4}[J(w, x, yz) + zJ(w, x, y) + yJ(x, w, z) - J(wx, y, z)].$$

Отсюда и из (25) следует тождество (6). Итак, алгебра Сейгла V с трилинейной операцией, заданной формулой (26), является ОТС. Теорема доказана.

§ 2. АССОЦИИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ И КРИТЕРИЙ ПРОСТОТЫ ОДНОРОДНЫХ ОТС

В следующей лемме тождество (9), определяющее алгебры Сейгла, заменяется на эквивалентное ему, но более удобное тождество.

Лемма 3. *Класс алгебр Сейгла S определяется тождествами,*

$$x^2 = 0, \\ J(x, y, z)w = J(xw, y, z) + J(x, yw, z) + J(x, y, zw). \quad (27)$$

Доказательство. Тождество (27) вытекает из (9) и тождества (21), которое, в свою очередь, также является следствием (9). Докажем, что тождество (9) является следствием (27) и антикоммутативности. Из (27) заменой переменных получим тождества:

$$-J(w, x, y)z = -J(wz, x, y) - J(w, xz, y) - J(w, x, yz), \\ J(z, w, x)y = J(zy, w, x) + J(z, wy, x) + J(z, w, xy), \\ -J(y, z, w)x = -J(yx, z, w) - J(y, zx, w) - J(y, z, wx).$$

Сложив их с (27) и приведя подобные члены, получим

$$J(x, y, z)w - J(w, x, y)z + J(z, w, x)y - J(y, z, w)x =$$
$$= 2[J(w, xy, z) + J(w, yz, x) + J(w, zx, y) -$$
$$- J(wx, y, z) - J(wy, z, x) - J(wz, x, y)].$$

Напомним, что в любой антикоммутативной алгебре выполняется тождество

$$J(x, y, z)w - J(w, x, y)z + J(z, w, x)y - J(y, z, w)x =$$
$$= J(w, xy, z) + J(w, yz, x) + J(w, zx, y) -$$
$$- J(wx, y, z) - J(wy, z, x) - J(wz, x, y).$$

Из двух последних тождеств следует (21), а из (27) и (21) — (9). Лемма доказана.

Линейное подпространство I ОТС V называется *идеалом*, если $IV \subseteq I$, $[I, V, V] \subseteq I$.

ОТС V называется *простой*, если $\dim V > 1$ и V не имеет собственных идеалов.

В силу кососимметричности операции $[x, y, z]$ относительно x и y, из включения $[I, V, V] \subseteq I$ следует включение $[V, I, V] \subseteq I$. Но тогда из (3) получаем включение $[V, V, I] \subseteq [I, V, V] + [V, I, V] + I \subseteq I$. Следовательно, понятие идеала ОТС V, приведенное выше, совпадает с обычным определением идеала, если рассматривать ОТС как линейную мультиоператорную Ω-алгебру (см., например, [12]).

Пусть A — произвольная антикоммутативная алгебра над полем Φ. Через $J(A, A, A)$ и $J(A)$ будем обозначать соответственно подпространство и идеал алгебры A, порожденные всеми якобианами, а через $Z(A)$ — лиев центр алгебры A, т. е.

$$Z(A) = \{n \in A;\ J(n, A, A) = 0\}.$$

Лемма 4. *В любой однородной* ОТС V *подпространства* $J(V)$ *и* $Z(V)$ *являются идеалами* V *и выполняются равенства*

$$J(V) = J(V, V, V), \tag{28}$$

$$J(V)Z(V) = 0. \tag{29}$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что если ОТС V однородна, а I — идеал V в обычном смысле, т. е. I — подпространство V такое, что $IV \subseteq I$, то в силу (7) $[I, V, V] \subseteq I$ и, следовательно, I — идеал ОТС V. Поэтому для доказательства того, что подпространство I пространства V является идеалом ОТС V, достаточно доказать включение $IV \subseteq I$. Отсюда следует, что $J(V)$ — идеал ОТС V.

По теореме 1 V — либо алгебра Мальцева, либо алгебра Сейгла. В первом случае равенство (28) следует из тождества (19), а во втором — из (9). Для любых $n \in Z(V)$, $x, y, z \in V$ имеем равенство $J(x, y, z)n = 0$. Действительно, оно следует при $w = n$ из тождеств (19) и (9), соответственно, в первом и втором случаях. Следовательно, в V выполняется равенство $J(V, V, V)Z(V) = 0$. Отсюда и из (28) следует равенство (29). Если V — алгебра Мальцева, то в силу (20) и (29) $J(nx, y, z) = nJ(x, y, z) + J(n, y, z)x - 2J(yz, n, x) = nJ(x, y, z) = 0$. Отсюда $Z(V)V \subseteq Z(V)$. Но тогда $[Z(V), V, V] \subseteq V$ и, следовательно, $Z(V)$ — идеал ОТС V. Аналогично, если V — алгебра Сейгла, то из (27) при $x = n$ имеем равенство

$$J(nw, y, z) = J(n, y, z)w - J(n, yw, z) - J(n, y, zw) = 0$$

и, следовательно, $Z(V)$ — идеал ОТС V. Лемма доказана.

Тройная система называется *антикоммутативной*, если ее трилинейная операция кососимметрична.

Пусть L — антикоммутативная тройная система. Линейное подпространство I пространства L называется *идеалом* системы L, если $[i, y, z] \in I$ для любых $i \in I$, y, $z \in L$. Известно [12], что идеалы системы L (и только они) являются ядрами гомоморфизмов.

Система L называется *простой*, если $\dim L > 1$ и в ней нет идеалов, отличных от 0 и L.

Аннулятором системы L назовем подпространство

$$\operatorname{Ann} L = \{n \in L;\ [n, L, L] = 0\}.$$

Из определения следует, что $\operatorname{Ann} L$ является идеалом L.

Пусть A — антикоммутативная алгебра над полем Φ. На линейном пространстве A введем производную тернарную операцию, положив $\langle x, y, z\rangle \overset{\text{def}}{=} J(x, y, z)$ для любых x, y, $z \in A$. Поскольку в любой антикоммутативной алгебре якобиан является функцией, линейной по каждому аргументу и кососимметрической, то операция $\langle x, y, z\rangle$ трилинейна и кососимметрична. Следовательно, на пространстве A мы определили антикоммутативную тройную систему, которую будем обозначать через $L(A)$ и называть *ассоциированной* (*однородной*) *тройной системой алгебры* A.

Если A — алгебра Ли, то в силу тождества Якоби 3-линейная операция в $L(A)$ нулевая. Поэтому в дальнейшем при изучении связи алгебры A с ее ассоциированной системой $L(A)$ будем предполагать, что A нелиева.

Теорема 2. *Пусть V — однородная общая лиева тройная система над полем Φ характеристики, отличной от 2 и 3. Если V не является алгеброй Ли, то она проста тогда и только тогда, когда проста ее ассоциированная тройная система $L(V)$.*

Доказательство. Как было уже отмечено в доказательстве леммы 4, в случае однородности V линейное подпространство I является идеалом ОТС V, если $IV \subseteq V$. Обратно по определению всякий идеал ОТС V является идеалом антикоммутативной алгебры V. Поэтому однородная ОТС V проста тогда и только тогда, когда она проста как антикоммутативная алгебра.

Пусть система $L(V)$ проста. Если I — идеал алгебры V, то $J(I, V, V) \subseteq I$ и по определению тернарной операции в $L(V)$ имеем включение $\langle I, L(V), L(V)\rangle \subseteq I$, т. е. подпространство I является идеалом системы $L(V)$. Поэтому, если $I \neq 0$, то в силу простоты системы $L(V)$ $I = L(V)$. Поскольку пространства алгебры V и системы $L(V)$ совпадают, то $I = V$. Следовательно, алгебра V также проста.

Пусть теперь алгебра V проста. В силу (29), либо $Z(V) = V$ и тогда V — алгебра Ли, что противоречит условию теоремы, либо $J(V) = V$. Но тогда по лемме 4 $J(V, V, V) = V$. Пусть I — произвольный ненулевой идеал системы $L(V)$. Тогда $\langle I, L(V), L(V)\rangle \subseteq I$ и, следовательно, в алгебре V выполняется включение $J(I, V, V) \subseteq I$.

Теперь докажем включение

$$J(V, V, V)I \subseteq I. \tag{30}$$

Если V — алгебра Мальцева, то для любых $i \in I$, x, y, $z \in V$, в силу (19) и включения $J(I, V, V) \subseteq I$ имеем

$$2iJ(x, y, z) = J(i, x, yz) + J(i, y, zx) + J(i, z, xy) \in I.$$

Отсюда следует включение (30). Если V — алгебра Сейгла, то включение (30) следует из (9) и включения $J(I, V, V) \subseteq I$. Поэтому в силу теоремы 1 (30) выполняется в любой однородной ОТС V. Из (30) и (28) получим включение $J(V)I \subseteq I$. Но поскольку $J(V) = V$, то из последнего включения следует $VI \subseteq I$, т. е. I — идеал алгебры V. Так как $I \neq 0$, а алгебра V проста, то $I = V$ и, следовательно, $I = L(V)$, система $L(V)$ проста. Теорема доказана.

Следуя [7], антикоммутативную тройную систему L, удовлетворяющую тождеству

$$[[x, y, z], t, v]=[[x, t, v], y, z]+[x, [y, t, v], z]+[x, y, [z, t, v]], \quad (31)$$

будем называть 3-*лиевой алгеброй*.

Дифференцированием 3-лиевой алгебры L называется линейное отображение L, удовлетворяющее условию

$$[x, y, z]\mathscr{D}=[x\mathscr{D}, y, z]+[x, y\mathscr{D}, z]+[x, y, z\mathscr{D}]$$

для любых $x, y, z\in L$.

Отображение $R(y, z)\colon x\to[x, y, z]$ алгебры L в себя называется *правым умножением, определенным элементами y и z*.

Смысл тождества (31) заключается в том, что правые умножения алгебры L являются дифференцированиями.

Источником новых примеров 3-лиевых алгебр является

Предложение 1. *Если A — алгебра Сейгла над полем Φ характеристики, отличной от 2 и 3, то ассоциированная тройная система $L(A)$ алгебры A является 3-лиевой алгеброй.*

Доказательство. Из тождества (31) и определения системы $L(A)$ следует, что для доказательства предложения достаточно доказать в A тождество

$$J(J(x, y, z), t, v)=J(J(x, t, v), y, z)+J(x, J(y, t, v), z)+ \\ +J(x, y, J(z, t, v)). \quad (32)$$

Поскольку относительно операции коммутирования дифференцирования любой тройной системы образуют алгебру Ли, а согласно (27) отображения R_w: $x\to xw$ являются дифференцированиями системы $L(A)$, то операторы $\Delta(y, z)=[R_y, R_z]-R_{yz}$ $(x\to J(x, y, z))$ — также дифференцирования системы $L(A)$. Поэтому выполняется тождество (32). Предложение доказано.

Теорема 2 дает критерии простоты алгебр Мальцева и алгебр Сейгла. В частности, из этой теоремы и предложения 1 вытекает

Следствие 1. *Нелиева алгебра Сейгла A над полем Φ характеристики, отличной от 2 и 3, проста тогда и только тогда, когда проста ее ассоциированная 3-лиева алгебра $L(A)$.*

В заключение сформулируем следующий вопрос о возможности получения всех 3-лиевых алгебр из алгебр Сейгла.

Существует ли для любой 3-лиевой алгебры B над полем Φ характеристики, отличной от 2 и 3, алгебра Сейгла A над Φ такая, что алгебра B изоморфно вкладывается в ассоциированную 3-лиеву алгебру $L(A)$ алгебры A?

§ 3. АЛГЕБРЫ $A(G, g, f)$ И КРИТЕРИЙ ИХ ПРОСТОТЫ

Здесь мы рассмотрим класс алгебр $A(G, g, f)$, который уже встречался в работах [9, 10]. Результаты этого параграфа будут использоваться в дальнейшем для получения примеров простых нелиевых антикоммутативных алгебр, ассоциированные тройные системы которых являются 3-лиевыми алгебрами. Заметим, что следствие 1 пока таких примеров не дает, поскольку не известно ни одного примера простых нелиевых алгебр Сейгла (даже бесконечномерных).

Пусть Φ — фиксированное поле, G — произвольная ненулевая абелева группа, g — аддитивное отображение G в Φ (гомоморфизм группы G в аддитивную группу Φ), f — знакопеременное биаддитивное отображение декартова квадрата $G\times G$ в Φ. Определим антикоммутативную алгебру $A(G, g, f)$ следующим образом. Рассмотрим линейное пространство A над Φ с базисом $W=\{e_a\}_{a\in G}$, пронумерованным посредством элементов G, и зададим на W умножение по формуле

$$e_a\cdot e_b=[f(a, b)+g(a-b)]\,e_{a+b}, \quad (33)$$

которое обычным образом распространим на все элементы A.

В дальнейшем через $\operatorname{Ker} f$ и $\operatorname{Ker} g$ будем обозначать соответственно ядра отображений f и g:

$$\operatorname{Ker} f = \{a \in G;\ f(a, G) = 0\}, \quad \operatorname{Ker} g = \{a \in G;\ g(a) = 0\}.$$

Пусть A — произвольная алгебра (тройная система) с некоторым фиксированным базисом U, $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$ — произвольный ненулевой элемент A, $\alpha_i \in \Phi$, $u_i \in U$. Если все α_i ненулевые, а все u_i различны, то число k назовем *длиной* $\lambda(x)$ *элемента* x.

Если $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_{a_i}$ — произвольный ненулевой элемент алгебры $A(G, g, f)$ длины k, то элементы $a_i \in G$ назовем *x-допустимыми*.

В доказательстве следующей леммы мы будем следовать Р. Блоку ([10, с. 614]).

Лемма 5. *Алгебра $A(G, g, f)$ характеристики $p \neq 2$ содержит собственный идеал, если выполняется одно из следующих условий*:

1) $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Ker} f \neq 0$;

2) *существует $a \in \operatorname{Ker} g$ такой, что $f(a, b) = 2g(b)$ для любого $b \in G$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Ker} f \neq 0$, a — фиксированный ненулевой элемент $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Ker} f$. Если a имеет конечный порядок n, то рассмотрим линейную оболочку $\mathfrak{N}_1$ элементов вида $v_b = \sum_{i=0}^{n-1} e_{b+ia}$, где b — произвольный элемент G. Для любого $c \in G$ в силу (33) имеем

$$v_b \cdot e_c = \sum_{i=0}^{n-1} e_{b+ia} \cdot e_c = \sum_{i=0}^{n-1} [f(b+ia, c) + g(b+ia-c)]\, e_{b+ia+c} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} [f(b, c) + g(b-c)]\, e_{(b+c)+ia} = [f(b, c) + g(b-c)] \sum_{i=0}^{n-1} e_{(b+c)+ia} =$$
$$= [f(b, c) + g(b-c)]\, v_{b+c} \in \mathfrak{N}_1.$$

Следовательно, $\mathfrak{N}_1$ — идеал алгебры $A(G, g, f)$. Докажем, что он является собственным. Если c — v_b-допустимый элемент, то по определению v_b, $c = b + ia$ для некоторого i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Отсюда следует, что $v_b = v_c$ для любого v_b-допустимого элемента c. Пусть $e_0 \in \mathfrak{N}_1$. Тогда имеется равенство $e_0 = \alpha_1 v_0 + \sum_{j=2}^{k} \alpha_j v_{b_j}$, где $\alpha_j \in \Phi$, $v_{b_j} \neq v_{b_i}$ при $j \neq i$, $i, j = 1, \ldots$ $\ldots, k$. Это равенство можно записать в виде $(1-\alpha_1) e_0 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_{ia} = \sum_{j=2}^{k} \alpha_j v_{b_j}$. Поскольку 0 не является v_{b_j}-допустимым для любого $j = 2, \ldots, k$, то все элементы ia, $0 \leqslant i \leqslant n-1$ также не являются v_{b_j}-допустимыми. Поэтому в силу линейной независимости элементов W все коэффициенты, стоящие в левой части последнего равенства, равны нулю, т. е. $1 - \alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = 0$; противоречие. Поэтому $e_0 \notin \mathfrak{N}_1$ и, следовательно, идеал $\mathfrak{N}_1$ собственный. Аналогично доказывается, что если a — элемент бесконечного порядка, то линейная оболочка $\mathfrak{N}_2$ элементов вида $w_b = e_b + e_{b+a}$, где b — произвольный элемент G, является собственным идеалом $A(G, g, f)$.

Если элемент $a \in G$ удовлетворяет условию 2), то рассмотрим линейную оболочку $\mathfrak{N}_3$ всех элементов e_b таких, что $b \neq a$. Докажем, что $\mathfrak{N}_3$ — собственный идеал алгебры $A(G, g, f)$. В силу (33) $e_b \cdot e_c = [f(b, c) + g(b-c)]\, e_{b+c}$ для любого $c \in G$. Если $b + c = a$, то $c = a - b$ и $f(b, c) + g(b-c) = f(b, a-b) + g(b-a+b) = -f(a, b) + 2g(b) = 0$. Следовательно, $e_b \cdot e_c = 0$. Поэтому $e_b \cdot e_c \in \mathfrak{N}_3$ для любого $c \in G$, $\mathfrak{N}_3$ — идеал алгебры $A(G, g, f)$. Поскольку $e_a \notin \mathfrak{R}_3$, то этот идеал собственный. Лемма доказана.

Если I — ненулевой идеал произвольной алгебры (тройной системы), то ненулевой элемент $x \in I$ минимальной длины $\lambda(x)$ будем называть *минимальным элементом* (идеала I).

В [10] был дан критерий простоты алгебры $A(G, g, f)$ при условии, что она является алгеброй Ли. Этот критерий обобщает следующая

Теорема 3. *Алгебра $A(G, g, f)$ над полем Φ характеристики $p \neq 2$ является простой тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Ker} f = 0$ *и не существует* $a \in \operatorname{Ker} g$ *такого, что*

$$f(a, b) = 2g(b) \tag{34}$$

для любого $b \in G$.

Доказательство. В одну сторону теорема уже доказана в силу леммы 3. Пусть теперь f и g удовлетворяют сформулированным условиям, и предположим, что алгебра $A = A(G, g, f)$ не проста. Приведем это предположение к противоречию. Предварительно заметим, что $g \neq 0$, иначе элемент $a = 0$ удовлетворяет условию (34). Обозначим $\operatorname{Ker} g = G_0$, $G_1 = G \backslash G_0$. Пусть I — ненулевой идеал алгебры A, $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i e_{a_i}$ — произвольный минимальный элемент I, $\alpha_i \neq 0$, $\lambda(x) = k$. Если $k = 1$, то $e_a \in I$ для некоторого $a \in G$. Тогда также $e_a \cdot e_{-a} = 2g(a) e_0 \in I$ и либо $e_0 \in I$, либо $g(a) = 0$. В первом случае имеем $e_b \cdot e_0 = g(b) e_b \in I$, откуда $e_b \in I$ для любого $b \in G_1$. Так как $I \neq A$, то найдется $a' \in G_0$ такой, что $e_{a'} \notin I$ Но для любого $b \in G_1$ имеем

$$e_{a'-b} \cdot e_b = [f(a', b) - 2g(b)]\, e_{a'} \in I.$$

Следовательно, $f(a', b) = 2g(b)$. Далее, $f(a', b + G_0) = 2g(b)$, откуда $f(a', G_0) = 0$. Следовательно, $f(a', b) = 2g(b)$ для всех $b \in G$, что противоречит нашим предположениям.

Во втором случае $a \in G_0$ и тем же свойством обладают все элементы $c \in G$, для которых $e_c \in I$. Если $b \in G_1$, то $a + b \in G_1$ и $e_a \cdot e_b = [f(a, b) - g(b)]\, e_{a+b} \in I$, откуда $f(a, b) = g(b)$ для всех $b \in G_1$, а значит, и для всех $b \in G$. Но тогда элемент $a' = 2a$ удовлетворяет равенству $f(a', b) = 2g(b)$; противоречие.

Пусть теперь $k > 1$. Покажем, что $x \in I$ можно выбрать так, что один из x-допустимых элементов a_i, скажем a_1, принадлежит G_1. В самом деле, в противном случае $a_i \in G_0$ для всех $i = 1, \ldots, k$ и из $x \cdot e_b = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i [f(a_i, b) - g(b)]\, e_{a_i+b} \in I$ следует, что $f(a_i, b) = g(b)$ для любого $b \in G_1$. Как и выше, отсюда следует, что $f(2a_i, b) = 2g(b)$ для всех $b \in G$.

Итак, без ограничения общности $a_1 \in G_1$. Тогда $x \cdot e_{-a_1} = 2\alpha_1 g(a_1) e_0 + \sum\limits_{i=2}^{k} [-f(a_i, a_1) + g(a_i + a_1)]\, e_{a_i - a_1} \in I$, откуда следует, что I содержит минимальный элемент x_0 вида $x_0 = e_0 + \sum\limits_{i=2}^{k} \beta_i e_{a_i} (a_i \neq 0,\ i = 2, \ldots, k)$. Так как $x_0 \cdot e_0 = \sum\limits_{i=2}^{k} \beta_i g(a_i) e_{a_i} \in I$, то $g(a_i) = 0$, $a_i \in G_0$ $(i = 2, \ldots, k)$. Аналогично для любого $a \in G_0$ имеем $x_0 \cdot e_a = \sum\limits_{i=2}^{k} \beta_i f(a_i, a)\, e_{a_i + a} \in I$, откуда $f(a_i, a) = 0$.

Если $b \in G_1$, то $(x_0 \cdot e_b) \cdot e_{-b} = -2[g(b)]^2 e_0 + \sum\limits_{i=2}^{k} \beta_i [f(a_i, b) - g(b)] \times$

$\times[-f(a_i, b)+2g(b)]\, e_{a_i}\in I, (x_0\cdot e_b)\cdot e_{-b}+2[g(b)]^2x_0\in I$, откуда $-[f(a_i, b)-$ $-g(b)][f(a_i, b)-2g(b)]+2[g(b)]^2=0$, или

$$f(a_i, b)[f(a_i, b)-3g(b)]=0, \quad i=2, \ldots, k. \qquad (35)$$

С другой стороны,

$$(x_0\cdot e_b)\cdot e_b=\sum_{i=2}^{k}\beta_i\,[f(a_i, b)-g(b)]\,f(a_i, b)\,e_{a_i+2b}\in I,$$

откуда $f(a_i, b)[f(a_i, b)-g(b)]=0$. Сравнивая это равенство с (35), получим $f(a_i, b)=0$ для $b\in G_1$. Но тогда $f(a_i, b)=0$ для всех $b\in G$, $a_i\in$ $\in\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Ker} g$. Теорема доказана.

Пусть U — произвольная антикоммутативная алгебра над полем Φ, $\operatorname{End} U$ — алгебра эндоморфизмов (линейных преобразований) пространства U, R_x — оператор правого умножения на $x\in U$, R_x: $y\to yx$ для любого $y\in U$. *Алгеброй правых умножений* назовем подалгебру $R(U)$ алгебры $\operatorname{End} U$, порожденную тождественным эндоморфизмом и всеми R_x, $x\in U$. *Центроидом* алгебры U назовем централизатор $\Gamma(U)$ алгебры $R(U)$ в алгебре $\operatorname{End} U$. По определению $xy\gamma=x\gamma y=x(y\gamma)$ для любых $\gamma\in\Gamma(A)$, x, $y\in U$. Как обычно, будем считать, что $\Phi\subseteq\Gamma(A)$ (т. е. Φ отождествляется со своим образом при вложении в $\Gamma(A)$). Алгебра U называется *центральной*, если $\Gamma(A)=\Phi$.

Теорема 4. *Любая простая алгебра $A(G, g, f)$ над полем Φ характеристики $p\neq 2$ является центральной.*

Доказательство. Пусть $\Gamma(A)$ — центроид простой алгебры $A=A(G, g, f)$, γ — фиксированный ненулевой элемент $\Gamma(A)$. Тогда элемент $e_0\gamma$ можно представить в виде $e_0\gamma=\sum_{i=1}^{k}\alpha_ie_{a_i}$, где все $a_i\in G$ различны, а все α_i — ненулевые элементы Φ. В силу (33) имеем равенство

$$e_0\gamma\cdot e_0=\sum_{i=1}^{k}\alpha_ie_{a_i}\cdot e_0=\sum_{i=1}^{k}\alpha_ig(a_i)\,e_{a_i}. \qquad (36)$$

С другой стороны, по определению γ, $e_0\gamma\cdot e_0=e_0^2\gamma=0$. Поэтому $\sum_{i=1}^{k}\alpha_ig(a_i)e_{a_i}=0$, $\alpha_ig(a_i)=0$. Поскольку все α_i ненулевые, то $g(a_i)=0$, т. е. $a_i\in\operatorname{Ker} g$ для любого $i=1, \ldots, k$.

Пусть b — произвольный элемент G. Вычислим элемент $x=e_0\gamma\cdot e_b$ двумя способами. С одной стороны, в силу (33), учитывая, что все $a_i\in$ $\in\operatorname{Ker} g$, получим равенство

$$x=e_0\gamma\cdot e_b\cdot e_b=\sum_{i=1}^{k}\alpha_ie_{a_i}\cdot e_b\cdot e_b=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\,[f(a_i, b)+g(a_i-b)]\,e_{a_i+b}\cdot e_b=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\,[f(a_i, b)+g(a_i-b)]\,[f(a_i+b, b)+g(a_i)]\,e_{a_i+2b}=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\,[f(a_i, b)-g(b)]\,f(a_i, b)\,e_{a_i+2b},$$

а с другой стороны, по определению γ, $x=e_0\cdot e_b\cdot e_b\gamma=-g(b)e_b\cdot e_b\gamma=0$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\,[f(a_i, b)-g(b)]\,f(a_i, b)\,e_{a_i+2b}=0,$$

и, поскольку все элементы a_i+2b различны, а все $\alpha_i\neq 0$, то для любого

$e_0\gamma$-допустимого a_i выполняется равенство

$$[f(a_i,\ b)-g(b)]f(a_i,\ b)=0. \tag{37}$$

Положив $\eta(a_i,\ b)=[f(a_i,\ b)-g(b)]f(a_i,\ b)$, в силу аддитивности g, биаддитивности f и последнего равенства для любого $b'\in G$ имеем равенство

$$\begin{aligned}&[f(a_i,\ b')-g(b')]f(a_i,\ b)+[f(a_i,\ b)-g(b)]f(a_i,\ b')=\\&=\eta(a_i,\ b+b')-\eta(a_i,\ b)-\eta(a_i,\ b')=0.\end{aligned} \tag{38}$$

Пусть существует $e_0\gamma$-допустимый $a_i\neq 0$. Тогда найдется $b\in G$ такой, что $f(a_i,\ b)\neq 0$ (в противном случае $a_i\in \operatorname{Ker} g\cap \operatorname{Ker} f$ и по теореме 3 $a_i=0$). Поэтому из равенства $[f(a_i,\ b)-g(b)]f(a_i,\ b)=0$ следует равенство $f(a_i,\ b)-g(b)=0$. Отсюда и из (38) имеем $[f(a_i,\ b')-g(b')]\times\times f(a_i,\ b)=0$, и поскольку $f(a_i,\ b)\neq 0$, то $f(a_i,\ b')-g(b')=0$, $f(a_i,\ b')==g(b')$. Но тогда элемент $a_i'=2a_i$ удовлетворяет условию (34), что по теореме 3 противоречит простоте. Поэтому ненулевых a_i не существует и, следовательно, для любого $\gamma\in\Gamma(A)$ найдется $\alpha\in\Phi$ такое, что $e_0\gamma==\alpha e_0$. Тогда для любого $b\in G\backslash\operatorname{Ker} g$ имеем $e_0\gamma\cdot e_b=\alpha e_0\cdot e_b=-\alpha g(b)e_b$. С другой стороны, $e_0\gamma\cdot e_b=e_0\cdot e_b\gamma=-g(b)e_b\gamma$. Поскольку $g(b)\neq 0$, то из этих равенств следует $e_b\gamma=\alpha e_b$. Отсюда, в частности, следует равенство $e_{b+c}\gamma=\alpha e_{b+c}$ для любого $c\in\operatorname{Ker} g$. Но тогда $e_{b+c}\gamma\cdot e_{-b}=\alpha e_{b+c}\cdot e_{-b}==\alpha[-f(c,\ b)+2g(b)]e_c$, а с другой стороны, $e_{b+c}\gamma\cdot e_{-b}=e_{b+c}\cdot e_{-b}\gamma==[-f(c,\ b)+2g(b)]e_c\gamma$. Поскольку алгебра A простая, то по теореме 3 найдется $b\in G$ такой, что $-f(c,\ b)+2g(b)\neq 0$. Поэтому из последних равенств имеем $e_c\gamma=\alpha e_c$. Итак, для любого $\gamma\in\Gamma(A)$ найдется $\alpha\in\Phi$ такое, что $e_b\gamma=\alpha e_b$ для любого $b\in G$. Следовательно, $\Gamma(A)=\Phi$ и алгебра A центральна. Теорема доказана.

Используя (33) и знакопеременность функции f, вычислим якобиан произвольных элементов $e_a,\ e_b,\ e_c\in W$:

$$J(e_a,\ e_b,\ e_c)=[f(a,\ b)g(c)+f(c,\ a)g(b)+f(b,\ c)g(a)]e_{a+b+c}. \tag{39}$$

Хотя критерий лиевости алгебры $A(G,\ g,\ t)$ при $g\neq 0$ известен (см., например, [10]), мы приведем его доказательство в целях замкнутости изложения.

Лемма 6. *Если g — ненулевое отображение, то алгебра $A(G,\ g,\ f)$ является алгеброй Ли тогда и только тогда, когда существует аддитивное отображение h группы G в Φ такое, что*

$$f(a,\ b)=h(a)g(b)-h(b)g(a) \tag{40}$$

для любых $a,\ b\in G$.

Доказательство. В силу (39) алгебра $A(G,\ g,\ f)$ лиева тогда и только тогда, когда для любых $a,\ b\in G$ выполняется равенство

$$f(a,\ b)g(c)+f(c,\ a)g(b)+f(b,\ c)g(a)=0. \tag{41}$$

Равенство (41) легко следует из (40). Докажем обратное. Пусть выполняется (41). Поскольку отображение g ненулевое, то существует $c\in G$ такой, что $\delta=g(c)\neq 0$. Но тогда в силу (41) и знакопеременности отображения f имеем равенство

$$f(a,\ b)=\frac{f(a,\ c)}{\delta}\,g(b)-\frac{f(b,\ c)}{\delta}\,g(a).$$

Следовательно, положив $h(a)=f(a,\ c)\delta^{-1}$, для любого $a\in G$ получим равенство (40). Аддитивность отображения h следует из биаддитивности f. Лемма доказана.

§ 4. АЛГЕБРЫ $A(G, h_1, h_2, h_3)$ И ИХ ПРОСТОТА

По определению антикоммутативная алгебра A удовлетворяет тождеству (32) тогда и только тогда, когда ее ассоциированная тройная система $L(A)$ является 3-лиевой алгеброй.

Антикоммутативные алгебры, удовлетворяющие тождеству (32), будем называть J-алгебрами.

До сих пор известные примеры простых 3-лиевых алгебр исчерпывались 4-мерными алгебрами [7]. В следующем параграфе мы построим новые примеры простых 3-лиевых алгебр, используя класс J-алгебр (более широкий, чем класс алгебр Сейгла). Для этого в данном параграфе из класса алгебр $A(G, g, f)$ выделим некоторый подкласс алгебр, которые являются J-алгебрами.

Введем вспомогательные функции:

$$\eta(a, b, c)=f(a, b)g(c)+f(c, a)g(b)+f(b, c)g(a),$$
$$\mu(a, b, c, x, y)=\eta(a, x, y)\eta(x, b, c)+$$
$$+\eta(c, x, y)\eta(x, a, b)+\eta(b, x, y)\eta(x, c, a). \qquad (42)$$

Легко видеть, что функции η и μ знакопеременны и аддитивны относительно a, b и c.

Введем новую функцию

$$\nu(a, b, c, x)=f(a, b)f(c, x)+f(c, a)f(b, x)+f(b, c)f(a, x).$$

Непосредственными вычислениями проверяется тождество

$$\mu(a, b, c, x, y)=g(x)[\nu(c, x, b, y)g(a)+\nu(a, x, c, y)g(b)+$$
$$+\nu(b, x, a, y)g(c)+\nu(c, b, a, y)g(x)+\nu(b, c, a, x)g(y)]. \qquad (43)$$

Лемма 7. *Алгебра $A(G, g, f)$ является J-алгеброй тогда и только тогда, когда выполняются тождества*

$$\mu(a, b, c, x, y)=0. \qquad (44)$$

Доказательство. По определению функции η, равенство (39) можно записать в виде

$$J(e_a, e_b, e_c)=\eta(a, b, c)e_{a+b+c}. \qquad (45)$$

Отсюда, из знакопеременности и аддитивности функции η и (42) получаем равенство

$$-J(J(e_a, e_b, e_c), e_x, e_y)+J(J(e_a, e_x, e_y), e_b, e_c)+$$
$$+J(J(e_c, e_x, e_y), e_a, e_b)+J(J(e_b, e_x, e_y), e_c, e_a)=$$
$$=-\eta(a, b, c)\eta(a+b+c, x, y)e_{a+b+c+x+y}+$$
$$+\eta(a, x, y)\eta(a+x+y, b, c)e_{a+x+y+b+c}+$$
$$+\eta(c, x, y)\eta(c+x+y, a, b)e_{c+x+y+a+b}+$$
$$+\eta(b, x, y)\eta(b+x+y, c, a)e_{b+x+y+c+a}=$$
$$=[-\eta(a, b, c)\eta(a+b+c, x, y)+\eta(a, x, y)\eta(a+x+y, b, c)+$$
$$+\eta(c, x, y)\eta(c+x+y, a, b)+$$
$$+\eta(b, x, y)\eta(b+x+y, c, a)]e_{a+b+c+x+y}=$$
$$=[\eta(a, x, y)\eta(x, b, c)+\eta(c, x, y)\eta(x, a, b)+\eta(b, x, y)\eta(x, c, a)-$$
$$-\eta(a, y, x)\eta(y, b, c)-\eta(c, y, x)\eta(y, a, b)-$$
$$-\eta(b, y, x)\eta(y, c, a)]e_{a+b+c+x+y}=$$
$$=[\mu(a, b, c, x, y)-\mu(a, b, c, y, x)]e_{a+b+c+x+y}.$$

Алгебра $A(G, g, f)$ удовлетворяет тождеству (32) тогда и только тогда, когда левая часть последнего равенства равна нулю. Поэтому тождество (32) эквивалентно тождеству

$$\mu(a, b, c, x, y)-\mu(a, b, c, y, x)=0. \qquad (46)$$

Тождество (46) вытекает из (44). Поэтому для доказательства леммы нам осталось доказать, что из (44) следует тождество (46). По определению μ имеем $\mu(a, b, c, -x, y)=\mu(a, b, c, x, y)$ и $\mu(a, b, c, y, -x)=$ $=-\mu(a, b, c, y, x)$. Поэтому, заменив x на $-x$ в (46), получим тождество

$$\mu(a, b, c, x, y)+\mu(a, b, c, y, x)=0.$$

Сложив последнее тождество с (46), а затем сократив на 2, получим тождество (44). Лемма доказана.

Если существуют аддитивные отображения h_2 и h_3 группы G в Φ такие, что

$$f(a, b)=h_2(a)h_3(b)-h_3(a)h_2(b) \tag{47}$$

для любых a, $b\in G$, то, положив $g=h_1$, алгебру $A(G, g, f)$ будем обозначать через $A(G, h_1, h_2, h_3)$.

Предложение 2. *Алгебра $A(G, h_1, h_2, h_3)$ над полем Φ характеристики, отличной от 2 и 3, является J-алгеброй.*

Доказательство. Ввиду леммы 7 достаточно доказать, что если отображение f удовлетворяет (47), то выполняется тождество (44). Непосредственными вычислениями проверяется, что из (47) следует тождество $\nu(a, b, c, x)=0$. Отсюда и из (43) вытекает (44). Предложение доказано.

Если f удовлетворяет (47), то при $g=h_1$ функция η принимает вид

$$\eta(a,b,c)=h_1(a)f(b,c)-h_1(b)f(a,c)+h_1(c)f(a,b)=$$

$$=h_1(a)\begin{vmatrix} h_2(b) & h_2(c)\\ h_3(b) & h_3(c)\end{vmatrix}-h_1(b)\begin{vmatrix} h_2(a) & h_2(c)\\ h_3(a) & h_3(c)\end{vmatrix}+h_1(c)\begin{vmatrix} h_2(a) & h_2(b)\\ h_3(a) & h_3(b)\end{vmatrix}=\Delta(a,b,c), \tag{48}$$

где

$$\Delta(a,b,c)=\begin{vmatrix} h_1(a) & h_1(b) & h_1(c)\\ h_2(a) & h_2(b) & h_2(c)\\ h_3(a) & h_3(b) & h_3(c)\end{vmatrix}.$$

В дальнейшем через $\mathfrak{N}$ будем обозначать $\operatorname{Ker} h_1\cap\operatorname{Ker} h_2\cap\operatorname{Ker} h_3$.

Лемма 8. *Если отображения h_1, h_2 и h_3 ненулевые, то следующие условия эквивалентны:*

1) *существует $d\notin\mathfrak{N}$ такой, что $\Delta(d, G, G)=0$;*
2) *отображения h_1, h_2 и h_3 линейно зависимы;*
3) $\Delta(G, G, G)=0$.

Доказательство. Пусть d удовлетворяет условию 1. Обозначим через $\Delta_i(a, b)$, $i=1, 2, 3$, минор, полученный из $\Delta(a, b, c)$ вычеркиванием i-й строки и последнего столбца. Поскольку $d\notin\mathfrak{N}$, то $h_i(d)\neq 0$ для некоторого i. Для определенности можно положить $h_1(d)\neq 0$. Пусть $\Delta_3(d, G)=0$. Тогда для любого $y\in G$ имеем равенство

$$\Delta_3(d, y)=h_1(d)h_2(y)-h_2(d)h_1(y)=0.$$

Поскольку $h_1(d)\neq 0$, то отсюда вытекает линейная зависимость отображений h_1 и h_2. Следовательно, выполняется условие 2. Пусть теперь $\Delta_3(d, G)\neq 0$. Тогда найдется $y\in G$ такой, что $\Delta_3(d, y)\neq 0$. Из условия 1 следует, что для любого $z\in G$ имеем равенство $\Delta(d, y, z)=0$. Разложив этот определитель по последнему столбцу, получим равенство

$$\Delta_1(d, y)h_1(z)-\Delta_2(d, y)h_2(z)+\Delta_3(d, y)h_3(z)=0.$$

Поскольку $\Delta_3(d, y)\neq 0$, то отсюда следует линейная зависимость отображений h_1, h_2 и h_3 и снова выполняется условие 2. Следовательно, из 1 вытекает 2.

В силу элементарных свойств определителя из 2 следует 3.

Пусть выполняется 3. Поскольку отображения h_1, h_2 и h_3 ненулевые, то $G\neq\mathfrak{N}$, т. е. существует $d\notin\mathfrak{N}$, который в силу 3 удовлетворяет равенству $\Delta(d, G, G)=0$. Поэтому из 3 следует 1. Лемма доказана.

Поскольку в силу (48) тождество $\eta(a, b, c)=0$ эквивалентно тождеству $\Delta(a, b, c)=0$, то из (45) и леммы 8, в частности, вытекает следующий критерий лиевости алгебры $A(G, h_1, h_2, h_3)$.

Лемма 9. *Алгебра $A(G, h_1, h_2, h_3)$ является алгеброй Ли тогда и только тогда, когда отображения h_1, h_2 и h_3 линейно зависимы.*

Следующая теорема дает примеры простых нелиевых J-алгебр.

Теорема 5. *J-алгебра $A(G, h_1, h_2, h_3)$ над полем Φ характеристики, отличной от 2 и 3, является простой нелиевой алгеброй тогда и только тогда, когда отображения h_1, h_2 и h_3 линейно независимы и $\operatorname{Ker} h_1 \cap \operatorname{Ker} h_2 \cap \operatorname{Ker} h_3 = 0$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}=\operatorname{Ker} h_1 \cap \operatorname{Ker} h_2 \cap \operatorname{Ker} h_3$. По лемме 9 нелиевость алгебры $A=A(G, h_1, h_2, h_3)$ эквивалентна линейной независимости отображений h_1, h_2 и h_3. Докажем, что нелиева алгебра A проста тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N}=0$.

Если $\mathfrak{N}\neq 0$, то для любого ненулевого элемента $a\in\mathfrak{N}$ и любого $b\in G$, в частности, имеем $f(a, b)=h_2(a)h_3(b)-h_3(a)h_2(b)=0$. Следовательно, $a\in\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Ker} h_1$, $\operatorname{Ker} f\cap\operatorname{Ker} h_1\neq 0$ и по лемме 5 алгебра A не является простой. Поэтому, если A проста, то $\mathfrak{N}=0$. Докажем обратное.

Пусть $\mathfrak{N}=0$. Докажем, что алгебра A удовлетворяет условиям теоремы 3. Если a — произвольный фиксированный элемент $\operatorname{Ker} h_1\cap\operatorname{Ker} f$, то для любого $b\in G$ имеем равенство $f(a, b)=h_2(a)h_3(b)-h_3(a)h_2(b)=0$. Поскольку отображения h_2 и h_3 линейно независимы, то из последнего равенства следует $h_2(a)=0$, $h_3(a)=0$. Поэтому $a\in\operatorname{Ker} h_2\cap\operatorname{Ker} h_3$. Следовательно, $a\in\mathfrak{N}=0$ и в силу выбора a $\operatorname{Ker} h_1\cap\operatorname{Ker} f=0$. Пусть теперь $a\in\operatorname{Ker} h_1$ такой, что для любого $b\in G$ выполняется равенство $f(a, b)=2h_1(b)$. Тогда $h_2(a)h_3(b)-h_3(a)h_2(b)=2h_1(b)$ и, следовательно, отображения h_1, h_2 и h_3 линейно зависимы. Это в силу леммы 9 противоречит нелиевости алгебры A. Поэтому не существует элемента $a\in\operatorname{Ker} h_1$, удовлетворяющего равенству $f(a, b)=2h_1(b)$. Итак, алгебра A удовлетворяет условиям теоремы 3 и, следовательно, проста. Теорема доказана.

Рассмотрим конкретные примеры простых J-алгебр.

Пример 1. Пусть U — 3-мерное пространство над Φ; a_1, a_2, a_3 — фиксированный базис U; h_1, h_2, h_3 — функционалы, которые для любого $a=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3\in U$, $\alpha_i\in\Phi$, определяются равенствами $h_i(a)=\alpha_i$, $i=1, 2, 3$. Тогда для любого $b=\beta_1 a_1+\beta_2 a_2+\beta_3 a_3\in U$, $\beta_i\in\Phi$, имеем $f(a, b)=h_2(a)h_3(b)-h_3(a)h_2(b)=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2$. Следовательно, умножение базисных векторов алгебры $A(U, h_1, h_2, h_3)$ над Φ задается формулой

$$e_a\cdot e_b=(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2+\alpha_1-\beta_1)e_{a+b}. \tag{49}$$

Очевидно, что отображения h_1, h_2 и h_3 линейно независимы над Φ и $\operatorname{Ker} h_1\cap\operatorname{Ker} h_2\cap\operatorname{Ker} h_3=0$. По теоремам 5 и 4, алгебра $A(U, h_1, h_2, h_3)$ является центральной простой нелиевой J-алгеброй.

Пример 2. Если Φ — поле характеристики $p>0$, то, заменив в предыдущем примере пространство U на 3-мерное пространство U_p над простым подполем Φ_p поля Φ, а отображения h_1, h_2 и h_3 определив таким же образом, как и в примере 1, также получим центральную простую нелиеву J-алгебру $A(U_p, h_1, h_2, h_3)$, которая задается таблицей умножения (49) своих базисных элементов. Эта алгебра имеет размерность p^3 над Φ.

Из теоремы 5 следует, что все простые нелиевы J-алгебры $A(G, h_1, h_2, h_3)$ над полем Φ характеристики 0 бесконечномерны над Φ.

§ 5. ПРОСТЫЕ 3-ЛИЕВЫ АЛГЕБРЫ $L(G, h_1, h_2, h_3)$

Перейдем к построению примеров простых 3-лиевых алгебр. Пусть $L(G, h_1, h_2, h_3)$ — ассоциированная тройная система алгебры $A(G, h_1, h_2, h_3)$. Поскольку по предложению 2 $A(G, h_1, h_2, h_3)$ — J-алгебра, то $L(G, h_1, h_2, h_3)$ — 3-лиева алгебра. В силу (45) и (48) алгебра $L(G, h_1, h_2, h_3)$ является линейным пространством над Φ с базисом

$W=\{e_a\}_{a\in G}$ и 3-линейной операцией, определенной на W по формуле:

$$[e_a, e_b, e_c]=\Delta(a, b, c)e_{a+b+c}. \qquad (50)$$

Заметим, что лиев центр $Z(A)$ произвольной J-алгебры (хотя может и не быть идеалом A) по определению совпадает с аннулятором $\operatorname{Ann} L(A)$ ее ассоциированной 3-лиевой алгебры $L(A)$, который является идеалом $L(A)$. Пусть $A=A(G, h_1, h_2, h_3)$ — простая J-алгебра. В силу (45) $J(e_0, e_b, e_c)=0$ для любых $b, c\in G$, $e_0\in Z(A)$ и, следовательно, $Z(A)\neq 0$. Но тогда $\operatorname{Ann} L(A)\neq 0$ и, следовательно, алгебра $L(A)=L(G, h_1, h_2, h_3)$ не является простой. Поэтому для J-алгебр не верен аналог критерия простоты алгебр Сейгла, доказанного в § 2. Но, как будет показано далее, алгебра $L(A)$ содержит некоторую простую подалгебру.

Пусть $\tilde{W}=\{e_a\}_{a\in G\setminus 0}$, $\tilde{L}$ — подпространство $L=L(G, h_1, h_2, h_3)$, натянутое на элементы $\tilde{W}$. Из (50) и кососимметричности определителя легко следует, что $\tilde{L}$ — идеал алгебры L, $L=\tilde{L}\oplus\Phi\cdot e_0$ и, следовательно, $\tilde{L}\simeq L/\Phi\cdot e_0$.

Теорема 6. *Подалгебра $\tilde{L}$ 3-лиевой алгебры $L(G, h_1, h_2, h_3)$ над полем Φ характеристики, отличной от 2 и 3, с базисом $\{e_a\}_{a\in G\setminus 0}$ проста тогда и только тогда, когда отображения h_1, h_2 и h_3 линейно независимы и* $\operatorname{Ker} h_1\cap\operatorname{Ker} h_2\cap\operatorname{Ker} h_3=0$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что 3-линейная операция алгебры $\tilde{L}$ ненулевая тогда и только тогда, когда отображения h_1, h_2 и h_3 линейно независимы. Это следует из леммы 9 и того, что алгебра L является прямой суммой $\tilde{L}$ и одномерного идеала $\Phi\cdot e_0$.

В силу (50) из включения $a\in\mathfrak{N}\setminus 0$ следует включение $e_a\in\operatorname{Ann}\tilde{L}$. Поэтому, если алгебра $\tilde{L}$ проста, то $\mathfrak{N}=0$. Линейная независимость отображений h_1, h_2 и h_3 в этом случае следует из предыдущего замечания.

Пусть теперь отображения h_1, h_2 и h_3 линейно независимы и $\mathfrak{N}=0$. Докажем простоту алгебры $\tilde{L}$. Пусть I — ненулевой идеал алгебры $\tilde{L}$, $x=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i e_{a_i}$ — минимальный элемент идеала I.

Предположим, что $k>1$. В силу (50) для любых $a, b\in G$ имеем включение

$$y=[x, e_a, e_{-a+b}]=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\left[e_{a_i}, e_a, e_{-a+b}\right]=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\Delta(a_i, a, b)e_{a_i+b}\in I. \qquad (51)$$

Поскольку $\lambda(y)\leqslant\lambda(x)$, то либо $\lambda(y)<\lambda(x)$ и тогда в силу минимальности x, $y=0$, $\Delta(a_i, a, b)=0$ для любого $i=1, \ldots, k$, либо $\lambda(y)=\lambda(x)=k$ и тогда $\Delta(a_i, a, b)\neq 0$ для любого $i=1, \ldots, k$.

В силу (50) и (51) для любых $a, b, c\in G$ получим включение

$$z=[y, e_{-c}, e_{c-b}]=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\Delta(a_i, a, b)\left[e_{a_i+b}, e_{-c}, e_{c-b}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\Delta(a_i, a, b)\Delta(a_i, c, b)e_{a_i}\in I.$$

Отсюда

$$v=z-\Delta(a_1, a, b)\Delta(a_1, c, b)x=$$

$$=\sum_{i=2}^{k}\alpha_i\left[\Delta(a_i, a, b)\Delta(a_i, c, b)-\Delta(a_1, a, b)\Delta(a_1, c, b)\right]e_{a_i}\in I.$$

Поскольку $\lambda(v)<k$, то $v=0$ и, следовательно,

$$\Delta(a_i, a, b)\Delta(a_i, c, b)-\Delta(a_1, a, b)\Delta(a_1, c, b)=0.$$

Отсюда следуют равенства

$$\Delta(a_j, a, b)\Delta(a_j, c, b)=\Delta(a_i, a, b)\Delta(a_i, c, b) \qquad (52)$$

для любых $a, b, c \in G$, $i, j = 1, \ldots, k$. Из (52) при $c = a$ получим

$$[\Delta(a_j, a, b)]^2 = [\Delta(a_i, a, b)]^2. \qquad (53)$$

Зафиксируем произвольные неравные между собой индексы i и j, $i, j = 1, \ldots, k$. Если $\Delta(a_i, G, G) = 0$, то в силу линейной независимости отображений h_1, h_2 и h_3 и леммы 8 $a_i \in \mathfrak{R}$. Но поскольку $\mathfrak{R} = 0$, то $a_i = 0$, что противоречит включению $a_i \in G \backslash 0$. Поэтому $\Delta(a_i, G, G) \neq 0$. Пусть a, b — произвольные элементы из G такие, что $\Delta(a_i, a, b) \neq 0$ и, следовательно, $\Delta(a_j, a, b) \neq 0$. Из (53) следует равенство

$$\Delta(a_j, a, b) = \omega\Delta(a_i, a, b), \qquad (54)$$

где $\omega = \omega(a, b) \in \Phi$, $\omega^2 = 1$. Из (54) и (52) следует равенство

$$\omega\Delta(a_i, a, b)\Delta(a_j, c, b) = \Delta(a_i, a, b)\Delta(a_i, c, b).$$

Отсюда после сокращения на $\Delta(a_i, a, b)$ имеем равенство $\omega\Delta(a_j, c, b) = \Delta(a_i, c, b)$ или после умножения на ω (с учетом того, что $\omega^2 = 1$) — равенство

$$\Delta(a_j, c, b) = \omega\Delta(a_i, c, b) \qquad (55)$$

для любого $c \in G$. Докажем, что на самом деле ω не зависит от выбора элементов a и b, т. е. выполняется равенство

$$\Delta(a_j, c, d) = \omega\Delta(a_i, c, d) \qquad (56)$$

для любых $c, d \in G$.

Пусть d — произвольный элемент из G. Имеем два случая: 1) $\Delta(a_i, a, d) = 0$; 2) $\Delta(a_i, a, d) \neq 0$.

1) Поскольку $\Delta(a_i, a, b) \neq 0$, то $\Delta(a_i, a, b + d) \neq 0$. Поэтому, заменив в (55) b на $b + d$, получим равенство

$$\Delta(a_j, c, b+d) = \omega'\Delta(a_i, c, b+d), \quad \omega' \in \Phi, \quad (\omega')^2 = 1, \qquad (57)$$

для любого $c \in G$. Отсюда, в частности, следует $\Delta(a_j, a, b+d) = \omega'\Delta(a_i, a, b+d)$. Но тогда

$$\Delta(a_j, a, b) + \Delta(a_j, a, d) = \omega'\Delta(a_i, a, b) + \omega'\Delta(a_i, a, d). \qquad (58)$$

В силу минимальности x из равенства $\Delta(a_i, a, d) = 0$ вытекает равенство $\Delta(a_j, a, d) = 0$. Поэтому из (58) имеем $\Delta(a_j, a, b) = \omega'\Delta(a_i, a, b)$. Поскольку $\Delta(a_i, a, b) \neq 0$, то из (54) и последнего равенства следует, что $\omega' = \omega$. Но тогда из (57) получим

$$\Delta(a_j, c, b) + \Delta(a_j, c, d) = \omega\Delta(a_i, c, b) + \omega\Delta(a_i, c, d).$$

Отсюда и из (55) следует (56) для любого $c \in G$ и любого d, удовлетворяющего равенству $\Delta(a_i, a, d) = 0$.

2) Пусть $d \in G$ такой, что $\Delta(a_i, a, d) \neq 0$. Заменим в (52) a на d, b на a, c на b:

$$\Delta(a_j, d, a)\Delta(a_j, b, a) = \Delta(a_i, d, a)\Delta(a_i, b, a). \qquad (59)$$

В силу (54) и равенства $\omega^2 = 1$

$$\Delta(a_i, b, a) = \omega\Delta(a_j, b, a).$$

Отсюда и из (59) получим $\Delta(a_j, d, a)\Delta(a_j, b, a) = \omega\Delta(a_i, d, a)\Delta(a_j, b, a)$ или после сокращения на $\Delta(a_j, b, a)$ равенство $\Delta(a_j, d, a) = \omega\Delta(a_i, d, a)$. Следовательно,

$$\Delta(a_j, a, d) = \omega\Delta(a_i, a, d). \qquad (60)$$

Положим $b = d$ в (52):

$$\Delta(a_j, a, d)\Delta(a_j, c, d) = \Delta(a_i, a, d)\Delta(a_i, c, d).$$

Отсюда и из (60) следует равенство

$$\omega\Delta(a_i, a, d)\Delta(a_j, c, d) = \Delta(a_i, a, d)\Delta(a_i, c, d)$$

или после сокращения на $\Delta(a_i, a, d)$ и умножения на ω — равенство (56) для любого $c\in G$ и любого $d\in G$ такого, что $\Delta(a_i, a, d)\neq 0$.

Итак, равенство (56) выполняется для любых $c, d\in G$. Поскольку $\omega^2=1$, то $\omega=\pm 1$ и, следовательно, в силу аддитивности отображений h_1, h_2 и h_3, $\omega\Delta(a_i, c, d)=\Delta(\omega a_i, c, d)$. Но тогда в силу (56) $\Delta(a_j, c, d)=\Delta(\omega a_i, c, d)$, $\Delta(a_j-\omega a_i, c, d)=0$, $\Delta(a_j-\omega a_i, G, G)=0$ и по лемме 8 $a_j-\omega a_i\in\mathfrak{R}$. Поскольку $\mathfrak{R}=0$, то $a_j=\omega a_i$. Так как a_i и a_j различны, то из последнего равенства следует, что $\omega=-1$, $a_j=-a_i$. Но тогда $k=2$ и $a_2=-a_1$. Следовательно, любой минимальный элемент x идеала I имеет вид

$$x=\alpha_1 e_{a_1}+\alpha_2 e_{-a_1}. \tag{61}$$

В силу (50) для любых $a, b\in G\backslash 0$ имеем включение

$$y=[x, e_a, e_{-a+b}]=\alpha_1\Delta(a_1, a, b)e_{a_1+b}-\alpha_2\Delta(a_1, a, b)e_{-a_1+b}=$$
$$=\Delta(a_1, a, b)\left[\alpha_1 e_{a_1+b}-\alpha_2 e_{-a_1+b}\right]\in I.$$

Поскольку $\Delta(a_1, G, G)\neq 0$, то существуют элементы $a, b\in G$ такие, что $\Delta(a_1, a, b)\neq 0$. Тогда $y\neq 0$, $\lambda(y)=2$ и, следовательно, y также является минимальным элементом идеала I. Но тогда в силу (61) y имеет вид $y=\alpha_1' e_{a_1'}+\alpha_2' e_{-a_1'}$, где $a_1'=a_1+b$, $-a_1'=-a_1+b$, $\alpha_1'\neq 0$, $\alpha_2'\neq 0$.

Отсюда $a_1+b=-(-a_1+b)$, $2b=0$, $b=0$, что противоречит предположению: $\Delta(a_1, a, b)\neq 0$. Следовательно, $k=1$ и существует $a\in G\backslash 0$ такой, что $e_a\in I$. Тогда для любых $b, c\in G\backslash 0$ имеем

$$x=[e_a, e_{b-a-c}, e_c]=\Delta(a, b, c)e_b\in I.$$

Пусть существует $b\in G\backslash 0$ такой, что $e_b\notin I$. Тогда из последнего включения следует равенство $\Delta(a, b, c)=0$. Следовательно,

$$\Delta(a, b, G)=0. \tag{62}$$

Зафиксируем $z\in G$ такой, что $\Delta(a, z, G)\neq 0$ (такие элементы существуют в силу неравенства $\Delta(a, G, G)\neq 0$, которое, в свою очередь, следует из леммы 8 и равенства $\mathfrak{R}=0$). Положим

$$G_1=\{y\in G;\ \Delta(a, y, z)\neq 0\},\quad G_0=\{y\in G;\ \Delta(a, y, z)=0\}.$$

Тогда $G=G_1\cup G_0$ и в силу выбора элемента z имеем $G_1\neq\varnothing$.

Пусть y — произвольный элемент из G_1. В силу (62) $v=[e_a, e_{y+b}, e_z]=\Delta(a, y+b, z)e_{a+y+b+z}=[\Delta(a, y, z)+\Delta(a, b, z)]e_{a+y+b+z}=\Delta(a, y, z)e_{a+y+b+z}\in I$. Поскольку $\Delta(a, y, z)\neq 0$, то $e_{a+y+b+z}\in I$. Но тогда в силу (62) для любого $t\in G\backslash 0$ имеем включение $w=[e_{a+y+b+z}, e_{-a-y-z-t}, e_t]=\Delta(a+y+b+z, -a-y-z-t, t)e_b=[\Delta(a, b, t)-\Delta(b, y, t)-\Delta(b, z, t)]e_b=-[\Delta(b, y, t)+\Delta(b, z, t)]e_b\in I$. Поскольку $e_b\notin I$, то отсюда следует равенство

$$\Delta(b, y, t)+\Delta(b, z, t)=0 \tag{63}$$

для любых $t\in G\backslash 0$, $y\in G_1$. Так как $\Delta(a, -y, z)\neq 0$ и, следовательно, $-y\in G_1$, то мы можем в (63) заменить y на $-y$: $\Delta(b, -y, t)+\Delta(b, z, t)=0$. Но тогда $-\Delta(b, y, t)+\Delta(b, z, t)=0$. Отсюда и из (63) следует $\Delta(b, y, t)=0$. Поскольку это равенство выполняется и при $t=0$, то

$$\Delta(b, y, G)=0 \tag{64}$$

для любого $y\in G_1$.

Пусть теперь y' — произвольный элемент из G_0. Тогда $\Delta(a, y'+y, z)=\Delta(a, y', z)+\Delta(a, y, z)=\Delta(a, y, z)\neq 0$. Следовательно, $y'+y\in G_1$ и для любого $t\in G$ в силу (64) $\Delta(b, y'+y, t)=0$, $\Delta(b, y', t)+\Delta(b, y, t)=0$ и, поскольку $\Delta(b, y, t)=0$, то $\Delta(b, y', t)=0$. Но тогда $\Delta(b, y', G)=0$. Отсюда и из (64) следует равенство $\Delta(b, G, G)=0$. Поэтому по лемме 8 $b\in\mathfrak{R}$, и поскольку $\mathfrak{R}=0$, то $b=0$, что противоречит выбору элемента b. Поэтому $e_b \in I$ для любого $b \in G \setminus 0$ и, следовательно, $I = \tilde{L}$. Алгебра $\tilde{L}$ проста. Теорема доказана.

Пример 3. Пусть $A = A(U, h_1, h_2, h_3)$ — простая нелиева J-алгебра над полем Φ из примера 1, $L(A)$ — ее ассоциированная 3-лиева алгебра с базисом $\{e_a\}_{a \in U}$, 3-линейная операция которой на базисных элементах e_a, e_b и e_c задается формулой

$$[e_a, e_b, e_c] = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} e_{a+b+c}, \qquad (65)$$

где $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $c = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Тогда подалгебра $\tilde{L}$ алгебры $L(A)$ с базисом $\{e_a\}_{\in U \setminus 0}$ является простой 3-лиевой алгеброй над Φ (бесконечномерной, если поле Φ бесконечномерно и, в частности, если оно имеет характеристику 0).

Пример 4. Если $A_p = A(U_p, h_1, h_2, h_3)$ — простая J-алгебра над полем Φ характеристики $p > 0$ из примера 2, то подалгебра $\tilde{L}$ ее ассоциированной алгебры $L(A_p)$ является простой 3-лиевой алгеброй размерности $p^3 - 1$ над Φ, а ее умножение базисных элементов e_a, e_b и e_c задается формулой (65), где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \Phi_p$, $i = 1, 2, 3$.

Из теорем 5 и 6 непосредственно вытекает

Следствие 2. *Пусть $A = A(G, h_1, h_2, h_3)$ нелиева J-алгебра над полем Φ характеристики, отличной от 2 и 3. Подалгебра $\tilde{L}$ ее ассоциированной 3-лиевой алгебры $L(A)$ проста тогда и только тогда, когда проста алгебра A.*

В связи с последним утверждением возникает следующий вопрос. *Будут ли эквивалентны простота J-алгебры A над полем Φ характеристики, отличной от 2 и 3, и простота фактор-алгебры $\tilde{L}$ ее ассоциированной алгебры $L(A)$ по аннулятору* $\mathrm{Ann}\, L(A)$?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Yamaguti K.** On the Lie triple sistem and its generalization // J. Sci. Hirosima Univ.— 1958.— Ser. A, V. 21, N 3.— P. 155—160.
2. **Лоос О.** Симметрические пространства.— М.: Наука, 1985.
3. **Феденко А.** Пространства с симметриями.— Минск: Изд-во БГУ, 1977.
4. **Yamaguti K.** On the theory of Malcev algebras // Kumamoto J. Sci.— 1963.— V. 6, N 1.— P. 9—45.
5. **Sagle A. A.** On anti-commutative algebras and general Lie tripl systems // Pacif. J. Math.— 1965.— V. 15, N 1.— P. 281—291.
6. **Yamaguti K.** Note on Malcev algebras // Kumamoto J. Sci.— 1962.— V. 5, N 4.— P. 203—207.
7. **Филиппов В. Т.** n-Лиевы алгебры // Сиб. мат. журн.— 1985.— Т. 26, № 6.— С. 126—140.
8. **Sagle A. A.** On simple algebras obtained from homogeneous generel Lit triple systems // Pacif. J. Math.— 1965.— V. 15, N 4.— P. 1397—1400.
9. **Albert A. A., Frank M. S.** Simple Lie algebras of characteristic p // Univ. e Politec. Torino. Rend. Sem. Nat.— 1954—1955.— V. 14.— P. 117—139.
10. **Block R.** On torsion-free abelion groups and Lie algebras // Proc. Amer. math. Soc.— 1958.— V. 9, N 4.— P. 613—620.
11. **Sagle A. A.** Malcev algebras // Trans. Amer. Math. Soc.— 1961.— V. 101, N 3.— P. 426—458.
12. **Курош А. Г.** Мультиоператорные кольца и алгебры // Успехи мат. наук.— 1969.— Т. 24, № 1.— С. 3—15.

В. К. ХАРЧЕНКО, А. З. ПОПОВ

КОСЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПЕРВИЧНЫХ КОЛЕЦ

В работе исследуются алгебраические зависимости между косыми дифференцированиями первичного кольца, рассматривается алгебра Хопфа, определяемая косыми дифференцированиями, и с ее помощью фор-