выбору элемента b. Поэтому $e_b \in I$ для любого $b \in G \backslash 0$ и, следовательно, $I = \tilde{L}$. Алгебра $\tilde{L}$ проста. Теорема доказана.

Пример 3. Пусть $A = A(U, h_1, h_2, h_3)$ — простая нелиева J-алгебра над полем Φ из примера 1, $L(A)$ — ее ассоциированная 3-лиева алгебра с базисом $\{e_a\}_{a \in U}$, 3-линейная операция которой на базисных элементах e_a, e_b и e_c задается формулой

$$[e_a, e_b, e_c] = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} e_{a+b+c}, \qquad (65)$$

где $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $c = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Тогда подалгебра $\tilde{L}$ алгебры $L(A)$ с базисом $\{e_a\}_{\in U \backslash 0}$ является простой 3-лиевой алгеброй над Φ (бесконечномерной, если поле Φ бесконечномерно и, в частности, если оно имеет характеристику 0).

Пример 4. Если $A_p = A(U_p, h_1, h_2, h_3)$ — простая J-алгебра над полем Φ характеристики $p > 0$ из примера 2, то подалгебра $\tilde{L}$ ее ассоциированной алгебры $L(A_p)$ является простой 3-лиевой алгеброй размерности $p^3 - 1$ над Φ, а ее умножение базисных элементов e_a, e_b и e_c задается формулой (65), где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \Phi_p$, $i = 1, 2, 3$.

Из теорем 5 и 6 непосредственно вытекает

Следствие 2. *Пусть $A = A(G, h_1, h_2, h_3)$ нелиева J-алгебра над полем Φ характеристики, отличной от 2 и 3. Подалгебра $\tilde{L}$ ее ассоциированной 3-лиевой алгебры $L(A)$ проста тогда и только тогда, когда проста алгебра A.*

В связи с последним утверждением возникает следующий вопрос. *Будут ли эквивалентны простота J-алгебры A над полем Φ характеристики, отличной от 2 и 3, и простота фактор-алгебры $\tilde{L}$ ее ассоциированной алгебры $L(A)$ по аннулятору* $\operatorname{Ann} L(A)$?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Yamaguti K.** On the Lie triple sistem and its generalization // J. Sci. Hirosima Univ.— 1958.— Ser. A, V. 21, N 3.— P. 155—160.
2. **Лоос О.** Симметрические пространства.— М.: Наука, 1985.
3. **Феденко А.** Пространства с симметриями.— Минск: Изд-во БГУ, 1977.
4. **Yamaguti K.** On the theory of Malcev algebras // Kumamoto J. Sci.— 1963.— V. 6, N 1.— P. 9—45.
5. **Sagle A. A.** On anti-commutative algebras and general Lie tripl systems // Pacif. J. Math.— 1965.— V. 15, N 1.— P. 281—291.
6. **Yamaguti K.** Note on Malcev algebras // Kumamoto J. Sci.— 1962.— V. 5, N 4.— P. 203—207.
7. **Филиппов В. Т.** n-Лиевы алгебры // Сиб. мат. журн.— 1985.— Т. 26, № 6.— С. 126—140.
8. **Sagle A. A.** On simple algebras obtained from homogeneous generel Lit triple systems // Pacif. J. Math.— 1965.— V. 15, N 4.— P. 1397—1400.
9. **Albert A. A., Frank M. S.** Simple Lie algebras of characteristic p // Univ. e Politec. Torino. Rend. Sem. Nat.— 1954—1955.— V. 14.— P. 117—139.
10. **Block R.** On torsion-free abelion groups and Lie algebras // Proc. Amer. math. Soc.— 1958.— V. 9, N 4.— P. 613—620.
11. **Sagle A. A.** Malcev algebras // Trans. Amer. Math. Soc.— 1961.— V. 101, N 3.— P. 426—458.
12. **Курош А. Г.** Мультиоператорные кольца и алгебры // Успехи мат. наук.— 1969.— Т. 24, № 1.— С. 3—15.

В. К. ХАРЧЕНКО, А. З. ПОПОВ

КОСЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПЕРВИЧНЫХ КОЛЕЦ

В работе исследуются алгебраические зависимости между косыми дифференцированиями первичного кольца, рассматривается алгебра Хопфа, определяемая косыми дифференцированиями, и с ее помощью формулируется гипотеза о виде алгебраических зависимостей, которая подтверждается в двух частных случаях (теорема 1, теорема 2).

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Пусть R — первичное кольцо, s — некоторый его автоморфизм. Отображение $\partial\colon R \to R$ называется s-дифференцированием, если $\partial(xy) = \partial(x)y + x^s\partial(y)$ и $\partial(x \pm y) = \partial(x) \pm \partial(y)$ для всех $x, y \in R$. В настоящей работе мы занимаемся исследованием алгебраических зависимостей между косыми дифференцированиями. Интерес к этой проблематике возникает в связи с недавними работами А. Лероя [1, 2] и А. Лероя и Я. Мажука [3, 4], в которых в основном исследуются алгебраические косые дифференцирования первичных колец и тел.

Если $s = 1$, то мы приходим к случаю обычных дифференцирований, рассмотренному первым автором в работах [5, 6]. Как и в этих работах, важнейшим инструментом исследования будет мартиндейловское кольцо частных (левое — $R_{\mathfrak{F}}$ и двустороннее — Q, см., например, [5, § 1]). Нам будет удобно расширить рассматриваемую ситуацию и считать, что ∂ первоначально определено не на всем кольце R, но на некотором его ненулевом идеале. Соответственно, автоморфизм s также, возможно, определен только на ненулевом идеале I, при этом его образ I^s должен также содержать ненулевой идеал J кольца R.

Лемма 1. *Вышеуказанный автоморфизм s и s-дифференцирование ∂ имеют единственные распространения на Q и на $R_{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Пусть a — произвольный элемент из $R_{\mathfrak{F}}$ По определению $R_{\mathfrak{F}}$ найдется ненулевой идеал I_a такой, что $I_a \cdot a \subseteq R$. Пусть $I_1 = J(II_a)^sJ$. Определим отображение $a^s\colon I_1 \to R$ следующим образом. Если $i \in I_1$, то $i \in \dot{J}_1^s$ для некоторого $j \in I^2I_aI$, и мы положим $ia^s = (ja)^s$, при этом правая часть равенства определена в силу того, что $ja \in I$. Теперь нетрудно проверить, что $a \to a^s$ — искомое распространение s. Формула $j^sa^s = (ja)^s$ показывает его единственность, так как для другого распространения h мы имели бы равенство $(j^sa^s - j^sa^h) = (ja)^s - (ja)^s = 0$, т. е. $I_1(a^s - a^h) = 0$ и, значит, $s = h$.

Наконец, если $a \in Q$, $aJ_a \subseteq R$, то

$$a^sJ(IJ_a)J \subseteq a^s(I^2J_aI)^s \subseteq (aJ_aI)^s \subseteq R,$$

т. е. s — автоморфизм кольца Q.

Пусть теперь s-дифференцирование ∂ определено на ненулевом идеале T. Рассмотрим идеал $I_2 = J(TII_a)^s \cdot I_aJ$. Определим отображение a^∂: $I_2^2 \xrightarrow[i=j^s]{} R$ следующим образом. Если $i \in I_2^2$, то $i = j^s$ для некоторого $j \in (I(TII_a)I)^2$, причем j имеет представление $j = \sum j_{1k}j_{2k}$, в котором j_{1k}^s $j_{2k}^s \in I_2 \subseteq I_a$, $j_{1k}, j_{2k} \in I_a$. Положим

$$ia^\partial = (ja)^\partial - j^\partial a.$$

Правая часть определена в силу того, что $ja \in T(I_aa) \subseteq T$ и $j^\partial = \left(\sum j_{1k}j_{2k}\right)^\partial = \sum j_{1k}^\partial j_{2k} + \sum j_{1k}^s j_{2k}^\partial \in T^\partial \cdot I_a + I_a \cdot T^\partial \subseteq I_a$.

Теперь легко проверить, что a^∂ — гомоморфизм левых R-модулей, и поэтому a^∂ можно отождествить с элементом кольца частных $R_{\mathfrak{F}}$. Отображение $a \to a^\partial$ и есть искомое распространение ∂. То, что это распространение будет s-дифференцированием, проверяется прямыми стандартными вычислениями.

Введем обозначения

$$\mathbf{A}(R) = \{s \in \operatorname{Aut} Q \mid \exists I_1,\ I \lhd R,\ I_1 \neq 0 \neq I,\ I_1 \subseteq I^s \subseteq R\}.$$

$\mathbf{L}_s(R) = \{\partial \mid \partial$ есть s — дифференцирование Q и $\exists I \lhd R$, $\partial(I) \subseteq R$, $I \neq 0\}$. Понятно, что группа автоморфизмов кольца R содержится в $\mathbf{A}(R)$.

Все дальнейшие утверждения об автоморфизмах и косых дифференцированиях справедливы не только для автоморфизмов и дифференцирований кольца R, но также для автоморфизмов из $\mathbf{A}(R)$ и для дифференцирований из $\mathbf{L}_s$, $s \in \mathbf{A}(R)$, поэтому если после слов «автоморфизм», «дифференцирования» не будет специально указываться кольцо, то будет предполагаться, что автоморфизм лежит в $\mathbf{A}(R)$, а s — дифференцирование в $\mathbf{L}_s$, $s \in \mathbf{A}(R)$.

Лемма 2. *Множество $\mathbf{A}(R)$ образует группу, которая содержит все внутренние автоморфизмы кольца Q.*

Доказательство. Пусть a — обратимый элемент из Q. Обозначим через $\widehat{a}$ внутренний автоморфизм, отвечающий этому элементу $\widehat{a}$: $x \to a^{-1}xa$. По условию мы можем найти идеал $I \neq 0$ такой, что $Ia^{-1} \subseteq R$, $a^{-1}I \subseteq R$, $aI \subseteq R$, $Ia \subseteq R$. В этом случае

$$\widehat{a}(I^2) = (a^{-1}I) \cdot (Ia) \subseteq R.$$

Кроме того,

$$aI^4a^{-1} = (aI)I^2(Ia^{-1}) \subseteq I^2$$

и, значит, $\widehat{a}(I^2) \supseteq I^4$. Таким образом, $\widehat{a} \in \mathbf{A}(R)$.

Пусть g, $h \in \mathbf{A}(R)$, и предположим, что $R \supseteq I^g \supseteq I_1$, $R \supseteq J^h \supseteq J_1$, где $0 \neq I$, I_1, J, $J_1 \lhd R$. Тогда $J_1I_1 \subseteq I^g$ и поэтому $J_1I_1 = A^g$, где $A \subseteq I$.

Рассмотрим идеал $I_2 = IAI$. Имеем

$$I_2^{gh^{-1}} = \left(I^g J_1 I_1 I^g\right)^{h^{-1}} \subseteq (RJ_1I_1R)^{h^{-1}} \subseteq J_1^{h^{-1}} \subseteq J \subseteq R.$$

Кроме того,

$$I_2^{gh^{-1}} \supseteq \left(I_1 J_1 I_1^2\right)^{h^{-1}} \supseteq \left(RI_1J_1I_1^2R\right)^{h^{-1}} \supseteq J\,(I_1J_1I^2)^{h^{-1}}\,J \lhd R.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть I — ненулевой идеал кольца R. Тогда* $\mathbf{A}(I) = \mathbf{A}(R)$.

Доказательство. Пусть $g \in \mathbf{A}(R)$ и $R \supseteq J^g \supseteq J_1$ для подходящих идеалов. Тогда $IJ_1 \subseteq J_1 \subseteq J^g$ и поэтому $IJ_1 = A^g$ для некоторого подмножества $A \subseteq J$. Далее,

$$(JAIJ)^g = J^gIJ_1(IJ)^g \subseteq I.$$

Наконец,

$$(JAIJ)^g \supseteq J_1IJ_1(IJ^2)^g \supseteq J_1IJ_1(IJ)^gJ_1 \lhd R,$$

так как $(IJ)^g \subseteq J^g \subseteq R$.

Обратно, если $g \in \mathbf{A}(I)$ и $I \supseteq J^g \supseteq J_1$ для ненулевых идеалов, то

$$R \supseteq I \supseteq (IJI)^g \supseteq (J^3)^g \supseteq J_1^3 \supseteq IJ_1^3I \lhd R.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если I — ненулевой идеал кольца R, то $\mathbf{L}_s(I) = \mathbf{L}_s(R)$, где $s \in \mathbf{A}(R)$.*

Доказательство. Пусть $\partial \in \mathbf{L}_s(R)$. В силу предыдущей леммы найдем ненулевой идеал J такой, что $J^s \subseteq I$, и пусть $T^\partial \subseteq R$, $0 \neq T \lhd R$. Тогда

$$(JT^2I)^\partial \subseteq (JT)^\partial \cdot TI + (JT)^s \cdot (TI)^\partial \subseteq R \cdot TI + I \cdot R \subseteq I,$$

что и требуется.

Лемма 5. *Группа $\mathbf{A}(R)$ сопряжениями действует на множестве всех косых дифференцирований, причем $g^{-1}\mathbf{L}_sg = \mathbf{L}_{g^{-1}sg}$.*

Доказательство. Имеем

$$(xy)^{g^{-1}\partial g} = x^{g^{-1}\partial g}y + x^{g^{-1}sg}y^{g^{-1}\partial g}.$$

Поэтому остается найти ненулевой идеал U такой, что $((U^{g^{-1}})^\partial)^g \subseteq R$. Если $I^\partial \subseteq R$, то по лемме 4 найдем ненулевой идеал J такой, что $J^\partial \subseteq I$, и по лемме 3 найдем U такой, что $U^{g^{-1}} \subseteq J$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $s \in \mathbf{A}(R)$, $a \in Q$. Тогда отображение* $\mathrm{ad}_s a$: $x \to ax - x^s a$ *является s-дифференцированием* (которое мы будем называть *внутренним*).

Доказательство. Имеем

$$(xy)\,\mathrm{ad}_s\, a = axy - x^s y^s a = (ax - x^s a)\, y + x^s (ay - y^s a).$$

Понятно также, что $\mathrm{ad}_s x \in \mathbf{L}_s(R)$, так как при $a \in Q$ можно найти ненулевой идеал I такой, что aI, $Ia \subseteq R$. Выбирая ненулевой идеал J, содержащийся в I, так чтобы $J^s \subseteq I$, получим, что $I\,\mathrm{ad}_s\, a \subseteq R$. Лемма доказана.

Для элемента $a \in Q$ обозначим через l_a оператор левого умножения l_a: $x \to ax$, а через r_a — оператор правого умножения r_a: $x \to xa$.

Лемма 7. *Пусть a — обратимый элемент из Q, $\widehat{a}$ — отвечающий ему внутренний автоморфизм, $s \in \mathbf{A}(R)$. Тогда*

$$\mathbf{L}_s l_{a^{-1}} = \mathbf{L}_{s\widehat{a}}.$$

Доказательство вытекает из очевидного равенства

$$a^{-1}(xy)^\partial = (a^{-1}x^\partial)\, y + a^{-1}x^s a (a^{-1}y^\partial).$$

Лемма 8. *Множество $\mathbf{L}_s$ образует правое линейное пространство над C, именно $\partial c \cdot x \to \partial(x) \cdot c$. Левое действие C на $\mathbf{L}_s$ связано с правым формулой $c\partial = \partial c^s + r_{\partial(c)}$, где $r_{\partial(c)}$ — оператор правого умножения на $\partial(c)$.*

Доказательство. Если ∂_1, $\partial_2 \in \mathbf{L}_s$ и α, $\beta \in C$, то $(\partial_1\alpha + \partial_2\beta)(xy) = \partial_1(xy)\alpha + \partial_2(xy)\beta = (\partial_1\alpha + \partial_2\beta)(x) \cdot y + x^s \cdot (\partial_1\alpha + \partial_2\beta)(y)$. Далее, $(c\partial)(x) \overset{\partial f}{=} \partial(cx) = \partial(c)\, x + c^s\partial(x)$, т. е. $c\partial = \partial c^s + r_{\partial(c)}$. Лемма доказана.

§ 2. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Наличие алгебраической зависимости между косыми дифференцированиями $\partial_1, \ldots, \partial_k$ означает, что существует некоторый нетривиальный многочлен $F\langle z_{ij}\rangle$, в общем случае с некоммутативными коэффициентами из $R_{\mathfrak{F}}$, который тождественно обращается в нуль при подстановке $z_{ij} = x_i^{\Delta_j}$, где $\Delta_j = \partial_{j1} \ldots \partial_{jm}$ — некоторые слова (суперпозиции) от $\partial_1, \ldots, \partial_k$. Если одно из косых дифференцирований ∂_i окажется внутренним, то мы можем расстаться с ним, заменив во всех вхождениях U^{∂_i} на $au - u^s a$, при этом нам придется рассматривать зависимости также между автоморфизмами и косыми дифференцированиями (что вполне естественно). Кроме того, лемма 7 позволяет считать, что дифференцирования, отвечающие одинаковым автоморфизмам по модулю подгруппы внутренних автоморфизмов, на самом деле отвечают одному автоморфизму. Наконец, так как множество $\mathbf{L}_s$ образует линейное пространство над C, то мы можем считать, что в изучаемом множестве $\{\partial_1, \ldots, \partial_k\}$ дифференцирования, отвечающие одному и тому же s, линейно независимы по модулю подпространства $\mathrm{int}\,\mathbf{L}_s$ внутренних s-дифференцирований.

Указанные перестроения изучаемого множества дифференцирований можно рассматривать как применение простейших алгебраических зависимостей

$$\partial = r_a - sl_a,\quad g^{-1}\partial_1 = \partial_2,\quad \partial_3 = \partial_1\alpha + \partial_2\beta$$

или в виде тождеств

$$x^\partial = ax - x^s a,\quad a^{-1}x^{\partial_1} = x^{\partial_2},\quad x^{\partial_3} = \alpha x^{\partial_1} + \beta x^{\partial_2}.$$

Далее, лемма 5 позволяет переставлять дифференцирования с автоморфизмами: $\partial g = g\partial^g$. Поэтому при привлечении к рассмотрению автоморфизмов мы можем считать, что в словах они расположены на первом месте.

Теперь напрашиваются следующие определения.

Определение 1. Автоморфизмы g, $h \in \mathrm{A}(R)$ назовем взаимно внешними, если gh^{-1} невнутренний автоморфизм для кольца частных Q.

Определение 2. Множество косых дифференцирований $\{\partial_1, \ldots, \partial_k\}$ назовем приведенным, если

а) различные автоморфизмы, отвечающие этим дифференцированиям, взаимно внешние;

б) дифференцирования из этого множества, отвечающие одному и тому же автоморфизму s, линейно независимы по модулю подпространства внутренних s-дифференцирований.

Итак, мы приходим к основной задаче — исследовать обобщенные тождества с приведенным множеством косых дифференцирований и (попарно взаимно внешними) автоморфизмами.

Нам не безразличен также переход от произвольной системы косых дифференцирований к приведенной. Ясно, что этот переход задается некоторой алгебраической структурой на множестве всех косых дифференцирований, напоминающей структуру расслоенного пространства над дискретной действующей группой $\mathrm{A}(R)$. Поэтому важно выяснить, может ли эта структура быть произвольным расслоенным пространством над произвольной данной группой G (т. е. полностью ли леммы 1—5 определяют простейшие зависимости).

В настоящей работе мы докажем слабую форму алгебраической независимости приведенного множества косых дифференцирований (т. е. покажем, что нетривиальных тождеств без суперпозиций не существует, теорема 1). Кроме того, рассмотрим крайний случай, когда все автоморфизмы, отвечающие дифференцированиям из приведенного множества, действуют тривиально на этих дифференцированиях (т. е. перестановочны с ними). В этом случае множество всех косых дифференцирований, как и в случае обычных дифференцирований, образует кольцо Ли (т. е. коммутатор $\partial_1\partial_2 - \partial_2\partial_1$ косых s и h-дифференцирований будет sh-дифференцированием). Зная структуру этой алгебры Ли, можно произвольное слово (суперпозицию) от косых дифференцирований представить в виде суммы правильных слов. В теореме 2 мы доказываем алгебраическую независимость приведенного множества косых дифференцирований, коммутирующих с основными автоморфизмами.

В последнем параграфе мы рассматриваем некоторые подходы к изучению суперпозиций в произвольной ситуации — когда группа действует нетривиально на дифференцирования. Структура кольца Ли в такой ситуации пропадает, но взамен возникают частичные полилинейные операции, которые неявно могут быть охарактеризованы на языке алгебр Хопфа. В заключение мы формулируем гипотезу об алгебраических зависимостях (с суперпозициями), смысл которой состоит в том, что эти частичные операции (или лучше сказать полилинейные композиции) исчерпывают все возможные алгебраические зависимости.

§ 3. ТОЖДЕСТВА БЕЗ СУПЕРПОЗИЦИЙ

На протяжении этого параграфа мы зафиксируем некоторое приведенное множество косых дифференцирований $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ и множество попарно взаимно-внешних автоморфизмов $\{h_1, \ldots, h_m\}$.

Предложение 9. *Если на первичном кольце R выполняется тождество вида*

$$\sum_{i,j,k} a_{ij}^{(k)} x^{h_i \partial_k} b_{ij}^{(k)} + \sum_{i,j} d_{ij} x^{h_i} f_{ij} = 0, \tag{1}$$

где $a_{ij}^{(k)}$, $b_{ij}^{(k)}$— некоторые коэффициенты из $R_{\mathfrak{F}}$, то в тензорном произведении $R_{\mathfrak{F}} \otimes_C R_{\mathfrak{F}}$ выполняются соотношения

$$\sum_j a_{ij}^{(k)} \otimes b_{ij}^{(k)} = 0; \quad \sum_j d_{ij} \otimes f_{ij} = 0 \tag{2}$$

для каждого i и каждого k, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$. В частности, на $R_{\mathfrak{F}}$ имеют место тождества

$$\sum_j a_{ij}^{(k)} x b_{ij}^{(k)} = 0, \quad \sum_j d_{ij} x f_{ij} = 0.$$

Чтобы дважды не повторять однообразные рассуждения, мы выведем это предложение из аналогичного предложения для тождеств с суперпозициями (при этом нам придется чуть-чуть усложнить формулировку, см. предложение 13).

Теорема 1. *Если первичное кольцо удовлетворяет полилинейному тождеству вида*

$$F\left(x_j^{h_i \partial_k},\ x_j^{h_i}\right) = 0,$$

где $F\left(z_j^{(i,k)},\ y_{ij}\right)$ — некоторый обобщенный многочлен с коэффициентами из $R_{\mathfrak{F}}$, то на $R_{\mathfrak{F}}$ справедливо тождество

$$F\left(z_j^{(i,k)},\ y_{ij}\right) = 0.$$

(Здесь $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ — приведенное множество косых дифференцирований, $\{h_1, \ldots, h_m\}$ — попарно взаимно-внешние автоморфизмы.)

Доказательство. Придадим всем переменным x_j, кроме первой, какие-то конкретные значения из R. Тогда по предложению 9 при $z_1^{(i,k)}$, $y_{i1} \in R_{\mathfrak{F}}$, $x_j \in R$ будет выполнено тождество

$$F\left(z_1^{(i,k)},\ x_j^{h_i \partial_k},\ y_{i1},\ x_{ij}^{h_i}\right) = 0,$$

где $j \neq 1$. Теперь придадим конкретные значения всем переменным, кроме x_2, и т. д. Теорема доказана.

§ 4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ, КОММУТИРУЮЩИЕ С ОСНОВНЫМИ АВТОМОРФИЗМАМИ

Пусть $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ — некоторое, не обязательно приведенное, множество косых дифференцирований $\partial_k \in \mathbf{L}_{s_k}$ такое, что $\partial_i^{s_k} = \partial_i$, т. е. $s_k \partial_i = \partial_i s_k$ для всех i, k, $1 \leqslant i$, $k \leqslant n$.

Лемма 10. *Если $s_k \partial_i = \partial_i s_k$, то $s_k s_i = s_i s_k$.*

Доказательство. Равенство $\partial_i^{s_k} = \partial_i$ означает, в частности, что $\partial_i^{s_k}$ и ∂_i отвечают одному и тому же автоморфизму, т. е. $s_k^{-1} s_i s_k = s_i$, что и требуется.

Лемма 11. *Если ∂ и μ — косые дифференцирования, отвечающие соответственно автоморфизмам s и h, причем $\partial^h = \partial$ и $\mu^s = \mu$, то коммутатор $[\partial, \mu] = \partial\mu - \mu\partial$ является sh-дифференцированием.*

Доказательство:

$$(xy)^{[\partial,\mu]} = (xy)^{\partial\mu} - (xy)^{\mu\partial} = x^{\partial\mu} y + x^{\partial h} y^{\mu} + x^{s\mu} y^{\partial} + x^{sh} y^{\partial\mu} -$$
$$- x^{\mu\partial} y - x^{\mu s} y^{\partial} - x^{h\partial} y^{\mu} - x^{hs} y^{\mu\partial} = x^{[\partial,\mu]} y + x^{sh} y^{[\partial,\mu]}.$$

Лемма 12. *Если кольцо R имеет положительную характеристику $p > 0$ и μ — некоторое s-дифференцирование, причем $\mu^s = \mu$, то μ^p будет s^p-дифференцированием.*

Доказательство. В этом случае выполняется формула Лейбница

$$(xy)^{\mu^k} = \sum C_k^i x^{s^{k-i} \mu^i} y^{\mu^{k-i}}.$$

При $k = p$ получаем

$$(xy)^{\mu^p} = x^{\mu^p} y + x^{s^p} y^{\mu^p},$$

что и требовалось доказать.

В силу двух предыдущих лемм мы можем рассмотреть (ограниченное) кольцо Ли, порожденное $\partial_1, \ldots, \partial_n$. При этом вновь возникающие дифференцирования будут коммутировать с автоморфизмами, им отвечающими, поскольку последние принадлежат группе порожденной $s_1, \ldots$ $\ldots, s_n$, а сами эти дифференцирования являются линейными комбинациями суперпозиций $\partial_1, \ldots, \partial_n$. Лемма 8 показывает также, что правое линейное пространство L над C, натянутое на это кольцо Ли, также будет состоять только из косых дифференцирований.

Лемма 16 (см. ниже) показывает, что без ограничения общности мы можем считать, что все основные автоморфизмы действуют тождественно на центре. Поэтому все косые дифференцирования из пространства L будет коммутировать со всеми основными автоморфизмами, т. е. это пространство будет (ограниченным) кольцом Ли.

Разумеется, каждое соотношение в этом кольце Ли $\partial = \nu\mu - \mu\nu$, $\partial = \mu^p$ нужно рассматривать как некоторую (примитивную) алгебраическую зависимость.

Следующее наше замечание состоит в том, что, зная структуру кольца Ли L и структуру векторного пространства над C в этом кольце Ли (т. е. используя примитивные зависимости), произвольную суперпозицию можно представить в виде линейной комбинации правильных слов (суперпозиций) от некоторого приведенного множества дифференцирований из L и основных автоморфизмов (с коэффициентами из алгебры умножений).

Действительно, множество внутренних косых дифференцирований из L образует подпространство, взяв базис этого подпространства, дополним его до базиса L. Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots$ — это дополнение. Для множества дифференцирований $\mu_1, \ldots$ заведомо выполняется условие б). Теперь, двигаясь слева направо, будем вычеркивать из этого списка те дифференцирования, которые отвечают автоморфизмам, лежащим в объединении смежных классов по подгруппе $\mathrm{Iut}(Q)$, порожденных автоморфизмами, отвечающими предыдущим дифференцированиям из этого списка. Таким образом, получится искомое приведенное множество. (Напомним, что *правильным* называется слово вида $\mu_{i1}\mu_{i2}\ldots\mu_{in}$, в котором $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots$ $\ldots \leqslant i_m$, и если характеристика $p > 0$, то в этой цепочке не должно быть подряд p знаков равенства.)

Предложение 13. *Пусть* $\{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$ — *приведенное множество косых дифференцирований,* $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ — *некоторое множество различных правильных слов,* $h_1, \ldots, h_m$ — *попарно взаимно-внешние автоморфизмы. Предположим также, что* μ_i *коммутирует с основным автоморфизмом, отвечающим* μ_j, *если* μ_i *и* μ_j *встречаются в некотором слове* Δ_k *на разных местах. Тогда, если на первичном кольце* R *выполняется тождество вида*

$$\sum_{i,j,k} a_{ij}^{(k)} x^{h_i\Delta_k} b_{ij}^{(k)} = 0, \tag{3}$$

где $a_{ij}^{(k)}, b_{ij}^{(k)}$ — *коэффициенты из* $R_{\mathfrak{F}}$, *то в тензорном произведении* $R_{\mathfrak{F}} \otimes_C R_{\mathfrak{F}}$ *выполняются соотношения*

$$\sum_j a_{ij}^{(k)} \otimes b_{ij}^{(k)} = 0 \tag{4}$$

для каждого i *и каждого* k, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$. *В частности, на* $R_{\mathfrak{F}}$ *имеют место тождества*

$$\sum a_{ij}^{(k)} x b_{ij}^{(k)} = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Из этого предложения вытекает результат А. Лероя ([2, предложение 2]).

Следствие (Лерой). *Пусть* s-*дифференцирование* ∂ *удовлетворяет* *соотношению*

$$\partial^n + \sum q_i \partial^i = 0,$$

где $q_i \in Q$. Если $\partial s = s\partial$ и характеристика кольца R либо больше n, либо равна нулю, то ∂ — внутреннее s-дифференцирование.

Действительно, слова $\varnothing$, ∂, ∂^2, $\ldots$, ∂^n — правильные, и поэтому, если ∂ — не внутреннее, то $\{\partial\}$ — приведенное множество дифференцирований и предложение 13 дает $1 \otimes 1 = 0$ — противоречие.

Прежде чем приступить к доказательству предложения 13, сделаем несколько замечаний.

Для слова $\Delta = \delta_1 \ldots \delta_n$ положим $s(\Delta) = s(\delta_1) \ldots s(\delta_n)$, где $s(\delta)$ — основной автоморфизм, отвечающий косому дифференцированию δ. Если Δ_1 — подслово слова Δ, то через $\Delta \setminus \Delta_1$ будем обозначать подслово, получающееся из Δ вычеркиванием Δ_1; через $s(\Delta, \Delta_1)$ обозначим слово от дифференцирований и автоморфизмов, получающееся из Δ заменой всех вхождений букв Δ_1 на соответствующие основные автоморфизмы: $\delta \to s(\delta)$.

Теперь мы можем записать формулу Лейбница для косых дифференцирований

$$(xy)^\Delta = \sum_{\Delta_1 \text{под слово} \Delta} x^{s(\Delta, \Delta_1)} y^{\Delta_1}. \tag{5}$$

В случае, если выполняется правило коммутирования, наложенное в предложении 13, то эта формула приобретает вид

$$(xy)^\Delta = \sum_{\Delta_1 \text{под слово} \Delta} x^{s(\Delta_1)(\Delta \setminus \Delta_1)} y^{\Delta_1} = \sum_{\Delta_2 = \Delta \setminus \Delta_1} x^{s(\Delta_1)\Delta_2} y^{\Delta_1}. \tag{6}$$

Обозначим через U подкольцо в тензорном произведении $Q \otimes Q^{\text{op}}$ над кольцом целых чисел, порожденное элементами вида $1 \otimes r^{\text{op}}$, $r \otimes 1$, где кольца Q и Q^{op} антиизоморфны, но имеют одинаковые группы, а элементы r и r^{op} пробегают кольца R и R^{op} соответственно. Считаем также, что $r \to r^{\text{op}}$ — тождественный антиизоморфизм

Если $h \in \mathbf{A}(R)$ или $h \in \mathbf{L}_s$; $\beta = \sum v_i \otimes r_i \in U$, $r \in R_{\mathfrak{F}}$, то положим

$$\beta^h = \sum_i v_i^h \otimes r_i, \quad r \cdot \beta = \sum_i r_i r v_i.$$

Лемма 14. *Пусть h_1, $\ldots$, h_k попарно взаимно-внешние автоморфизмы, a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant m$,— некоторые элементы из $R_{\mathfrak{F}}$, причем a_{11} не выражается линейно над C через a_{12}, $\ldots$, a_{1m}. Тогда найдется элемент $\beta \in U$ такой, что $a_{11} \cdot \beta^{h_1} \neq 0$, $a_{ij} \cdot \beta^{h_i} = 0$ при всех i, j, одновременно не равных единице.*

Доказательство. (См. предложение 1 из [7].)

Лемма 15. *Пусть $a \neq 0$, a_0, a_1, $\ldots$, a_n — элементы кольца $R_{\mathfrak{F}}$, $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ — приведенное множество косых дифференцирований. Тогда существует элемент $\beta \in U$ такой, что $a \cdot \beta^{s(\delta_1)} = 0$ и*

$$a \cdot \beta^{\delta_1} + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \beta^{\delta_i} + a_0 \cdot \beta \neq 0. \tag{7}$$

Доказательство. В силу лемм 3 и 4 можно найти ненулевой идеал I в кольце R такой, что Ia, Ia_i, I^{δ_i}, $I^{s(\delta_i)} \subseteq R$. Предположим, что для любого $\beta \in I \otimes I^{\text{op}} \overset{\text{df}}{=} U(I)$ условие $a \cdot \beta^{s(\delta_1)} = 0$ влечет равенство нулю левой части (7). Тогда корректно определено отображение

$$\xi\colon a \cdot \beta^{s(\delta)} \to a \cdot \beta^{\delta_1} + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \beta^{\delta_i} + a_0 \cdot \beta,$$

где β пробегает $U(I)$.

Область определения этого отображения содержит ненулевой идеал IaJ, где $0 \neq J \subseteq I^{s(\delta_1)}$, $J \lhd R$. Проверим, что ξ является гомоморфизмом левых R-модулей.

$$\xi\left(v\left(a\cdot\beta^{s(\delta_1)}\right)\right) = \xi\left(a\cdot[\beta(1\otimes v)]^{s(\delta_1)}\right) = a\cdot\beta^{\delta_1}(1\otimes v) + \\ + \sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\beta^{\delta_i}(1\otimes v) + a_0\cdot\beta(1\otimes v) = v\xi\left(a\cdot\beta^{s(\delta_1)}\right).$$

Поэтому отображение ξ определяет ненулевой элемент t мартиндейловского кольца частных $R_{\mathfrak{F}} = \xrightarrow{\lim} \operatorname{Hom}({}_RI, R)$ такой, что

$$\left(a\cdot\beta^{s(\delta_1)}\right)t = a\cdot\beta^{\delta_1} + \sum a_i\cdot\beta^{\delta_i} + a_0\cdot\beta. \tag{8}$$

Пусть $x \in I$, тогда

$$\left(a\cdot\beta^{s(\delta_1)}\right)x^{s(\delta_1)}t = \left(a\cdot[\beta(x\oplus 1)]^{s(\delta_1)}\right)t = a\cdot[\beta(x\otimes 1)]^{\delta_1} + \\ + \sum a_i(\beta(x\otimes 1))^{\delta_i} + a_0\beta(x\otimes 1) = a\cdot\left(\beta^{\delta_1}(x\otimes 1) + \beta^{s(\delta_1)}\left(x^{\delta_1}\otimes 1\right)\right) + \\ + \sum a_i\cdot\left(\beta^{\delta_i}(x\otimes 1) + \beta^{s(\delta_i)}\left(x^{\delta_i}\otimes 1\right)\right) + a_0\beta(x\otimes 1) = \left(a\cdot\beta^{\delta_1}\right)x + \\ + \left(a\cdot\beta^{s(\delta_1)}\right)x^{\delta_i} + \sum\left(a_i\cdot\beta^{\delta_i}\right)x + \sum\left(a_i\cdot\beta^{s(\delta_i)}\right)x^{\delta_i} + (a_0\cdot\beta)x. \tag{9}$$

Умножим соотношение (8) справа на x и вычтем из (9), получим

$$\left(a\cdot\beta^{s(\delta_1)}\right)\left(x^{s(\delta_1)}t - tx\right) = \left(a\cdot\beta^{s(\delta_1)}\right)x^{\delta_1} + \sum\left(a_i\cdot\beta^{s(\delta_i)}\right)x^{\delta_i}. \tag{10}$$

Пусть для определенности $\delta_1, \ldots, \delta_k$ — те из дифференцирований $\delta_1, \ldots, \delta_n$, которые отвечают автоморфизму $s(\delta_1)$. Выберем в пространстве $aC + \sum\limits_{i\leqslant k} a_iC$ некоторый базис $a_{11}, a_{12}, \ldots$, включающий элемент $a = a_{11}$, и пусть $a_i = \alpha_i a + \ldots$ — разложение в этом базисе. Рассмотрим в $U(I)$ правый идеал $\mathfrak{B} = \{\beta \in U(I) \mid a_{1j}\beta^{s(\delta_1)} = 0,\ j \neq 1;\ a_i\cdot\beta^{s(\delta_i)} = 0,\ i > k\}$. По лемме 14 множество $a\cdot\mathfrak{B}^{s(\delta_1)}$ будет ненулевым идеалом кольца R. Так как $a_i\cdot\beta^{s(\delta_1)} = \alpha_i\cdot\left(a\cdot\beta^{s(\delta_1)}\right)$ при $i \leqslant k$, то равенство (10) дает

$$\left(a\cdot\mathfrak{B}^{s(\delta_1)}\right)\cdot\left(x^{s(\delta_1)}t - tx - \sum_i \alpha_i x^{\delta_i} - x^{\delta_1}\right) = 0,$$

т. е.

$$\delta_1 - \sum \alpha_i\delta_i \in \operatorname{int}\mathbf{L}_{s(\delta_1)},$$

что противоречит приведенности множества $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Лемма доказана.

Если $f(x)$ — некоторое выражение, включающее переменную x (например, левая часть (3)), то положим $f(x)\cdot\beta = \sum r_i f(v_i x)$, где $\beta = \sum v_i \otimes \otimes r_i \in U$. Для $f(x) = ax_{h\Delta}b$, где $h \in \mathbf{A}(R)$, $\Delta = \delta_1\ldots\delta_n$ — правильное слово, по формуле (6) получаем равенство

$$(ax^{h\Delta}b)\cdot\beta = \left(a\cdot\beta^{hs(\Delta)}\right)x^{h\Delta}b + k\cdot\left(a\cdot\beta^{hs(\bar{\Delta})\delta_1}\right)x^{h\bar{\Delta}}b + \ldots, \tag{11}$$

в котором точками обозначены суммы членов $dx^{h\Delta_1}b$, где $\Delta_1 < \bar{\Delta} = \delta_2\ldots\ldots\delta_m$, а k — натуральное число такое, что $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_k \neq \delta_{k+1}$ и поэтому $k \not\equiv 0 \pmod p$.

Доказательство предложения 13 разобьем на несколько пунктов.

1. Мы можем предполагать что ни одно из равенств (4) не имеет места. так как иначе можно из (3) вычеркнуть определенное число членов, не нарушив тождества: если $\sum a^{(k)} \otimes b^{(k)} = 0$, то $\sum a^{(k)}yb^{(k)} = 0$ при всех $y \in R_{\mathfrak{F}}$.

Эти же соображения позволяют считать, что для любых фиксированных i, j множества $\{a_{ij}^{(k)}\}$, $\{b_{ij}^{(k)}\}$ состоят из линейно независимых над C элементов.

Проведем индукцию по старшему слову Δ, встречающемуся в записи тождества.

2. Пусть Δ — пустое слово. Тогда (3) — это тождество с автоморфизмами, к которому можно применить предложение 2 из [7], и все доказано.

3. Индукционный шаг. В дополнение к пункту 1 мы можем считать, что старшее слово Δ (пусть $\Delta = \Delta_1$) встречается в записи (3) ровно один раз.

Действительно, элемент $a_{11}^{(1)}$ не выражается линейно над C через $\{a_{11}^{(k)}, k > 1\}$, т. е. по лемме 14 можно найти элемент $\beta \in U$ такой, что $a \overset{\mathrm{df}}{=} a_{11}^{(1)} \cdot \beta^{h_1 s(\Delta)} \neq 0$, $a_{i1}^{(k)} \cdot \beta^{h_i s(\Delta)} = 0$ при $i > 1$ или $k > 1$. По формуле (11) левая часть тождества $f(x) \cdot \beta = 0$ имеет единственный член, содержащий слово Δ

$$f(x) \cdot \beta \equiv a x^{h_1 \Delta} b_{11}^{(1)} + \ldots = 0.$$

Сделаем в этом тождестве замену x на $x^{s(\Delta)^{-1} h_1^{-1}}$. Мы получим тождество

$$g(x) \equiv a x^{s(\Delta)^{-1} \Delta} b + \ldots = 0, \tag{12}$$

в котором a, $b \neq 0$, точками обозначена сумма членов $d x^{h\Delta'} c$, в которых $\Delta' < \Delta$, а автоморфизмы при переменной по-прежнему взаимно-внешние.

Пусть $\Delta = \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n = \delta_1 \bar{\Delta}$, $\delta_1 = \ldots = \delta_k \neq \delta_{k+1}$. Выпишем все слова $\mu_1 \bar{\Delta}$, …, $\mu_n \bar{\Delta}$, встречающиеся в записи (12) и оканчивающиеся на Δ (отличные от $\bar{\Delta}$). Пусть β — элемент из $U(R)$ такой, что $a \cdot \;{}^{\delta}\; = 0$ Применим оператор $\beta^{s(\delta_1)}$ к левой части тождества (12). По формуле (11) все члены, содержащие слово Δ при переменной сократятся, т. е. к тождеству $g(x) \cdot \beta^{s(\delta_1)} = 0$ можно применить индуктивное предположение. Выясним, как выглядят члены этого тождества, содержащие переменную с оператором $s(\Delta)^{-1} \bar{\Delta}$. В силу формулы (11) такие члены возникают в трех случаях:

а) при разложении главного члена $a x^{s(\Delta)^{-1} \Delta} b$ — получается моном $k \cdot (a \cdot \beta^{\delta_1}) x^{s(\Delta)^{-1} \bar{\Delta}} b$;

б) при разложении каждого из членов $c x^{s(\Delta)^{-1} \mu_i \bar{\Delta}} d$ — получается моном $(c \cdot \beta^{\mu_i}) x^{s(\Delta)^{-1} \bar{\Delta}} d$;

в) при разложении членов вида $c x^{s(\Delta)^{-1} \bar{\Delta}} d$ — получается моном $(c \cdot \beta) x^{s(\Delta)^{-1} \bar{\Delta}} d$.

Индуктивное предположение показывает, что если в каждом из получающихся мономов мы заменим вхождения $x^{s(\Delta)^{-1} \bar{\Delta}}$ на знак $\otimes$, то сумма всех таких элементов будет нулевой в тензорном произведении над полем C, т. е.

$$k (a \cdot \beta^{\delta_1}) \otimes b + \sum_{c,d,i} (c \cdot \beta^{\mu_i}) \otimes d + \sum_{c,d} (c \cdot \beta) \otimes d = 0.$$

Это, в частности, означает, что элемент $k (a \cdot \beta^{\delta_1})$ выражается линейно над C через элементы вида $c \cdot \beta^{\mu_i}$, $c \cdot \beta$, причем коэффициенты этого выражения не зависят от выбора β, поскольку от β не зависят правые коэффициенты b, d.

Учитывая, что β^{μ_i} — линейные операторы, получаем соотношение вида

$$k a \cdot \beta^{\delta_1} + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \beta^{\mu_i} + a_0 \cdot \beta = 0.$$

Это противоречит лемме 15, так как $ka \neq 0$, а β — произвольный элемент такой, что $a \cdot \beta^{s(\delta_1)} = (ka) \cdot \beta^{s(\delta_1)} = 0$. Предложение доказано.

Теорема 2. *Пусть первичное кольцо R удовлетворяет полилинейному тождеству вида*

$$F(x_j^{h_i \Delta_k}) = 0,$$

где $F\left(z_{ik}^{(j)}\right)$ — некоторый обобщенный многочлен с коэффициентами из $R_{\mathfrak{F}}$, $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ — попарно различные правильные слова от приведенного множества косых дифференцирований, коммутирующих со всеми автоморфизмами, им отвечающими, и $h_1, h_2, \ldots, h_m$ — попарно взаимно-внешние автоморфизмы. Тогда на $R_{\mathfrak{F}}$ справедливо тождество

$$F\left(z_{ik}^{(j)}\right) = 0.$$

Доказательство выводится стандартным образом из предложения 13 индукцией по числу переменных.

§ 5. ПРИМИТИВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

Лемма 16. *Если автоморфизм s действует нетождественно на центре C кольца Q, то $\mathbf{L}_s$ состоит только из внутренних s-дифференцирований* $\mathbf{L}_s = \mathrm{ad}_s Q$.

Доказательство. Пусть $c \neq c^s$. Тогда имеем

$$\partial(cx) = \partial(c)x + c^s\partial(x), \tag{13}$$

$$\partial(xc) = \partial(x)c + x^s\partial(c). \tag{14}$$

Вычитая из первого равенства второе и учитывая, что $c - c^s$ обратим в Q, получаем

$$\partial(x) = (c - c^s)^{-1}\partial(c)x - x^s(c - c^s)^{-1}\partial(c),$$

т. е. ∂ — внутреннее, отвечающее элементу $(c - c^s)^{-1}\partial(c)$. Лемма доказана.

Лемма 17. *Если автоморфизм s действует тождественно на C, но не является внутренним для Q, то всякое s-дифференцирование действует тривиально на C, т. е. $\partial(C) = 0$.*

Доказательство. Вычитая, как и выше, из равенства (13) равенство (14), получаем

$$\partial(c)x - x^s\partial(c) = 0,$$

т. е. если $\partial(c) \neq 0$, то автоморфизм s — внутренний для Q (см. [7, § 2]).

Последние две леммы показывают, что мы без большого ущерба можем ограничиться рассмотрением косых дифференцирований, которые вместе с отвечающими им автоморфизмами действуют тривиально на C, т. е. перейти к рассмотрению алгебр над полем C. При этом вне поля зрения останутся только обычные дифференцирования (действующие нетривиально на C), изучению которых в последнее время посвящено довольно много работ.

Леммы 5 и 8 показывают, что множество всех косых дифференцирований обладает некоторой алгебраической структурой.

Определение 3. Пусть G — группа, и предположим, что задано отображение γ из G в некоторое множество линейных пространств над полем C, так что $\gamma(s) = L_s$. Пару $(G, \gamma) = \Gamma$ будем называть гребешком, если дополнительно задано действие группы G на этих пространствах g: $L_s \to L_{g^{-1}sg}$, причем ограничение действия g на L_s является изоморфизмом пространств над C. Группу G будем называть основанием этого гребешка, а пространства L_s, $s \in G$,— его зубцами. Основанием зубца L_s называется автоморфизм s.

Мы видим, что косые дифференцирования, действующие тривиально на C, образуют гребешок с основанием $\mathbf{A}_C(R) = \{s \in \mathbf{A}(R) \mid s|_C = 1\}$ и зубцами $\mathbf{L}_s$, $s \in \mathbf{A}_C(R)$.

Возникает естественный вопрос: можно ли произвольный гребешок Γ над C реализовать как гребешок косых дифференцирований (не обязательно всех) какого-либо первичного кольца с обобщенным центроидом C. Ответ на этот вопрос положительный.

Рассмотрим линейное пространство $L=\sum \oplus L_s$ и его тензорную алгебру $C\langle L\rangle$. Каждый из элементов $g \in G$ действует на L и поэтому однозначно распространяется до автоморфизма $C\langle L\rangle$. Зафиксируем в пространстве L_s некоторый базис $\partial_1, \ldots, \partial_m$ и определим действие $\partial_i(\partial_j)=\delta_{ij}\partial_j$. Так как $C\langle L\rangle$ — свободная алгебра над C, то такое действие можно распространить до s-дифференцирования алгебры $C\langle L\rangle$, полагая $\partial_i(L_h)=0$ при $h \neq s$. Остается заметить, что по лемме из [8, с. 481] $Q(C\langle L\rangle)=C\langle L\rangle$, и поэтому обобщенный центроид $C\langle L\rangle$ равен C. Нетрудно заметить также, что при такой реализации гребешок L не содержит нетривиальных внутренних косых дифференцирований.

Свободная оболочка гребешка. Как мы отмечали выше, группа G действует на алгебре $C\langle L\rangle$, где $L=\sum \oplus L_s$. Поэтому можно определить скрещенное произведение $C\langle \Gamma\rangle \overset{\mathrm{df}}{=} G * C\langle L\rangle$ с тривиальной системой факторов. Базис этого произведения состоит из всевозможных слов $g\partial_1 \ldots \partial_m$, где $g \in G$, ∂_i — элементы фиксированных базисов зубцов. Произведение таких слов определяется многократным использованием формулы $\partial g=g\partial^g$.

Определим на $C\langle\Gamma\rangle$ коумножение Δ: $C\langle\Gamma\rangle \to C\langle\Gamma\rangle \otimes C\langle\Gamma\rangle$ на словах единичной длины Δ по формулам

$$\begin{gathered}\Delta(\partial)=\partial \otimes 1+s \otimes \partial, \quad \partial \in L_s; \\ \Delta(s)=s \otimes s, \quad s \in G.\end{gathered} \tag{15}$$

На слова большей длины и на линейные комбинации Δ распространяется так, чтобы коумножение стало гомоморфизмом C-алгебр. Легко проверить, что коумножение Δ коассоциативно.

Таким образом, $C\langle\Gamma\rangle$ превращается в биалгебру. Эта биалгебра имеет коединицу ε: $C\langle\Gamma\rangle \to C$, которая равна нулю на всех непустых словах от дифференцирований и $\varepsilon(s)=1$ при $s \in G$.

Определим на $C\langle\Gamma\rangle$ антипод H. Положим $H(\partial)=-s^{-1}\partial$, $H(s)=s^{-1}$, где $\partial \in L_s$, и продолжим H до антиавтоморфизма H: $C\langle\Gamma\rangle \to C\langle\Gamma\rangle$. Проверка того, что ε — коединица, а H — антипод, проводится очевидной индукцией по длине слова.

Итак, $C\langle\Gamma\rangle$ превращается в алгебру Хопфа.

Определение 4. Алгебра Хопфа $(C\langle\Gamma\rangle, \Delta, \varepsilon, H)$ называется свободной оболочкой гребешка Γ.

Определение 5. Элемент $w \in C\langle\Gamma\rangle$ называется примитивным, если $\Delta(w)=w \otimes 1+s \otimes w$ для некоторого $s \in G$.

Пусть $\mathbf{\Gamma}=\{\mathbf{A}_C(R), g\colon \mathbf{\Gamma}_s \to \mathbf{L}_s^g\}$ — гребешок косых дифференцирований. Мы можем определить действие свободной оболочки $C\langle\mathbf{\Gamma}\rangle$ на Q, рассматривая слово $s\partial_1 \ldots \partial_n$ как суперпозицию $x^{s\partial_1 \cdots \partial_n}=\left(\ldots(x^s)^{\partial_1} \ldots\right)^{\partial_n}$ Индукцией по длине слова легко доказать формулу

$$(xy)^w=\sum x^{w_{1i}} y^{\widetilde{t}}, \tag{16}$$

где w — элемент $C\langle\mathbf{\Gamma}\rangle$ и $\Delta(w)=\sum w_{1i} \otimes w_{2i}$, т. е. таким образом получается действие алгебры Хопфа.

Если w — примитивный элемент, то по формуле (16) получаем

$$(xy)^w=x^w y+x^s y^w,$$

т. е. w действует как косое дифференцирование, и мы можем найти $\partial \in \mathbf{L}_s$ такое, что на Q выполняется равенство

$$w-\partial=0. \tag{17}$$

Это равенство означает алгебраическую зависимость косых дифференцирований, входящих в его запись, и мы можем сформулировать естественно возникающую проблему.

Верно ли, что все алгебраические зависимости между косыми дифференцированиями, действующими тривиально на C, исчерпываются при-

митивными зависимостями вида (17), *простейшими зависимостями* $x^\partial = ax - x^s a$, $\partial \in \operatorname{int} \mathbf{L}_s$; $a^{-1}x^\partial = x^\mu$, $x^\partial = ax^\mu + \beta x^\nu$, $x^\partial = x^{\mu g}$ *и их следствиями*?

Сформулируем еще один естественный вопрос, представляющий самостоятельный интерес и являющийся упрощенным вариантом предыдущего.

Назовем гребешок $\Gamma \subseteq \mathbf{\Gamma}$ *полным*, если он вместе с любым примитивным элементом w содержит косое дифференцирование ∂, определяемое этим элементом на Q. В свободной оболочке $C\langle\Gamma\rangle$ полного подгребешка Γ рассмотрим идеал T, порожденный всеми разностями $w - \partial$, где w — примитивный элемент, ∂ — определяемый им элемент из Γ. Пусть $\Phi(\Gamma)$ — ассоциативная подалгебра, порожденная в кольце линейных преобразований пространства Q всеми косыми дифференцированиями и автоморфизмами из Γ. Тогда отображения $\partial \to \partial$ и $s \to s$ продолжаются до гомоморфизма $C\langle\Gamma\rangle \to \Phi(\Gamma)$. Ядро этого отображения содержит идеал T, поэтому имеется гомоморфизм

$$\xi\colon C\langle\Gamma\rangle/T \to \Phi(\Gamma).$$

Задача. *Предположим, что* Γ *не содержит нетривиальных внутренних косых дифференцирований. Показать, что* ξ — *изоморфизм.*

В заключение приведем несколько примеров примитивных элементов.

1. Пусть μ, ∂ — дифференцирования, отвечающие автоморфизмам s и h соответственно. Если $\mu^h = \mu$, $\partial^s = \partial$, то $\mu\partial - \partial\mu$ — примитивный элемент (см. лемму 11).

2. Пусть $\mu^h = -\mu$, $\partial^s = -\partial$, тогда йорданова композиция $\mu\partial + \partial\mu$ будет примитивным элементом.

3. Пусть ∂_1, ∂_2 отвечают одному автоморфизму s, и предположим, что $\partial_1^s = \partial_1 + \partial_2$, $\partial_2^s = \partial_2$. Тогда $2\partial_1\partial_2 - 2\partial_2\partial_1 - \partial_2^2$ — примитивный элемент.

4. Более обще, рассмотрим некоторый зубец L_s. Тогда $L_s^s = L_{s^{-1}ss} = L_s$, т. е. s действует на L_s как невырожденное линейное преобразование. Предположим, что в L_s выбран базис $\partial_1, \ldots, \partial_n$, в котором матрица этого преобразования имеет вид жордановой клетки с собственным числом α, т. е. $\partial_1^s = \alpha\partial_1 + \partial_2$, $\partial_2^s = \alpha\partial_2 + \partial_3, \ldots, \partial_n^s = \alpha\partial_n$. Можно показать, что если $\alpha \neq \pm 1$, то пространство L_s^2, натянутое на произведения пар элементов зубца L_s, не имеет ненулевых примитивных элементов. Если $\alpha = -1$, то размерность подпространства примитивных элементов в L_s^2 равна $[(n+1)/2]$. Если $\alpha = 1$ и характеристика основного поля равна нулю, то эта размерность равна $[n/2]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Leroy A.** Dérivées logarithmiques pour une S-dérivation algébrique // Communs algebra.— 1985.— V. 13, N 4.— P. 85—100.
2. **Leroy A.** (S)-dérivations algébriques sur les corps gauches et sur les anneaux premiers //Communs algebra.— 1986.— V. 14, N 8.— P. 1473—1480.
3. **Leroy A., Matczuk J.** Quelques remarques à propos des S-dérivations // Communs algebra.— 1985.— V. 13, N 6.— P. 1229—1244.
4. **Leroy A., Matczuk J.** Dérivations et automorphimes algébriques d'anneaux premiers // Communs algebra.— 1985.— V. 13, N 6.— P. 1245—1266.
5. **Харченко В. К.** Дифференциальные тождества первичных колец // Алгебра и логика— 1978.— Т. 17, № 2.— С. 220—236.
6. **Харченко В. К.** Дифференциальные тождества полупервичных колец // Алгебра и логика.— 1979.— Т. 18, № 1.— С. 86—119.
7. **Харченко В. К.** Обобщенные тождества с автоморфизмами // Алгебра и логика.— 1975.— Т. 14, № 2.— С. 215—237.
8. **Харченко В. К.** Об алгебрах инвариантов свободных алгебр // Алгебра и логика.— 1978.— Т. 17, № 4.— С. 478—487.