А. М. БЛОХИН, И. Ю. ДРУЖИНИН, Е. В. МИЩЕНКО

ТЕОРИЯ И РАСЧЕТ АБЕРРАЦИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА КАТОДНЫХ СИСТЕМ

В работе построена строгая теория аберраций катодных электронно-оптических осесимметричных систем (ЭООС). С математической точки зрения это означает построение строгой теории возмущений для так называемого основного уравнения траекторий (ОУТ) заряженных частиц в комбинированных полях. Основные достижения теории аберраций отражены в большом количестве монографий (см., например, [1, 2]). Тем не менее авторы решились изложить свои соображения по теории аберраций катодных ЭООС.

Авторы признательны В. П. Ильину, Ю. В. Куликову, М. А. Монастырскому, В. Я. Иванову, многочисленные обсуждения с которыми способствовали появлению настоящей публикации.

§ 1. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В КОМБИНИРОВАННЫХ ПОЛЯХ

Как известно, движение электрона с зарядом e и массой m при наличии электрического и магнитного полей описывается уравнением Лоренца [3, с. 35]

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{e}{m}\left\{\mathbf{E} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{B}\right\}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ — радиус-вектор произвольной точки траектории, $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электростатического поля, $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции. Вводя в рассмотрение электростатический и магнитостатический потенциалы $\varphi(\mathbf{r})$ и $\varphi^m(\mathbf{r})$ такие, что $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$, $\mathbf{B}=-\nabla\varphi^m$, перепишем уравнение (1.1) в виде

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{e}{m}\left\{\nabla\varphi + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\nabla\varphi^m\right\}. \tag{1.1'}$$

Умножая (1.1′) скалярно на $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, получаем

$$\lambda_1^2\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\|^2\right) = \frac{d}{dt}\varphi(\mathbf{r}),\quad \left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\|^2 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right),$$

т. е.

$$\lambda_1^2\left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\|^2 = \varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0) + \varepsilon, \tag{1.2}$$

где $\varepsilon = \lambda_1\left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(0)\right\|^2$ — энергия электрона в начальной точке траектории, радиус-вектор которой равен $\mathbf{r}_0=\mathbf{r}(0)$; $\lambda_1 = m/(2e)$. Соотношение (1.2) является интегралом энергии, с помощью которого, следуя [4], мы и получим из (1.1′) ОУТ.

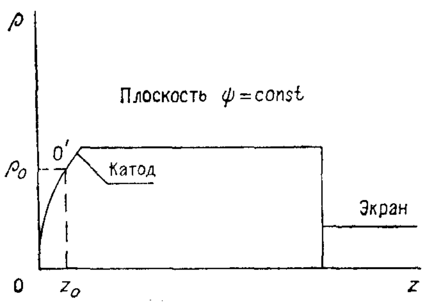

Рис. 1.

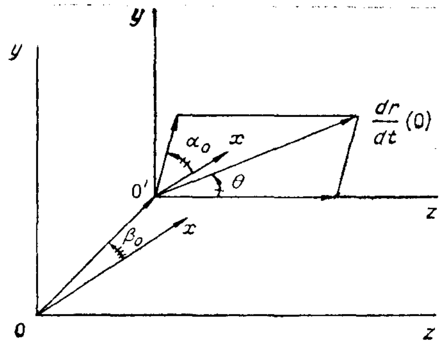

Рис. 2.

В декартовой системе координат x, y, z соотношение (1.2) перепишется так:

$$\lambda_1^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=\varphi(x,\ y,\ z)+\varepsilon-\varphi(x_0,\ y_0,\ z_0),$$

где $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$ и т. д., $\varepsilon=\lambda_1^2(\dot{x}^2(0)+\dot{y}^2(0)+\dot{z}^2(0))$. Ниже мы строим теорию аберраций катодных ЭООС (с осью симметрии Oz). Поэтому предположим, что начальная точка лежит на катоде, который является эквипотенциальной поверхностью (рис. 1). Без ограничения общности будем считать, что $\varphi(x_0,\ y_0,\ z_0)=0$. Из (1.2) получаем

$$\dot{z}=\pm\frac{1}{\lambda_1 L}, \tag{1.3}$$

где $L=\sqrt{\dfrac{1+r'\cdot\bar{r}'}{\varepsilon+\varphi(z,R)}}$, $r=x+iy=\rho e^{i\psi}$, $\bar{r}=x-iy$, $R=\rho^2=x^2+y^2$, $\frac{dr}{dz}=r'$; $\varphi(z,\ R)$ $(\varphi^m(z,\ R))$ — электростатический (магнитостатический) потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа (см. [3, с. 114]), т. е.

$$\varphi_{zz}+4(R\varphi_R)_R=0 \quad \left(\varphi^m_{zz}+4\left(R\varphi^m_R\right)_R=0\right),$$

при этом если $\Phi(z)=\varphi(z,\ 0)$ $(\Phi_m(z)=\varphi^m(z,\ 0))$, то

$$\begin{gathered}\varphi(z,R)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2^\nu\cdot\nu!)^2}\Phi^{(2\nu)}(z)R^\nu\\ \left(\varphi^m(z,R)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2^\nu\cdot\nu!)^2}\Phi_m^{(2\nu)}(z)R^\nu\right),\\ \Phi(0)=0.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Тогда, учитывая (1.3), из (1.1′) мы получаем ОУТ (см. [5, с. 168]):

$$r''+\frac{L^2}{2}\{r'\varphi_z-2\varphi_{\bar{r}}\}+\sigma\lambda L\{r'\left(x'\varphi^m_y-y'\varphi^m_x\right)+ir'\varphi^m_z-2i\varphi^m_{\bar{r}}\}=0, \tag{1.5}$$

где $\lambda=\sqrt{e/(2m)}$, $\varphi_{\bar{r}}=(1/2)(\varphi_x+i\varphi_y)=r\varphi_R$, σ — знак $\dot{z}$ (для катодных ЭООС полагаем $\sigma=+1$).

Для ОУТ мы будем изучать задачу Коши со следующими начальными условиями:

$$r(z_0)=\rho_0 e^{i\beta_0},\ r'(z_0)=\frac{\delta}{\mu}e^{i\alpha_0}. \tag{1.6}$$

Здесь $\rho_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$, $\delta=\sqrt{\varepsilon}\cdot\sin\theta$, $\widehat{\mu}=\sqrt{\varepsilon}\cos\theta$, $\mu=|\widehat{\mu}|$, θ — угол между направлением вектора начальной скорости $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(0)$ и положительным направлением оси $Oz\,(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$; α_0, β_0 — некоторые постоянные (см. рис. 2). Заметим также, что уравнение поверхности катода можно записать в виде $\varphi(z_0, R_0)=0$, $R_0=\rho_0^2$, откуда следует зависимость $z_0=z_0(R_0)$. Покажем, как получается второе условие из (1.6). Поскольку $\lambda_1^2(\dot{x}^2(0)+\dot{y}^2(0))=\varepsilon\sin^2\theta$, $\lambda_1^2\dot{z}^2(0)=\varepsilon\cos^2\theta$, то

$$(x'(z_0))^2+(y'(z_0))^2=\frac{\delta^2}{\mu^2},\quad x'(z_0)=\frac{\delta}{\mu}\cos\alpha_0,\quad y'(z_0)=\frac{\delta}{\mu}\sin\alpha_0.$$

Следовательно,

$$r'(z_0)=x'(z_0)+iy'(z_0)=\frac{\delta}{\mu}e^{i\alpha_0}.$$

Выведем теперь некоторые следствия из условий (1.5), (1.6). Поскольку

$$r'=(\rho'+i\rho\psi')e^{i\psi},\quad \bar{r}'=(\rho'-i\rho\psi')e^{-i\psi},$$
$$r'\bar{r}'=(\rho')^2+(\rho\psi')^2,$$
$$r''=\{\rho''-\rho(\psi')^2+i[2\rho'\psi'+\rho\psi'']\}e^{i\psi},$$

из (1.5), (1.6) вытекает

$$\begin{gathered}\rho''-\rho(\psi')^2+\frac{L^2}{2}(\rho'\varphi_z-\varphi_\rho)-\lambda L\rho\psi'\left(\varphi^m\right)'=0,\\ \rho\psi''+2\rho'\psi'+\frac{L^2}{2}\rho\psi'\varphi_z+\lambda L\left\{\rho'\left(\varphi^m\right)'-\left(1+r'\bar{r}'\right)\varphi_\rho^m\right\}=0,\end{gathered}\tag{1.5'}$$

$$\begin{gathered}\rho(z_0)=\rho_0,\quad \rho'(z_0)=\frac{\delta}{\mu}\cos(\alpha_0-\beta_0),\\ \psi(z_0)=\beta_0,\quad \rho_0\psi'(z_0)=\frac{\delta}{\mu}\sin(\alpha_0-\beta_0).\end{gathered}\tag{1.6'}$$

Здесь $(\varphi^m)'=\varphi_z{}^m+\rho'\varphi_\rho{}^m=\varphi_z{}^m+R'\varphi_R{}^m$. Наконец, из (1.5'), (1.6') можно получить следующие соотношения:

$$\begin{gathered}U'+\frac{1}{2}L^2\varphi_zU+\lambda L\left\{\frac{R'}{2}\left(\varphi^m\right)'-2R(\varepsilon+\varphi)L^2\varphi_R^m\right\}=0,\\ L'+\frac{1}{2}L^3\varphi_z-2\lambda L^2U\varphi_R^m=0,\\ R''+\frac{1}{2}L^2(R'\varphi_z-4R\varphi_R)+2\left[1-(\varepsilon+\varphi)L^2\right]-2\lambda LU\left(\varphi^m\right)'=0,\end{gathered}\tag{1.7}$$

$$\begin{gathered}U(z_0)=\rho_0\frac{\delta}{\mu}\sin(\alpha_0-\beta_0),\quad L(z_0)=\frac{1}{\mu},\\ R(z_0)=\rho_0^2,\quad R'(z_0)=2\rho_0\frac{\delta}{\mu}\cos(\alpha_0-\beta_0),\end{gathered}\tag{1.8}$$

где $U=R\psi'$.

Заметим, что первое уравнение системы (1.7) получается из второго уравнения системы (1.5') после умножения его на ρ. Третье уравнение системы (1.7) вытекает из первого уравнения системы (1.5') после умножения его на ρ. Наконец, используя оба уравнения системы (1.5'), получаем второе уравнение системы (1.7). ОУТ с использованием агрегатов U, L можно переписать так ($\sigma=+1$):

$$r''+\frac{L^2}{2}(r'\varphi_z-2r\varphi_R)+\lambda L\left\{r'\varphi_z^m i-2r\varphi_R^m i-2r'U\varphi_R^m\right\}=0.\tag{1.5''}$$

В задачах (1.5), (1.6) и (1.7), (1.8) параметры δ, μ, ρ_0 — малые величины.

§ 2. ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ АБЕРРАЦИЙ КАТОДНЫХ ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ

Поскольку параметры δ, ρ_0 входят в задачу Коши (1.7), (1.8) регулярным образом, будем искать решение этой задачи в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
U &= U(z, \delta, \rho_0) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{i!\,j!} U_{ij}\delta^i\rho_0^j, \\
L &= L(z, \delta, \rho_0) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{i!\,j!} L_{ij}\delta^i\rho_0^j, \qquad (2.1)\\
R &= R(z, \delta, \rho_0) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{i!\,j!} R_{ij}\delta^i\rho_0^j,
\end{aligned}
$$

где $U_{ij} = U_{ij}(z) = \left.\dfrac{\partial^{i+j}U(z, \delta, \rho_0)}{\partial\delta^i\partial\rho_0^j}\right|_{\substack{\delta=0\\ \rho_0=0}}$ и т. д. Полагая в (1.7), (1.8) $\delta = \rho_0 = 0$, мы получим задачу для определения функций $U_{00}(z)$, $L_{00}(z)$, $R_{00}(z)$. При этом очевидно, что $U_{00}(z) \equiv 0$, $R_{00}(z) \equiv 0$, а функция $L_{00}(z)$ есть решение задачи Коши

$$L_{00}' + \frac{\Phi'}{2}(L_{00})^3 = 0, \quad L_{00}(0) = \frac{1}{\mu},$$

т. е. $L_{00}(z) = 1/\widehat{u}(z)$, где $\widehat{u}(z) = \sqrt{\mu^2 + \Phi(z)}$.

Продифференцируем уравнения системы (1.7) и начальные данные (1.8) по δ. В полученных соотношениях положим $\delta = \rho_0 = 0$. В итоге мы получим для определения функций $U_{10}(z)$, $L_{10}(z)$, $R_{10}(z)$ следующую задачу Коши:

$$
\begin{aligned}
&\Psi_U[U_{10}, R_{10}] = 0, \quad U_{10}(0) = 0,\\
&\Psi_L[U_{10}, L_{10}, R_{10}] = 0, \quad L_{10}(0) = 0,\\
&\Psi_R[U_{10}, L_{10}, R_{10}] = 0, \quad R_{10}(0) = R_{10}'(0) = 0,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\Psi_U[X, Z] &= X' + \frac{\Phi'}{2\widehat{u}^2}X + \frac{\lambda}{2\widehat{u}}(\Phi_m' Z)',\\
\Psi_L[X, Y, Z] &= Y' + \frac{3}{2}\frac{\Phi'}{\widehat{u}^2}Y - \frac{\Phi'''}{8\widehat{u}^3}Z + \lambda\frac{\Phi_m''}{2\widehat{u}^2}X,\\
\Psi_R[X, Y, Z] &= Z'' + \frac{1}{2\widehat{u}^2}(\Phi' Z)' + \frac{\Phi''}{2\widehat{u}^2}Z - 4\widehat{u}Y - 2\lambda\frac{\Phi_m'}{\widehat{u}}X.
\end{aligned}
$$

Следовательно, $U_{10}(z) \equiv 0$, $L_{10}(z) \equiv 0$, $R_{10}(z) \equiv 0$.

Аналогично рассуждая, сформулируем для определения функций $U_{01}(z)$, $L_{01}(z)$, $R_{01}(z)$ следующую задачу Коши:

$$
\begin{aligned}
&\Psi_U[U_{01}, R_{01}] = 0, \quad U_{01}(0) = 0,\\
&\Psi_L[U_{01}, L_{01}, R_{01}] = 0, \quad L_{01}(0) = 0,\\
&\Psi_R[U_{01}, L_{01}, R_{01}] = 0 \quad R_{01}(0) = R_{01}'(0) = 0,
\end{aligned}
$$

т. е. $U_{01}(z) \equiv 0$, $L_{01}(z) \equiv 0$, $R_{01}(z) \equiv 0$. Заметим, что при выводе предыдущих соотношений зависимость $z_0 = z_0(R_0)$ мы представили в виде $z_0 = \dfrac{1}{2R_k}R_0 + \ldots$, где R_k — радиус кривизны поверхности катода в вершине катода. Из уравнения $\varphi(z_0, R_0) = 0$ легко получить, что $R_k = 2\Phi'(0)/\Phi''(0)$. Наконец, для определения функций $U_{ij}(z)$, $L_{ij}(z)$,

$R_{ij}(z)$, $i+j=2$, сформулируем задачи Коши

$$\begin{array}{ll}
\Psi_U[U_{20}, R_{20}] = 0, & U_{20}(0) = 0,\\
\Psi_L[U_{20}, L_{20}, R_{20}] = 0, & L_{20}(0) = 0,\\
\Psi_R[U_{20}, L_{20}, R_{20}] = \dfrac{4}{\widehat{u}^2}, & R_{20}(0) = R'_{20}(0) = 0;\\
\Psi_U[U_{11}, R_{11}] = 0, & U_{11}(0) = \dfrac{1}{\mu}\sin(\alpha_0 - \beta_0),\\
\Psi_L[U_{11}, L_{11}, R_{11}] = 0, & L_{11}(0) = 0,\\
\Psi_R[U_{11}, L_{11}, R_{11}] = 0, & R_{11}(0) = 0,\ R'_{11}(0) = \dfrac{2}{\mu}\cos(\alpha_0 - \beta_0);\\
\Psi_U[U_{02}, R_{02}] = 0, & U_{02}(0) = 0,\\
\Psi_L[U_{02}, L_{02}, R_{02}] = 0, & L_{02}(0) = \dfrac{\Phi'(0)}{2\mu^3 R_k},\\
\Psi_R[U_{02}, L_{02}, R_{02}] = 0, & R_{02}(0) = 2,\ R'_{02}(0) = 0.
\end{array}$$

Эти задачи Коши можно переписать следующим образом:

$$M[R_{20}] = 0, \quad R_{20}(0) = R'_{20}(0) = 0, \quad R''_{20}(0) = \frac{4}{\mu^2},$$

$$U_{20}(z) = -\frac{\lambda}{2\widehat{u}}\Phi'_m R_{20},$$

$$L_{20}(z) = \frac{1}{8\widehat{u}^3}\int_0^z \left[\Phi''' + 2\lambda^2\Phi'_m\Phi''_m\right] R_{20}\, d\tau;$$

$$M[R_{11}] = 0,\ R_{11}(0) = 0,\ R'_{11}(0) = \frac{2}{\mu}\cos(\alpha_0 - \beta_0),$$

$$R''_{11}(0) = -\frac{\Phi'(0)}{\mu^3}\cos(\alpha_0 - \beta_0) + 2\lambda\frac{\Phi'_m(0)}{\mu^2}\sin(\alpha_0 - \beta_0),$$

$$U_{11}(z) = -\frac{\lambda}{2\widehat{u}}\Phi'_m R_{11} + \frac{\sin(\alpha_0 - \beta_0)}{\widehat{u}},$$

$$L_{11}(z) = \frac{1}{8\widehat{u}^3}\int_0^z \{[\Phi''' + 2\lambda^2\Phi'_m\Phi''_m] R_{11} - 4\lambda\Phi''_m\sin(\alpha_0 - \beta_0)\}\, d\tau;$$

$$M[R_{02}] = 0,\ R_{02}(0) = 2,\ R'_{02}(0) = 0,\ R''_{02}(0) = -\frac{\Phi''(0)}{\mu^2},$$

$$U_{02}(z) = -\frac{\lambda}{2\widehat{u}}\Phi'_m R_{02} + \frac{\lambda\Phi'_m(0)}{\widehat{u}},$$

$$L_{02}(z) = \frac{1}{8\widehat{u}^3}\left\{2\Phi''(0) + \int_0^z \left[(\Phi''' + 2\lambda^2\Phi'_m\Phi''_m) R_{02} - 4\lambda^2\Phi'_m(0)\Phi''_m\right] d\tau\right\},$$

где

$$M[X] = X''' + \frac{3\Phi'}{2\widehat{u}^2}X'' + \frac{3\Phi'' + 2\lambda^2(\Phi'_m)^2}{2\widehat{u}^2}X' + \frac{\Phi''' + 2\lambda^2\Phi'_m\Phi''_m}{2\widehat{u}^2}X.$$

Уравнение $M[X] = 0$ после замены $X = Y/\widehat{u}$ переходит в уравнение $\widehat{M}[Y] = 0$, где $\widehat{M}[Y] = Y''' + 2qY' + q'Y$, $q = \frac{3}{8}\left(\frac{\Phi'}{\widehat{u}^2}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{\Phi'_m}{\widehat{u}}\right)^2$. Известно [6, с. 462], что общее решение уравнения $\widehat{M}[Y] = 0$ имеет вид $Y = C_1V^2 + C_2VW + C_3W^2$, где $C_{1,2,3}$ — произвольные постоянные; V, W —

какая-либо фундаментальная система решений уравнения

$$\widehat{N}[Z] = Z'' + \frac{1}{2} qZ = 0.$$

Ниже мы будем часто иметь дело с так называемым параксиальным уравнением траекторий (см., например, [7, с. 1117])

$$N[X] = X'' + \frac{\Phi'}{2\widehat{u}^2} X' + \frac{\Phi'' + \lambda^2(\Phi_m')^2}{4\widehat{u}^2} X = 0 \tag{2.2}$$

и двумя линейно независимыми решениями $v(z)$, $w(z)$ уравнения (2.2), удовлетворяющими начальным условиям

$$v(0) = 0,\ v'(0) = 1/\mu, \quad w(0) = 1,\ w'(0) = 0. \tag{2.3}$$

Уравнение $N[X] = 0$ после замены $X = Z/\widehat{u}^{1/2}$ переходит в уравнение $\widehat{N}[Z] = 0$. Полагая $V(z) = \widehat{u}^{1/2} v(z)$ и $W(z) = \widehat{u}^{1/2} w(z)$, имеем $V(0) = 0$, $V'(0) = 1/\mu^{1/2}$ и $W(0) = \mu^{1/2}$, $W'(0) = \frac{\Phi'(0)}{4\mu^{3/2}}$. Выразим теперь функции $R_{20}(z)$, $R_{11}(z)$, $R_{02}(z)$ сначала через $W(z)$, $V(z)$, а затем через $v(z)$, $w(z)$. Получим

$$R_{20}(z) = 2v^2(z),$$

$$R_{11}(z) = 2\cos(\alpha_0 - \beta_0) v(z) w(z) + \lambda \Phi_m'(0) \sin(\alpha_0 - \beta_0) v^2(z),$$

$$R_{02}(z) = 2w^2(z) + \frac{\lambda^2}{2} (\Phi_m'(0))^2 v^2(z).$$

После этого определим функции $U_{ij}(z)$, $L_{ij}(z)$, $i + j = 2$:

$$U_{20}(z) = -\frac{\lambda\Phi_m'}{\widehat{u}} v^2(z),$$

$$U_{11}(z) = -\frac{\lambda\Phi_m'}{2\widehat{u}} \left[2\varkappa_2 v(z) w(z) + \lambda\varkappa_1 \Phi_m'(0) v^2(z)\right] + \frac{\varkappa_1}{\widehat{u}},$$

$$U_{02}(z) = -\frac{\lambda\Phi_m'}{2\widehat{u}} \left[2w^2(z) + \frac{\lambda^2}{2} (\Phi_m'(0))^2 v^2(z)\right] + \frac{\lambda\Phi_m'(0)}{\widehat{u}},$$

$$L_{20}(z) = \frac{1}{4\widehat{u}^3} \int_0^z \widetilde{\Phi}(\tau) v^2(\tau)\, d\tau,$$

$$L_{11}(z) = \frac{1}{8\widehat{u}^3} \int_0^z \widetilde{\Phi}(\tau) \left[2\varkappa_2 v(\tau) w(\tau) + \lambda\Phi_m'(0) \varkappa_1 v^2(\tau)\right] d\tau - \frac{C_0 \lambda \varkappa_1}{2\widehat{u}^3},$$

$$L_{02}(z) = \frac{1}{8\widehat{u}^3} \int_0^z \widetilde{\Phi}(\tau) \left[2w^2(\tau) + \frac{\lambda^2}{2} (\Phi_m'(0))^2 v^2(\tau)\right] d\tau + \frac{\Phi''(0)}{4\widehat{u}^3} - \frac{C_0 \lambda^2 \Phi_m'(0)}{2\widehat{u}^3},$$

где $\varkappa_1 = \sin(\alpha_0 - \beta_0)$, $\varkappa_2 = \cos(\alpha_0 - \beta_0)$, $\widetilde{\Phi}(z) = \Phi'''(z) + 2\lambda^2 \Phi_m'(z) \times \Phi_m''(z)$, $C_0 = \Phi_m'(z) - \Phi_m'(0)$. Можно показать, что $U_{ij}(z) \equiv 0$, $L_{ij}(z) \equiv 0$, $R_{ij}(z) \equiv 0$, $i + j = 3$.

Приступим теперь к определению коэффициентов разложения функции r. Имеем

$$r = r(z, \delta, \rho_0) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{i!\,j!} r_{ij}(z) \delta^i \rho_0^j, \tag{2.4}$$

причем $r_{00}(z) \equiv 0$. Продифференцируем ОУТ (1.5) и начальные условия (1.6) по δ. В полученных выражениях положим $\delta = \rho_0 = 0$. В итоге получим для определения функции $r_{10}(z)$ следующую задачу Коши:

$$\Psi_r[r_{10}]=0,\ r_{10}(0)=0,\ r'_{10}(0)=e^{i\alpha_0}/\mu,$$

где

$$\Psi_r[X]=X''+\left(\frac{\Phi'}{2\widehat{u}^2}+i\lambda\frac{\Phi'_m}{\widehat{u}}\right)X'+\left(\frac{\Phi''}{4\widehat{u}^2}+i\lambda\frac{\Phi''_m}{2\widehat{u}}\right)X.$$

Аналогично, для нахождения функции $r_{01}(z)$ получаем задачу Коши

$$\Psi_r(r_{01})=0,\ r_{01}(0)=e^{i\beta_0},\ r'_{01}(0)=0.$$

Формулируя задачи Коши для определения функций $r_{ij}(z)$, $i+j=2$, легко показать, что $r_{ij}(z)\equiv 0, i+j=2$. Сформулируем теперь задачи для определения функций $r_{ij}(z)$, $i+j=3$:

$$\Psi_r[r_{30}]=3r'_{10}\chi_1[R_{20},L_{20},U_{20}]+3r_{10}\chi_2[R_{20},L_{20}],$$
$$r_{30}(0)=r'_{30}(0)=0;$$
$$\Psi_r[r_{21}]=2r'_{10}\chi_1[R_{11},L_{11},U_{11}]+r'_{01}\chi_1[R_{20},L_{20},U_{20}]+2r_{10}\chi_2[R_{11},L_{11}]+$$
$$+r_{01}\chi_2[R_{20},L_{20}],$$
$$r_{21}(0)=r'_{21}(0)=0;$$
$$\Psi_r[r_{12}]=r'_{10}\chi_1[R_{02},L_{02},U_{02}]+2r'_{01}\chi_1[R_{11},L_{11},U_{11}]+r_{10}\chi_2[R_{02},L_{02}]+$$
$$+2r_{01}\chi_2[R_{11},L_{11}],$$
$$r_{12}(0)=-\frac{e^{i\alpha_0}}{\mu R_k},\ r'_{12}(0)=\frac{e^{i\alpha_0}}{\mu^2R_k}\left(\frac{\Phi'(0)}{2\mu}+i\lambda\Phi'_m(0)\right);$$
$$\Psi_r[r_{03}]=3r'_{01}\chi_1[R_{02},L_{02},U_{02}]+3r_{01}\chi_2[R_{02},L_{02}],$$
$$r_{03}(0)=0,\ r'_{03}(0)=\frac{3e^{i\beta_0}}{2\mu R_k}\left(\frac{\Phi''(0)}{2\mu}+i\lambda\Phi''_m(0)\right).$$

Здесь

$$\chi_1[X,Y,Z]=\left(\frac{\Phi'''}{8\widehat{u}^2}+i\lambda\frac{\Phi'''_m}{4\widehat{u}}\right)X-\left(\frac{\Phi'}{\widehat{u}}+i\lambda\Phi'_m\right)Y-\frac{\lambda\Phi''_m}{2\widehat{u}}Z,$$
$$\chi_2[X,Y]=\left(\frac{\Phi^{(IV)}}{32\widehat{u}^2}+i\lambda\frac{\Phi^{(IV)}_m}{16\widehat{u}}\right)X-\frac{1}{2}\left(\frac{\Phi''}{\widehat{u}}+i\lambda\Phi''_m\right)Y.$$

Уравнение $\Psi_r[X]=0$ после замены $X=e^{-i\widehat{f}}Y$, $\widehat{f}=\frac{\lambda}{2}\int\limits_0^z\frac{\Phi'_m}{\widehat{u}}d\tau$, переходит в уравнение (2.2): $N[Y]=0$.
Следовательно,

$$r_{10}(z)=e^{-i\widehat{f}}e^{i\alpha_0}v(z),$$
$$r_{01}(z)=e^{-i\widehat{f}}e^{i\beta_0}w(z)+e^{-i\widehat{f}}e^{i\beta_0}i\,\frac{\lambda}{2}\Phi'_m(0)\,v(z),$$
$$r_{30}(z)=6e^{i\alpha_0}e^{-i\widehat{f}}(B+ib),$$
$$r_{21}(z)=2e^{i\beta_0}e^{-i\widehat{f}}(G+ig)+2e^{i(2\alpha_0-\beta_0)}e^{-i\widehat{f}}(F+if),$$
$$r_{12}(z)=2e^{i\alpha_0}e^{-i\widehat{f}}(D+id)+2e^{i(2\beta_0-\alpha_0)}e^{-i\widehat{f}}(C+ic),$$
$$r_{03}(z)=6e^{i\beta_0}e^{-i\widehat{f}}(E+ie),$$

где

$$B = \int_0^z Q(z, \tau) \Gamma [v(\tau), v^2(\tau), \tau] \, d\tau,$$

$$b = \int_0^z Q(z, \tau) \Gamma_1 [v(\tau), v^2(\tau), \tau] \, d\tau,$$

$$G = \int_0^z Q(z, \tau) \{\Gamma [w(\tau), v^2(\tau), \tau] - 2p\Gamma_1 [v(\tau), v^2(\tau), \tau] + \Gamma [v(\tau), v(\tau) w(\tau),$$
$$\tau] - \widehat{B} [v(\tau), \tau]\} \, d\tau,$$

$$g = \int_0^z Q(z, \tau) \{\Gamma_1 [w(\tau), v^2(\tau), \tau] + 2p\Gamma [v(\tau), v^2(\tau), \tau] + \Gamma_1 [v(\tau), v(\tau) w(\tau),$$
$$\tau] + \widehat{A} [v(\tau), \tau]\} \, d\tau,$$

$$F = \int_0^z Q(z, \tau) \{\Gamma [v(\tau), v(\tau) w(\tau), \tau] + p\Gamma_1 [v(\tau), v^2(\tau), \tau] + \widehat{B} [v(\tau), \tau]\} \, d\tau,$$

$$f = \int_0^z Q(z, \tau) \{\Gamma_1 [v(\tau), v(\tau) w(\tau), \tau] - p\Gamma [v(\tau), v^2(\tau), \tau] - \widehat{A} [v(\tau), \tau]\} \, d\tau,$$

$$D = \int_0^z Q(z, \tau) \left\{\frac{1}{2} \Gamma [v(\tau), R_{02}(\tau), \tau] + \Gamma [w(\tau), v(\tau) w(\tau), \tau] + p\Gamma_1 [w(\tau),\right.$$
$$v^2(\tau), \tau] + p^2\Gamma [v(\tau), v^2(\tau), \tau] - p\Gamma_1 [v(\tau), v(\tau) w(\tau), \tau] + \widehat{C} [v(\tau), \tau] + \widehat{B} [w(\tau),$$
$$\left.\tau] + p\widehat{A} [v(\tau), \tau]\right\} d\tau + \frac{\Phi'(0)}{4\mu^2 R_k} v(z) - \frac{w(z)}{2\mu R_k},$$

$$d = \int_0^z Q(z, \tau) \left\{\frac{1}{2} \Gamma_1 [v(\tau), R_{02}(\tau), \tau] + \Gamma_1 [w(\tau), v(\tau) w(\tau), \tau] - p\Gamma [w(\tau),\right.$$
$$v^2(\tau), \tau] + p^2\Gamma_1 [v(\tau), v^2(\tau), \tau] + p\Gamma [v(\tau), v(\tau) w(\tau), \tau] + \widehat{D} [v(\tau), \tau] -$$
$$\left.- \widehat{A} [w(\tau), \tau] + p\widehat{B} [v(\tau), \tau]\right\} d\tau - \frac{p}{\mu R_k} v(z),$$

$$C = \int_0^z Q(z, \tau) \{\Gamma [w(\tau), v(\tau) w(\tau), \tau] - p\Gamma_1 [w(\tau), v^2(\tau), \tau] - p^2\Gamma [v(\tau),$$
$$v^2(\tau), \tau] + p\Gamma_1 [v(\tau), v(\tau) w(\tau), \tau] - \widehat{B} [w(\tau), \tau] - p \widehat{A} [v(\tau), \tau]\} \, d\tau,$$

$$c = \int_0^z Q(z, \tau) \{\Gamma_1 [w(\tau), v(\tau) w(\tau), \tau] + p\Gamma [w(\tau), v^2(\tau), \tau] - p^2\Gamma_1 [v(\tau),$$
$$v^2(\tau), \tau] + p\Gamma [v(\tau), v(\tau) w(\tau), \tau] + \widehat{A} [w(\tau), \tau] - p \widehat{B} [v(\tau), \tau]\} \, d\tau,$$

$$E = \int_0^z Q(z, \tau) \left\{-\frac{1}{2} \Gamma [w(\tau), R_{02}(\tau), \tau] - \frac{1}{2} p\Gamma_1 [v(\tau), R_{02}(\tau), \tau] + \widehat{C} [w(\tau),\right.$$
$$\left.\tau] - p\widehat{D} [v(\tau), \tau]\right\} d\tau + \frac{\Phi''(0)}{8\mu R_k} v(z),$$

$$e = \int_0^z Q(z, \tau) \left\{\frac{1}{2} \Gamma_1 [w(\tau), R_{02}(\tau), \tau] + \frac{1}{2} p\Gamma [v(\tau), R_{02}(\tau), \tau] + \widehat{D} [w(\tau\right.$$

$$\tau] + p\widehat{C}[v(\tau), \tau]\Big\} d\tau + \frac{\lambda\Phi_m''(0)}{4R_k} v(z),$$

$$Q(z, \tau) = v(z) w(\tau) - v(\tau) w(z),$$

$$R_{02}(z) = 2w^2(z) + 2p^2v^2(z),$$

$$\Gamma[X, Y, z] = \frac{4\widetilde{\Phi}(z) X' + \left(\Phi^{(IV)}(z) + 4\lambda^2\Phi_m'(z)\Phi_m'''(z)\right) X}{32\widehat{u}(z)} Y -$$

$$- \frac{2\Phi'(z) X' + \left(\Phi''(z) + \lambda^2\Phi_m'^2(z)\right) X}{16\widehat{u}^3(z)} \int_0^z \widetilde{\Phi}(\tau) Y\, d\tau,$$

$$\Gamma_1[X, Y, z] = \lambda \frac{4\widehat{u}^2(z)\Phi_m'''(z) X' + \left(\widehat{u}^2(z)\Phi_m^{(IV)}(z) - \widetilde{\Phi}(z)\Phi_m'(z)\right) X}{16\widehat{u}^2(z)} Y -$$

$$- \lambda \frac{2\Phi_m'(z)\widehat{u}^2(z) X' + \left(\widehat{u}^2(z)\Phi_m''(z) - \Phi'(z)\Phi_m'(z)\right) X}{16\widehat{u}^4(z)} \int_0^z \widetilde{\Phi}(\tau) Y\, d\tau,$$

$$p = \lambda\Phi_m'(0)/2,$$

$$\widehat{A}[X, z] = \frac{\lambda}{4\widehat{u}^3(z)} \left[C_0(z)\Phi'(z) - \widehat{u}^2(z)\Phi_m''(z)\right] X' + \frac{C_0(z)\lambda}{8\widehat{u}^3(z)} [\Phi''(z) +$$

$$+ \lambda^2\Phi_m'^2(z)] X,$$

$$\widehat{B}[X, z] = \frac{C_0(z)\lambda^2\Phi_m'(z)}{4\widehat{u}^2(z)} X' + \frac{\lambda^2}{8\widehat{u}^4(z)} \left[\widehat{u}^2(z)\Phi_m''(z)\left(C_0(z) + \Phi_m'(z)\right) -\right.$$

$$\left. - C_0(z)\Phi'(z)\Phi_m'(z)\right] X,$$

$$\widehat{C}[X, z] = \frac{1}{4\widehat{u}^3(z)} \left\{2\lambda p\left[C_0(z)\Phi'(z) - \widehat{u}^2(z)\Phi_m''(z)\right] - \frac{\Phi'(0)}{R_k}\Phi'(z)\right\} X' +$$

$$+ \frac{\Phi''(z) + \lambda^2\Phi_m'^2(z)}{8\widehat{u}^3(z)} \left\{2C_0(z)\lambda p - \frac{\Phi'(0)}{R_k}\right\} X,$$

$$\widehat{D}[X, z] = \frac{\lambda\Phi_m'(z)}{4\widehat{u}^2(z)} \left[2\lambda C_0(z) p - \frac{\Phi'(0)}{R_k}\right] X' + \frac{\lambda}{8\widehat{u}^4(z)} \left\{2\lambda p\left[\widehat{u}^2(z)\Phi_m''(z) \times\right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(C_0(z) + \Phi_m'(z)\right) - C_0(z)\Phi'(z)\Phi_m'(z)\right] + \frac{\Phi'(0)}{R_k}\left[\Phi'(z)\Phi_m'(z) - \Phi_m''(z)\right]\right\} X.$$

Таким образом, в случае катодных ЭООС мы получили следующее аберрационное выражение для траектории:

$$r = e^{-i\widehat{f}} \{e^{i\alpha_0} v(z)\delta + e^{i\beta_0}[w(z) + ipv(z)]\rho_0 + e^{i\alpha_0}(B + ib)\delta^3 +$$

$$+ \left[e^{i\beta_0}(G + ig) + e^{i(2\alpha_0 - \beta_0)}(F + if)\right]\delta^2\rho_0 + \left[e^{i\alpha_0}(D + id) +\right.$$

$$\left. + e^{i(2\beta_0 - \alpha_0)}(C + ic)\right]\delta\rho_0^2 + e^{i\beta_0}(E + ie)\rho_0^3 + \ldots\}. \tag{2.5}$$

Отметим, что формула (2.5) дает значение функции $r(z)$ с точностью до малых величин пятого порядка (по δ и ρ_0). В самом деле, формулируя задачи Коши для определения функций $r_{ij}(z)$, $i + j = 4$, можно показать, что $r_{ij}(z) \equiv 0$, $i + j = 4$.

§ 3. ВРЕМЕННЫЕ АБЕРРАЦИИ КАТОДНЫХ ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ

Используя результаты предыдущих параграфов, мы без труда можем решить вопрос о нахождении временных аберраций катодных линз. С этой целью мы используем уравнение (1.3), которое перепишем в следующем виде ($\sigma = +1$):

$$\frac{dt}{dz} = \lambda_1 L, \quad t(z_0) = 0. \tag{3.1}$$

Решение задачи Коши (3.1) будем искать в виде

$$t = t(z, \delta, \rho_0) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{i!\,j!} t_{ij}(z)\,\delta^i \rho_0^j. \tag{3.2}$$

В силу формул из § 2 имеем

$$t_{00}(z) = \lambda_1 \int_0^z \frac{d\tau}{\widetilde{u}(\tau)}, \quad t_{10}(z) \equiv 0, \quad t_{01}(z) \equiv 0,$$

$$t_{11}(z) = \frac{\lambda_1}{8} \int_0^z \frac{1}{\widetilde{u}^3(\tau)} \left(\int_0^\tau \widetilde{\Phi}(\varphi) R_{11}(\varphi)\, d\varphi - 4\lambda \varkappa_1 C_0(\tau) \right) d\tau,$$

$$t_{20}(z) = \frac{\lambda_1}{4} \int_0^z \frac{1}{\widetilde{u}^3(\tau)} \left(\int_0^\tau \widetilde{\Phi}(\varphi)\, v^2(\varphi)\, d\varphi \right) d\tau,$$

$$t_{02}(z) = -\frac{\lambda_1}{\mu R_k} + \frac{\lambda_1}{8} \int_0^z \frac{1}{\widetilde{u}^3(\tau)} \left(\int_0^\tau \widetilde{\Phi}(\varphi) R_{02}(\varphi)\, d\varphi + \frac{4\Phi'(0)}{R_k} - 8\lambda p C_0(\tau) \right) d\tau;$$

$$t_{ij}(z) \equiv 0, \quad i + j = 3.$$

Таким образом, в случае катодных ЭООС мы получили следующее аберрационное выражение для времени пролета:

$$t = t_{00}(z) + \frac{1}{2} t_{20}(z)\,\delta^2 + t_{11}(z)\,\delta\rho_0 + \frac{1}{2} t_{02}(z)\,\rho_0^2 + \ldots. \tag{3.3}$$

Отметим, что формула (3.3) дает значение функции $t(z)$ с точностью до малых величин четвертого порядка (по δ и ρ_0).

§ 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ АБЕРРАЦИЙ В НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ

Изучая формулы для коэффициентов аберраций, полученные в § 2, 3, мы убеждаемся, что они плохо приспособлены для конкретных вычислений из-за наличия особенностей в подынтегральных выражениях (μ мало, $\Phi(0) = 0$). В этом параграфе мы рассмотрим два частных случая, в которых формулы для коэффициентов аберраций переписаны так, что они уже не содержат особенностей.

Пусть $\Phi_m(z) \equiv 0$, $\Phi(z)$ — некоторая аналитическая функция такая, что $\Phi(z) = Az$ при $0 \leqslant z \leqslant z_1$ и $\Phi(z) > \mu^2$ при $z \geqslant z_1$, где $A > 0$ — некоторая постоянная, z_1 — точка на оси Oz. При $z \leqslant z_1$ легко получаем явные формулы для двух линейно независимых решений $v(z)$, $w(z)$ уравнения (2.2):

$$v(z) = \frac{2}{A}\left(\sqrt{\mu^2 + Az} - \mu\right), \quad w(z) \equiv 1; \tag{4.1}$$

при $z > z_1$ функции $v(z)$, $w(z)$ можно искать в виде рядов по малому параметру μ:

$$\begin{aligned} v(z) &= v_0(z) + \mu v_1(z) + \frac{1}{2}\mu^2 v_2(z) + \ldots, \\ w(z) &= w_0(z) + \mu w_1(z) + \frac{1}{2}\mu^2 w_2(z) + \ldots. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Учитывая формулы (4.1), (4.2), после простых, но громоздких выкладок последовательно получаем

а) при $\frac{\mu^2}{A} < z \leqslant z_1$

$$r(z) = 2\left(\frac{z}{A}\right)^{1/2} e^{i\alpha_0}\delta + e^{i\beta_0}\rho_0 - \frac{2}{A} e^{i\alpha_0}\mu\delta + \left(\frac{1}{A^3 z}\right)^{1/2} e^{i\alpha_0}\delta\mu^2 + \ldots, \quad (4.3)$$

$$t(z) = 2\lambda_1\left(\frac{z}{A}\right)^{1/2} - \frac{2\lambda_1}{A}\mu + \lambda_1\left(\frac{1}{A^3 z}\right)^{1/2}\mu^2 + \ldots; \quad (4.4)$$

б) при $z > z_1$

$$r(z) = e^{i\alpha_0} v_0(z)\,\delta + e^{i\beta_0} w_0(z)\,\rho_0 + e^{i\alpha_0} v_1(z)\,\delta\mu + \frac{1}{2} e^{i\alpha_0} v_2(z)\,\delta\mu^2 +$$
$$+ \frac{1}{2} e^{i\beta_0} w_2(z)\,\rho_0\mu^2 + e^{i\alpha_0} B\delta^3 + \left[e^{i\beta_0} G + e^{i(2\alpha_0-\beta_0)} F\right]\delta^2\rho_0 +$$
$$+ \left[e^{i\alpha_0} D + e^{i(2\beta_0-\alpha_0)} C\right]\delta\rho_0^2 + e^{i\beta_0} E\rho_0^3 + \ldots, \quad (4.5)$$

$$t(z) = 2\lambda_1\left(\frac{z_1}{A}\right)^{1/2} + \lambda_1\int_{z_1}^{z}\frac{d\tau}{\Phi^{1/2}(\tau)} - \frac{2\lambda_1}{A}\mu +$$
$$+ \left\{\frac{\lambda_1}{8}\int_{z_1}^{z}\frac{1}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left[\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,v_0^2(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau\right\}\delta^2 +$$
$$+ \left\{\frac{\lambda_1\varkappa_2}{4}\int_{z_1}^{z}\frac{1}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left[\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,v_0(\zeta)\,w_0 d\zeta\right]d\tau\right\}\delta\rho_0 +$$
$$+ \left\{\frac{\lambda_1}{8}\int_{z_1}^{z}\frac{1}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left[\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,w_0^2(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau\right\}\rho_0^2 +$$
$$+ \lambda_1\left\{\left(\frac{1}{A^3 z_1}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\int_{z_1}^{z}\frac{d\tau}{\Phi^{3/2}(\tau)}\right\}\mu^2 +$$
$$+ \left\{\frac{\lambda_1}{4}\int_{z_1}^{z}\frac{1}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left[\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,v_0(\zeta)\,v_1(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau\right\}\delta^2\mu +$$
$$+ \left\{\frac{\lambda_1\varkappa_2}{4}\int_{z_1}^{z}\frac{1}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left[\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,v_1(\zeta)\,w_0(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau\right\}\delta\rho_0\mu + \ldots, \quad (4.6)$$

где

$$B = \frac{v_0(z)}{32}\left\{\frac{v_0^3(z)\,w_0(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)} - \frac{v_0^3(z_1)\,w_0(z_1)\,\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)} - \right.$$
$$\left. - \int_{z_1}^{z}\frac{v_0^2(\tau)\,\Phi'''(\tau)}{\Phi^{1/2}(\tau)}\left[v_0(\tau)\,w_0'(\tau) - v_0'(\tau)w_0(\tau) - \frac{v_0(\tau)\,w_0(\tau)\,\Phi'(\tau)}{2\Phi(\tau)}\right]d\tau\right\} -$$
$$- \frac{w_0(z)}{32}\left\{\frac{v_0^4(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)} - \frac{v_0^4(z_1)\,\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)} + \frac{1}{2}\int_{z_1}^{z}\frac{v_0^4(\tau)\,\Phi'(\tau)\,\Phi'''(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}d\tau\right\} -$$

$$-\frac{v_0(z)}{16}\int_{z_1}^{z}\frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\{2\Phi'(\tau)v_0'(\tau)+\Phi''(\tau)v_0(\tau)\}\left(\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)v_0^2(\zeta)\,d\zeta\right)d\tau+$$

$$+\frac{w_0(z)}{16}\int_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\{2\Phi'(\tau)v_0'(\tau)+\Phi''(\tau)v_0(\tau)\}\left(\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)v_0^2(\zeta)\,d\zeta\right)d\tau,$$

$$G=\frac{v_0(z)}{16}\left\{\frac{v_0^2(z)\,w_0^2(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)}-\frac{v_0^2(z_1)\,w_0^2(z_1)\,\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_{z_1}^{z}\frac{v_0^2(\tau)\,w_0^2(\tau)\,\Phi'(\tau)\,\Phi'''(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\,d\tau\right\}-$$

$$-\frac{w_0(z)}{16}\left\{\frac{v_0^3(z)\,w_0(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)}-\frac{v_0^3(z_1)\,w_0(z_1)\,\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)}-\right.$$

$$\left.-\int_{z_1}^{z}\frac{v_0^2(\tau)\,\Phi'''(\tau)}{\Phi^{1/2}(\tau)}\left(v_0'(\tau)\,w_0(\tau)-v_0(\tau)\,w_0'(\tau)-\frac{v_0(\tau)\,w_0(\tau)\,\Phi'(\tau)}{2\Phi(\tau)}\right)d\tau\right\}-$$

$$-\frac{v_0(z)}{16}\int_{z_1}^{z}\frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\{2\Phi'(\tau)w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)w_0(\tau)\}\left(\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)v_0^2(\zeta)\,d\zeta\right)d\tau-$$

$$-\frac{v_0(z)}{16}\int_{z_1}^{z}\frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\{2\Phi'(\tau)v_0'(\tau)+\Phi''(\tau)v_0(\tau)\}\left(\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)v_0(\zeta)w_0(\zeta)\,d\zeta\right)d\tau+$$

$$+\frac{w_0(z)}{16}\int_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\{2\Phi'(\tau)w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)w_0(\tau)\}\left(\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)v_0^2(\zeta)\,d\zeta\right)d\tau+$$

$$+\frac{w_0(z)}{16}\int_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\{2\Phi'(\tau)v_0'(\tau)+\Phi''(\tau)v_0(\tau)\}\left(\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)v_0(\zeta)w_0(\zeta)\,d\zeta\right)d\tau,$$

$$F=\frac{v_0(z)}{32}\left\{\frac{v_0^2(z)\,w_0^2(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)}-\frac{v_0^2(z_1)\,w_0^2(z_1)\,\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)}-\right.$$

$$\left.-2\int_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)\,w_0(\tau)\,\Phi'''(\tau)}{\Phi^{1/2}(\tau)}\left(v_0(\tau)\,w_0'(\tau)-v_0'(\tau)\,w_0(\tau)-\frac{v_0(\tau)\,w_0(\tau)\,\Phi'(\tau)}{4\Phi(\tau)}\right)d\tau\right\}-$$

$$-\frac{w_0(z)}{32}\left\{\frac{v_0^3(z)\,w_0(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)}-\frac{v_0^3(z_1)\,w_0(z_1)\,\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)}-\right.$$

$$\left.-\int_{z_1}^{z}\frac{v_0^2(\tau)\,\Phi'''(\tau)}{\Phi^{1/2}(\tau)}\left(v_0(\tau)\,w_0'(\tau)-v_0'(\tau)\,w_0(\tau)-\frac{v_0(\tau)\,w_0(\tau)\,\Phi'(\tau)}{2\Phi(\tau)}\right)d\tau\right\}-$$

$$-\frac{v_0(z)}{16}\int_{z_1}^{z}\frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\{2\Phi'(\tau)v_0'(\tau)+\Phi''(\tau)v_0(\tau)\}\left(\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)v_0(\zeta)w_0(\zeta)\,d\zeta\right)d\tau+$$

$$+\frac{w_0(z)}{16}\int\limits_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\{2\Phi'(\tau)v_0'(\tau)+\Phi''(\tau)v_0(\tau)\}\left(\int\limits_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)v_0(\zeta)w_0(\zeta)\,d\zeta\right)d\tau,$$

$$D=\frac{v_0(z)}{16}\left\{\frac{v_0(z)w_0^3(z)\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)}-\frac{v_0(z_1)w_0^3(z_1)\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{z_1}^{z}\frac{w_0^2(\tau)\Phi'''(\tau)}{\Phi^{1/2}(\tau)}\left(v_0(\tau)w_0'(\tau)-v_0'(\tau)w_0(\tau)-\frac{v_0(\tau)w_0(\tau)\Phi'(\tau)}{2\Phi(\tau)}\right)d\tau\right\}-$$

$$-\frac{w_0(z)}{16}\left\{\frac{v_0^2(z)w_0^2(z)\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)}-\frac{v_0^2(z_1)w_0^2(z_1)\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int\limits_{z_1}^{z}\frac{v_0^2(\tau)w_0^2(\tau)\Phi'(\tau)\Phi'''(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\,d\tau\right\}-$$

$$-\frac{v_0(z)}{16}\int\limits_{z_1}^{z}\frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\{2\Phi'(\tau)v_0'(\tau)+\Phi''(\tau)v_0(\tau)\}\left(\int\limits_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)w_0^2(\zeta)\,d\zeta\right)d\tau+$$

$$+\frac{w_0(z)}{16}\int\limits_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\{2\Phi'(\tau)v_0'(\tau)\,\Phi''(\tau)v_0(\tau)\}\left(\int\limits_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)w_0^2(\zeta)\,d\zeta\right)d\tau-$$

$$-\frac{v_0(z)}{16}\int\limits_{z_1}^{z}\frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\{2\Phi'(\tau)w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)w_0(\tau)\}\left(\int\limits_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)v_0(\zeta)w_0(\zeta)\,d\zeta\right)d\tau+$$

$$+\frac{w_0(z)}{16}\int\limits_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\{2\Phi'(\tau)w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)w_0(\tau)\}\left(\int\limits_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)v_0(\zeta)w_0(\zeta)\,d\zeta\right)d\tau,$$

$$C=\frac{v_0(z)}{32}\left\{\frac{v_0(z)w_0^3(z)\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)}-\frac{v_0(z_1)w_0^3(z_1)\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{z_1}^{z}\frac{w_0^2(\tau)\Phi'''(\tau)}{\Phi^{1/2}(\tau)}\left(v_0'(\tau)w_0(\tau)-v_0(\tau)w_0'(\tau)-\frac{v_0(\tau)w_0(\tau)\Phi'(\tau)}{2\Phi(\tau)}\right)d\tau\right\}-$$

$$-\frac{w_0(z)}{32}\left\{\frac{v_0^2(z)w_0^2(z)\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)}-\frac{v_0^2(z_1)w_0^2(z_1)\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)w_0(\tau)}{\Phi^{1/2}(\tau)}\left(v_0'(\tau)w_0(\tau)-v_0(\tau)w_0'(\tau)-\frac{v_0(\tau)w_0(\tau)\Phi'(\tau)}{4\Phi(\tau)}\right)d\tau\right\}-$$

$$-\frac{v_0(z)}{16}\int\limits_{z_1}^{z}\frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\{2\Phi'(\tau)w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)w_0(\tau)\}\left(\int\limits_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)v_0(\zeta)w_0(\zeta)\,d\zeta\right)d\tau+$$

$$+\frac{w_0(z)}{16}\int\limits_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\{2\Phi'(\tau)w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)w_0(\tau)\}\left(\int\limits_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)v_0(\zeta)w_0(\zeta)\,d\zeta\right)d\tau,$$

$$E=\frac{v_0(z)}{32}\left\{\frac{w_0^4(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)}-\frac{w_0^4(z_1)\,\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)}+\frac{1}{2}\int\limits_{z_1}\frac{w_0^4(\tau)\,\Phi'(\tau)\,\Phi'''(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\,d\tau\right\}-$$

$$-\frac{w_0(z)}{32}\left\{\frac{v_0(z)\,w_0^3(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)}-\frac{v_0(z_1)\,w_0^3(z_1)\,\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{z_1}^{z}\frac{w_0^2(\tau)\,\Phi'''(\tau)}{\Phi^{1/2}(\tau)}\left(v_0'(\tau)\,w_0(\tau)-v_0(\tau)\,w_0'(\tau)-\frac{v_0(\tau)\,w_0(\tau)\,\Phi'(\tau)}{2\Phi(\tau)}\right)d\tau\right\}-$$

$$-\frac{v_0(z)}{16}\int\limits_{z_1}^{z}\frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\,\{2\Phi'(\tau)\,w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,w_0(\tau)\}\left(\int\limits_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,w_0^2(\zeta)\,d\zeta\right)d\tau+$$

$$+\frac{w_0(z)}{16}\int\limits_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\,\{2\Phi'(\tau)\,w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,w_0(\tau)\}\left(\int\limits_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,w_0^2(\zeta)\,d\zeta\right)d\tau.$$

Функции $v_0(z)$, $v_1(z)$, $v_2(z)$, $w_0(z)$, $w_1(z)$, $w_2(z)$ в разложениях (4.2) определяются следующим образом:

$$w_0(z)=\bar{w}(z),\quad w_1(z)\equiv 0,$$

$$w_2(z)=\frac{1}{\sqrt{Az_1}}\int\limits_{z_1}^{z}\bar{Q}(z,\tau)\frac{\Phi'(\tau)\,\bar{w}'(\tau)+\frac{1}{2}\Phi''(\tau)\,\bar{w}(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\,d\tau,$$

$$v_0(z)=\frac{1}{\sqrt{Az_1}}\,(2z_1\bar{w}(z)+\bar{v}(z)),\qquad v_1(z)=-\frac{2}{A}\,\bar{w}(z),$$

$$v_2(z)=\frac{1}{(Az_1)^{3/2}}\,(2z_1\bar{w}(z)-\bar{v}(z))+\frac{1}{\sqrt{Az_1}}\int\limits_{z_1}^{z}\bar{Q}(z,\tau)\frac{\Phi'(\tau)\,v_0'(\tau)+\frac{1}{2}\Phi''(\tau)\,v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\,d\tau,$$

$$\bar{Q}(z,\tau)=\bar{v}(z)\bar{w}(\tau)-\bar{w}(z)\bar{v}(\tau);$$

$\bar{v}(z)$, $\bar{w}(z)$ — два линейно независимых решения уравнения

$$N_0[X]=X''+\frac{\Phi'}{2\Phi}X'+\frac{\Phi''}{4\Phi}X=0,$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$\bar{v}(z_1)=0,\ \bar{v}'(z_1)=1,\qquad \bar{w}(z_1)=1,\ \bar{w}'(z_1)=0.$$

Заметим, что в разложениях (4.3)—(4.6) выписаны все ненулевые члены вплоть до членов третьего порядка по δ, ρ_0, μ.

Рассмотрим теперь другой случай. Пусть $\Phi_m(z)\equiv 0$, а $\Phi(z)$ — некоторая аналитическая функция такая, что $\Phi(z)=\alpha z/(R_k-z)$ при $0\leqslant z\leqslant z_1$ и $\Phi(z)>\mu^2$ при $z\geqslant z_1$. Здесь $\alpha=\dfrac{U_cR_c}{R_k-R_c}$; U_c, R_c, R_k, $(R_k>R_c)$ — положительные числа; R_k — радиус кривизны поверхности катода в вершине катода; $z_1<R_k-R_c$. Определим сначала два линейно независимых решения $v(z)$, $w(z)$ уравнения (2.2). После несложных выкладок получаем, что при $z\leqslant z_1$

$$\begin{aligned} v(z)&=2\frac{R_k-z}{\alpha}\left(\sqrt{\mu^2+\Phi(z)}-\mu\right),\\ w(z)&=\frac{R_k-z}{R_k}+\frac{\mu}{R_k}\,v(z). \end{aligned}\tag{4.7}$$

При $z>z_1$ функции $v(z)$, $w(z)$ будем вновь искать в виде (4.2).

В силу формул (4.7), (4.2) после очень громоздких выкладок имеем а) при $z \leqslant z_1$ и $\Phi(z) > \mu^2$

$$r(z) = 2\left[\frac{z(R_k - z)}{\alpha}\right]^{1/2} e^{i\alpha_0}\delta + \frac{R_k - z}{R_k} e^{i\beta_0}\rho_0 - 2\frac{R_k - z}{\alpha} e^{i\alpha_0}\delta\mu +$$

$$+ \frac{2}{R_k}\left[\frac{z(R_k - z)}{\alpha}\right]^{1/2} e^{i\beta_0}\rho_0\mu + \left[\frac{(R_k - z)^3}{z\alpha^3}\right]^{1/2} e^{i\alpha_0}\delta\mu^2 -$$

$$- 2\frac{R_k - z}{\alpha R_k} e^{i\beta_0}\rho_0\mu^2 + \left[\frac{z^3}{\alpha^3(R_k - z)}\right]^{1/2} e^{i\alpha_0}\delta^3 + \frac{z}{\alpha R_k}\left[e^{i\beta_0} + e^{i(2\alpha_0 - \beta_0)}\right]\delta^2\rho_0 -$$

$$- \frac{1}{2}\left[\frac{R_k - z}{\alpha z}\right]^{1/2} \frac{R_k - 2z}{R_k^2} e^{i\alpha_0}\delta\rho_0^2 + \frac{R_k - z}{2R_k^3} e^{i\beta_0}\rho_0^3 + \ldots, \qquad (4.8)$$

$$t(z) = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\alpha}}\left\{\sqrt{\Delta z} + R_k \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\Delta}\right)^{1/2}\right\} - \frac{2\lambda_1 R_k}{\alpha}\mu +$$

$$+ \frac{3\lambda_1}{2\alpha^{3/2}}\left\{-\sqrt{\Delta z} + R_k \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\Delta}\right)^{1/2}\right\}\delta^2 + \frac{2\lambda_1\varkappa_2 z}{\alpha R_k}\delta\rho_0 +$$

$$+ \frac{\lambda_1}{4\sqrt{\alpha}R_k^2}\left\{3\sqrt{\Delta z} - (2R_k + z)\left(\frac{\Delta}{z}\right)^{1/2}\right\}\rho_0^2 +$$

$$+ \frac{\lambda_1}{2\alpha^{3/2}}\left\{(2R_k + z)\left(\frac{\Delta}{z}\right)^{1/2} + 3R_k \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\Delta}\right)^{1/2}\right\}\mu^2 -$$

$$- \frac{4\lambda_1 z}{\alpha^2}\delta^2\mu - \frac{6\lambda_1\varkappa_2\sqrt{\Delta z}}{\alpha^{3/2}R_k}\delta\rho_0\mu + \frac{\lambda_1(2z - R_k)}{\alpha R_k^2}\rho_0^2\mu - \frac{8\lambda_1 R_k}{3\alpha^2}\mu^3 - \ldots; \qquad (4.9)$$

б) при $z > z_1$

$$r(z) = e^{i\alpha_0}v_0(z)\delta + e^{i\beta_0}w_0(z)\rho_0 + e^{i\alpha_0}v_1(z)\delta\mu + e^{i\beta_0}w_1(z)\rho_0\mu +$$

$$+ \frac{1}{2}e^{i\alpha_0}v_2(z)\delta\mu^2 + \frac{1}{2}e^{i\beta_0}w_2(z)\rho_0\mu^2 + e^{i\alpha_0}B\delta^3 +$$

$$+ \left[e^{i\beta_0}G + e^{(2\alpha_0 - \beta_0)}F\right]\delta^2\rho_0 + \left[e^{i\alpha_0}D + e^{i(2\beta_0 - \alpha_0)}C\right]\delta\rho_0^2 + e^{i\beta_0}E\rho_0^3 + \ldots, \qquad (4.10)$$

$$t(z) = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\alpha}}\left\{\sqrt{\Delta_1 z_1} + R_k \operatorname{arctg}\left(\frac{z_1}{\Delta_1}\right)^{1/2}\right\} + \lambda_1\int_{z_1}^{z}\frac{d\tau}{\Phi^{1/2}(\tau)} -$$

$$- \frac{2\lambda_1 R_k}{\alpha}\mu + \frac{3\lambda_1}{2}\left\{\alpha^{-3/2}\left[-\sqrt{\Delta_1 z_1} + R_k \operatorname{arctg}\left(\frac{z_1}{\Delta_1}\right)^{1/2}\right] +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{z_1}{\Delta_1}\right)^2\int_{z_1}^{z}\Phi^{-3/2}(\tau)\,d\tau + \frac{1}{12}\int_{z_1}^{z}\Phi^{-3/2}(\tau)\left[\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)v_0^2(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau\right\}\delta^2 +$$

$$+ \frac{2\lambda_1\varkappa_2}{\alpha R_k}\left\{z_1 + \Phi_1^{3/2}\int_{z_1}^{z}\Phi^{-3/2}(\tau)\,d\tau + \frac{\alpha R_k}{8}\int_{z_1}^{z}\Phi^{-3/2}(\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)v_0(\zeta)w_0(\zeta)\,d\zeta\right)d\tau\right\}\delta\rho_0 + \frac{\lambda_1}{4R_k^2}\left\{-\frac{2R_k + z_1}{\Phi_1^{1/2}} + 3\left(\frac{\Delta_1 z_1}{\alpha}\right)^{1/2} +\right.$$

$$\left. + (\alpha + 3\Phi_1)\int_{z_1}^{z}\Phi^{-3/2}(\tau)\,d\tau + \frac{R_k^2}{2}\int_{z_1}^{z}\Phi^{-3/2}(\tau)\left[\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)w_0^2(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau\right\}\rho_0^2 +$$

$$+\frac{\lambda_1}{2\alpha^{3/2}}\left\{(2R_k+z_1)\left(\frac{\Delta_1}{z_1}\right)^{1/2}+3\,\mathrm{arctg}\left(\frac{z_1}{\Delta_1}\right)^{1/2}-\alpha^{3/2}\int\limits_{z_1}^{z}\Phi^{-3/2}(\tau)\,d\tau\right\}\mu^2+$$

$$+\frac{2\lambda_1}{\alpha^2}\left\{-2z_1-\Phi_1^{3/2}\int\limits_{z_1}^{z}\Phi^{-3/2}(\tau)\,d\tau+\frac{\alpha^2}{8}\int\limits_{z_1}^{z}\Phi^{-3/2}(\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\int\limits_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,v_0(\zeta)\,v_1(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau\right\}\delta^2\mu+\frac{3\lambda_1\varkappa_2}{R_k}\left\{-\frac{2\sqrt{\Delta_1 z_1}}{\alpha^{3/2}}+\right.$$

$$+\frac{z_1}{\Delta_1}\left(\frac{z_1}{\Delta_1}-1\right)\int\limits_{z_1}^{z}\Phi^{-3/2}(\tau)\,d\tau+$$

$$\left.+\frac{R_k}{12}\int\limits_{z_1}^{z}\Phi^{-3/2}(\tau)\left[\int\limits_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,(v_0(\zeta)\,w_1(\zeta)+v_1(\zeta)\,w_0(\zeta))\,d\zeta\right]d\tau\right\}\delta\rho_0\mu+$$

$$+\frac{\lambda_1}{\alpha R_k^2}\left\{2z_1-R_k+2\Phi_1^{3/2}\int\limits_{z_1}^{z}\Phi^{-3/2}(\tau)\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha R_k^2}{4}\int\limits_{z_1}^{z}\Phi^{-3/2}(\tau)\left[\int\limits_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,w_0(\zeta)\,w_1(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau\right\}\rho_0^2\mu-\frac{8\lambda_1 R_k}{3\alpha^2}\mu^3+\ldots, \quad (4.11)$$

где

$$B=v_0(z)\frac{3}{2\alpha^2}\Phi_1-w_0(z)\frac{2R_k}{\alpha^3}\Phi_1^{3/2}+$$

$$+\frac{v_0(z)}{32}\left\{\frac{v_0^3(z)\,w_0(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)}-\frac{v_0^3(z_1)\,w_0(z_1)\,\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{z_1}^{z}\frac{v_0^2(\tau)\,\Phi'''(\tau)}{\Phi^{1/2}(\tau)}\left(v_0(\tau)\,w_0'(\tau)-v_0'(\tau)\,w_0(\tau)-\frac{v_0(\tau)\,w_0(\tau)\,\Phi'(\tau)}{2\Phi(\tau)}\right)d\tau\right\}-$$

$$-\frac{w_0(z)}{32}\left\{\frac{v_0^4(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)}-\frac{v_0^4(z_1)\,\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)}+\frac{1}{2}\int\limits_{z_1}^{z}\frac{v_0^4(\tau)\,\Phi'(\tau)\,\Phi'''(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\,d\tau\right\}-$$

$$-v_0(z)\frac{3\Phi_1^2}{4\alpha^2}\int\limits_{z_1}^{z}\frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left(2\Phi'(\tau)\,v_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,v_0(\tau)\right)d\tau+$$

$$+w_0(z)\frac{3\Phi_1^2}{4\alpha^2}\int\limits_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left(2\Phi'(\tau)\,v_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,v_0(\tau)\right)d\tau-$$

$$-\frac{v_0(z)}{16}\int\limits_{z_1}^{z}\frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left(2\Phi'(\tau)\,v_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,v_0(\tau)\right)\left[\int\limits_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,v_0^2(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau+$$

$$+\frac{w_0(z)}{16}\int\limits_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left(2\Phi'(\tau)\,v_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,v_0(\tau)\right)\left[\int\limits_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,v_0^2(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau,$$

$$G=\frac{v_0(z)}{\alpha R_k}\Phi_1^{1/2}-w_0(z)\frac{\Phi_1}{\alpha^2}+\frac{v_0(z)}{16}\left\{\frac{v_0^2(z)\,w_0^2(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)}-\right.$$

$$\left.-\frac{v_0^2(z_1)\,w_0^2(z_1)\,\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)}+\frac{1}{2}\int_{z_1}^{z}\frac{v_0^2(\tau)\,w_0^2(\tau)\,\Phi'(\tau)\,\Phi'''(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\,d\tau\right\}-$$

$$-\frac{w_0(z)}{16}\left\{\frac{v_0^3(z)\,w_0(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)}-\frac{v_0^3(z_1)\,w_0(z_1)\,\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)}-\right.$$

$$\left.-\int_{z_1}^{z}\frac{v_0^2(\tau)\,\Phi'''(\tau)}{\Phi^{1/2}(\tau)}\left(v_0'(\tau)\,w_0(\tau)-v_0(\tau)\,w_0'(\tau)-\frac{v_0(\tau)\,w_0(\tau)\,\Phi'(\tau)}{2\Phi(\tau)}\right)d\tau\right\}-$$

$$-v_0(z)\frac{3\Phi_1^2}{4\alpha^2}\int_{z_1}^{z}\frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\big(2\Phi'(\tau)\,w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,w_0(\tau)\big)\,d\tau-$$

$$-v_0(z)\,\frac{\Phi_1^{3/2}}{2\alpha R_k}\int_{z_1}^{z}\frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\big(2\Phi'(\tau)\,v_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,v_0(\tau)\big)\,d\tau+$$

$$+w_0(z)\frac{3\Phi_1}{4\alpha^2}\int_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\big(2\Phi'(\tau)\,w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,w_0(\tau)\big)\,d\tau+$$

$$+w_0(z)\,\frac{\Phi_1^{3/2}}{2\alpha R_k}\int_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\big(2\Phi'(\tau)\,v_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,v_0(\tau)\big)\,d\tau-$$

$$-\frac{v_0(z)}{16}\int_{z_1}^{z}\frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\big(2\Phi'(\tau)\,w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,w_0(\tau)\big)\left[\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,v_0^2(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau-$$

$$-\frac{v_0(z)}{16}\int_{z_1}^{z}\frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\big(2\Phi'(\tau)\,v_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,v_0(\tau)\big)\left[\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,v_0(\zeta)\,w_0(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau+$$

$$+\frac{w_0(z)}{16}\int_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\big(2\Phi'(\tau)\,w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,w_0(\tau)\big)\left[\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,v_0^2(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau+$$

$$+\frac{w_0(z)}{16}\int_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\big(2\Phi'(\tau)\,v_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,v_0(\tau)\big)\left[\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,v_0(\zeta)\,w_0(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau,$$

$$F=v_0(z)\,\frac{\Phi_1^{1/2}}{\alpha R_k}-w_0(z)\frac{\Phi_1}{\alpha^2}+\frac{v_0(z)}{32}\left\{\frac{v_0^2(z)\,w_0^2(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)}-\right.$$

$$-\frac{v_0^2(z_1)\,w_0^2(z_1)\,\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)}-2\int_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)\,w_0(\tau)\,\Phi'''(\tau)}{\Phi^{1/2}(\tau)}\Big(v_0(\tau)\,w_0'(\tau)-v_0'(\tau)\,w_0(\tau)-$$

$$\left.-\frac{v_0(\tau)\,w_0(\tau)\,\Phi'(\tau)}{4\Phi(\tau)}\Big)\,d\tau\right\}-\frac{w_0(z)}{32}\left\{\frac{v_0^3(z)\,w_0(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)}-\frac{v_0^3(z_1)\,w_0(z_1)\,\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)}-\right.$$

$$-\int_{z_1}^{z} \frac{v_0^2(\tau)\,\Phi'''(\tau)}{\Phi^{1/2}(\tau)} \left(v_0(\tau)\,w_0'(\tau) - v_0'(\tau)\,w_0(\tau) - \frac{v_0(\tau)\,w_0(\tau)\,\Phi'(\tau)}{2\Phi(\tau)}\right) d\tau\Bigg\} -$$

$$- v_0(z)\,\frac{\Phi_1^{3/2}}{2\alpha R_k}\int_{z_1}^{z} \frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left(2\Phi'(\tau)\,v_0'(\tau) + \Phi''(\tau)\,v_0(\tau)\right) d\tau +$$

$$+ w_0(z)\,\frac{\Phi_1^{3/2}}{2\alpha R_k}\int_{z_1}^{z} \frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left(2\Phi'(\tau)\,v_0'(\tau) + \Phi''(\tau)\,v_0(\tau)\right) d\tau -$$

$$- \frac{v_0(z)}{16}\int_{z_1}^{z} \frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left(2\Phi'(\tau)\,v_0'(\tau) + \Phi''(\tau)\,v_0(\tau)\right)\left[\int_{z_1}^{\tau} \Phi'''(\zeta)\,v_0(\zeta)\,w_0(\zeta)\,d\zeta\right] d\tau +$$

$$+ \frac{w_0(z)}{16}\int_{z_1}^{z} \frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left(2\Phi'(\tau)\,v_0'(\tau) + \Phi''(\tau)\,v_0(\tau)\right)\left[\int_{z_1}^{\tau} \Phi'''(\zeta)\,v_0(\zeta)\,w_0(\zeta)\,d\zeta\right] d\tau,$$

$$D = \frac{v_0(z)}{4z_1} - \frac{w_0(z)}{R_k\Phi_1^{1/2}} - v_0(z)\,\frac{\alpha}{8R_k^2}\int_{z_1}^{z} \frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left(2\Phi'(\tau)\,v_0'(\tau) + \Phi''(\tau)\,v_0(\tau)\right) d\tau +$$

$$+ w_0(z)\,\frac{\alpha}{8R_k^2}\int_{z_1}^{z} \frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left(2\Phi'(\tau)\,v_0'(\tau) + \Phi''(\tau)\,v_0(\tau)\right) d\tau +$$

$$+ \frac{v_0(z)}{16}\Bigg\{\frac{v_0(z)\,w_0^3(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)} - \frac{v_0(z_1)\,w_0^3(z_1)\,\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)} -$$

$$-\int_{z_1}^{z} \frac{w_0^2(\tau)\,\Phi'''(\tau)}{\Phi^{1/2}(\tau)} \left(v_0(\tau)\,w_0'(\tau) - v_0'(\tau)\,w_0(\tau) - \frac{v_0(\tau)\,w_0(\tau)\,\Phi'(\tau)}{2\Phi(\tau)}\right) d\tau\Bigg\} -$$

$$- \frac{w_0(z)}{16}\Bigg\{\frac{v_0^2(z)\,w_0^2(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)} - \frac{v_0^2(z_1)\,w_0^2(z_1)\,\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{z_1}^{z} \frac{v_0^2(\tau)\,w_0^2(\tau)\,\Phi'(\tau)\,\Phi'''(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\,d\tau\Bigg\} -$$

$$- v_0(z)\,\frac{3\Phi_1}{8R_k^2}\int_{z_1}^{z} \frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left(2\Phi'(\tau)\,v_0'(\tau) + \Phi''(\tau)\,v_0(\tau)\right) d\tau -$$

$$- v_0(z)\,\frac{\Phi_1^{3/2}}{2\alpha R_k}\int_{z_1}^{z} \frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left(2\Phi'(\tau)\,w_0'(\tau) + \Phi''(\tau)\,w_0(\tau)\right) d\tau +$$

$$+ w_0(z)\,\frac{3\Phi_1}{8R_k^2}\int_{z_1}^{z} \frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left(2\Phi'(\tau)\,v_0'(\tau) + \Phi''(\tau)\,v_0(\tau)\right) d\tau +$$

$$+ w_0(z)\,\frac{\Phi_1^{3/2}}{2\alpha R_k}\int_{z_1}^{z} \frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left(2\Phi'(\tau)\,w_0'(\tau) + \Phi''(\tau)\,w_0(\tau)\right) d\tau -$$

$$
-\frac{v_0(z)}{16}\int_{z_1}^{z}\frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\big(2\Phi'(\tau)\,v_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,v_0(\tau)\big)\left[\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,w_0^2(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau-
$$

$$
-\frac{v_0(z)}{16}\int_{z_1}^{z}\frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\big(2\Phi'(\tau)\,w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,w_0(\tau)\big)\left[\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,v_0(\zeta)\,w_0(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau+
$$

$$
+\frac{w_0(z)}{16}\int_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\big(2\Phi'(\tau)\,v_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,v_0(\tau)\big)\left[\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,w_0^2(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau+
$$

$$
+\frac{w_0(z)}{16}\int_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\big(2\Phi'(\tau)\,w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,w_0(\tau)\big)\left[\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,v_0(\zeta)\,w_0(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau,
$$

$$
C=\frac{v_0(z)}{32}\left\{\frac{v_0(z)\,w_0^3(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)}-\frac{v_0(z_1)\,w_0^3(z_1)\,\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)}-\right.
$$

$$
\left.-\int_{z_1}^{z}\frac{w_0^2(\tau)\,\Phi'''(\tau)}{\Phi^{1/2}(\tau)}\left(v_0'(\tau)\,w_0(\tau)-v_0(\tau)\,w_0'(\tau)-\frac{v_0(\tau)\,w_0(\tau)\,\Phi'(\tau)}{2\Phi(\tau)}\right)d\tau\right\}-
$$

$$
-\frac{w_0(z)}{32}\left\{\frac{v_0^2(z)\,w_0^2(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)}-\frac{v_0^2(z_1)\,w_0(z_1)\,\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)}-\right.
$$

$$
\left.-2\int_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)\,w_0(\tau)\,\Phi'''(\tau)}{\Phi^{1/2}(\tau)}\left(v_0'(\tau)\,w_0(\tau)-v_0(\tau)\,w_0'(\tau)-\frac{v_0(\tau)\,w_0(\tau)\,\Phi'(\tau)}{4\Phi(\tau)}\right)d\tau\right\}-
$$

$$
-v_0(z)\,\frac{\Phi_1^{3/2}}{2\alpha R_k}\int_{z_1}^{z}\frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\big(2\Phi'(\tau)\,w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,w_0(\tau)\big)\,d\tau+
$$

$$
+w_0(z)\,\frac{\Phi_1^{3/2}}{2\alpha R_k}\int_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\big(2\Phi'(\tau)\,w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,w_0(\tau)\big)\,d\tau-
$$

$$
-\frac{v_0(z)}{16}\int_{z_1}^{z}\frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\big(2\Phi'(\tau)\,w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,w_0(\tau)\big)\left[\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,v_0(\zeta)\,w_0(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau+
$$

$$
+\frac{w_0(z)}{16}\int_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\big(2\Phi'(\tau)\,w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,w_0(\tau)\big)\left[\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,v_0(\zeta)\,w_0(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau,
$$

$$
E=\frac{w_0(z)}{2R_k^2}-\frac{\alpha v_0(z)}{8R_k^2}\int_{z_1}^{z}\frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\big(2\Phi'(\tau)\,w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,w_0(\tau)\big)\,d\tau+
$$

$$
+\frac{\alpha w_0(z)}{8R_k^2}\int_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\big(2\Phi'(\tau)\,w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,w_0(\tau)\big)\,d\tau+
$$

$$
+\frac{v_0(z)}{32}\left\{\frac{w_0^4(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)}-\frac{w_0^4(z_1)\,\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)}+\frac{1}{2}\int_{z_1}^{z}\frac{w_0^4(\tau)\,\Phi'(\tau)\,\Phi'''(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\,d\tau\right\}-
$$

$$-\frac{w_0(z)}{32}\left\{\frac{v_0(z)\,w_0^3(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi^{1/2}(z)}-\frac{v_0(z_1)\,w_0^3(z_1)\,\Phi'''(z_1)}{\Phi^{1/2}(z_1)}-\right.$$

$$\left.-\int_{z_1}^{z}\frac{w_0^2(\tau)\,\Phi'''(\tau)}{\Phi^{1/2}(\tau)}\left(v_0'(\tau)\,w_0(\tau)-v_0(\tau)\,w_0'(\tau)-\frac{v_0(\tau)\,w_0(\tau)\,\Phi'(\tau)}{2\Phi(\tau)}\right)d\tau\right\}-$$

$$-v_0(z)\frac{3\Phi_1}{8R_k^2}\int_{z_1}^{z}\frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left(2\Phi'(\tau)\,w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,w_0(\tau)\right)d\tau+$$

$$+w_0(z)\frac{3\Phi_1}{8R_k^2}\int_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left(2\Phi'(\tau)\,w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,w_0(\tau)\right)d\tau-$$

$$-\frac{v_0(z)}{16}\int_{z_1}^{z}\frac{w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left(2\Phi'(\tau)\,w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,w_0(\tau)\right)\left[\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,w_0^2(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau+$$

$$+\frac{w_0(z)}{16}\int_{z_1}^{z}\frac{v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}\left(2\Phi'(\tau)\,w_0'(\tau)+\Phi''(\tau)\,w_0(\tau)\right)\left[\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)\,w_0^2(\zeta)\,d\zeta\right]d\tau.$$

Функции $v_0(z)$, $v_1(z)$, $v_2(z)$, $w_0(z)$, $w_1(z)$, $w_2(z)$ в разложениях (4.2) определяются следующим образом:

$$v_0(z)=\frac{R_k\sqrt{\Phi_1}}{\alpha z_1}\bar{v}(z)-2\frac{\sqrt{\Phi_1}}{\alpha}\bar{V}(z),\qquad v_1(z)=\frac{2}{\alpha}\bar{V}(z),$$

$$v_2(z)=-\frac{R_k}{\alpha z_1\sqrt{\Phi_1}}\bar{v}(z)-\frac{2}{\alpha\sqrt{\Phi_1}}\bar{V}(z)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\Phi_1}}\int_{z_1}^{z}\bar{Q}(z,\tau)\frac{\Phi'(\tau)\,v_0'(\tau)+\frac{1}{2}\Phi''(\tau)\,v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}d\tau;$$

$$w_0(z)=-\frac{1}{R_k}\bar{V}(z),\qquad w_1(z)=\frac{1}{\alpha\sqrt{\Phi_1}}\left(\frac{\bar{v}(z)}{z_1}-\frac{2}{R_k}\bar{V}(z)\right),$$

$$w_2(z)=\frac{4}{\alpha R_k}\bar{V}(z)+\frac{1}{\sqrt{\Phi_1}}\int_{z_1}^{z}\bar{Q}(z,\tau)\frac{\Phi'(\tau)\,w_0'(\tau)+\frac{1}{2}\Phi''(\tau)\,w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)}d\tau;$$

$$\bar{V}(z)=\bar{v}(z)-\Delta_1\bar{w}(z),\ \Delta_1=R_k-z_1,\ \Delta=R_k-z,\ \Phi_1=\Phi(z_1)=\frac{\alpha z_1}{\Delta_1};$$

$\bar{v}(z)$, $\bar{w}(z)$ — функции, описанные выше. Заметим, что в разложениях (4.8)—(4.11) выписаны все ненулевые члены вплоть до членов третьего порядка по δ, ρ_0, μ.

§ 5. О НАХОЖДЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ АБЕРРАЦИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим теперь вопрос о нахождении решений $v(z)$, $w(z)$ параксиального уравнения траекторий (2.2) в случае, когда $\Phi_m(z)\equiv 0$, а относительно функции $\Phi(z)$ справедливы следующие предположения:

1) $\Phi(0)=0$, $A=\Phi'(0)\neq 0$, $\Phi(z)>0$ при $z>0$;

2) $\Phi(z)$ аналитична на отрезке $[0, z_a]$, $z_a>0$;

3) $\Phi'(z)\neq 0$ при $0\leqslant z\leqslant z_1\leqslant z_a$, $\Phi(z)>\mu^2$ при $z\geqslant z_1$;

4) функция $Q(x) = \frac{\Phi''}{(\Phi')^2}(z(x))$, где $x = \Phi(z)$, аналитична при $0 \leqslant \leqslant z \leqslant z_1$ и представима в виде

$$Q(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} Q_m x^m, \tag{5.1}$$

где $Q_m = \frac{d^m}{dx^m} Q(x)|_{x=0}$, $\frac{d}{dx} = \frac{1}{\Phi'(z)} \frac{d}{dz}$.

В уравнении (2.2) сделаем замену зависимой и независимой переменных X, z:

$$X = Y/\widehat{u}^{1/2}, \qquad x = \Phi(z),\ \Phi'(z) \neq 0.$$

Тогда уравнение (2.2) перепишется так:

$$\widetilde{N}[Y] = \left\{\frac{d^2}{dx^2} + \frac{3}{16} \frac{1}{\widehat{u}^4}\right\} Y = -Q(x) \frac{d}{dx} Y. \tag{5.2}$$

Поскольку функции $Y_1 = \widehat{u}^{3/2}(x)$, $Y_2 = \widehat{u}^{1/2}(x)$ являются линейно независимыми решениями однородного уравнения $\widetilde{N}[Y] = 0$, используя известный метод вариации произвольных постоянных, из (5.2) получим для функции $U(x) = Y(x)/Y_2(x)$ интегральное уравнение Вольтерра следующего вида:

$$U(x) = \int_0^x K(x, \tau) U(\tau) d\tau + \{c_1 + 2\mu Q(0) U(0)\} \widehat{u}(x) + c_2 - 2\mu^2 Q(0) U(0). \tag{5.3}$$

Здесь

$$K(x, \tau) = \frac{1}{2} Q(\tau) \left[\frac{\widehat{u}(x)}{\widehat{u}(\tau)} - 3\right] + 2 \frac{d}{d\tau} Q(\tau) \widehat{u}(\tau) [\widehat{u}(x) - \widehat{u}(\tau)], \tag{5.4}$$

c_1, c_2 — произвольные постоянные. Заметим, что функция $X(z) = U(\Phi(z))$ есть решение уравнения (2.2). Учитывая начальные условия (2.3), из (5.3) выводим для функций $v(z)$, $w(z)$ уравнения

$$\begin{gathered} v(x) = \frac{2}{A} [\widehat{u}(x) - \mu] + \int_0^x K(x, \tau) v(\tau) d\tau, \\ w(x) = 1 + 2\mu Q(0) [\widehat{u}(x) - \mu] + \int_0^x K(x, \tau) w(\tau) d\tau, \end{gathered} \tag{5.5}$$

решая которые, получим

$$\begin{gathered} v(x) = \frac{2}{A} \left\{\widehat{u}(x) - \mu + \int_0^x H(x, \tau) [\widehat{u}(\tau) - \mu] d\tau\right\} = \\ = \frac{2}{A} \left\{(\widehat{u}(x) - \mu) L(x) + \int_0^x H(x, \tau) [\widehat{u}(\tau) - \widehat{u}(x)] d\tau\right\}, \\ w(x) = L(x) + \mu \frac{\Phi''(0)}{A} v(x). \end{gathered} \tag{5.6}$$

Здесь

$$L(x) = 1 + \int_0^x H(x, \tau) d\tau;$$

$H(x,\tau)=\sum_{m=1}^{\infty}K_m(x,\tau)$ — резольвента ядра $K(x,\ \tau)$;

$K_m(x,\tau)=\int_{\tau}^{x}K(x,\xi)K_{m-1}(\xi,\tau)\,d\xi,\quad m\geqslant 2,$ — повторные ядра ядра $K(x,\ \tau)$, причем $K_1(x,\ \tau)=K(x,\ \tau)$.

Основным результатом данного параграфа является следующая

Теорема. *Для функций $v(z)$, $w(z)$ при $0\leqslant z\leqslant z_1$ имеют место представления*

$$v(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\{\xi_j(x)\widehat{u}^{2j+1}(x)+\mu\eta_j(x)\widehat{u}^{2j}(x)\},$$
$$w(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\{\alpha_j(x)\widehat{u}^{2j}(x)+\mu\beta_j(x)\widehat{u}^{2j+1}(x)\}, \tag{5.7}$$

где $\xi_j(x)$, $\eta_j(x)$, $\alpha_j(x)$, $\beta_j(x)$ — некоторые аналитические функции.

Доказательство. Покажем сначала, что для повторных ядер $K_n(x,\ \tau)$, $n\geqslant 1$, ядра $K(x,\ \tau)$ справедливо представление

$$K_n(x,\tau)=\sum_{j,k,l,m=0}^{\infty}\{a_{jklmn}\Lambda^1_{jk}(x)\Lambda^{-1}_{lm}(\tau)+b_{jklmn}\Lambda^0_{jk}(x)\Lambda^0_{lm}(\tau)\}, \tag{5.8}$$

где $\Lambda^r_{jk}(x)=\widehat{u}^{2j+r}(x)x^k$; a_{jklmn}, b_{jklmn} — постоянные коэффициенты. Доказательство будем вести методом математической индукции. Из (5.1), (5.4) следует, что (5.8) справедливо с $n=1$, при этом

$$a_{000m1}=\frac{1}{2}\frac{1}{m!}Q_m,\qquad a_{001m1}=\frac{2}{m!}Q_{m+1},$$
$$b_{000m1}=-\frac{3}{2}\frac{1}{m!}Q_m,\qquad b_{001m1}=-\frac{2}{m!}Q_{m+1}.$$

Все остальные коэффициенты a_{jklm1}, b_{jklm1} равны нулю.

Перемножая $K_1(x,\ \xi)$ и $K_n(\xi,\ \tau)$, получим

$$K_1(x,\xi)K_n(\xi,\tau)=\sum_{j,k,s,t,l,m=0}^{\infty}\{\widetilde{a}_{jkstlm}\Lambda^1_{jk}(x)\Lambda^{-1}_{st}(\tau)\Lambda^0_{lm}(\xi)+$$
$$+\widehat{a}_{jkstlm}\Lambda^0_{jk}(x)\Lambda^{-1}_{st}(\tau)\Lambda^1_{lm}(\xi)+\widetilde{b}_{jkstlm}\Lambda^1_{jk}(x)\Lambda^0_{st}(\tau)\Lambda^{-1}_{lm}(\xi)+$$
$$+\widehat{b}_{jkstlm}\Lambda^0_{jk}(x)\Lambda^0_{st}(\tau)\Lambda^0_{lm}(\xi)\},$$

где

$$\widetilde{a}_{jkstlm}=\sum_{p=0}^{l}\sum_{r=0}^{m}a_{jkpr1}a_{l-p,m-r,stn},\qquad \widehat{a}_{jkstlm}=\sum_{p=0}^{l}\sum_{r=0}^{m}b_{jkpr1}a_{l-p,m-r,stn},$$
$$\widetilde{b}_{jkstlm}=\sum_{p=0}^{l}\sum_{r=0}^{m}a_{jkpr1}b_{l-p,m-r,stn},\qquad \widehat{b}_{jkstlm}=\sum_{p=0}^{l}\sum_{r=0}^{m}b_{jkpr1}b_{l-p,m-r,stn}.$$

Далее нам понадобятся следующие соотношения:

$$\sum_{l,m=0}^{\infty}\int_{\tau}^{x}\widetilde{a}_{jkstlm}\Lambda^0_{lm}(\xi)\,d\xi=\sum_{l,m=0}^{\infty}\widetilde{A}_{jkstlm}\{\Lambda^2_{lm}(x)-\Lambda^2_{lm}(\tau)\},$$
$$\sum_{l,m=0}^{\infty}\int_{\tau}^{x}\widehat{b}_{jkstlm}\Lambda^0_{lm}(\xi)\,d\xi=\sum_{l,m=0}^{\infty}\widehat{B}_{jkstlm}\{\Lambda^2_{lm}(x)-\Lambda^2_{lm}(\tau)\}, \tag{5.9}$$
$$\sum_{l,m=0}^{\infty}\int_{\tau}^{x}\widehat{a}_{jkstlm}\Lambda^1_{lm}(\xi)\,d\xi=\sum_{l,m=0}^{\infty}\widehat{A}_{jkstlm}\{\Lambda^3_{lm}(x)-\Lambda^3_{lm}(\tau)\},$$

$$\sum_{l,m=0}^{\infty}\int_{\tau}^{x}\widetilde{b}_{jkstlm}\Lambda_{lm}^{-1}(\xi)\,d\xi=\sum_{l,m=0}^{\infty}\widetilde{B}_{jkstlm}\{\Lambda_{lm}^{1}(x)-\Lambda_{lm}^{1}(\tau)\};$$

здесь

$$\widetilde{A}_{jkstlm}=\frac{1}{2m!\,(l+1)!}\sum_{i=0}^{l}\frac{(-1)^i\,(l-i)!\,(m+i)!}{2^i}\,\widetilde{a}_{jkst,l-i,m+i},$$

$$\widehat{B}_{jkstlm}=\frac{1}{2m!\,(l+1)!}\sum_{i=0}^{l}\frac{(-1)^i\,(l-i)!\,(m+i)!}{2^i}\,\widehat{b}_{jkst,l-i,m+i},$$

$$\widehat{A}_{jkstlm}=\frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{l}\frac{(-1)^i\,(m+i)!}{\prod\limits_{r=0}^{i}[2\,(l-i+r)+3]}\,\widehat{a}_{jkst,l-i,m+i},$$

$$\widetilde{B}_{jkstlm}=\frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{l}\frac{(-1)^i\,(m+i)!}{\prod\limits_{r=0}^{i}[2\,(l-i+r)+1]}\,\widetilde{b}_{jkst,l-i,m+i}.$$

Используя формулы (5.9), окончательно находим

$$K_{n+1}(x,\tau)=\int_{\tau}^{x}K(x,\xi)\,K_n(\xi,\tau)\,d\xi=\sum_{j,k,l,m=0}^{\infty}\{\widetilde{A}_{jklm}\Lambda_{jk}^{3}(x)\,\Lambda_{lm}^{-1}(\tau)+$$
$$+\widehat{A}_{jklm}\Lambda_{jk}^{1}(x)\,\Lambda_{lm}^{1}(\tau)+\widetilde{B}_{jklm}\Lambda_{jk}^{2}(x)\,\Lambda_{lm}^{0}(\tau)+\widehat{B}_{jklm}\Lambda_{jk}^{0}(x)\,\Lambda_{lm}^{2}(\tau)\}=$$
$$=\sum_{j,k,l,m=0}^{\infty}\{a_{jklm,n+1}\Lambda_{jk}^{1}(x)\,\Lambda_{lm}^{-1}(\tau)+b_{jklm,n+1}\Lambda_{jk}^{0}(x)\,\Lambda_{lm}^{0}(\tau)\},$$

причем

$$\widetilde{A}_{jklm}=\sum_{l_1=0}^{j}\sum_{m_1=0}^{k}\{\widetilde{A}_{l_1m_1lm,j-l_1,k-m_1}+\widehat{A}_{l_1m_1lm,j-l_1,k-m_1}\},$$

$$\widehat{A}_{jklm}=-\sum_{l_1=0}^{l}\sum_{m_1=0}^{m}\{\widetilde{A}_{jkl_1m_1,l-l_1,m-m_1}+\widehat{A}_{jkl_1m_1,l-l_1,m-m_1}\},$$

$$\widetilde{B}_{jklm}=\sum_{l_1=0}^{j}\sum_{m_1=0}^{k}\{\widetilde{B}_{l_1m_1lm,j-l_1,k-m_1}+\widehat{B}_{l_1m_1lm,j-l_1,k-m_1}\},$$

$$\widehat{B}_{jklm}=-\sum_{l_1=0}^{l}\sum_{m_1=0}^{m}\{\widetilde{B}_{jkl_1m_1,l-l_1,m-m_1}+\widehat{B}_{jkl_1m_1,l-l_1,m-m_1}\},$$

$$a_{jklm,n+1}=\widetilde{A}_{j-1,klm}+\widehat{A}_{jk,l-1,m},\quad b_{jklm,n+1}=\widetilde{B}_{j-1,klm}+\widehat{B}_{jk,l-1,m}.$$

Заметим, что коэффициенты $\widetilde{a}_{jkstlm}$, $\widetilde{b}_{jkstlm}$, $\widehat{a}_{jkstlm}$, $\widehat{b}_{jkstlm}$, $\widetilde{A}_{jkstlm}$, $\widetilde{B}_{jkstlm}$, $\widehat{A}_{jkstlm}$, $\widehat{B}_{jkstlm}$, $\widetilde{A}_{jklm}$, $\widetilde{B}_{jklm}$, $\widehat{A}_{jklm}$, $\widehat{B}_{jklm}$ вспомогательны при определении коэффициентов $a_{jklm,n+1}$, $b_{jklm,n+1}$, и поэтому они не снабжаются индексом n.

Используя представление (5.8), для резольвенты $H(x,\tau)$ ядра $K(x,\tau)$ получаем следующее выражение:

$$H(x,\tau)=\sum_{j,k,l,m=0}^{\infty}\{\widetilde{h}_{jklm}\Lambda_{jk}^{1}(x)\,\Lambda_{lm}^{-1}(\tau)+\widehat{h}_{jklm}\Lambda_{jk}^{0}(x)\,\Lambda_{lm}^{0}(\tau)\}. \qquad (5.10)$$

Здесь $\widetilde{h}_{jklm}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{jklmn}$, $\widehat{h}_{jklm}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_{jklmn}$. Далее,

$$\int_{0}^{x}H(x,\tau)\,[\widehat{u}(\tau)-\widehat{u}(x)]\,d\tau=\sum_{jk=0}^{\infty}\left\{\left[\sum_{l,m=0}^{\infty}H_{jklm}\Lambda_{lm}^{2}(x)-\right.\right.$$

$$- \sum_{l=0}^{\infty} H_{jkl0}\mu^{2(l+1)}\Big]\Lambda_{jk}^{1}(x) + \Big[\sum_{l,m=0}^{\infty}\widetilde{H}_{jklm}\Lambda_{lm}^{3}(x) - \sum_{l=0}^{\infty}\widetilde{H}_{jkl0}\mu^{2l+3}\Big]\Lambda_{jk}^{0}(x) +$$

$$+ \Big[\sum_{l,m=0}^{\infty}\widehat{H}_{jklm}\Lambda_{lm}^{1}(x) - \sum_{l=0}^{\infty}\widehat{H}_{jkl0}\mu^{2l+1}\Big]\Lambda_{jk}^{2}(x)\Big\},$$

$$H_{jklm} = \frac{1}{2m!\,(l+1)!}\sum_{i=0}^{l}\left(\widetilde{h}_{jk,l-i,m+i} - \widehat{h}_{jk,l-i,m+i}\right)\frac{(-1)^{i}\,(l-i)!\,(m+i)!}{2^{i}},$$

$$\widetilde{H}_{jklm} = \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{l}\frac{(-1)^{i}\,(m+i)!}{\prod\limits_{r=0}^{i}[2(l-i+r)+3]}\widetilde{h}_{jklm},$$

$$\widehat{H}_{jklm} = \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{l}\frac{(-1)^{i+1}\,(m+i)!}{\prod\limits_{r=0}^{i}[2(l-i+r)+1]}\widehat{h}_{jklm},$$

Поскольку $\mu^2 = \widehat{u}^2(x) - x$,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{\infty} H_{jkl0}\mu^{2l+2} &= \sum_{l,m=0}^{\infty}\Lambda_{jklm}\Lambda_{lm}^{0}(x),\\
\sum_{l=0}^{\infty}\widetilde{H}_{jkl0}\mu^{2l+3} &= \mu\sum_{l,m=0}^{\infty}\widetilde{\Lambda}_{jklm}\Lambda_{lm}^{0}(x),\\
\sum_{l=0}^{\infty}\widehat{H}_{jkl0}\mu^{2l+1} &= \mu\sum_{l,m=0}^{\infty}\widehat{\Lambda}_{jklm}\Lambda_{lm}^{0}(x),
\end{aligned}\tag{5.11}$$

где

$$\begin{aligned}
\Lambda_{jklm} &= \frac{(-1)^{l}\,(l+m)!}{m!\,l!}H_{jk,l+m-1,0},\\
\widetilde{\Lambda}_{jklm} &= \frac{(-1)^{l}\,(l+m)!}{m!\,l!}\widetilde{H}_{jk,l+m-1,0},\\
\widehat{\Lambda}_{jklm} &= \frac{(-1)^{l}\,(l+m)!}{m!\,l!}\widehat{H}_{jk,l+m,0}.
\end{aligned}$$

Тогда в силу (5.11)

$$\int_0^x H(x,\tau)\left[\widehat{u}(\tau) - \widehat{u}(x)\right]d\tau = \sum_{j=0}^{\infty}\{g_{1j}(x)\,\widehat{u}^{2j+1}(x) + \mu g_{2j}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x)\}. \tag{5.12}$$

Здесь

$$g_{1j}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big\{\sum_{l=0}^{j-1}\sum_{m=0}^{k}[H_{lm,j-l-1,k-m} + \widetilde{H}_{lm,j-l-1,k-m} +$$

$$+ \widehat{H}_{lm,j-l-1,k-m}] - \sum_{l=0}^{j}\sum_{m=0}^{k}\Lambda_{lm,j-l,k-m}\Big\}x^{k},$$

$$g_{2j}(x) = -\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{\sum_{l=0}^{j}\sum_{m=0}^{k}\widetilde{\Lambda}_{lm,j-l,k-m} + \sum_{l=0}^{j-1}\sum_{m=0}^{k}\widehat{\Lambda}_{lm,j-l-1,\,k-m}\Big\}x^{k},$$

Наконец, легко показать, что

$$L(x) = 1 + \int_0^x H(x,\tau)\,d\tau = \sum_{j=0}^{\infty}\{l_{1j}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x) + \mu l_{2j}(x)\,\widehat{u}^{2j+1}(x)\}, \tag{5.13}$$

где $l_{10}(x) = 1 + \tilde{l}_{10}(x)$, $l_{1j}(x) = \tilde{l}_{1j}(x)$ при $j > 0$,

$$\tilde{l}_{1j}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{m=0}^{k} [L_{lm,j-l-1,k-m} + \tilde{L}_{lm,j-l-1,k-m}] - \sum_{l=0}^{j} \sum_{m=0}^{k} \widehat{L}_{lm,j-l,k-m} \right\} x^k,$$

$$L_{jklm} = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{l} \frac{(-1)^i (m+i)!}{\prod_{r=0}^{i} [2(l-i+r)+1]} \tilde{h}_{jk,l-i,m+i},$$

$$\tilde{L}_{jklm} = \frac{1}{2m!(l+1)!} \sum_{i=0}^{l} \frac{(-1)^i (m+i)!(l-i)!}{2^i} \widehat{h}_{jk,l-i,m+i},$$

$$l_{2j}(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{l=0}^{j} \sum_{m=0}^{k} \overline{L}_{lm,j-l,k-m} \right\} x^k,$$

$$\overline{L}_{jklm} = \frac{(-1)^l (m+l)!}{m!\,l!} L_{jk,l+m,0},$$

$$\widehat{L}_{jklm} = \frac{(-1)^l (m+l)!}{m!\,l!} \tilde{L}_{jk,l+m-1,0}.$$

Подставляя (5.12), (5.13) в формулы (5.6), окончательно получаем для функций $v(x)$, $w(x)$ представления (5.7), в которых

$$\xi_j(x) = \frac{2}{A} [l_{1j}(x) + x l_{2j}(x) - l_{2,j-1}(x) + g_{1j}(x)],$$

$$\eta_j(x) = \frac{2}{A} [l_{2,j-1}(x) - l_{1j}(x) + g_{2j}(x)],$$

$$\alpha_j(x) = l_{1j}(x) + \frac{\Phi''(0)}{A} \eta_{j-1}(x) - \frac{\Phi''(0)}{A} \eta_j(x),$$

$$\beta_j(x) = l_{2j}(x) + \frac{\Phi''(0)}{A} \xi_j(x).$$

Замечания 1. При доказательстве теоремы мы неявно пользовались следующим соглашением: $\sum_{i=k}^{l} a_i = 0$, если $l < k$.

2. Формулы (5.7) можно переписать в «каноническом» виде

$$\begin{aligned} v(x) &= \widehat{u}(x) \sum_{l=0}^{\infty} V_{l1}(x) \mu^{2l} + \mu \sum_{l=0}^{\infty} V_{l2}(x) \mu^{2l}, \\ w(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} W_{l1}(x) \mu^{2l} + \mu \widehat{u}(x) \sum_{l=0}^{\infty} W_{l2}(x) \mu^{2l}, \end{aligned} \tag{5.14}$$

где

$$V_{l1}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_{j+l}^{l} \xi_{j+l}(x) x^j, \quad V_{l2}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_{j+l}^{l} \eta_{j+l}(x) x^j,$$

$$W_{l1}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_{j+l}^{l} \alpha_{j+l}(x) x^j, \quad W_{l2}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_{j+l}^{l} \beta_{j+l}(x) x^j, \quad C_{j+l}^{l} = \frac{(j+l)!}{j!\,l!}.$$

Поэтому ввиду разложений (5.7) (или (5.14)), при $z \leqslant z_1$ и $\Phi(z) > \mu^2$ мы получаем для функций $v(z)$, $w(z)$ следующие выражения:

$$\begin{aligned} v(z) = \sqrt{\Phi(z)}\, V_{01}(\Phi(z)) + \mu V_{02}(\Phi(z)) + \mu^2 \Bigg[\sqrt{\Phi(z)}\, V_{11}(\Phi(z)) &+ \\ + \frac{V_{01}(\Phi(z))}{2\sqrt{\Phi(z)}} \Bigg] &+ \ldots, \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$w(z) = W_{01}(\Phi(z)) + \mu \sqrt{\Phi(z)}\, W_{02}(\Phi(z)) + \mu^2 W_{11}(\Phi(z)) + \ldots.$$

При $z > z_1$ функции $v(z)$, $w(z)$ мы будем искать в виде рядов по малому параметру μ:

$$v(z) = v_0(z) + \mu v_1(z) + \mu^2 \frac{v_2(z)}{2} + \ldots,$$
$$w(z) = w_0(z) + \mu w_1(z) + \mu^2 \frac{w_2(z)}{2} + \ldots, \qquad (5.16)$$

где $v_0(z)$, $v_1(z)$, $v_2(z)$, $w_0(z)$, $w_1(z)$, $w_2(z)$ определяются так (см. также § 4):

$$v_0(z) = A_1 \left\{\frac{V_{01}(x_1)}{2\sqrt{x_1}} + \sqrt{x_1}\, V'_{01}(x_1)\right\} \bar{v}(z) + \sqrt{x_1}\, V_{01}(x_1)\, \bar{w}(z),$$

$$v_1(z) = A_1 V'_{02}(x_1)\, \bar{v}(z) + V_{02}(x_1)\, \bar{w}(z),$$

$$v_2(z) = A_1 \left\{2\sqrt{x_1}\, V'_{11}(x_1) + \frac{V_{11}(x_1) + V'_{01}(X_1)}{\sqrt{x_1}} - \frac{v_{01}(x_1)}{2X_1^{3/2}}\right\} \bar{v}(z) +$$

$$+ \left\{2\sqrt{x_1}\, V'_{11}(x_1) + \frac{V_{01}(x_1)}{\sqrt{x_1}}\right\} \bar{w}(z) + \frac{1}{\sqrt{x_1}} \int_{z_1}^{z} \bar{Q}(z, \tau)\, \Gamma_0[v_0(\tau)]\, d\tau,$$

$$w_0(z) = A_1 W'_{01}(x_1)\, \bar{v}(z) + W_{01}(x_1)\, \bar{w}(z),$$

$$w_1(z) = A_1 \left\{\sqrt{x_1}\, W'_{02}(x_1) + \frac{W_{02}(x_1)}{2\sqrt{x_1}}\right\} \bar{v}(z) + \sqrt{x_1}\, W_{02}(x_1)\, \bar{w}(z),$$

$$w_2(z) = 2A_1 W'_{11}(x_1)\, \bar{v}(z) + 2W_{11}(x_1)\, \bar{w}(z) + \frac{1}{\sqrt{x_1}} \int_{z_1}^{z} \bar{Q}(z, \tau)\, \Gamma_0[w_0(\tau)]\, d\tau.$$

Здесь $x_1 = \Phi(z_1)$, $A_1 = \Phi'(z_1)$, $V'_{01}(x_1) = \frac{dV_{01}}{dx}(x_1)$ и т. д., $\bar{Q}(z, \tau) = \bar{v}(z)\bar{w}(\tau) - \bar{v}(\tau)\bar{w}(z)$,

$$\Gamma_0[X] = \frac{\Phi'(z) X' + \frac{1}{2}\Phi''(z) X}{\Phi^{3/2}(z)},$$

$\bar{v}(z)$, $\bar{w}(z)$ — два линейно независимых решения уравнения

$$N_0[X] = \left\{\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\Phi'}{2\Phi}\frac{d}{dz} + \frac{\Phi''}{4\Phi}\right\} X = 0,$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$\bar{v}(z_1) = 0,\ \bar{v}'(z_1) = 1, \qquad \bar{w}(z_1) = 1,\ \bar{w}'(z_1) = 0.$$

§ 6. ДРУГОЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ АБЕРРАЦИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Несмотря на то что доказательство теоремы из § 5 является конструктивным и позволяет в конечном итоге определить коэффициенты $\xi_j(x)$, $\eta_j(x)$, $\alpha_j(x)$, $\beta_j(x)$ разложений (5.7), мы рассмотрим другой способ определения этих коэффициентов. Подставляя представления (5.7) в уравнение (2.2) и начальные данные (2.3), приравнивая нулю коэффициенты при $\widehat{u}^{2j+1}(x)$, $\mu\widehat{u}^{2i}(x)$ и при $\widehat{u}^{2j}(x)$, $\mu\widehat{u}^{2j+1}(x)$, мы получим для определения коэффициентов $\xi_j(x)$, $\eta_j(x)$, $\alpha_j(x)$, $\beta_j(x)$ следующие рекуррентные соотношения:

$$M_j[\xi_{j+1}, \xi_j, \xi_{j-1}] = 0,\ R_j[\eta_{j+1}, \eta_j, \eta_{j-1}] = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \qquad (6.1)$$

$$\xi_j(0) + \eta_j(0) = 0,\ \xi'_j(0) + \frac{1}{2}\xi_{j+1}(0) + \eta'_j(0) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots;$$

$$
\begin{gathered}
M_j[\beta_{j+1}, \beta_j, \beta_{j-1}] = 0,\ j = 0, 1, \ldots, \\
R_j[\alpha_{j+1}, \alpha_j, \alpha_{j-1}] = 0,\ j = 0, 1, \ldots, \\
\alpha_j(0) + \beta_{j-1}(0) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, \\
\alpha_j'(0) + \frac{1}{2}\alpha_{j+1}(0) + \beta_{j-1}'(0) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots;
\end{gathered}
\tag{6.2}
$$

причем $\xi_{-1}(x) = \eta_{-1}(x) = \alpha_{-1}(x) = \beta_{-1}(x) \equiv 0, \xi_0(0) = -\eta_0(0) = \frac{2}{A}, \alpha_0(0) = 1$. В (6.1), (6.2) приняты обозначения

$$
M_j[X, Y, Z] = X + \frac{4j+3}{(j+1)(2j+3)}\Lambda Y + \frac{2}{(j+1)(2j+3)}\Lambda_1 Z',
$$

$$
R_j[X, Y, Z] = X + \frac{4j+1}{(j+1)(2j+1)}\Lambda Y + \frac{2}{(j+1)(2j+1)}\Lambda_1 Z',
$$

$$
\Lambda = \frac{d}{dx} + \frac{1}{2}Q, \quad \Lambda_1 = \frac{d}{dx} + Q, \quad Z' = \frac{d}{dx}Z.
$$

При выводе соотношений (6.1), (6.2) мы воспользовались утверждением, которое сформулируем без доказательства в виде следующей леммы.

Лемма. *Пусть при* $0 \leqslant z \leqslant z_1$ *и* $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_1$

$$
\sum_{j=0}^{\infty} \{\widehat{\xi}_j(x)\widehat{u}^{2j+1}(x) + \mu\widehat{\eta}_j(x)\widehat{u}^{2j}(x)\} = 0,
$$

$$
\sum_{j=0}^{\infty} \{\widehat{\alpha}_j(x)\widehat{u}^{2j}(x) + \mu\widehat{\beta}_j(x)\widehat{u}^{2j+1}(x)\} = 0,
$$

где коэффициенты $\widehat{\xi}_j, \widehat{\eta}_j, \widehat{\alpha}_j, \widehat{\beta}_j$ *аналитичны и представимы при* $0 \leqslant z \leqslant z_1$ *в виде*

$$
\widehat{\xi}_j(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\frac{d^m}{dx^m}\widehat{\xi}_j\right)(0)\,x^m, \ \ldots,
$$

$$
\widehat{\beta}_j(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\frac{d^m}{dx^m}\widehat{\beta}_j\right)(0)\,x^m.
$$

Тогда $\widehat{\xi}_j(x) = \ldots = \widehat{\beta}_j(x) \equiv 0$ $(j = 0, 1, \ldots)$ *при* $0 \leqslant z \leqslant z_1$.

Используя формулы (6.1), (6.2), последовательно находим

$$
\begin{gathered}
\xi_1(x) = -B_0(x)\xi_0'(x) + B_1(x)\xi_0(x), \\
\eta_1(x) = -A_0(x)\eta_0'(x) + A_1(x)\eta_0(x), \\
\alpha_1(x) = -A_0(x)\alpha_0'(x) + A_1(x)\alpha_0(x), \\
\beta_1(x) = -B_0(x)\beta_0'(x) + B_1(x)\beta_0(x);
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\xi_2(x) = \frac{B_0(x)}{2!}\xi_0''(x) - B_1(x)\xi_0'(x) + B_2(x)\xi_0(x), \\
\eta_2(x) = \frac{A_0(x)}{2!}\eta_0''(x) - A_1(x)\eta_0'(x) + A_2(x)\eta_0(x), \\
\alpha_2 = \frac{A_0(x)}{2!}\alpha_0''(x) - A_1(x)\alpha_0'(x) + A_2(x)\alpha_0(x), \\
\beta_2(x) = \frac{B_0(x)}{2!}\beta_0''(x) - B_1(x)\beta_0'(x) + B_2(x)\beta_0(x);
\end{gathered}
\tag{6.3}
$$

$$
\xi_3(x) = -\frac{B_0(x)}{3!}\xi_0'''(x) + \frac{B_1(x)}{2!}\xi_0''(x) - B_2(x)\xi_0'(x) + B_3(x)\xi_0(x),
$$

$$
\eta_3(x) = -\frac{A_0(x)}{3!}\eta_0'''(x) + \frac{A_1(x)}{2!}\eta_0''(x) - A_2(x)\eta_0'(x) + A_3(x)\eta_0(x),
$$

$$\alpha_3(x) = -\frac{A_0(x)}{3!}\alpha_0'''(x) + \frac{A_1(x)}{2!}\alpha_0''(x) - A_2(x)\alpha_0'(x) + A_3(x)\alpha_0(x),$$

$$\beta_3(x) = -\frac{B_0(x)}{3!}\beta_0'''(x) + \frac{B_1(x)}{2!}\beta_0''(x) - B_2(x)\beta_0'(x) + B_3(x)\beta_0(x);$$

$$\xi_4(x) = \frac{B_0(x)}{4!}\xi_0^{(IV)}(x) - \frac{B_1(x)}{3!}\xi_0'''(x) + \frac{B_2(x)}{2!}\xi_0''(x) - B_3(x)\xi_0'(x) + B_4(x)\xi_0(x),$$

$$\eta_4(x) = \frac{A_0(x)}{4!}\eta_0^{(IV)}(x) - \frac{A_1(x)}{3!}\eta_0'''(x) + \frac{A_2(x)}{2!}\eta_0''(x) - A_3(x)\eta_0'(x) + A_4(x)\eta_0(x),$$

$$\alpha_4(x) = \frac{A_0(x)}{4!}\alpha_0^{(IV)}(x) - \frac{A_1(x)}{3!}\alpha_0'''(x) + \frac{A_2(x)}{2!}\alpha_0''(x) - A_3(x)\alpha_0'(x) + A_4(x)\alpha_0(x),$$

$$\beta_4(x) = \frac{B_0(x)}{4!}\beta_0^{(IV)}(x) - \frac{B_1(x)}{3!}\beta_0'''(x) + \frac{B_2(x)}{2!}\beta_0''(x) - B_3(x)\beta_0'(x) + B_4(x)\beta_0(x)$$

и т. д. Здесь

$$B_0(x) = A_0(x) \equiv 1, \qquad B_1(x) = A_1(x) = -\frac{Q}{2},$$

$$B_2(x) = \frac{7}{20}\left(Q' + \frac{Q^2}{2}\right), \quad A_2(x) = \frac{5}{12}\left(Q' + \frac{Q^2}{2}\right),$$

$$B_3(x) = -\left(\frac{19}{140}Q'' + \frac{191}{840}QQ' + \frac{11}{240}Q^3\right), \quad A_3(x) = -\left(\frac{11}{60}Q'' + \frac{37}{120}QQ' + \frac{1}{16}Q^3\right),$$

$$B_4(x) = \frac{187}{5040}Q''' + \frac{53}{630}QQ'' + \frac{253}{3360}(Q')^2 + \frac{859}{10080}Q^2Q' + \frac{11}{1152}Q^4,$$

$$A_4(x) = \frac{31}{560}Q''' + \frac{53}{420}QQ'' + \frac{127}{1120}(Q')^2 + \frac{433}{3360}Q^2Q' + \frac{13}{896}Q^4.$$

Положим далее

$$\begin{gathered}\xi_0(x) = \sum_{m=0}^{4}\frac{1}{m!}\left(\frac{d^m}{dx^m}\xi_0\right)(0)\,x^m, \quad \eta_0(x) = \sum_{m=0}^{4}\frac{1}{m!}\left(\frac{d^m}{dx^m}\eta_0\right)(0)\,x^m,\\ \alpha_0(x) = \sum_{m=0}^{4}\frac{1}{m!}\left(\frac{d^m}{dx^m}\alpha_0\right)(0)\,x^m, \quad \beta_0(x) = \sum_{m=0}^{4}\frac{1}{m!}\left(\frac{d^m}{dx^m}\beta_0\right)(0)\,x^m,\end{gathered} \tag{6.4}$$

где

$$\xi_0(0) = \frac{2}{A}, \; \eta_0(0) = -\frac{2}{A}, \; \alpha_0(0) = 1, \; \beta_0(0) = Q(0),$$

$$\xi_0'(0) = -\frac{Q(0)}{A}, \; \eta_0'(0) = \frac{Q(0)}{A}, \; \alpha_0'(0) = \frac{Q(0)}{2}, \; \beta_0'(0) = -\frac{3}{2}Q^2(0) + \frac{2}{3}\frac{\Phi'''(0)}{A^3}$$

$$\xi_0''(0) = \frac{3}{2}\frac{Q^2(0)}{A} - \frac{1}{3}\frac{\Phi'''(0)}{A^4}, \; \eta_0''(0) = -\frac{19}{10}\frac{Q^2(0)}{A} + \frac{3}{5}\frac{\Phi'''(0)}{A^4},$$

$$\alpha_0''(0) = \frac{1}{2}\frac{\Phi'''(0)}{A^3} - \frac{5}{4}Q^2(0), \; \beta_0''(0) =$$

$$= -\frac{121}{30}\frac{Q(0)\Phi'''(0)}{A^3} + \frac{99}{20}Q^3(0) + \frac{8}{15}\frac{\Phi^{(IV)}(0)}{A^4},$$

$$\xi_0'''(0) = \frac{1}{5}\frac{\Phi^{(IV)}(0)}{A^5} + \frac{3}{10}\frac{Q(0)\Phi'''(0)}{A^4} - \frac{51}{20}\frac{Q^3(0)}{A},$$

$$\eta_0'''(0) = \frac{13}{35}\frac{\Phi^{(IV)}(0)}{A^4} - \frac{289}{70}\frac{Q(0)\Phi'''(0)}{A^4} + \frac{621}{140}\frac{Q^3(0)}{A},$$

$$\alpha_0'''(0) = \frac{1}{2}\frac{\Phi^{(IV)}(0)}{A^4} - \frac{83}{20}\frac{Q(0)\Phi'''(0)}{A^3} + \frac{219}{40}Q^3(0),$$

$$\beta_0'''(0) = \frac{49783}{420}\frac{Q^2(0)\Phi'''(0)}{A^3} - \frac{2001}{280}Q^4(0) - \frac{4517}{210}\frac{Q(0)\Phi^{(IV)}(0)}{A^4} -$$

$$-\frac{1448}{105}\left(\frac{\Phi'''(0)}{A^3}\right)^2+\frac{29}{15}\frac{\Phi^{(IV)}(0)}{A^5},$$

$$\xi_0^{(IV)}(0)=\frac{23}{35}\frac{\Phi^{(V)}(0)}{A^6}-\frac{45}{7}\frac{Q(0)\Phi^{(IV)}(0)}{A^5}+\frac{9}{14}\frac{Q^2(0)\Phi'''(0)}{A^4}-$$

$$-\frac{221}{70}\frac{(\Phi'''(0))^2}{A^7}+\frac{34823}{840}\frac{Q^4(0)}{A},$$

$$\eta_0^{(IV)}=\frac{23}{105}\frac{\Phi^{(V)}(0)}{A^6}+\frac{759}{105}\frac{Q(0)\Phi^{(IV)}(0)}{A^5}+\frac{14339}{210}\frac{Q^2(0)\Phi'''(0)}{A^4}+$$

$$+\frac{22877}{280}\frac{Q^4(0)}{A}-\frac{577}{210}\frac{(\Phi'''(0))^2}{A^7},$$

$$\alpha_0^{(IV)}=\frac{17}{3}\frac{\Phi^{(V)}(0)}{A^5}-\frac{13246}{210}\frac{Q(0)\Phi^{(IV)}(0)}{A^4}+\frac{146429}{420}\frac{Q(0)\Phi'''(0)}{A^3}-$$

$$-\frac{13605}{560}Q^4(0)-\frac{2419}{60}\left(\frac{\Phi'''(0)}{A^3}\right)^2.$$

Заметим, что из условия эквипотенциальности катода можно вывести следующие соотношения:

$$\Phi''(0)=\frac{2A}{R_k},\quad \Phi^{(IV)}(0)=8\frac{\Phi'''(0)}{R_k}-24\frac{A}{R_k^3}.$$

При указанном выборе функций $\xi_0(x)$, $\eta_0(x)$, $\alpha_0(x)$, $\beta_0(x)$ начальное условие $v(0)=0$ выполняется с точностью до μ^{11}, условие $v'(0)=1/\mu$ — с точностью до μ^9, условие $w(0)=1$ — с точностью до μ^{10}, условие $w'(0)=0$ — с точностью до μ^8. Учитывая структуру соотношений (6.3), будем искать коэффициенты ξ_j, η_j, β_j, α_j в виде

$$\xi_j(x)=\sum_{l=0}^{j}\frac{(-1)^l}{l!}\xi_0^{(l)}(x)B_{j-l}(x),\quad \eta_j(x)=\sum_{l=0}^{j}\frac{(-1)^l}{l!}\eta_0^{(l)}(x)A_{j-l}(x),$$

$$\alpha_j(x)=\sum_{l=0}^{j}\frac{(-1)^l}{l!}\alpha_0^{(l)}(x)A_{j-l}(x),$$

$$\beta_j(x)=\sum_{l=0}^{j}\frac{(-1)^l}{l!}\beta_0^{(l)}(x)B_{j-l}(x),\quad \xi_0^{(l)}(x)=\frac{d^l}{dx^l}\xi_0(x)$$

и т. д.

Коэффициенты B_j, A_j находятся из рекуррентных соотношений

$$M_j[B_{j+1},B_j,B_{j-1}]=0,\quad R_j[A_{j+1},A_j,A_{j-1}]=0,$$

причем $A_{-1}(x)=B_{-1}(x)\equiv 0$, $A_0(x)=B_0(x)\equiv 1$.

§ 7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ АБЕРРАЦИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим теперь вопрос о нахождении коэффициентов B, G, F, D, C, E в аберрационном разложении (2.5) в случае $\Phi_m(z)\equiv 0$. Мы получим для этих коэффициентов при $0\leqslant z\leqslant z_1$ представления, аналогичные представлениям (5.7). Нам понадобятся легко вытекающие из (5.7) следующие формулы:

$$v'(z)=\Phi'(z)\sum_{j=0}^{\infty}\{\overline{V}_{j1}(x)\widehat{u}^{2j-1}(x)+\mu\overline{V}_{j2}(x)\widehat{u}^{2j}(x)\},$$

$$\overline{V}_{j1}(x)=\xi'_{j-1}(x)+\frac{2j+1}{2}\xi_j(x),\quad \overline{V}_{j2}(x)=\eta'_{j1}(x)+(j+1)\eta_{j+1}(x);$$

$$v''(z) = (\Phi'(z))^2 \sum_{j=0}^{\infty} \{\widetilde{V}_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j-3}(x) + \mu \widetilde{V}_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x)\},$$

$$\widetilde{V}_{j1}(x) = \frac{4j^2-1}{4}\,\xi_j(x) + (2j-1)\,\Lambda\xi_{j-1}(x) + \Lambda_1\xi'_{j-2}(x),$$

$$\widetilde{V}_{j2}(x) = (j+1)(j+2)\,\eta_{j+2}(x) + 2(j+1)\,\Lambda\eta_{j+1}(x) + \Lambda_1\eta_j'(x);$$

$$w'(z) = \Phi'(z) \sum_{j=0}^{\infty} \{\overline{W}_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x) + \mu \overline{W}_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j-1}(x)\},$$

$$\overline{W}_{j1}(x) = \alpha_j'(x) + (j+1)\,\alpha_{j+1}(x), \quad \overline{W}_{j2}(x) = \beta'_{j-1}(x) + \frac{2j+1}{2}\,\beta_j(x);$$

$$w''(z) = (\Phi'(z))^2 \sum_{j=0}^{\infty} \{\widetilde{W}_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x) + \mu \widetilde{W}_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j-3}(x)\},$$

$$\widetilde{W}_{j1}(x) = (j+1)(j+2)\,\alpha_{j+2}(x) + 2(j+1)\,\Lambda\alpha_{j+1}(x) + \Lambda_1\alpha_j'(x),$$

$$\widetilde{W}_{j2}(x) = \frac{4j^2-1}{4}\,\beta_j(x) + (2j-1)\,\Lambda\beta_{j-1}(x) + \Lambda_1\beta'_{j-2}(x);$$

$$v^2(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \{\widehat{V}_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x) + \mu \widehat{V}_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j+1}(x)\},$$

$$\widehat{V}_{j1}(x) = \sum_{k=0}^{j-1} \{\xi_k(x)\,\xi_{j-1-k}(x) + \eta_k(x)\,\eta_{j-1-k}(x)\} - x \sum_{k=0}^{j} \eta_k(x)\,\eta_{j-k}(x),$$

$$\widehat{V}_{j2}(x) = 2 \sum_{k=0}^{j} \eta_k(x)\,\xi_{j-k}(x);$$

$$w^2(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \{\widehat{W}_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x) + \mu \widehat{W}_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j+1}(x)\},$$

$$\widehat{W}_{j1}(x) = \sum_{k=0}^{j} \alpha_k(x)\,\alpha_{j-k}(x) - x \sum_{k=0}^{j-1} \beta_k(x)\,\beta_{j-1-k}(x) + \sum_{k=0}^{j-2} \beta_k(x)\,\beta_{j-2-k}(x),$$

$$\widehat{W}_{j2}(x) = 2 \sum_{k=0}^{j} \alpha_k(x)\,\beta_{j-k}(x);$$

$$v(z)\,w(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \{U_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j+1}(x) + \mu U_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x)\},$$

$$U_{j1}(x) = \sum_{k=0}^{j} \xi_k(x)\,\alpha_{j-k}(x) - x \sum_{k=0}^{j} \eta_k(x)\,\beta_{j-k}(x) + \sum_{k=0}^{j-1} \eta_k(x)\,\beta_{j-1-k}(x),$$

$$U_{j2}(x) = \sum_{k=0}^{j} \eta_k(x)\,\alpha_{j-k}(x) + \sum_{k=0}^{j-1} \xi_k(x)\,\beta_{j-1-k}(x).$$

На этом мы пока прервем получение вспомогательных формул и более подробно рассмотрим вопрос о вычислении следующих интегралов:

$$X(z) = \int_0^z \Phi'''_{(\tau)}\, v^2(\tau)\,d\tau, \quad Y(z) = \int_0^z \Phi'''(\tau)\,v(\tau)\,w(\tau)\,d\tau,$$

$$J(z) = \int_0^z \Phi'''(\tau)\,w^2(\tau)\,d\tau$$

при $0 \leqslant z \leqslant z_1$.

Будем искать функции $X(z)$, $Y(z)$, $J(z)$ в виде

$$X(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \{X_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x) + \mu X_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j+3}(x)\},$$

$$Y(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\{Y_{j1}(x)\widehat{u}^{2j+3}(x)+\mu Y_{j2}(x)\widehat{u}^{2j}(x)\},$$

$$J(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\{J_{j1}(x)\widehat{u}^{2j}(x)+\mu J_{j2}(x)\widehat{u}^{2j+3}(x)\},$$

где коэффициенты X_{j1}, X_{j2}, Y_{j1}, Y_{j2}, J_{j1}, J_{j2} определяются с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned}&M_j^0[X_{j+1,1}, X_{j1}]=\widehat{V}_{j1}(x)\frac{Q_1(x)}{j+1},\\&R_j^0[X_{j2}, X_{j-1,2}]=2\widehat{V}_{j2}(x)\frac{Q_1(x)}{2j+3},\\&X_{j1}(0)+X_{j-2,2}(0)=0,\quad j=0,1,\ldots;\end{aligned}\tag{7.1}$$

$$\begin{aligned}&R_j^0[Y_{j1}, Y_{j-1,1}]=2U_{j1}(x)\frac{Q_1(x)}{2j+3},\\&M_j^0[Y_{j+1,2}, Y_{j2}]=U_{j2}(x)\frac{Q_1(x)}{j+1},\\&Y_{j2}(0)+Y_{j-1,1}(0)=0,\quad j=0,1,\ldots;\end{aligned}\tag{7.2}$$

$$\begin{aligned}&M_j^0[J_{j+1,1}, J_{j1}]=\widehat{W}_{j1}(x)\frac{Q_1(x)}{j+1},\\&R_j^0[J_{j2}, J_{j-1,2}]=2\widehat{W}_{j2}(x)\frac{Q_1(x)}{2j+3},\\&J_{j1}(0)+J_{j-2,2}(0)=0,\quad j=0,1,\ldots,\end{aligned}\tag{7.3}$$

Здесь

$$M_j^0[X,Y]=X+\frac{1}{j+1}Y',\quad R_j^0[X,Y]=X+\frac{2}{2j+3}Y',\quad Q_1=\frac{\Phi'''}{\Phi'}(x),$$

$$X_{-2,2}(x)=X_{-1,2}(x)=Y_{-1,1}(x)=J_{-2,2}(x)=J_{-1,2}(x)\equiv 0.$$

Из (7.1) — (7.3) получаем

$$X_{j2}=\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\left(\prod_{i=k}^{j}L_i\right)\frac{d^{j-k}}{dx^{j-k}}(\widehat{V}_{k2}Q_1),$$

$$X_{j+1,1}=\frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!}\frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}}X_{01}(x)+\frac{1}{(j+1)!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}k!\,\frac{d^{j-k}}{dx^{j-k}}(\widehat{V}_{k1}Q_1),$$

$$J_{j2}=\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\left(\prod_{i=k}^{j}L_i\right)\frac{d^{j-k}}{dx^{j-k}}(\widehat{W}_{k2}Q_1),$$

$$J_{j+1,1}=\frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!}\frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}}J_{01}(x)+\frac{1}{(j+1)!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}k!\,\frac{d^{j-k}}{dx^{j-k}}(\widehat{W}_{k1}Q_1),$$

$$Y_{j1}=\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\left(\prod_{i=k}^{j}L_i\right)\frac{d^{j-k}}{dx^{j-k}}(U_{k1}Q_1),$$

$$Y_{j+1,2}=\frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!}\frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}}Y_{02}(x)+\frac{1}{(j+1)!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}k!\,\frac{d^{j-k}}{dx^{j-k}}(U_{k2}Q_1),$$

$$j=0,1,\ldots,$$

где $L_i=2/(2i+3)$. Функции $X_{01}(x)$, $Y_{02}(x)$, $J_{01}(x)$ будем искать в виде

$$X_{01}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(D^mX_{01}\right)(0)\,x^m,$$

$$Y_{02}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(D^m Y_{02}\right)(0)\,x^m,$$

$$J_{01}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(D^m J_{01}\right)(0)\,x^m.$$

Из соотношений (7.1) — (7.3) легко выводим

$$X_{01}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{j+1}\frac{(-1)^i\,i!}{(j+2)!}\,\frac{d^{j+1-i}}{dx^{j+1-i}}\left(\widehat{V}_{i1}Q_1\right)(0)-\right.$$
$$\left.-\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\left(\prod_{k=i}^{j}L_k\right)\frac{d^{j-i}}{dx^{j-i}}\left(\widehat{V}_{i2}Q_1\right)(0)\right\}x^{j+2},$$

$$J_{01}(x)=Q_1(0)\,x+\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{j+1}\frac{(-1)^i\,i!}{(j+2)!}\,\frac{d^{j+1-i}}{dx^{j+1-i}}\left(\widehat{W}_{i1}Q_1\right)(0)-\right.$$
$$\left.-\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\left(\prod_{k=i}^{j}L_k\right)\frac{d^{j-i}}{dx^{j-i}}\left(\widehat{W}_{i2}Q_1\right)(0)\right\}x^{j+2},$$

$$Y_{02}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{j}\left[\frac{(-1)^i\,i!}{(j+1)!}\,\frac{d^{j-i}}{dx^{j-i}}\left(U_{i2}Q_1\right)(0)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(-1)^i\left(\prod_{k=i}^{j}L_k\right)\frac{d^{j-i}}{dx^{j-i}}\left(U_{i1}Q_1\right)(0)\right]\right\}x^{j+1}.$$

Заметим, что если выбрать $X_{01}(x)$, $Y_{02}(x)$, $J_{01}(x)$ так, чтобы $X_{01}(x)=$ $=Y_{02}\equiv 0$, $J_{01}(x)=Q_1(0)x$, то начальные условия $X(0)=J(0)=0$ будут выполняться с точностью до μ^4, а условие $Y(0)=0$ — с точностью до μ^3.

Продолжим получение вспомогательных формул. Последовательно находим

$$v''(z)\,X(z)=(\Phi'(z))^2\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\widetilde{X}_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j-3}(x)+\mu\widetilde{X}_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x)\right\},$$

$$\widetilde{X}_{j1}(x)=\sum_{k=0}^{j}\widetilde{V}_{k1}(x)\,X_{j-k,1}(x)+\sum_{k=0}^{j-4}\widetilde{V}_{k2}(x)\,X_{j-4-k,2}(x)-$$
$$-x\sum_{k=0}^{j-3}\widetilde{V}_{k2}(x)\,X_{j-3-k,2}(x),$$

$$\widetilde{X}_{j2}(x)=\sum_{k=0}^{j}\left\{X_{k1}(x)\,\widetilde{V}_{j-k,2}(x)+X_{k2}(x)\,\widetilde{V}_{j-k,1}(x)\right\};$$

$$v''(z)\,Y(z)=(\Phi'(z))^2\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\widetilde{Y}_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x)+\mu\widetilde{Y}_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j-3}(x)\right\},$$

$$\widetilde{Y}_{j1}(x)=\sum_{k=0}^{j}\widetilde{V}_{k1}(x)\,Y_{j-k,1}(x)-x\sum_{k=0}^{j}\widetilde{V}_{k2}(x)\,Y_{j-k,2}(x)+\sum_{k=0}^{j-1}\widetilde{V}_{k2}(x)\,Y_{j-1-k,2}(x),$$

$$\widetilde{Y}_{j2}(x)=\sum_{k=0}^{j}\widetilde{V}_{k1}(x)\,Y_{j-k,2}(x)+\sum_{k=0}^{j-3}\widetilde{V}_{k2}(x)\,Y_{j-3-k,1}(x);$$

$$v''(z)\,J(z)=(\Phi'(z))^2\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\widetilde{J}_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j-3}(x)+\mu\widetilde{J}_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x)\right\},$$

$$\widetilde{J}_{j1}(x)=\sum_{k=0}^{j}\widetilde{V}_{k1}(x)\,J_{j-k,1}(x)+\sum_{k=0}^{j-4}\widetilde{V}_{k2}(x)\,J_{j-4-k,2}(x)-x\sum_{k=0}^{j-3}\widetilde{V}_{k2}(x)\,J_{j-3-k,2}(x),$$

$$\widetilde{J}_{j2}(x)=\sum_{k=0}^{j}\left\{\widetilde{V}_{j-k,1}(x)\,J_{k2}(x)+\widetilde{V}_{k2}(x)\,J_{j-k,1}(x)\right\};$$

$$w''(z)\,X(z) = (\Phi'(z))^2 \sum_{j=0}^{\infty} \{\widehat{X}_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x) + \mu \widehat{X}_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j-3}(x)\},$$

$$\widehat{X}_{j1}(x) = \sum_{k=0}^{j} \widetilde{W}_{k1}(x)\,X_{j-k,1}(x) + \sum_{k=0}^{j-1} \widetilde{W}_{k2}(x)\,X_{j-1-k,2}(x) - x\sum_{k=0}^{j} \widetilde{W}_{k2}(x)\,X_{j-k,2}(x),$$

$$\widehat{X}_{j2}(x) = \sum_{k=0}^{j} \widetilde{W}_{k2}(x)\,X_{j-k,1}(x) + \sum_{k=0}^{j-3} \widetilde{W}_{k1}(x)\,X_{j-3-k,2}(x);$$

$$w''(z)\,Y(z) = (\Phi'(z))^2 \sum_{j=0}^{\infty} \{\widehat{Y}_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j-3}(x) + \mu \widehat{Y}_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x)\},$$

$$\widehat{Y}_{j1}(x) = \sum_{k=0}^{j-3} \widetilde{W}_{k1}(x)\,Y_{j-3-k,1}(x) + \sum_{k=0}^{j-1} \widetilde{W}_{k2}(x)\,Y_{j-1-k,2}(x) - x\sum_{k=0}^{j} \widetilde{W}_{k2}(x)\,Y_{j-k,2}(x),$$

$$\widehat{Y}_{j2}(x) = \sum_{k=0}^{j} \{\widetilde{W}_{k2}(x)\,Y_{j-k,1}(x) + \widetilde{W}_{k1}(x)\,Y_{j-k,2}(x)\};$$

$$w''(z)\,J(z) = (\Phi'(z))^2 \sum_{j=0}^{\infty} \{\widehat{J}_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x) + \mu \widehat{J}_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j-3}(x)\},$$

$$\widehat{J}_{j1}(x) = \sum_{k=0}^{j} \widetilde{W}_{k1}(x)\,J_{j-k,1}(x) - x\sum_{k=0}^{j} \widetilde{W}_{k2}(x)\,J_{j-k,2}(x) + \sum_{k=0}^{j-1} \widetilde{W}_{k2}(x)\,J_{j-1-k,2}(x),$$

$$\widehat{J}_{j2}(x) = \sum_{k=0}^{j} \widetilde{W}_{k2}(x)\,J_{j-k,1}(x) + \sum_{k=0}^{j-3} \widetilde{W}_{k1}(x)\,J_{j-3-k,2}(x);$$

$$v^3(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \{R_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j+1}(x) + \mu R_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x)\},$$

$$R_{j1}(x) = \sum_{k=0}^{j} \widehat{V}_{k1}(x)\,\xi_{j-k}(x) - x\sum_{k=0}^{j} \widehat{V}_{k2}(x)\,\eta_{j-k}(x) + \sum_{k=0}^{j-1} \widehat{V}_{k2}(x)\,\eta_{j-1-k}(x),$$

$$R_{j2}(x) = \sum_{k=0}^{j} \widehat{V}_{k1}(x)\,\eta_{j-k}(x) + \sum_{k=0}^{j-1} \widehat{V}_{k2}(x)\,\xi_{j-1-k}(x);$$

$$w^3(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \{\widetilde{R}_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x) + \mu \widetilde{R}_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j+1}(x)\},$$

$$\widetilde{R}_{j1}(x) = \sum_{k=0}^{j} \alpha_k(x)\,\widehat{W}_{j-k,1}(x) - x\sum_{k=0}^{j-1} \beta_k(x)\,\widehat{W}_{j-1-k,2}(x) + \sum_{k=0}^{j-2} \beta_k(x)\,\widehat{W}_{j-2-k,2}(x),$$

$$\widetilde{R}_{j2}(x) = \sum_{k=0}^{j} \{\beta_k(x)\,\widehat{W}_{j-k,1}(x) + \alpha_k(x)\,\widehat{W}_{j-k,2}(x)\};$$

$$w(z)\,v^2(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \{S_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x) + \mu S_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j+1}(x)\},$$

$$S_{j1}(x) = \sum_{k=0}^{j} \alpha_k(x)\,\widehat{V}_{j-k,1}(x) + \sum_{k=0}^{j-2} \beta_k(x)\,\widehat{V}_{j-2-k,2}(x) - x\sum_{k=0}^{j-1} \beta_k(x)\,\widehat{V}_{j-1-k,2}(x),$$

$$S_{j2}(x) = \sum_{k=0}^{j} \{\alpha_k(x)\,\widehat{V}_{j-k,2}(x) + \beta_k(x)\,\widehat{V}_{j-k,1}(x)\};$$

$$v(z)\,w^2(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \{\widetilde{S}_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j+1}(x) + \mu \widetilde{S}_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x)\},$$

$$\widetilde{S}_{j1}(x) = \sum_{k=0}^{j} \xi_k(x)\,\widehat{W}_{j-k,1}(x) - x\sum_{k=0}^{j} \eta_k(x)\,\widehat{W}_{j-k,2}(x) + \sum_{k=0}^{j-1} \eta_k(x)\,\widehat{W}_{j-1-k,2}(x),$$

$$\widetilde{S}_{j2}(x) = \sum_{k=0}^{j} \eta_k(x)\widehat{W}_{j-k,1}(x) + \sum_{k=0}^{j-1} \xi_k(x)\widehat{W}_{j-1-k,2}(x);$$

$$v'(z)v^2(z) = \Phi'(z)\sum_{j=0}^{\infty}\{T_{j1}(x)\widehat{u}^{2j-1}(x) + \mu T_{j2}(x)\widehat{u}^{2j}(x)\},$$

$$T_{j1}(x) = \sum_{k=0}^{j}\overline{V}_{k1}(x)\widehat{V}_{j-k,1}(x) + \sum_{k=0}^{j-2}\overline{V}_{k2}(x)\widehat{V}_{j-2-k,2}(x) - x\sum_{k=0}^{j-1}\overline{V}_{k2}(x)\widehat{V}_{j-1-k,2}(x),$$

$$T_{j2}(x) = \sum_{k=0}^{j}\{\overline{V}_{k1}(x)\widehat{V}_{j-k,2}(x) + \overline{V}_{k2}(x)\widehat{V}_{j-k,1}(x)\};$$

$$w'(z)v^2(z) = \Phi'(z)\sum_{j=0}^{\infty}\{\widetilde{T}_{j1}(x)\widehat{u}^{2j}(x) + \mu\widetilde{T}_{j2}(x)\widehat{u}^{2j-1}(x)\},$$

$$\widetilde{T}_{j1}(x) = \sum_{k=0}^{j}\overline{W}_{k1}(x)\widehat{V}_{j-k,1}(x) - x\sum_{k=0}^{j}\overline{W}_{k2}(x)\widehat{V}_{j-k,2}(x) + \sum_{k=0}^{j-1}\overline{W}_{k2}(x)\widehat{V}_{j-1-k,2}(x),$$

$$\widetilde{T}_{j2}(x) = \sum_{k=0}^{j}\overline{W}_{k2}(x)\widehat{V}_{j-k,1}(x) + \sum_{k=0}^{j-1}\overline{W}_{k1}(x)\widehat{V}_{j-1-k,2}(x);$$

$$v'(z)v(z)w(z) = \Phi'(z)\sum_{j=0}^{\infty}\{P_{j1}(x)\widehat{u}^{2j}(x) + \mu P_{j2}(x)\widehat{u}^{2j-1}(x)\},$$

$$P_{j1}(x) = \sum_{k=0}^{j}\overline{V}_{k1}(x)U_{j-k,1}(x) - x\sum_{k=0}^{j}\overline{V}_{k2}(x)U_{j-k,2}(x) + \sum_{k=0}^{j-1}\overline{V}_{k2}(x)U_{j-1-k,2}(x),$$

$$P_{j2}(x) = \sum_{k=0}^{j}\overline{V}_{k1}(x)U_{j-k,2}(x) + \sum_{k=0}^{j-1}\overline{V}_{k2}(x)U_{j-1-k,1}(x);$$

$$w'(z)v(z)w(z) = \Phi'(z)\sum_{j=0}^{\infty}\{\widetilde{P}_{j1}(x)\widehat{u}^{2j-1}(x) + \mu\widetilde{P}_{j2}(x)\widehat{u}^{2j}(x)\},$$

$$\widetilde{P}_{j1}(x) = \sum_{k=0}^{j-1}\{\overline{W}_{k1}(x)U_{j-k-1,1}(x) + \overline{W}_{k2}(x)U_{j-1-k,2}(x)\} -$$

$$- x\sum_{k=0}^{j}\overline{W}_{k2}(x)U_{j-k,2}(x),$$

$$\widetilde{P}_{j2}(x) = \sum_{k=0}^{j}\{\overline{W}_{k1}(x)U_{j-k,2}(x) + \overline{W}_{k2}(x)U_{j-k,1}(x)\};$$

$$v'(z)w^2(z) = \Phi'(z)\sum_{j=0}^{\infty}\{Q_{j1}(x)\widehat{u}^{2j-1}(x) + \mu Q_{j2}(x)\widehat{u}^{2j}(x)\}$$

$$Q_{j1}(x) = \sum_{k=0}^{j}\overline{V}_{k1}(x)\widehat{W}_{j-k,1}(x) + \sum_{k=0}^{j-2}\overline{V}_{k2}(x)\overline{W}_{j-2-k,2}(x) -$$

$$- x\sum_{k=0}^{j-1}\overline{V}_{k2}(x)\widehat{W}_{j-1-k,2}(x),$$

$$Q_{j2}(x) = \sum_{k=0}^{j}\{\overline{V}_{k1}(x)\widehat{W}_{j-k,2}(x) + \overline{V}_{k2}(x)\widehat{W}_{j-k,1}(x)\};$$

$$w'(z)w^2(z) = \Phi'(z)\sum_{j=0}^{\infty}\{\widetilde{Q}_{j1}(x)\widehat{u}^{2j}(x) + \mu\widetilde{Q}_{j2}(x)\widehat{u}^{2j-1}(x)\},$$

$$\widetilde{Q}_{j1}(x) = \sum_{k=0}^{j}\overline{W}_{k1}(x)\widehat{W}_{j-k,1}(x) + \sum_{k=0}^{j-1}\overline{W}_{k2}(x)\widehat{W}_{j-1-k,2}(x) -$$

$$- x\sum_{k=0}^{j}\overline{W}_{k2}(x)\widehat{W}_{j-k,2}(x),$$

$$\widetilde{Q}_{j2}(x) = \sum_{k=0}^{j} \overline{W}_{k2}(x)\widehat{W}_{j-k,1}(x) + \sum_{k=0}^{j-1} \overline{W}_{k1}(x)\widehat{W}_{j-1-k,2}(x).$$

Приступим теперь к определению коэффициентов аберраций. Коэффициент аберрации B определяется из решения задачи Коши (см. § 2)

$$N[B] = \frac{1}{\widehat{u}}\Gamma[v(z), v^2(z), z], \tag{7.4}$$

$$B(0) = B'(0) = 0.$$

Решение задачи (7.4) будем искать при $0 \leqslant z \leqslant z_1$ в «каноническом» виде

$$B(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\{B_{j1}(x)\widehat{u}^{2j-1}(x) + \mu B_{j2}(x)\widehat{u}^{2j}(x)\},$$

где коэффициенты B_{j1}, B_{j2} вычисляются с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$M_{j-2}[B_{j1}, B_{j-1,1}, B_{j-2,1}] = \frac{\Omega_{j-1}\left[\widetilde{X}_{j1}, T_{j-1.1}, R_{j-2,1}\right]}{2j-1}, \quad j = 0, 2, 3, \ldots;$$

$$R_{j-1}[B_{j2}, B_{j-1,2}, B_{j-2,2}] = \frac{\Omega_j\left[\widetilde{X}_{j-1,2}, T_{j-1,2}, R_{j-1,2}\right]}{2j-1}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots;$$

$$B_{j1}(0) + B_{j-1,2}(0) = 0,$$

$$B'_{j1}(0) + B'_{j-1,2}(0) + \frac{1}{2}B_{j+1,1}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

где

$$\Omega_j[X, Y, Z] = \frac{8(\Phi'(z))^2 X + 4\Phi'(z)\Phi'''(z)Y + \Phi^{(IV)}(z)Z}{16(\Phi'(z))^2 j}.$$

Следовательно, в разложении (2.5) мы должны вместо коэффициента B подставить коэффициент $B_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{j1}(x)x^{j-\frac{1}{2}}$ при $z \leqslant z_1$ и $\Phi(z) > \mu^2$.

Определим теперь коэффициент $B_0(z)$ при $z > z_1$. Он находится из решения следующей задачи Коши:

$$N_0[B_0] = \frac{1}{x^{1/2}}\Gamma_0\left[v_0(z), v_0^2(z), z, X_0(z_1)\right],$$

$$B_0(z_1) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{j1}(x_1)x_1^{j-\frac{1}{2}},$$

$$B'_0(z_1) = A_1\sum_{j=0}^{\infty}\left\{B'_{j-1,1}(x_1) + \frac{2j-1}{2}B_{j1}(x_1)\right\}x_1^{j-\frac{3}{2}},$$

где

$$\Gamma_0[X, Y, z, \tau] = \frac{(4\Phi'''(z)X' + \Phi^{(IV)}(z)X)Y}{32x^{1/2}} -$$

$$-\frac{2\Phi'(z)X' + \Phi''(z)X}{16x^{3/2}}\left\{\tau + \int_{z_1}^{z}\Phi'''(\tau)Y(\tau)\,d\tau\right\},$$

$$X_0(z_1) = \sum_{j=0}^{\infty} X_{j1}(x_1)x_1^{j},$$

т. е.

$$B_0(z) = B'_0(z_1)\bar{v}(z) + B_0(z_1)\bar{w}(z) +$$

$$+\frac{1}{x_1^{1/2}}\int_{z_1}^{\tau}\overline{Q}(z,\tau)\,\Gamma_0\left[v_0(\tau), v_0^2(\tau), \tau, X_0(z_1)\right]d\tau.$$

Коэффициенты аберраций G, F определяются из решений следующих задач:

$$\begin{gathered}
N[G]=\frac{1}{\widehat{u}}\{\Gamma[w(z), v^2(z), z]+\Gamma[v(z), w(z)\,v(z), z]\},\\
N[F]=\frac{1}{\widehat{u}}\Gamma[v(z), w(z)\,v(z), z],\\
G(0)=G'(0)=F(0)=F'(0)=0.
\end{gathered}\tag{7.5}$$

Будем искать эти коэффициенты в виде

$$\begin{aligned}
&F(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\{F_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x)+\mu F_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j-1}(x)\},\\
&G(z)=F(z)+\widehat{G}(z),\\
&\widehat{G}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\{\widehat{G}_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x)+\mu\widehat{G}_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j-1}(x)\},
\end{aligned}$$

где коэффициенты F_{j1}, F_{j2}, $\widehat{G}_{j1}$, $\widehat{G}_{j2}$ определяются с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{gathered}
R_{j-1}[F_{j1}, F_{j-1,1}, F_{j-2,1}]=\frac{\Omega_j\left[\widetilde{Y}_{j-1,1}, P_{j-1,1}, S_{j-1,1}\right]}{2j-1},\quad j=1,2,\ldots,\\
M_{j-2}[F_{j2}, F_{j-1,2}, F_{j-2,2}]=\frac{\Omega_{j-1}\left[\widetilde{Y}_{j2}, P_{j-1,2}, S_{j-2,2}\right]}{2j-1},\quad j=0,2,3,\ldots,\\
F_{j1}(0)+F_{j2}(0)=0,\ F'_{j1}(0)+F'_{j2}(0)+\frac{1}{2}F_{j+1,1}(0)=0,\ j=0,1,\ldots,\\
R_{j-1}\left[\widehat{G}_{j1}, \widehat{G}_{j-1,1}, \widehat{G}_{j-2,1}\right]=\frac{\Omega_j\left[\widehat{X}_{j-1,1}, \widetilde{T}_{j-1,1}, S_{j-1,1}\right]}{2j-1},\quad j=1,2,\ldots,\\
M_{j-2}\left[\widehat{G}_{j2}, \widehat{G}_{j-1,2}, \widehat{G}_{j-2,2}\right]=\frac{\Omega_{j-1}\left[\widehat{X}_{j2}, \widetilde{T}_{j-1,2}, S_{j-2,2}\right]}{2j-1},\quad j=0,2,\ldots,\\
\widehat{G}_{j1}(0)+\widehat{G}_{j2}(0)=0, \widehat{G}'_{j1}(0)+\widehat{G}'_{j2}(0)+\frac{1}{2}\widehat{G}_{j+1,1}(0)=0,\ j=0,1,\ldots.
\end{gathered}$$

Следовательно, в разложение (2.5) мы должны вместо коэффициентов F, G подставить коэффициенты

$$F_0(z)=\sum_{j=0}^{\infty}F_{j1}(x)\,x^j,\quad G_0(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\widehat{G}_{j1}(x)\,x^j+F_0(z)$$

при $z\leqslant z_1$ и $\Phi(z)>\mu^2$. При $z>z_1$ коэффициенты $F_0(z)$, $G_0(z)$ определяются так:

$$\begin{aligned}
F_0(z)&=F'_0(z_1)\,\bar{v}(z)+F_0(z_1)\,\overline{w}(z)+\\
&+\frac{1}{x_1^{1/2}}\int_{z_1}^{z}\overline{Q}(z,\tau)\,\Gamma_0[v_0(\tau), v_0(\tau)\,w_0(\tau), \tau, Y_0(z_1)]\,d\tau,\\
\widehat{G}_0(z)&=\widehat{G}'_0(z_1)\,\bar{v}(z)+\widehat{G}_0(z_1)\,\overline{w}(z)+F_0(z)+\\
&+\frac{1}{x_1^{1/2}}\int_{z_1}^{z}\overline{Q}(z,\tau)\,\Gamma_0\left[w_0(\tau), v_0^2(\tau), \tau, X_0(z_1)\right]d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$F_0'(z_1) = A_1 \sum_{j=0}^{\infty} \{F_{j-1,1}'(x_1) + jF_{j1}(x_1)\} x_1^{j-1},$$

$$\widehat{G}_0'(z_1) = A_1 \sum_{j=0}^{\infty} \{\widehat{G}_{j-1,1}'(x_1) + j\widehat{G}_{j1}(x_1)\} x_1^{j-1},$$

$$Y_0(z_1) = \sum_{j=0}^{\infty} Y_{j1}(x_1) x_1^{j+\frac{3}{2}}.$$

Коэффициенты аберраций D, C находятся из решений следующих задач Коши:

$$N[C] = \frac{1}{\widehat{u}} \Gamma[w, vw, z],$$

$$N[D] = \frac{1}{\widehat{u}} \left\{\Gamma[v, w^2, z] + \Gamma[w, vw, z] - \frac{2\Phi'v' + \Phi''v}{8\widehat{u}^3 R_k} A\right\}, \tag{7.6}$$

$$C(0) = C'(0),\ D(0) = -\frac{1}{2\mu R_k},\ D'(0) = \frac{A}{4\mu^3 R_k}.$$

Будем искать коэффициенты D, C в виде

$$C(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \{C_{j1}(x)\widehat{u}^{2j-1}(x) + \mu C_{j2}(x)\widehat{u}^{2j}(x)\},$$

$$D = \widehat{D} - \frac{1}{2R_k} v'(z),$$

$$\widehat{D}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \{\widehat{D}_{j1}(x)\widehat{u}^{2j-1}(x) + \mu\widehat{D}_{j2}(x)\widehat{u}^{2j}(x)\},$$

где коэффициенты C_{j1}, C_{j2}, $\widehat{D}_{j1}$, $\widehat{D}_{j2}$ определяются с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$M_{j-2}[C_{j1}, C_{j-1,1}, C_{j-2,1}] = \frac{\Omega_{j-1}\left[\widehat{Y}_{j1}, \widetilde{P}_{j-1,1}, \widetilde{S}_{j-2,1}\right]}{2j-1},\ j = 0, 2, 3, \ldots,$$

$$R_{j-1}[C_{j2}, C_{j-1,2}, C_{j-2,2}] = \frac{\Omega_j\left[\widehat{Y}_{j-1,2}, \widetilde{P}_{j-1,2}, \widetilde{S}_{j-1,2}\right]}{2j-1},\ j = 1, 2. \ldots,$$

$$C_{j1}(0) + C_{j-1,2}(0) = 0,\ C_{j1}'(0) + C_{j-1,2}'(0) + \frac{C_{j+1,1}(0)}{2} = 0,\ j = 0, 1, \ldots;$$

$$M_{j-2}\left[\widehat{D}_{j1}, \widehat{D}_{j-1,1}, \widehat{D}_{j-2,1}\right] = \frac{\Omega_{j-1}\left[\widehat{J}_{j1}, \widetilde{P}_{j-1,1}, \widetilde{S}_{j-2,1}\right]}{2j-1} +$$
$$+ \frac{\Omega_{j-1}\left[\widehat{Y}_{j1}, Q_{j-1,1}, \widetilde{S}_{j-2,1}\right]}{2j-1} + \frac{1}{16(\Phi'(z))^2(j-1)(2j-1)} \times$$
$$\times \left\{\frac{16}{R_k}(A - \Phi'(z))(\Phi'(z))^2\widetilde{V}_{j1} - \frac{4}{R_k}(2\Phi'(z)\Phi''(z)\overline{V}_{j-1,1} + \right.$$
$$\left. + \Phi'''(z)\xi_{j-2}(x))\right\},\ j = 0, 2, \ldots,$$

$$R_{j-1}\left[\widehat{D}_{j2}, \widehat{D}_{j-1,2}, \widehat{D}_{j-2,2}\right] = \frac{\Omega_j\left[\widehat{J}_{j-1,2}, \widetilde{R}_{j-1,2}, \widetilde{S}_{j-1,2}\right]}{2j-1} +$$
$$+ \frac{\Omega_j\left[\widehat{Y}_{j-1,2}, Q_{j-1,2}, \widetilde{S}_{j-1,2}\right]}{2j-1} + \frac{1}{16(\Phi'(z))^2 j(2j-1)} \times$$
$$\times \left\{\frac{16}{R_k}(A - \Phi'(z))(\Phi'(z))^2\widetilde{V}_{j-1,2} - \frac{4}{R_k}(2\Phi'(z)\Phi''(z)\overline{V}_{j-1,2} + \right.$$

$$+ \Phi'''(z)\,\eta_{j-1}(x))\Big\},\quad j = 1, 2, \ldots,$$

$$\widehat{D}_{j1}(0) + \widehat{D}_{j-2,2}(0) = 0,\quad \widehat{D}'_{j1}(0) + \widehat{D}'_{j-1,2}(0) + \frac{1}{2}\widehat{D}_{j+1,1}(0) = 0,\quad j = 0, 1, \ldots.$$

Следовательно, в разложении (2.5) мы должны вместо коэффициентов C, D подставить коэффициенты

$$C_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} C_{j1}(x)\,x^{j-1/2},$$

$$D_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\left\{\widehat{D}_{j1}(x) - \frac{\Phi'(z)}{2R_k}\,\overline{V}_{j1}(x)\right\}x^{j-1/2}$$

при $z \leqslant z_1$ и $\Phi(z) > \mu^2$. При $z > z_1$ коэффициенты $C_0(z)$, $D_0(z)$ определяются так:

$$C_0(z) = C'_0(z_1)\,\bar{v}(z) + C_0(z_1)\,\overline{w}(z) +$$
$$+ \frac{1}{x_1^{1/2}}\int_{z_1}^{z} \overline{Q}(z, \tau)\,\Gamma_0[w_0(\tau), v_0(\tau)\,w_0(\tau), \tau, Y_0(z_1)]\,d\tau,$$
$$D_0(z) = D'_0(z_1)\,\bar{v}(z) + D_0(z_1)\,\overline{w}(z) +$$
$$+ \frac{1}{x_1^{1/2}}\int_{z_1}^{z} \overline{Q}(z, \tau)\Big\{\Gamma_0\left[v_0(\tau), w_0^2(\tau), \tau, J_0(z_1)\right] +$$
$$+ \Gamma_0[w_0(\tau), v_0(\tau)\,w_0(\tau), \tau, Y_0(z_1)] - A\,\frac{2\Phi'(\tau)\,v'_0(\tau) + \Phi''(\tau)\,v_0(\tau)}{8\Phi^{3/2}(\tau)\,R_k}\Big\}\,d\tau,$$

где

$$C'_0(z_1) = A_1\sum_{j=0}^{\infty}\left\{C'_{j-1,1}(x_1) + \frac{2j-1}{2}\,C_{j1}(x_1)\right\}x_1^{j-3/2},$$

$$D'_0(z_1) = A_1^2\sum_{j=0}^{\infty}\Big\{\frac{\widehat{D}'_{j-1,1}(x_1)}{A_1} + \frac{2j-1}{2}\,\frac{\widehat{D}_{j1}(x_1)}{A_1} - \frac{Q(z_1)}{2R_k}\,\overline{V}_{j-1,1}(x_1) -$$
$$- \frac{\overline{V}'_{j-1,1}(x_1)}{2R_k} + \frac{2j-1}{4R_k}\,\overline{V}_{j1}(x_1)\Big\}\,x_1^{j-3/2},$$

$$J_0(z_1) = \sum_{j=0}^{\infty} J_{j1}(x_1)\,x_1^{j}.$$

Наконец, коэффициент аберрации E находится из решения задачи Коши

$$\begin{gathered} N[E] = \frac{1}{\widehat{u}}\left\{\Gamma[w, w^2, z] - \frac{(2\Phi'w' + \Phi''w)\,A}{8\widehat{u}^3R_k}\right\},\\ E(0) = 0,\quad E'(0) = \frac{\Phi''(0)}{8\mu^2R_k}. \end{gathered} \tag{7.7}$$

Коэффициент E ищем в виде

$$E(z) = -\frac{1}{2R_k}\,w'(z) + \sum_{j=0}^{\infty}\{E_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x) + \mu E_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j-1}(x)\},$$

где коэффициенты E_{j1}, E_{j2} определяются с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$R_{j-1}[E_{j1}, E_{j-1,1}, E_{j-2,1}] = \frac{\Omega_j\left[\widehat{J}_{j-1,1}, \widetilde{Q}_{j-1,1}, \widetilde{R}_{j-1,1}\right]}{2j-1} +$$

$$+ \frac{1}{16(\Phi'(z))^2 j(2j-1)}\left\{\frac{16}{R_k}(A - \Phi'(z))\widetilde{W}_{j-1,1}(x)(\Phi'(z))^2 -\right.$$

$$\left.- \frac{4}{R_k}\left(2\Phi'(z)\Phi''(z)\overline{W}_{j-1,1}(x) + \Phi'''(z)\alpha_{j-1}(x)\right)\right\}, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

$$M_{j-2}[E_{j2}, E_{j-1,2}, E_{j-2,2}] = \frac{\Omega_{j-1}\left[\widehat{J}_{j2}, \widetilde{Q}_{j-1,2}, \widetilde{R}_{j-2,2}\right]}{2j-1} +$$

$$+ \frac{1}{16(\Phi'(z))^2(j-1)(2j-1)}\left\{\frac{16}{R_k}(A - \Phi'(z))(\Phi'(z))^2\widetilde{W}_{j2}(x) -\right.$$

$$\left.- \frac{4}{R_k}\left(2\Phi'(z)\Phi''(z)\overline{W}_{j-1,2}(x) + \Phi'''(z)\beta_{j-2}(x)\right)\right\}, \quad j = 0, 2, 3, \ldots,$$

$$E_{j1}(0) + E_{j2}(0) = 0, \quad E'_{j1}(0) + E'_{j2}(0) + \frac{1}{2}E_{j+1,1}(0) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Следовательно, мы должны вместо коэффициента E подставить в (2.5) коэффициент

$$E_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\left\{E_{j1}(x) - \frac{1}{2R_k}\Phi'(z)\overline{W}_{j1}(x)\right\}x^j$$

при $z \leqslant z_1$ и $\Phi(z) > \mu^2$. При $z > z_1$ коэффициент $E_0(z)$ определяется так:

$$E_0(z) = E'_0(z_1)\bar{v}(z) + E_0(z_1)\bar{w}(z) +$$

$$+ \frac{1}{x_1^{1/2}}\int_{z_1}^{z}\overline{Q}(z, \tau)\left\{\Gamma\left[w_0(\tau), w_0^2(\tau), \tau, J_0(z_1)\right] -\right.$$

$$\left.- \frac{2\Phi'(\tau)w'_0(\tau) + \Phi''(\tau)w_0(\tau)}{8\Phi^{3/2}(\tau)R_k}A\right\}d\tau,$$

где

$$E'_0(z_1) = A_1^2\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\frac{E'_{j-1,1}(x_1)}{A_1} + \frac{E_{j1}(x_1)^j}{A_1} -\right.$$

$$\left.- \frac{1}{2R_k}\left(Q(z_1)\overline{W}_{j-1,1}(x_1) + \overline{W}'_{j-1,1}(x_1) + \overline{W}_{j1}(x_1)j\right)\right\}x_1^{j-1}.$$

Полагая

$$B_{11}(x) = B_{02}(x) \equiv 0, \quad F_{01}(x) = -\frac{Q_1(0)}{2A^2}x, \quad F_{12}(x) \equiv -\frac{2Q_1(0)}{3A^2},$$

$$\widehat{G}_{01}(x) = \widehat{G}_{12}(x) \equiv 0, \quad \widehat{D}_{11}(x) = -\widehat{D}_{02}(x) \equiv$$

$$\equiv \frac{2Q_1(0) - Q(0)\Phi''(0)}{4A}, \quad C_{11}(x) = C_{02}(x) \equiv 0,$$

$$E_{01}(x) = \frac{1}{8}Q(0)\Phi''(0) - \left[\frac{7Q^2(0)\Phi''(0)}{16} - \frac{5Q(0)Q_1(0)}{8}\right]x - \frac{\Phi^{(IV)}(0)}{16(\Phi'(0))^2}x,$$

$$E_{12}(x) \equiv \left[-\frac{\Phi''(0)Q^2(0)}{2} - \frac{Q(0)Q_1(0)}{6}\right] - \frac{\Phi^{(IV)}(0)}{8(\Phi'(0))^2},$$

легко показать, что при таком выборе условия $B(0) = \widehat{D}(0) = C(0) = 0$ выполнены с точностью до μ^3, условия $B'(0) = C'(0) = \widehat{D}'(0) = 0$ — с точностью до μ, условия $F(0) = \widehat{G}(0) = E(0) = 0$ — с точностью до μ^4, условия $E'(0) = \frac{\Phi''(0)}{8\mu^2 R_k}$, $F'(0) = \widehat{G}'(0) = 0$ — с точностью до μ^2.

§ 8. НАХОЖДЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВРЕМЕННЫХ АБЕРРАЦИЙ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

В § 3 было найдено для времени пролета t в случае катодных ЭООС аберрационное выражение

$$t = t_{00} + \frac{1}{2} t_{20}\delta^2 + t_{11}\delta\rho_0 + \frac{1}{2} t_{02}\rho_0^2 + \ldots, \tag{8.1}$$

где t_{00}, t_{ij}, $i+j=2$ — коэффициенты временных аберраций, зависящие от z, μ. Разложим в (8.1) все коэффициенты по малому параметру μ.

Коэффициент t_{00} определяется как решение задачи Коши (см. § 3)

$$t'_{00} = \frac{\lambda_1}{\widehat{u}}, \quad t_{00}(0) = 0. \tag{8.2}$$

Решение задачи (8.2) будем искать при $0 \leqslant z \leqslant z_1$ в виде

$$t_{00}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \{\widehat{t}_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j+1}(x) + \mu\widehat{t}_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x)\},$$

где коэффициенты t_{j1}, t_{j2} определяются с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{gathered} R^0_{j-1}[\widehat{t}_{j1}, \widehat{t}_{j-1,1}] = 0, \; M^0_{j-1}[\widehat{t}_{j2}, \widehat{t}_{j-1,2}] = 0, \; j = 1, 2, \ldots; \\ \widehat{t}_{j1}(0) + \widehat{t}_{j2}(0) = 0, \; j = 0, 1, \ldots; \\ \widehat{t}_{01}(x) = \frac{2\lambda_1}{\Phi'(z)}. \end{gathered} \tag{8.3}$$

Из (8.3) получим

$$\widehat{t}_{j1}(x) = \lambda_1(-1)^j \left(\prod_{i=0}^{j} L_{i-1}\right)\frac{d^j}{dx^j}\left(\frac{1}{\Phi'}\right),$$

$$\widehat{t}_{j+1,2}(x) = \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!}\,\frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}}\,\widehat{t}_{02}(x), \; j = 0, 1, \ldots,$$

$$\widehat{t}_{02}(x) = -\lambda_1 \sum_{j=0}^{\infty}\left(\prod_{i=0}^{j} L_{i-1}\right)\frac{d^j}{dx^j}\left(\frac{1}{\Phi'}\right)(0)\,x^j.$$

Тогда при $z \leqslant z_1$ и $\Phi(z) > \mu^2$

$$t_{00}(z) = \tau_0(x) + \mu\tau_1(x) + \mu^2\tau_2(x) + \mu^3\tau_3(x) + \ldots,$$

где

$$\tau_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{t}_{j1}(x)\,x^{j+1/2}, \quad \tau_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{t}_{j2}(x)\,x^j,$$

$$\tau_2(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(j + \frac{1}{2}\right)\widehat{t}_{j1}(x)\,x^{j-\frac{1}{2}}, \quad \tau_3(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\,\widehat{t}_{j+1,2}(x)\,x^j,$$

а при $z > z_1$

$$t_{00}(z) = \tau_0(x_1) + \lambda_1 \int_{z_1}^{z} \frac{d\xi}{(\Phi(\xi))^{1/2}} + \mu\tau_1(x_1) + \mu^2\left[\tau_2(x_1) - \frac{\lambda_1}{2}\int_{z_1}^{z}\frac{d\xi}{(\Phi(\xi))^{3/2}}\right] + \\ + \mu^3\tau_3(x_1) + \ldots.$$

Поскольку $t_{20}(z) = \frac{\lambda_1}{4}\int_0^z \frac{X(\xi)}{\widehat{u}^3(\xi)}\,d\xi$, будем искать $t_{20}(z)$ при $0 \leqslant z \leqslant z_1$ в виде

$$t_{20}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \{\Delta_{j1}(x)\,\widehat{u}^{2j-1}(x) + \mu\Delta_{j2}(x)\,\widehat{u}^{2j}(x)\},$$

где коэффициенты Δ_{j1}, Δ_{j2} определяются с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$R_{j-2}^0[\Delta_{j1}, \Delta_{j-1,1}] = \frac{\lambda_1}{2(2j-1)}\frac{X_{j1}}{\Phi'},$$

$$M_j^0[\Delta_{j+1,2}, \Delta_{j2}] = \frac{\lambda_1}{4(j+1)}\frac{X_{j2}}{\Phi'}, \tag{8.4}$$

$$\Delta_{j1}(0)+\Delta_{j-1,2}(0)=0,\ j=0,\ 1,\ \ldots$$

Из (8.4) получаем

$$\Delta_{j1}(x) = \frac{\lambda_1}{4}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\left(\prod_{i=k}^{j}L_{i-2}\right)\frac{d^{j-k}}{dx^{j-k}}\left(\frac{X_{j1}}{\Phi'}\right),$$

$$\Delta_{j+1,2}(x) = \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!}\frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}}\Delta_{02}(x) + \frac{\lambda_1}{4}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\frac{k!}{(j+1)!}\frac{d^{j-k}}{dx^{j-k}}\left(\frac{X_{j2}}{\Phi'}\right),$$

$$j=0,\ 1,\ \ldots,$$

$$\Delta_{02}(x) = -\Delta_{11}(0) + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda_1}{4}\left\{\sum_{k=0}^{j+2}(-1)^k\left(\prod_{i=k}^{j+2}L_{i-2}\right)\frac{d^{j+2-k}}{dx^{j+2-k}}\left(\frac{X_{k1}}{\Phi'}\right)(0) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{j}(-1)^k\frac{k!}{(j+1)!}\frac{d^{j-k}}{dx^{j-k}}\left(\frac{X_{k2}}{\Phi'}\right)(0)\right\}x_1^{j+1}.$$

Следовательно, при $z \leqslant z_1$ и $\Phi(z) > \mu^2$

$$t_{20}(z) = \sigma_0(x) + \mu\sigma_1(x) + \ldots,$$

где

$$\sigma_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\Delta_{j1}(x)\,x^{j-1/2},\quad \sigma_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\Delta_{j2}(x)\,x^j,$$

а при $z > z_1$

$$t_{20}(z) = \sigma_0(x_1) + \frac{\lambda_1}{4}\int_{z_1}^{z}\frac{\left\{X_0(z_1) + \int_{z_1}^{\xi}\Phi'''(\tau)\,v_0^2(\tau)\,d\tau\right\}}{\Phi^{3/2}(\xi)}d\xi +$$

$$+\mu\left[\frac{\lambda_1}{4}\int_{z_1}^{z}\frac{\left\{X_1(z_1) + 2\int_{z_1}^{\xi}\Phi'''(\tau)\,v_0(\tau)\,v_1(\tau)\,d\tau\right\}}{\Phi^{3/2}(\xi)}d\xi + \sigma_1(x_1)\right] + \ldots,$$

где $X_1(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty}X_{n2}(x_1)\,x_1^{n+3/2}$. Коэффициент $t_{11}(z)$ определяется так:

$$t_{11}(z) = \frac{\lambda_1\varkappa_2}{4}\int_0^z\frac{Y(\xi)}{\hat{u}^3(\xi)}\,d\xi.$$

Будем искать $t_{11}(z)$ при $0 \leqslant z \leqslant z_1$ в виде

$$t_{11}(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\{\rho_{j1}(x)\,\hat{u}^{2j}(x) + \mu\rho_{j2}(x)\,\hat{u}^{2j-1}(x)\},$$

где коэффициенты ρ_{j1}, ρ_{j2} находятся с помощью рекуррентных соотношений

$$M_j^0[\rho_{j+1,1}, \rho_{j1}] = \frac{\lambda_1\varkappa_2}{4(j+1)}\frac{Y_{j1}}{\Phi'},\quad R_{j-2}^0[\rho_{j2}, \rho_{j-1,2}] = \frac{\lambda_1\varkappa_2}{2(2j-1)}\frac{Y_{j2}}{\Phi'}, \tag{8.5}$$

$$\rho_{j1}(0)+\rho_{j2}(0)=0,\ j=0,\ 1,\ \ldots.$$

Из (8.5) получаем

$$\rho_{j2}(x) = \frac{\lambda_1 \varkappa_2}{4} \sum_{k=0}^{j}{}' (-1)^{j-k} \left(\prod_{i=k}^{j} L_{i-2} \right) \frac{d^{j-k}}{dx^{j-k}} \left(\frac{Y_{j2}}{\Phi'} \right),$$

$$\rho_{j1}(x) = \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!} \frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}} \rho_{01}(x) +$$

$$+ \frac{\lambda_1 \varkappa_2}{4} \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \frac{k!}{(j+1)!} \frac{d^{j-k}}{dx^{j-k}} \left(\frac{Y_{j1}}{\Phi'} \right), \quad j = 0, 1, \ldots,$$

$$\rho_{01}(x) = \frac{\lambda_1 \varkappa_2}{4} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \frac{k!}{j!} \frac{d^{j-k-1}}{dx^{j-k-1}} \left(\frac{Y_{j1}}{\Phi'} \right)(0) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{j} (-1)^{k+1} \left(\prod_{i=k}^{j} L_{i-2} \right) \frac{d^{j-k}}{dx^{j-k}} \left(\frac{Y_{k2}}{\Phi'} \right)(0) \right\} x^j.$$

Следовательно, при $z \leqslant z_1$ и $\Phi(z) > \mu^2$

$$t_{11}(z) = \pi_0(x) + \mu \pi_1(x) + \ldots,$$

где

$$\pi_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{j1}(x) x^j, \quad \pi_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_{j2}(x) x^{j-1/2},$$

а при $z > z_1$

$$t_{11}(z) = \pi_0(z_1) + \frac{\lambda_1 \varkappa_2}{4} \int_{z_1}^{z} \frac{\left\{ Y_0(z_1) + \int_{z_1}^{\xi} \Phi'''(\tau) v_0(\tau) w_0(\tau) d\tau \right\}}{\Phi^{3/2}(\xi)} d\xi +$$

$$+ \mu \left[\frac{\lambda_1 \varkappa_2}{4} \int_{z_1}^{z} \frac{\left\{ Y_1(z_1) + \int_{z_1}^{\xi} \Phi'''(\tau) [v_0(\tau) w_1(\tau) + v_1(\tau) w_0(\tau)] d\tau \right\}}{\Phi^{3/2}(\xi)} d\xi + \pi_1(z_1) \right] + \ldots,$$

где $Y_1(z_1) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} Y_{j2}(x_1) x_1^j$. Наконец, коэффициент $t_{02}(z)$ определяется так:

$$t_{02}(z) = -\frac{\lambda_1}{R_k \mu} + \lambda_1 \int_{0}^{z} \frac{1}{\widehat{u}^3(\xi)} \left\{ \frac{A}{2R_k} + \frac{1}{4} J(\xi) \right\} d\xi.$$

Будем искать $t_{02}(z)$ при $0 \leqslant z \leqslant z_1$ в виде

$$t_{02}(z) = -\frac{\lambda_1}{R_k} v'(z) + \mathcal{O}(z),$$

где

$$\mathcal{O}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \{\theta_{j1}(x) \widehat{u}^{2j-1}(x) + \mu \theta_{j2}(x) \widehat{u}^{2j}(x)\},$$

и коэффициенты θ_{j1}, θ_{j2} определяются с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$R_{j-2}^0 [\theta_{j1}, \theta_{j-1,1}] = \frac{2\lambda_1}{2j-1} \frac{1}{\Phi'} \left[\frac{1}{4} J_{j1} + \frac{(\Phi')^2 \widetilde{V}_{j1}}{R_k} \right], \quad j = 1, 2, \ldots,$$

$$M_j^0 [\theta_{j+1,2}, \theta_{j2}] = \frac{\lambda_1}{(j+1)\Phi'} \left[\frac{1}{4} J_{j2} + \frac{(\Phi')^2 \widetilde{V}_{j2}}{R_k} \right], \quad j = 0, 1, \ldots, \qquad (8.6)$$

$$\theta_{01}(x) = -\frac{A\lambda_1}{R_k\Phi'} - \frac{\lambda_1}{2}\frac{J_{01}}{\Phi'} - \frac{2\lambda_1}{R_k}\Phi'\widetilde{V}_{01},$$

$$\theta_{j1}(0) + \theta_{j-1,2}(0) = 0, \ j = 0, \ 1, \ \ldots .$$

Из (8.6) следует

$$\theta_{j1}(x) = \lambda_1 \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \left(\prod_{i=k}^{j} L_{i-2}\right) \frac{d^{j-k}}{dx^{j-k}} \left\{\frac{1}{\Phi'}\left[\frac{1}{4}J_{j1} + \frac{(\Phi')^2\widetilde{V}_{j1}}{R_k}\right]\right\} +$$

$$+ (-1)^j \left(\prod_{i=0}^{j} L_{i-2}\right) \frac{d^j}{dx^j}\theta_{01}, \ j = 1, 2, \ldots,$$

$$\theta_{j+1,2}(x) = \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!}\frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}}\theta_{02}(x) +$$

$$+ \lambda_1 \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} \frac{k!}{(j+1)!} \frac{d^{j-k}}{dx^{j-k}} \left\{\frac{1}{\Phi'}\left[\frac{1}{4}J_{j2} + \frac{(\Phi')^2\widetilde{V}_{j2}}{R_k}\right]\right\}, \ j = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\theta_{02}(x) = \lambda_1 \sum_{j=0}^{\infty} \left\{\sum_{k=1}^{j+1} (-1)^k \left(\prod_{i=k}^{j+1} L_{i-2}\right) \frac{d^{j-k+1}}{dx^{j-k+1}} \left[\frac{J_{j1}}{4\Phi'} + \frac{\Phi'\widetilde{V}_{j1}}{R_k}\right](0) + \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k \frac{k!}{j!} \frac{d^{j-1-k}}{dx^{j-1-k}} \left[\frac{J_{j2}}{4\Phi'} + \frac{\Phi'\widetilde{V}_{j2}}{R_k}\right](0) +$$

$$\left. + \left(\prod_{i=0}^{j+1} L_{i-2}\right) \frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}} \left[\frac{A}{2R_k\Phi'} + \frac{J_{01}}{4\Phi'} + \frac{\Phi'\widetilde{V}_{01}}{R_k}\right](0)\right\} x^j.$$

Следовательно, при $z \leqslant z_1$, $\Phi(z) > \mu^2$

$$t_{02}(z) = t_1(x) + \mu t_2(x) + \ldots,$$

где

$$t_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\theta_{j1}(x) - \lambda_1 \frac{\overline{V}_{j1}(x)\,\Phi'(z)}{R_k}\right) x^{j-\frac{1}{2}},$$

$$t_2(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\theta_{j2}(x) - \lambda_1 \frac{\overline{V}_{j2}(x)\,\Phi'(z)}{R_k}\right) x^j,$$

а при $z > z_1$

$$t_{02}(z) = t_1(x_1) + \lambda_1 \int_{z_1}^{z} \frac{A}{2R_k\Phi^{3/2}(\xi)}\,d\xi +$$

$$+ \frac{\lambda_1}{4} \int_{z_1}^{z} \frac{\left\{J_0(z_1) + \int_{z_1}^{\xi} \Phi'''(\tau)\, w_0^2(\tau)\, d\tau\right\}}{\Phi^{3/2}(\xi)}\,d\xi +$$

$$+ \mu \left[\frac{\lambda_1}{4} \int_{z_1}^{z} \frac{\left\{J_1(z_1) + 2\int_{z_1}^{\xi} \Phi'''(\tau)\, w_0(\tau)\, w_1(\tau)\, d\tau\right\}}{\Phi^{3/2}(\xi)}\,d\xi + t_2(x_1)\right] + \ldots,$$

где

$$J_1(z_1) = \sum_{j=0}^{\infty} J_{j2}(x_1)\, x_1^{j+3/2}.$$

§ 9. КОЭФФИЦИЕНТЫ АБЕРРАЦИИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОННОГО ЗЕРКАЛА

Формулы, полученные в предыдущих параграфах, позволяют легко получить коэффициенты аберрации для одной очень интересной разновидности ЭООС — электронного зеркала. В этом случае потенциал $\Phi(z)$ принимает нулевое значение в двух точках: $\Phi(0)=\Phi(z_\gamma)=0$, а $\Phi_m\equiv 0$.

Траектория частицы в электронном зеркале имеет прямую и отраженную ветви. Предположение относительно малости ρ_0, μ в разложении (2.5) позволяет считать, что отражение происходит в точке z_γ. Предположим, также, что

1) $\Phi(z)>0$ при $0<z<z_\gamma$;

2) $\Phi(z)$ аналитична на отрезке $[0, z_a]$, $z_a\geqslant z_\gamma$;

3) $\Phi'(z)\neq 0$ при $0\leqslant z\leqslant z_1$ и $z_1<z_2\leqslant z\leqslant z_\gamma$, $\Phi(z)>\mu^2$ при $z_1\leqslant\leqslant z\leqslant z_2$;

4) функция $Q(x)=\dfrac{\Phi''}{(\Phi')^2}(z(x))$, где $x=\Phi(z)$, аналитична при $0\leqslant z\leqslant z_1$ и представима в виде

$$Q(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}q_m x^m,$$

где $q_m=\dfrac{d^m}{dx^m}Q(x)\big|_{x=0}$, $\dfrac{d}{dx}=\dfrac{1}{\Phi'(z)}\dfrac{d}{dz}$;

5) функция $Q_\Psi(x)=\dfrac{\Psi''}{(\Psi')^2}(y(x))$, где $x=\Psi(y)=\Phi(z_\gamma-y)=\Phi(z)$, $y=z_\gamma-z$, аналитична при $0\leqslant y\leqslant y_1$ $(z_2\leqslant z\leqslant z_\gamma)$, $y_1=z_\gamma-z_2$ и представима в виде

$$Q_\Psi(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\tilde q_m x^m,$$

где $\tilde q_m=\dfrac{d^m}{dx^m}Q_\Psi(x)\big|_{x=0}$, $\dfrac{d}{dx}=\dfrac{-1}{\Phi'(z)}\dfrac{d}{dy}$.

Покажем, что задача о нахождении коэффициентов аберрации на отрезках $[z_2, z_\gamma]$ (прямая и отраженная ветви), $[z_1, z_2]$ (отраженная ветвь) сводится к уже рассмотренной задаче о нахождении коэффициентов аберрации на отрезке $[0, z_2]$.

Выведем выражение для функций $v(z)$, $w(z)$ при $z_2\leqslant z\leqslant z_\gamma$ на прямой ветви до поворота. С этой целью в уравнении (2.2) сделаем замену $y=z_\gamma-z$. Получим уравнение

$$N_\Psi[X]=\left\{\frac{d^2}{dy^2}+\frac{\Psi'}{2\hat u_\Psi^2}\frac{d}{dy}+\frac{\Psi''}{4\hat u_\Psi^2}\right\}X=0, \tag{9.1}$$

где $\hat u_\Psi{}^2(y)=[\mu^2+\Psi(y)]^{1/2}$. В силу результатов § 5 имеем при $0\leqslant y\leqslant\leqslant y_1$ представления

$$\hat w(y)=\sum_{j=0}^{\infty}\{\hat\alpha_j(x)\hat u^{2j}(x)+\mu\hat\beta_j(x)\hat u^{2j+1}(x)\},$$

$$\hat v(y)=\sum_{j=0}^{\infty}\{\hat\xi_j(x)\hat u^{2j+1}(x)+\mu\hat\eta_j(x)\hat u^{2j}(x)\},$$

или

$$\begin{aligned}\hat v(y)&=\hat u(x)\sum_{l=0}^{\infty}\hat V_{l1}(x)\mu^{2l}+\mu\sum_{l=0}^{\infty}\hat V_{l2}(x)\mu^{2l},\\ \hat w(y)&=\sum_{l=0}^{\infty}\hat W_{l1}(x)\mu^{2l}+\mu\hat u(x)\sum_{l=0}^{\infty}\hat W_{l2}(x)\mu^{2l},\end{aligned} \tag{9.2}$$

где

$$\hat V_{l1}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}C_{j+l}^{l}\hat\xi_{j+l}(x)x^j,\quad \hat V_{l2}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}C_{j+l}^{l}\hat\eta_{j+l}(x)x^j,$$

$$\widehat{W}_{l1}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}C_{j+l}^{l}\widehat{\alpha}_{j+l}(x)\,x^{j},\quad \widehat{W}_{l2}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}C_{j+l}^{l}\widehat{\beta}_{j+l}(x)\,x^{j},\quad C_{j+l}^{l}=\frac{(j+l)!}{j!\,l!}.$$

Здесь $\widehat{v}(y)$, $\widehat{w}(y)$ — два линейно независимых решения уравнения (9.1), при этом

$$\widehat{v}(y)=0,\ \widehat{v}'(y)=1/\mu,\quad \widehat{w}(y)=1,\ \widehat{w}'(y)=0.$$

При $y\leqslant y_1$ (пока $\Psi(y)>\mu^2$) $\widehat{v}(y)$, $\widehat{w}(y)$ можно представить следующим образом:

$$\widehat{v}(y)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\mu^l}{l!}\widehat{v}_l(y),\quad \widehat{w}(y)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\mu^l}{l!}\widehat{w}_l(y). \tag{9.3}$$

Функции $v(z)$, $w(z)$ при $z_2\leqslant z\leqslant z_\text{т}$ будем искать в виде

$$v(z)=c\widehat{v}(y)+r\widehat{w}(y),\quad w(z)=g\widehat{v}(y)+q\widehat{w}(y), \tag{9.4}$$

где константы c, r, g, q определяются так:

$$C=-\sqrt{\mu^2+\Phi(z_2)}\,\{v(z_2)\widehat{w}'(y_1)+v'(z_2)\widehat{w}(y_1)\},$$
$$r=\sqrt{\mu^2+\Phi(z_2)}\,\{v(z_2)\widehat{v}'(y_1)+v'(z_2)\widehat{v}(y_1)\},$$
$$g=\sqrt{\mu^2+\Phi(z_2)}\,\{w(z_2)\widehat{w}'(y_1)+w'(z_2)\widehat{w}(y_1)\},$$
$$q=\sqrt{\mu^2+\Phi(z_2)}\,\{w(z_2)\widehat{v}'(y_1)+w'(z_2)\widehat{v}(y_1)\}.$$

Пользуясь (5.16), (9.3), константы c, r, g, q можно представить в виде

$$\begin{gathered}c=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\mu^l}{l!}c_l,\quad r=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\mu^l}{l!}r_l,\\ g=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\mu^l}{l!}g_l,\quad q=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\mu^l}{l!}q_l,\end{gathered} \tag{9.5}$$

где

$$c_{2n}=-\sum_{j=0}^{n}\left\{\sum_{i=0}^{2j}C_{2j}^{i}\left[v_i(z_2)\widehat{w}'_{2j-i}(y_1)+v'_i(z_2)\widehat{w}_{2j-i}(y_1)\right]\right\}C_{2n}^{2j}A_{nj},$$

$$c_{2n+1}=-\sum_{j=0}^{n}\left\{\sum_{i=0}^{2j+1}C_{2j+1}^{i}\left[v_i(z_2)\widehat{w}'_{2j+1-i}(y_1)+v'_i(z_2)\widehat{w}_{2j+1-i}(y_1)\right]\right\}C_{2n+1}^{2j+1}A_{nj},$$

$$g_{2n}=-\sum_{j=0}^{n}C_{2n}^{2j}A_{nj}\left\{\sum_{i=0}^{2j}C_{2j}^{i}\left[w_i(z_2)\widehat{w}_{2j-i}(y_1)+w'_i(z_2)\widehat{w}_{2j-i}(y_1)\right]\right\},$$

$$g_{2n+1}=-\sum_{j=0}^{n}C_{2n+1}^{2j+1}A_{nj}\left\{\sum_{i=0}^{2j+1}C_{2j+1}^{i}\left[w_i(z_2)\widehat{w}'_{2j+1-i}(y_1)+w'_i(z_2)\widehat{w}_{2j+1-i}(y_1)\right]\right\},$$

$$r_{2n}=\sum_{j=0}^{n}C_{2n}^{2j}\left\{\sum_{i=0}^{2j}C_{2j}^{i}\left[v_i(z_2)\widehat{v}'_{2j-i}(y_1)+\widehat{v}_{2j-i}(y_1)\,v'_i(z_2)\right]\right\}A_{nj},$$

$$r_{2n+1}=\sum_{j=0}^{n}C_{2n+1}^{2j+1}\left\{\sum_{i=0}^{2j+1}C_{2j+1}^{i}\left[v_i(z_2)\widehat{v}'_{2j+1-i}(y_1)+\widehat{v}_{2j+1-i}(y_1)\,v'_i(z_2)\right]\right\}A_{nj},$$

$$q_{2n}=\sum_{j=0}^{n}C_{2n}^{2j}\left\{\sum_{i=0}^{2j}C_{2j}^{i}\left[w_i(z_2)\widehat{v}'_{2j-i}(y_1)+w'_i(z_2)\widehat{v}_{2j-i}(y_1)\right]\right\}A_{nj},$$

$$q_{2n+1}=\sum_{j=0}^{n}C_{2n+1}^{2j+1}\left\{\sum_{i=0}^{2j+1}C_{2j+1}^{i}\left[w_i(z_2)\widehat{v}'_{2j+1-i}(y_1)+w'_i(z_2)\widehat{v}_{2j+1-i}(y_1)\right]\right\}A_{nj},$$

где $n=0,\ 1,\ \ldots,\ x_2=\Phi(z_2)$;

$$A_{nj}=\frac{(2(n-j))!}{2^{n-j}(n-j)!}x_2^{\frac{1}{2}-n+j}\prod_{k=0}^{n+j-1}(1-2k).$$

С учетом (9.2), (9.5) формулы (9.4) перепишутся так:

$$v(z)=\widehat{u}_{\Psi}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{l=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\widehat{V}_{l1}(x)\frac{c_{2\left(\left[\frac{k}{2}\right]-l\right)}}{2\left(\left[\frac{k}{2}\right]-l\right)}+\right.$$

$$\left.+\widehat{W}_{l2}(x)\,r_{2\left(\left[\frac{k}{2}\right]-l\right)-1}\right\}\frac{\mu^k}{\left(2\left(\left[\frac{k}{2}\right]-l\right)-1\right)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{l=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\widehat{V}_{l2}(x)\,c_{2\left(\left[\frac{k}{2}\right]-l\right)-1}+\right.$$

$$\left.+\widehat{W}_{l1}(x)\frac{r_{2\left(\left[\frac{k}{2}\right]-l\right)}}{2\left(\left[\frac{k}{2}\right]-l\right)}\right\}\frac{\mu^k}{\left(2\left(\left[\frac{k}{2}\right]-l\right)-1\right)!},$$

$$w(z)=\widehat{u}_{\Psi}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{l=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\widehat{V}_{l1}(x)\frac{g_{2\left(\left[\frac{k}{2}\right]-l\right)}}{2\left(\left[\frac{k}{2}\right]-l\right)}+\right. \tag{9.6}$$

$$\left.+\widehat{W}_{l2}(x)\,q_{2\left(\left[\frac{k}{2}\right]-l\right)-1}\right\}\frac{\mu^k}{\left(2\left(\left[\frac{k}{2}\right]-l\right)-1\right)!}+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{l=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\widehat{V}_{l2}(x)\,g_{2\left(\left[\frac{k}{2}\right]-l\right)-1}+\right.$$

$$\left.+\widehat{W}_{l1}(x)\frac{q_{2\left(\left[\frac{k}{2}\right]-l\right)}}{2\left(\left[\frac{k}{2}\right]-l\right)}\right\}\frac{\mu^k}{\left(2\left(\left[\frac{k}{2}\right]-l\right)-1\right)!},$$

$$x=\Psi(y),\quad c_{-1}=r_{-1}=g_{-1}=q_{-1}=0.$$

Очевидно, что при $z_2\leqslant z\leqslant z_\gamma$ на отраженной ветви, после поворота $v(z)$, $w(z)$ имеют вид

$$v(z)=-c\widehat{v}(y)+r\widehat{w}(y),\quad w(z)=-g\widehat{v}(y)+q\widehat{w}(y), \tag{9.7}$$

а при $z_1\leqslant z\leqslant z_2$ (на отраженной ветви)

$$v(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\mu^l}{l!}\tilde{v}_l=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\mu^l}{l!}\left\{\sum_{k=0}^{l}C_l^k\left(r_k\widehat{w}_{l-k}(y)-c_k\widehat{v}_{l-k}(y)\right)\right\},$$

$$w(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\mu^l}{l!}\tilde{w}_l=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\mu^l}{l!}\left\{\sum_{k=0}^{l}C_l^k\left(q_k\widehat{w}_{l-k}(y)-g_k\widehat{v}_{l-k}(y)\right)\right\}. \tag{9.8}$$

На отрезке $[z_2, z_\gamma]$ оказывается возможным построение функций $\widehat{b}(y)$, $\widehat{c}(y)$, $\widehat{d}(y)$, $\widehat{f}(y)$, $\widehat{e}(y)$, $\widehat{g}(y)$, $\widehat{\varepsilon}(y)$, $\widehat{\delta}(y)$ — некоторых аналогов коэффициентов $B(z)$, $C(z)$, $D(z)$, $E(z)$, $F(z)$, $G(z)$, определенных на отрезке $[0, z_1]$. Ввиду билинейности агрегата $\Gamma[X, Y, Z]$ по аргументам X, Y коэффициенты $B(z)$, $C(z)$, $D(z)$, $E(z)$, $F(z)$, $G(z)$ на отрезке $[z_2, z_\gamma]$ будут линейными комбинациями этих аналогов.

Пусть функции $\widehat{b}(y)$, $\widehat{c}(y)$, $\widehat{d}(y)$, $\widehat{f}(y)$, $\widehat{e}(y)$, $\widehat{g}(y)$, $\widehat{\varepsilon}(y)$, $\widehat{\delta}(y)$ такие, что

$$N_{\Psi}[\widehat{b}]=\left\{\frac{d^2}{dy^2}+\frac{\Psi'(y)}{2\widehat{u}_{\Psi}^2(y)}\frac{d}{dy}+\frac{\Psi''(y)}{4\widehat{u}_{\Psi}^2(y)}\right\}(\widehat{b}(y))=\Gamma_{\Psi}[\widehat{v},\widehat{v}^2],$$

$$\widehat{b}(0)=\widehat{b}'(0)=0;$$

здесь

$$\widehat{u}_\Psi{}^2(y)=\Psi(y)+\mu^2,$$

$$\Gamma_\Psi[X,Y]=\frac{4\Psi'''(y)X'(y)+\Psi^{(IV)}(y)X(y)}{32\widehat{u}_\Psi^2(y)}Y(y)-$$

$$-\frac{2\Psi'(y)X'(y)+\Psi''(y)X(y)}{16\widehat{u}_\Psi^4(y)}\int\limits_0^y Y(\xi)\Psi'''(\xi)\,d\xi,$$

$X'(y)=\dfrac{dX}{dy}(y)$ и т. д.,

$$N_\Psi[\widehat{f}]=\Gamma_\Psi[\widehat{v},\ \widehat{v}\widehat{w}],\qquad \widehat{f}(0)=0,\qquad \widehat{f}'(0)=0;$$

$$N_\Psi[\widehat{c}]=\Gamma_\Psi[\widehat{w},\ \widehat{v}\widehat{w}],\qquad \widehat{c}(0)=0,\qquad \widehat{c}'(0)=0;$$

$$N_\Psi[\widehat{d}]=\Gamma_\Psi[\widehat{v},\ \widehat{w}^2],\qquad \widehat{d}(0)=0,\qquad \widehat{d}'(0)=0;$$

$$N_\Psi[\widehat{g}]=\Gamma_\Psi[\widehat{w},\ \widehat{v}^2],\qquad \widehat{g}(0)=0,\qquad \widehat{g}'(0)=0;$$

$$N_\Psi[\widehat{e}]=\Gamma_\Psi[\widehat{w},\ \widehat{w}^2],\qquad \widehat{e}(0)=0,\qquad \widehat{e}'(0)=0;$$

$$N_\Psi[\widehat{\delta}]=\frac{\widehat{v}''(y)}{4\widehat{u}_\Psi^2(y)},\qquad \widehat{\delta}(0)=\frac{-1}{4\mu\Psi'(0)},\quad \widehat{\delta}'(0)=\frac{1}{8\mu^3};$$

$$N_\Psi[\widehat{\varepsilon}]=\frac{\widehat{w}''(y)}{4\widehat{u}_\Psi^2(y)},\qquad \widehat{\varepsilon}(0)=0,\qquad \widehat{\varepsilon}'(0)=\frac{\Psi''(0)}{16\mu^2\Psi'(0)}.$$

Можно легко получить разложения для этих функций: на отрезке $[0,y_1]$ по степеням $\widehat{u}_\Psi(y)$ и на отрезке $[y_1,\ y_2]$ (в силу $\Psi(y)>\mu^2$) по степеням μ (см. § 5). На отрезке $[z_2,\ z_\gamma]$ (прямая ветвь), как нетрудно показать,

$$B(z)=(\overline{B}_+,\ \overline{R}(y)),\tag{9.9}$$

где $(\cdot,\ \cdot)$ — скалярное произведение,

$$\overline{B}_+=(B_+{}^*,\ b_v,\ b_w)^*,\quad \overline{R}(y)=(R(y)^*,\ \widehat{v}(y),\ \widehat{w}(y))^*,$$

$$R(y)=(\widehat{b}(y),\ \widehat{f}(y),\ \widehat{d}(y),\ \widehat{g}(y),\ \widehat{c}(y),\ \widehat{e}(y),\ \widehat{\delta}(y),\ \widehat{\varepsilon}(y))^*,$$

$$B_+=(c^3,\ 2c^2r,\ cr^2,\ rc^2,\ 2cr^2,\ r^3,\ cX(z_\gamma),\ rX(z_\gamma))^*,$$

$$b_v=-P_w(B,\ B),\quad b_w=P_v(B,\ B),$$

$$P_f(T,\ S)=\widehat{u}(z_2)\{(T(z_2)-(S_+,\ R(y_1)))\widehat{f}'(y_1)+(T'(z_2)+(S_+,\ R'(y_1)))\widehat{f}(y_1)\}.$$

Аналогично

$$\left.\begin{aligned}&F(z)=(\overline{F}_+,\ \overline{R}(y)),\ \overline{F}_+=(F_+{}^*,\ f_v,\ f_w)^*,\\ &f_v=-P_w(F,\ F),\quad f_w=P_v(F,\ F);\end{aligned}\right\}\tag{9.10}$$

$$\left.\begin{aligned}&g_v=-P_w(G,\ G+F),\ g_w=P_v(G,\ G+F),\\ &\overline{G}_+=((G_+{}^*+F_+{}^*),\ g_v,\ g_w)^*,\ G(z)=(\overline{G}_+,\ \overline{R}(y)),\\ &G_+=(gc^2,\ 2gcr,\ gr^2,\ qc^2,\ 2gcr,\ qr^2,\ gX(z_\gamma),\ qX(z_\gamma))^*,\end{aligned}\right\}\tag{9.11}$$

$$F_+=(c^2g,\ c(cq+gr),\ crq,\ rgc,\ r(cq+gr),\ r^2q,\ cY(z_\gamma),\ rY(z_\gamma))^*;$$

$$c_v=-P_w(C,\ C),\quad c_w=P_v(C,\ C),$$

$$C(z)=(\overline{C}_+,\ \overline{R}(y)),\quad \overline{C}_+=(C_+{}^*,\ c_v,\ c_w)^*,\tag{9.12}$$

$$C_+=(g^2c;\ g(cq+gr),\ gqr,\ qgc,\ g(cq+rg),\ q^2r,\ gY(z_\gamma),\ qY(z_\gamma))^*;$$

$$D_+=\widehat{D}_++(0,\ c\Phi''(0),\ r\Phi''(0))^*,\ D(z)=(\overline{D}_+,\ \overline{R}(y)),$$

$$\overline{D}_+=(D_+{}^*,\ d_v,\ d_w)^*,$$

$$\widehat{D}_+ = (cg^2,\ 2cgq,\ cq^2,\ rg^2,\ 2rgq,\ rq^2,\ c\widehat{Z}(z_\gamma),\ r\widehat{Z}(z_\gamma))^*,$$

$$d_v = -P_w(D,\ D),\ d_w = P_v(D,\ D); \tag{9.13}$$

$$\widehat{E}_+ = (g^3,\ 2g^2q,\ gq^2,\ g^2q,\ 2gq^2,\ q^3,\ g\widehat{Z}(z_\gamma),\ q\widehat{Z}(z_\gamma))^*,$$

$$E_+ = \widehat{E}_+ + (0,\ g\Phi''(0),\ q\Phi''(0))^*,$$

$$e_v = -P_w(E,\ E),\ e_w = P_v(E,\ E),\ E(z) = (\overline{E}_+,\ \overline{R}(y)),\ \overline{E}_+ = (E_+{}^*,\ e_v,\ e_w)^*. \tag{9.14}$$

На отрезке $[z_2,\ z_\gamma]$ (отраженная ветвь) коэффициенты аберрации определяются из следующих соотношений:

$$B(z) = (\overline{B}_-,\ \overline{R}(y)),\ \overline{B}_- = (B_-{}^*,\ B'(z_\gamma)\mu,\ B(z_\gamma))^*,$$

$$B_- = (-c^3,\ 2c^2r,\ -cr^2,\ c^2r,\ -2cr^2,\ r^3,\ 0,\ 0)^*; \tag{9.15}$$

$$F(z) = (\overline{F}_-,\ \overline{R}(y)),\ \overline{F}_- = (F_-{}^*,\ F'(z_\gamma)\mu,\ F(z_\gamma))^*,$$

$$F_- = (-c^2g,\ c(cq+gr),\ -crq,\ rgc,\ -(cq+gr)r,\ rq^2,\ 0,\ 0)^*; \tag{9.16}$$

$$C(z) = (\overline{C}_-,\ \overline{R}(y)),\ \overline{C}_- = (C_-{}^*,\ 0,\ 0,\ C'(z_\gamma)\mu,\ C(z_\gamma))^*, \tag{9.17}$$

$$C_- = (-cg^2,\ g(cq+gr),\ -gqr,\ qcg,\ -q(cq+gr),\ q^2r)^*;$$

$$G(z) = (\overline{G}_-,\ \overline{R}(y)),\ \overline{G}_- = ((G_-{}^* + F_-{}^*),\ G'(z_\gamma)\mu,\ G(z_\gamma))^*,$$

$$G_- = (-c^2g,\ 2cgr,\ -gr^2,\ qc^2,\ -2cqr,\ qr^2,\ 0,\ 0)^*; \tag{9.18}$$

$$D(z) = (\overline{D}_-,\ \overline{R}(y)),$$

$$\overline{D}_- = \left((D_-^* + C_-^*),\ -c\Psi''(0),\ r\Psi''(0),\ \mu\left(D'(z_\gamma) + \frac{c\Psi''(0)}{8\mu^3} - \frac{r\Psi''^2(0)}{16\mu^2\Psi'(0)}\right),\right.$$

$$\left.D(z_\gamma) - \frac{c\Psi''(0)}{4\mu\Psi'(0)}\right)^*, \tag{9.19}$$

$$D_- = (-cg^2,\ 2cgq,\ -cq^2,\ rg^2,\ -2rgq,\ rq^2)^*;$$

$$E(z) = (\overline{E}_-,\ \overline{R}(y)),$$

$$\overline{E} = \left(E_-^*,\ -g\Psi''(0),\ q\Psi''(0),\ \mu\left(E'(z_\gamma) + \frac{g\Psi''(0)}{8\mu^3} - \frac{q\Psi''^2(0)}{16\mu^2\Psi'(0)}\right),\right.$$

$$\left.E(z_\gamma) - \frac{g\Psi''(0)}{4\mu\Psi'(0)}\right)^*, \tag{9.20}$$

$$E_- = (-g^3,\ 2g^2q,\ -gq^2,\ g^2q,\ -2gq^2,\ q^3)^*.$$

При $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$ (отраженная ветвь) ищем $B(z)$ в виде

$$B(z) = \widehat{B}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{n!} \widehat{B}_n(y), \tag{9.21}$$

Используя разложения (9.8), получаем задачи для $\widehat{B}_n(y)$

$$N_{\Psi^0}[\widehat{B}_n] = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{k=0}^{n-2j} \sum_{l=0}^{n-2j-k} a_{nlkj}\Gamma_{\Psi_j}\left[\widetilde{v}_k,\ \widetilde{v}_l\widetilde{v}_{n-2j-k-l}\right] -$$

$$- \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} b_{nj}N_{\Psi_j}\left[\widehat{B}_{n-2j}\right],$$

$$\widehat{B}_n(y_1) = \left.\frac{\partial^n \widehat{B}(y_1)}{\partial\mu^n}\right|_{\mu=0},\ \widehat{B}'_n(y_1) = \left.\frac{\partial^n \widehat{B}'(y_1)}{\partial\mu^n}\right|_{\mu=0},\quad n = 0,\ 1,\ \ldots$$

Здесь

$$\widehat{B}'(y_1) = \frac{d\widehat{B}(y_1)}{dy}, \quad N_{\Psi_0} = \frac{d^2}{dy^2} + \frac{\Psi'}{2\Psi}\frac{d}{dy} + \frac{\Psi''}{4\Psi},$$

$$N_{\Psi_j} = (-1)^j j!\left(\frac{\Psi'}{2\Psi^{j+1}}\frac{d}{dy} + \frac{\Psi''}{4\Psi^{j+1}}\right), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

$$\Gamma_{\Psi_j}[X, Y] = \frac{(-1)^j j!}{\widehat{u}_{\Psi}^{2j}(y)} \Gamma_{\Psi}[X, Y]|_{\mu=0}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Аналогичные представления имеем и для функций $F(z)$, $G(z)$, $C(z)$, $D(z)$, $E(z)$:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{F}_n(y)}{n!}\mu^n,$$

$$N_{\Psi_0}[\widehat{F}_n] = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{k=0}^{n-2j} \sum_{l=0}^{n-2j-k} a_{nlkj}\Gamma_{\Psi_j}[\widetilde{v}_k, \widetilde{v}_l\widetilde{w}_{n-2j-k-l}] - \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} N_{\Psi_j}[\widehat{F}_{n-2j}]\, b_{nj}, \tag{9.22}$$

$$\widehat{F}_n(y_1) = \left.\frac{\partial^n \widehat{F}(y_1)}{\partial\mu^n}\right|_{\mu=0}, \quad \widehat{F}''_n(y_1) = \left.\frac{\partial^n \widehat{F}'(y_1)}{\partial\mu^n}\right|_{\mu=0}, \quad n = 0, 1, \ldots;$$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{G}_n(y)}{n!}\mu^n,$$

$$N_{\Psi_0}[\widehat{G}_n] = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{k=0}^{n-2j} \sum_{l=0}^{n-2j-k} a_{nlkj}\big(\Gamma_{\Psi_j}[\widetilde{w}_k, \widetilde{v}_l\widetilde{v}_{n-2j-k-l}] +$$

$$+ \Gamma_{\Psi_j}[\widetilde{v}_k, \widetilde{v}_l\widetilde{w}_{n-2j-k-l}]\big) + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} N_{\Psi_j}[\widehat{G}_{n-2j}]\, b_{nj}, \tag{9.23}$$

$$\widehat{G}_n(y_1) = \left.\frac{\partial^n \widehat{G}(y_1)}{\partial\mu^n}\right|_{\mu=0}, \quad \widehat{G}'_n(y_1) = \left.\frac{\partial^n \widehat{G}'_n(y_1)}{\partial\mu^n}\right|_{\mu=0}, \quad n = 0, 1, \ldots;$$

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{C}_n(y)}{n!}\mu^n,$$

$$N_{\Psi_0}[\widehat{C}_n] = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{k=0}^{n-2j} \sum_{l=0}^{n-2j-k} a_{nlkj}\Gamma_{\Psi_j}[\widetilde{w}_k, \widetilde{v}_l\widetilde{w}_{n-2j-k-l}] - \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} N_{\Psi_j}[\widehat{C}_{n-2j}]\, b_{nj}, \tag{9.24}$$

$$\widehat{C}_n(y_1) = \left.\frac{\partial^n \widehat{C}(y_1)}{\partial\mu^n}\right|_{\mu=0}, \quad \widehat{C}'_n(y_1) = \left.\frac{\partial^n \widehat{C}'(y_1)}{\partial\mu^n}\right|_{\mu=0}, \quad n = 0, 1, \ldots;$$

$$D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{D}_n(y)}{n!}\mu^n,$$

$$N_{\Psi_0}[D_n] = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{k=0}^{n-2j} \sum_{l=0}^{n-2j-k} a_{nlkj}\big(\Gamma_{\Psi_j}[\widetilde{v}_k, \widetilde{w}_l\widetilde{w}_{n-2j-k-l}] + \Gamma_{\Psi_j}[\widetilde{w}_k, \widetilde{v}_l\widetilde{w}_{n-2j-k-l}]\big) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!\,(-1)^j}{4\,(n-2j)!} \frac{\widetilde{v}''_{n-2j}\Phi''(0)}{\Phi^{j+1}} - \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} b_{nj} N_{\Psi_j}[\widehat{D}_{n-2j}], \tag{9.25}$$

$$\widehat{D}_n(y_1) = \left.\frac{\partial^n \widehat{D}(y_1)}{\partial \mu^n}\right|_{\mu=0}, \quad \widehat{D}_n'(y_1) = \left.\frac{\partial^n \widehat{D}'(y_1)}{\partial \mu^n}\right|_{\mu=0}, \quad n = 0, 1, \ldots;$$

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{E}_n(y)}{n!} \mu^n,$$

$$N_{\Psi_0}[\widehat{E}_n] = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{k=0}^{n-2j} \sum_{l=0}^{n-2j-k} a_{nlkj} \Gamma_{\Psi_j} [\widetilde{w}_k, \widetilde{w}_l \widetilde{w}_{n-2j-k-l}] +$$
$$+ \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!(-1)^j}{4(n-2j)!} \frac{\widetilde{w}''_{n-2j}\Phi''(0)}{\Phi^{j+1}} - \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} b_{nj} N_{\Psi_j}[\widehat{E}_{n-2j}], \tag{9.26}$$
$$\widehat{E}_n(y_1) = \left.\frac{\partial^n \widehat{E}(y_1)}{\partial \mu^n}\right|_{\mu=0}, \quad \widehat{E}_n'(y_1) = \left.\frac{\partial^n \widehat{E}'(y_1)}{\partial \mu^n}\right|_{\mu=0}, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

При нахождении коэффициентов временных аберраций поступаем таким же образом: строим на отрезке $[z_2, z_\gamma]$ функции $\Delta_\Psi(y)$, $\sigma_\Psi(y)$, $\rho_\Psi(y)$, $T_\Psi(y)$ — аналоги коэффициентов $t_{00}(z)$, $t_{11}(z)$, $t_{20}(z)$ $t_{02}(z)$, определенных на $[0, z_1]$. На отрезке $[z_2, z_\gamma]$ (прямая и отраженная ветви) функции $t_{00}(z)$, $t_{11}(z)$, $t_{20}(z)$, $t_{02}(z)$ также будут линейными комбинациями этих «аналогов».

Пусть функции $\Delta_\Psi(y)$, $\sigma_\Psi(y)$, $\rho_\Psi(y)$, $T_\Psi(y)$ определяются из задач

$$\frac{d\Delta_\Psi(y)}{dy} = \frac{\lambda_1}{4} \frac{X_\Psi(y)}{\widehat{u}^3_\Psi(y)}, \qquad \Delta_\Psi(0) = 0,$$

$$\frac{d\sigma_\Psi(y)}{dy} = \frac{\lambda_1 \varkappa_2}{4} \frac{Y_\Psi(y)}{\widehat{u}^3_\Psi(y)}, \qquad \sigma_\Psi(0) = 0,$$

$$\frac{d\rho_\Psi(y)}{dy} = \frac{\lambda_1}{4} \frac{\widehat{Z}_\Psi(y)}{\widehat{u}^3_\Psi(y)}, \qquad \rho_\Psi(0) = 0,$$

$$\frac{dT_\Psi(y)}{dy} = \frac{\lambda_1}{4} \frac{1}{\widehat{u}^3_\Psi(y)}, \qquad T_\Psi(0) = -\frac{\lambda_1}{2\Psi'(0)\mu},$$

где

$$X_\Psi(y) = \int_0^y \Psi'''(\xi)\widehat{v}^2(\xi)\,d\xi, \qquad Y_\Psi(y) = \int_0^y \Psi'''(\xi)\widehat{v}(\xi)\widehat{w}(\xi)\,d\xi,$$

$$\widehat{Z}_\Psi(y) = \int_0^y \Psi'''(\xi)\widehat{w}^2(\xi)\,d\xi.$$

Следуя результатам § 8, легко получаем разложения для функций $\Delta_\Psi(y)$, $\sigma_\Psi(y)$, $\rho_\Psi(y)$, $T_\Psi(y)$: на отрезке $[0, y_1]$ — по степеням $\widehat{u}_\Psi(y)$, на $[y_1, y_2]$ — по степеням μ.

На отрезке $[z_2, z_\gamma]$ для прямой ветви имеем

$$\begin{aligned} t_{20}(z) &= -c^2\Delta_\Psi(y) - 2cr\sigma_\Psi(y) - r^2\rho_\Psi(y) - X(z_\gamma)T_\Psi(y), \\ t_{11}(z) &= -cg\Delta_\Psi(y) - (cq + rg)\sigma_\Psi(y) - rq\rho_\Psi(y) - Y(z_\gamma)T_\Psi(y), \\ t_{02}(z) &= -g^2\Delta_\Psi(y) - 2gq\sigma_\Psi(y) - q^2\rho_\Psi(y) - (\Phi''(0) + \widehat{Z}(z_\gamma))T_\Psi(y), \end{aligned} \tag{9.27}$$

для отраженной ветви

$$t_{20}(z) = \frac{\lambda_1 X(z_\gamma)}{2\Phi'(0)\mu} + c^2\Delta_\Psi(y) - 2cr\sigma_\Psi(y) + r^2\rho_\Psi(y),$$

$$t_{11}(z) = \frac{\lambda_1 Y(z_\gamma)}{2\Phi'(0)\mu} + cg\Delta_\Psi(y) - (cq + gr)\sigma_\Psi(y) + rq\rho_\Psi(y), \tag{9.28}$$

$$t_{02}(z) = \frac{\lambda_1}{2\Phi'(0)\mu}(\Phi''(0) + \widehat{Z}(z_\gamma)) + \frac{\lambda_1\Psi''(0)}{2\Psi'(0)\mu} +$$
$$+ g^2\Delta_\Psi(y) - 2gq\sigma_\Psi(y) + q^2\rho_\Psi(y) + \Psi''(0)\, T_\Psi(y).$$

Наконец, при $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$ (отраженная ветвь)

$$t_{20}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_i(y)\frac{\mu^i}{i!}, \tag{9.29}$$

$$\tau_i(y) = \left.\frac{\partial^i t_{20}(z_2)}{\partial \mu^i}\right|_{\mu=0} + \frac{\lambda_1}{4}\sum_{l=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]} \frac{(-1)^l\, i!}{\prod_{j=1}^{l} L_j\,(i-2l)!}\int_{y_1}^{y} \frac{X_{\Psi\, i-2l}(t)}{\Phi(t)^{3/2+l}}\,dt, \quad i = 0, 1, \ldots;$$

$$t_{11}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i(y)\frac{\mu_i}{i!}, \tag{9.30}$$

$$\pi_i(y) = \left.\frac{\partial^i t_{11}(z_2)}{\partial \mu^i}\right|_{\mu=0} + \frac{\lambda_1}{4}\sum_{l=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]} \frac{(-1)^l\, i!}{\prod_{j=1}^{l} L_j\,(i-2l)!}\int_{y_1}^{y} \frac{Y_{\Psi\, i-2l}(t)}{\Phi(t)^{3/2+l}}\,dt, \quad i = 0, 1, \ldots;$$

$$t_{02}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i(y)\frac{\mu_i}{i!}, \tag{9.31}$$

$$\theta_{2i}(y) = \left.\frac{\partial^{2i} t_{02}(z_2)}{\partial \mu^{2i}}\right|_{\mu=0} +$$
$$+ \frac{\lambda_1}{4}\int_{y_1}^{y}\left[\sum_{l=0}^{i}\frac{(-1)^l\, 2i!}{\prod_{j=1}^{l} L_j\,(2i-l)!}\,\frac{\widehat{Z}_{\Psi\, 2i-l}(t)}{\Phi(t)^{3/2+l}} + \frac{2i!\,(-1)^i}{i!\prod_{j=1}^{i} L_j \Phi(t)^{3/2+i}}\right]dt,$$

$$\theta_{2i+1}(y) = \left.\frac{\partial^{2i+1} t_{02}(z_2)}{\partial \mu^{2i+1}}\right|_{\mu=0} +$$
$$+ \sum_{l=0}^{i}\frac{\lambda_1}{4}\,\frac{(-1)^l\,(2i+1)!}{\prod_{j=1}^{l} L_j\,(2i+1-l)!}\int_{y_1}^{y}\frac{\widehat{Z}_{\Psi\, 2i-l+1}(t)}{\Phi(t)^{3/2+l}}\,dt, \qquad i = 0, 1, \ldots,$$

где

$$X_{\Psi_i}(t) = \left.\frac{\partial^i X_\Psi(t)}{\partial \mu^i}\right|_{\mu=0}, \quad Y_{\Psi_i}(t) = \left.\frac{\partial^i Y_\Psi(t)}{\partial \mu^i}\right|_{\mu=0}, \quad \widehat{Z}_{\Psi_i}(t) = \left.\frac{\partial^i \widehat{Z}_\Psi(t)}{\partial \mu^i}\right|_{\mu=0},$$
$$L_i = 2/(2i+1), \ i = 0, 1, \ldots.$$

Пусть $t_\Psi{}^0(y)$ — решение задачи

$$\frac{dt_\Psi^0}{dy}(y) = \frac{\lambda_1}{(\mu^2 + \Psi(y))^{1/2}}, \quad t_\Psi^0(0) = 0.$$

Очевидно, что при $z_2 \leqslant z \leqslant z_\gamma$ на прямой и отраженной ветвях

$$t_0(z) = t_0(z_2) - t_\Psi{}^0(y), \tag{9.32}$$

а при $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$ (отраженная ветвь)

$$t_0(z) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\mu^l}{l!}\,\tilde{t}_l^0(z), \tag{9.33}$$

где

$$\widetilde{t}^0_{2l}(z) = \frac{\partial^{2l}}{\partial\mu^{2l}}\left(t_0(z_2) - t^0_\Psi(y_1)\right)\Big|_{\mu=0} + \frac{(-1)^l \lambda_1}{\prod\limits_{i=0}^{l-1} L_i} \frac{1}{(\Phi(z_1))^{1/2+l}},$$

$$\widetilde{t}^0_{2l+1}(z) \equiv \frac{\partial^{2l+1}}{\partial\mu^{2l+1}}\left(t_0(z_2) - t^0_\Psi(y_1)\right)\Big|_{\mu=0}, \qquad l = 0, 1, \ldots.$$

§ 10. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ И ВРЕМЕННЫХ АБЕРРАЦИЙ НА ЭВМ. ТЕСТОВЫЕ РАСЧЕТЫ

Постановка задачи. Даны N точек ζ_i на прямой Oz,

$$0 = \zeta_1 < \zeta_2 < \ldots < \zeta_{N-1} < \zeta_N = z_a,$$

и в этих точках заданы электростатический потенциал $\Phi(\zeta_i)$ на оси Oz, его первая и вторая производные $\Phi'(\zeta_i)$, $\Phi''(\zeta_i)$, $i = 1, \ldots, N$. Кроме того, известны третья и четвертая производные потенциала на концах отрезка $[0, z_a]$: $\Phi'''(0)$, $\Phi'''(z_a)$, $\Phi^{(IV)}(0)$, $\Phi^{(IV)}(z_a)$. Надо вычислить коэффициенты пространственных и временных аберраций в точках ζ_i, $i = 2, \ldots, N$.

Сплайн. В процессе решения задачи потребуется знать потенциал и его производные вплоть до четвертой на всем интервале $[0, z_a]$. Для этой цели воспользуемся сплайн-интерполяцией [8, с. 99]. Покажем, как строятся кубические сплайны для Φ, Φ', Φ'', Φ''', $\Phi^{(IV)}$ на примере Φ. Сплайн $S(z)$ ищется в виде

$$S(z) = \Phi(\zeta_i)(1-t) + \Phi(\zeta_{i+1})t -$$
$$-(\zeta_{i+1} - \zeta_i)^2 \frac{t}{6}(1-t)\left[(2-t)G_i + (1+t)G_{i+1}\right],$$
$$\zeta_i \leqslant z \leqslant \zeta_{i+1},\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ z = \zeta_i + (\zeta_{i+1} - \zeta_i)t,$$

где G_i — коэффициенты, подлежащие определению. Заметим, что $S(z)$ имеет непрерывную вторую производную. Потребуем непрерывности первой производной $S'(z)$ и, кроме того, наложим краевые условия (см. [8, с. 97])

$$S'(0) = \Phi'(0), \quad S'(z_a) = \Phi'(z_a).$$

Из этих условий получим для определения коэффициентов G_i, $i = 1, \ldots, N$, систему линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} 2h_1 & h_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ h_{N-2} & 2(h_{N-2}+h_{N-1}) & h_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ 0 & h_{N-1} & 2h_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ \ldots \\ G_{N-1} \\ G_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \ldots \\ F_{N-1} \\ F_N \end{bmatrix}, \tag{10.1}$$

где

$$h_i = \xi_{i+1} - \zeta_i, \quad i = 1, \ldots, N-1;$$

$$F_1 = 6\left[\frac{\Phi(\zeta_2)-\Phi(\zeta_1)}{h_1} - \Phi'(0)\right], \qquad F_N = 6\left[\Phi'(z_a) - \frac{\Phi(\zeta_N)-\Phi(\zeta_{N-1})}{h_{N-1}}\right],$$

$$F_i = 6\left[\frac{\Phi(\zeta_{i+1})-\Phi(\zeta_i)}{h_i} - \frac{\Phi(\zeta_i)-\Phi(\zeta_{i-1})}{h_{i-1}}\right], \quad i=2, \ldots, N-1.$$

Матрица системы трехдиагональная с преобладанием на главной диагонали, поэтому при решении системы (10.1) можно воспользоваться методом прогонки. Для этого сначала определим прогоночные коэффициенты по формулам

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad V_1 = \frac{F_1}{2h_1},$$

$$u_i = \frac{h_i}{2(h_{i-1}+h_i) - u_{i-1}h_{i-1}}, \quad V_i = \frac{F_i - V_i h_{i-1}}{2(h_{i-1}+h_i) - u_{i-1}h_{i-1}}, \quad i=2, \ldots, N-1,$$

после чего определим

$$G_N = \frac{F_N - h_{N-1}V_{N-1}}{h_{N-1}(2-u_{N-1})}$$

и, совершая обратную прогонку, найдем все остальные коэффициенты G_i, $i=1, \ldots, N-1$, по формуле

$$G_i = V_i - u_i G_{i+1}, \quad i=N-1, N-2, \ldots, 1.$$

Значения $\Phi'''(\zeta_i)$, $\Phi^{(\mathrm{IV})}(\zeta_i)$, $i=2, \ldots, N-1$, находим дифференцированием сплайнов для Φ'' и Φ''' соответственно. Значения $\Phi^{(\mathrm{V})}(0)$, $\Phi^{(\mathrm{V})}(z_a)$ находим по формулам

$$\Phi^{(\mathrm{V})}(0) = \sum_{i=0}^{5} a_i \Phi^{(\mathrm{IV})}(\zeta_{i+1}), \quad \Phi^{(\mathrm{V})}(z_a) = \sum_{i=0}^{5} a_i' \Phi^{(\mathrm{IV})}(\zeta_{N-i}),$$

где постоянные a_i, a_i' определяются из уравнений

$$\begin{bmatrix} \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 & \zeta_5 & \zeta_6 \\ \zeta_2^2 & \zeta_3^2 & \zeta_4^2 & \zeta_5^2 & \zeta_6^2 \\ \zeta_2^3 & \zeta_3^3 & \zeta_4^3 & \zeta_5^3 & \zeta_6^3 \\ \zeta_2^4 & \zeta_3^4 & \zeta_4^4 & \zeta_5^4 & \zeta_6^4 \\ \zeta_2^5 & \zeta_3^5 & \zeta_4^5 & \zeta_5^5 & \zeta_6^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$a_0 = -(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5);$$

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \\ h_1^2 & h_2^2 & h_3^2 & h_4^2 & h_5^2 \\ h_1^3 & h_2^3 & h_3^3 & h_4^3 & h_5^3 \\ h_1^4 & h_2^4 & h_3^4 & h_4^4 & h_5^4 \\ h_1^5 & h_2^5 & h_3^5 & h_4^5 & h_5^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \\ a_4' \\ a_5' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$a_0' = -(a_1' + a_2' + a_3' + a_4' + a_5');$$

$$h_i = \zeta_{N-i} - \zeta_N, \quad i=1, \ldots, 5.$$

Метод Рунге — Кутта. Решение параксиального уравнения ищется методом Рунге — Кутта 10-го порядка (см. [9]). Метод определяется заданием таблиц коэффициентов D_j, C_{ij}, i, $j=1, \ldots, 17$. Пусть надо решить систему уравнений

$$\frac{d}{dz} u_1(z) = F_1(z, u_1(z), u_2(z)),$$

$$\frac{d}{dz} u_2(z) = F_2(z, u_1(z), u_2(z))$$

на отрезке $[a, b]$ с начальными данными

$$u_1(a) = u_{10}, \quad u_2(a) = u_{20}.$$

Сначала находим величины

$$z_1 = a,$$

$$z_2 = a + hD_1,$$

$$\cdots$$

$$z_{18} = a + hD_{17},$$

где $h = b - a$. Затем последовательно вычислим величины $v_1(z_i)$, $v_2(z_i)$, $i = 1, \ldots, 18$, по формулам

$$v_1(z_1) = u_{10},$$

$$v_2(z_1) = u_{20},$$

$$v_j(z_l) = u_{j0} + h \sum_{m=1}^{l-1} C_{l-1,m} F_j(z_m, v_1(z_m), v_2(z_m)),$$

$$j = 1, 2; \quad l = 2, \ldots, 18.$$

После этого искомое решение при $z = b$ находится так:

$$u_1(b) = v_1(z_{18}), \quad u_2(b) = v_2(z_{18}).$$

Точные формулы для случая сферического конденсатора. В случае сферического конденсатора электростатический потенциал на оси определяется формулой $\Phi(z) = \alpha z/(R_k - z)$, где $\alpha = U_c/(R_k - R_c)$; U_c, R_k, $R_c(R_k > R_c)$ — положительные числа; R_k — радиус кривизны поверхности катода; $0 < z < R_k - R_c$. Аберрационное выражение для траектории имеет вид (см. формулу (2.5))

$$r(z) = \delta e^{i\alpha_0} v_0 + \rho_0 e^{i\beta_0} w_0 + \delta \mu e^{i\alpha_0} H + \rho_0 \mu e^{i\beta_0} K + \mu^2 \delta e^{i\alpha_0} P +$$
$$+ \mu^2 \rho_0 e^{i\beta_0} Q + \delta^3 e^{i\alpha_0} B + \delta^2 \rho_0 \left[e^{i\beta_0} G + e^{i(2\alpha_0 - \beta_0)} F\right] +$$
$$+ \delta \rho_0^2 \left[e^{i\alpha_0} D + e^{i(2\beta_0 - \alpha_0)} C\right] + \rho_0^3 e^{i\beta_0} E + \ldots .$$

Ввиду (4.8) коэффициенты пространственных аберраций определяются следующим образом ($\Phi(z) > \mu^2$):

$$v_0 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\Delta z}, \quad w_0 = \frac{\Delta}{R_k},$$

$$H = -\frac{2\Delta}{\alpha}, \quad K = \frac{2\sqrt{\Delta z}}{\sqrt{\alpha}\, R_k},$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{z}} \left(\frac{\Delta}{\alpha}\right)^{3/2}, \quad Q = -\frac{2\Delta}{\alpha R_k}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{3/2}, \quad G = F = \frac{z}{\alpha R_k},$$

$$D = -\frac{R_k - 2z}{2R_k^2} \sqrt{\frac{\Delta}{\alpha z}}, \quad C = 0, \quad E = \frac{\Delta}{2R_k^3}, \quad \Delta = R_k - z.$$

Аберрационное выражение для времени пролета имеет вид (см. (3.3))

$$t(z) = t_{000} + \mu t_{100} + \mu^2 t_{200} + \delta^2 t_{020} + \delta \rho_0 t_{011} + \rho_0^2 t_{002} + \mu^3 t_{300} +$$
$$+ \mu \delta^2 t_{120} + \mu \delta \rho_0 t_{111} + \mu \rho_0^2 t_{102} + \ldots .$$

Используя формулу (4.9), коэффициенты временных аберраций определяем так ($\Phi(z) > \mu^2$):

$$t_{000} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\alpha}}\left[\sqrt{\Delta z} + R_k \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\Delta}\right)^{1/2}\right], \quad t_{100} = \frac{-2\lambda_1 R_k}{\alpha},$$

$$t_{200} = \frac{\lambda_1}{2\alpha^{3/2}}\left[(2R_k + z)\left(\frac{\Delta}{z}\right)^{1/2} + 3R_k \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\Delta}\right)^{1/2}\right],$$

$$t_{020} = \frac{3\lambda_1}{2\alpha^{3/2}}\left[-\sqrt{\Delta z} + R_k \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\Delta}\right)^{1/2}\right],$$

$$t_{011} = \frac{2\lambda_1 \varkappa_2 z}{\alpha R_k}, \quad t_{002} = -\frac{\lambda_1 \Delta^{3/2}}{2\sqrt{\alpha z}\, R_k^2}, \quad t_{300} = -\frac{8\lambda_1 R_k}{3\alpha^2},$$

$$t_{120} = -4\lambda_1 z \alpha^{-2}, \quad t_{111} = -\frac{6\lambda_1 \varkappa_2 \sqrt{\Delta z}}{\alpha^{3/2} R_k}, \quad t_{102} = \frac{\lambda_1 (2z - R_k)}{\alpha R_k^2}.$$

Два линейно независимых решения $\bar{v}(z)$, $\bar{w}(z)$ параксиального уравнения

$$X'' + \frac{\Phi'(z)}{2\Phi(z)} X' + \frac{\Phi''(z)}{4\Phi(z)} X = 0 \qquad (X(z) = \bar{v}(z), \bar{w}(z))$$

с начальными данными

$$\bar{v}(z_1) = 0, \ \bar{v}'(z_1) = 1; \quad \bar{w}(z_1) = 1, \ \bar{w}'(z_1) = 0$$

определяются формулами

$$\bar{v}(z) = -\Phi^{-1/2}(z_1)\,[v_0(z_1) w_0(z) - w_0(z_1) v_0(z)],$$

$$\bar{w}(z) = -\Phi^{-1/2}(z_1)\,[w_0'(z_1) v_0(z) - v_0'(z_1) w_0(z)].$$

Расчетные формулы для случая произвольного потенциала на оси. Расчеты предлагается вести следующим образом. Сначала выбирается величина $z_1 = \zeta_{N_1}$ так, что $\Phi(z_1) > \mu^2$, $\Phi'(z) > 0$ при $0 \leqslant z \leqslant z_1$. Процесс вычисления коэффициентов аберраций разбивается на две части: при $z \leqslant z_1$ и при $z > z_1$.

В случае $z \leqslant z_1$ коэффициенты аберраций определяются так ($\Phi(z) > \mu^2$):

$$v_0 = \sqrt{x} V_{01}(x), \quad w_0 = W_{01}(x), \quad H = V_{02}(x), \quad K = \sqrt{x} W_{02}(x),$$

$$P = \sqrt{x} V_{11}(x) + \frac{V_{01}(x)}{2\sqrt{x}}, \quad Q = W_{11}(x), \quad B = \sum_{n=0}^{2} B_{n1} x^{n-1/2},$$

$$G = \sum_{n=0}^{2} [F_{n1} + \widehat{G}_{n1}] x^n, \quad F = \sum_{n=0}^{2} F_{n1} x^n, \quad D = \sum_{n=0}^{2} [\widehat{C}_{n1} + d_{n1} + \delta_{n1}] x^{n-1/2},$$

$$C = \sum_{n=0}^{2} \widehat{C}_{n1} x^{n-1/2}, \quad E = \sum_{n=0}^{1} [e_{n1} + \varepsilon_{n1}] x^n,$$

$$t_{000} = \tau_0(x), \quad t_{100} = \tau_1(x),$$

$$t_{200} = \tau_2(x), \quad t_{020} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{2} \Delta_{n1} x^{n-1/2},$$

$$t_{011} = \sum_{n=0}^{2} \rho_{n1} x^n, \quad t_{002} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{3} (t_{n1} + T_{n1}) x^{n-1/2},$$

$$t_{300} = \tau_3(x), \quad t_{120} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{2} \Delta_{n2} x^n,$$

$$t_{111} = \sum_{n=0}^{2} \rho_{n2} x^{n-1/2}, \quad t_{102} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{2} (t_{n2} + T_{n2}) x^n.$$

При $z > z_1$ $(\Phi(z) > \mu^2)$ коэффициенты аберраций определяются так:

$$v_0 = v_0^{(1)}\bar{v} + v_0^{(2)}\bar{w}, \quad w_0 = w_0^{(1)}\bar{v} + w_0^{(2)}\bar{w}, \quad H = H^{(1)}\bar{v} + H^{(2)}\bar{w},$$

$$K = K^{(1)}\bar{v} + K^{(2)}\bar{w},$$

$$P = P^{(1)}\bar{v} + P^{(2)}\bar{w} +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \int_{z_1}^{z} [\bar{v}(z)\bar{w}(\tau) - \bar{w}(z)\bar{v}(\tau)] \frac{\Phi'(\tau)v_0'(\tau) + \frac{1}{2}\Phi''(\tau)v_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)} d\tau,$$

$$Q = Q^{(1)}\bar{v} + Q^{(2)}\bar{w} +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \int_{z_1}^{z} [\bar{v}(z)\bar{w}(\tau) - \bar{w}(z)\bar{v}(\tau)] \frac{\Phi'(\tau)w_0'(\tau) + \frac{1}{2}\Phi''(\tau)w_0(\tau)}{\Phi^{3/2}(\tau)} d\tau,$$

$$B = B'(z_1)\bar{v}(z) + B(z_1)\bar{w}(z) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{x_1}} \int_{z_1}^{z} [\bar{v}(z)\bar{w}(\tau) - \bar{w}(z)\bar{v}(\tau)]\, \Gamma_0\left[\tau, v_0(\tau), v_0^2(\tau)\right] d\tau,$$

$$F = F'(z_1)\bar{v}(z) + F(z_1)\bar{w}(z) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{x_1}} \int_{z_1}^{z} [\bar{v}(z)\bar{w}(\tau) - \bar{w}(z)\bar{v}(\tau)]\, \tilde{\Gamma}_0[\tau, \ v_0(\tau)\, v_0(\tau), w_0(\tau)]\, d\tau,$$

$$G = F + \widehat{G}'(z_1)\bar{v}(z) + \widehat{G}_0(z_1)\bar{w}(z) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{x_1}} \int_{z_1}^{z} [\bar{v}(z)\bar{w}(\tau) - \bar{w}(z)\bar{v}(\tau)]\, \Gamma_0\left[\tau, w_0(\tau), v_0^2(\tau)\right] d\tau,$$

$$D = D'(z_1)\bar{v}(z) + D(z_1)\bar{w}(z) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{x_1}} \int_{z_1}^{z} [\bar{v}(z)\bar{w}(\tau) - \bar{w}(z)\bar{v}(\tau)] \Big\{\tilde{\tilde{\Gamma}}\left[\tau, v_0(\tau), w_0^2(\tau)\right] +$$

$$+ \tilde{\Gamma}_0[\tau, w_0(\tau), v_0(\tau)\,w_0(\tau)] - \frac{2\Phi'(\tau)v_0'(\tau) + \Phi''(\tau)v_0(\tau)}{16\Phi^{3/2}(\tau)}\Phi''(0)\Big\} d\tau,$$

$$C = C'(z_1)\bar{v}(z) + C(z_1)\bar{w}(z) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{x_1}} \int_{z_1}^{z} [\bar{v}(z)\bar{w}(\tau) - \bar{v}(\tau)\bar{w}(z)]\, \tilde{\Gamma}_0[\tau, w_0(\tau), v_0(\tau)\,w_0(\tau)]\, d\tau,$$

$$E = E'(z_1)\bar{v}(z) + E(z_1)\bar{w}(z) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{x_1}} \int_{z_1}^{z} [\bar{v}(z)\bar{w}(\tau) - \bar{w}(z)\bar{v}(\tau)] \Big\{\tilde{\tilde{\Gamma}}_0\left[\tau, w_0(\tau), w_0^2(\tau)\right] -$$

$$- \frac{2\Phi'(\tau)w_0'(\tau) + \Phi''(\tau)w_0(\tau)}{16\Phi^{3/2}(\tau)}\Phi''(0)\Big\} d\tau;$$

$$t_{000} = t_{000}(z_1) + \lambda_1 \int_{z_1}^{z} \frac{d\zeta}{\Phi^{1/2}(\zeta)}, \quad t_{100} = t_{100}(z_1),$$

$$t_{200} = t_{200}(z_1) - \frac{\lambda_1}{2}\int\limits_{z_1}^{z} \frac{d\zeta}{\Phi^{3/2}(\zeta)},$$

$$t_{020} = t_{020}(z_1) + \frac{\lambda_1}{8}\int\limits_{z_1}^{z} \Phi^{-3/2}(\zeta)\left[X_0(z_1) + \int\limits_{z_1}^{\zeta} \Phi'''(\xi)\, v_0^2(\xi)\, d\xi\right] d\zeta,$$

$$t_{011} = t_{011}(z_1) + \frac{\lambda_1\varkappa_2}{4}\int\limits_{z_1}^{z} \Phi^{-3/2}(\zeta)\left[Y_0(z_1) + \int\limits_{z_1}^{\zeta} \Phi'''(\xi)\, v_0(\xi)\, w_0(\xi)\, d\xi\right] d\zeta,$$

$$t_{002} = t_{002}(z_1) + \frac{\lambda_1}{8}\int\limits_{z_1}^{z} \Phi^{-3/2}(\zeta)\left[\frac{2\Phi'(0)}{R_k} + \widehat{Z}_0(z_1) + \int\limits_{z_1}^{\zeta} \Phi'''(\xi)\, w_0^2(\xi)\, d\xi\right] d\zeta,$$

$$t_{300} = t_{300}(z_1),$$

$$t_{120} = t_{120}(z_1) + \frac{\lambda_1}{8}\int\limits_{z_1}^{z} \Phi^{-3/2}(\zeta)\left[X_1(z_1) + 2\int\limits_{z_1}^{\zeta} \Phi'''(\xi)\, v_0(\xi)\, v_1(\xi)\, d\xi\right] d\zeta,$$

$$t_{111} = t_{111}(z_1) + \frac{\lambda_1\varkappa_2}{4}\int\limits_{z_1}^{z} \Phi^{-3/2}(\zeta) \times$$

$$\times\left[Y_1(z_1) + \int\limits_{z_1}^{\zeta} \Phi'''(\xi)\,(v_0(\xi)\, w_1(\xi) + v_1(\xi) w_0(\xi))\, d\xi\right] d\zeta.$$

$$t_{102} = t_{102}(z_1) + \frac{\lambda_1}{8}\int\limits_{z_1}^{z} \Phi^{-3/2}(\zeta)\left[\widehat{Z}_1(z_1) + 2\int\limits_{z_1}^{\zeta} \Phi'''(\xi)\, w_0(\xi)\, w_1(\xi)\, d\xi\right] d\zeta.$$

Здесь

$$x = \Phi(z), \quad x_1 = \Phi(z_1), \quad A = \Phi'(0), \quad A_1 = \Phi'(z_1), \quad V_{01}(x) = \sum_{k=0}^{3} \xi_k(x)\, x^k,$$

$$W_{01}(x) = \sum_{k=0}^{3} \alpha_k(x)\, x^k, \quad V_{02}(x) = \sum_{k=0}^{3} \eta_k(x)\, x^k, \quad W_{02}(x) = \sum_{k=0}^{3} \beta_k(x)\, x^k,$$

$$V_{11}(x) = \sum_{k=0}^{2} \xi_{k+1}(x)(k+1)\, x^k, \quad W_{11}(x) = \sum_{k=0}^{2} \alpha_{k+1}(x)(k+1)\, x^k,$$

$$\xi_0(x) = \xi_0(0) + \xi_0'(0)\, x + \frac{1}{2}\xi_0''(0)\, x^2 + \frac{1}{6}\xi_0'''(0)\, x^3,$$

$$\eta_0(x) = \eta_0(0) + \eta_0'(0)\, x + \frac{1}{2}\eta_0''(0)\, x^2 + \frac{1}{6}\eta_0'''(0)\, x^3,$$

$$\alpha_0(x) = \alpha_0(0) + \alpha_0'(0)\, x + \frac{1}{2}\alpha_0''(0)\, x^2 + \frac{1}{6}\alpha_0'''(0)\, x^3,$$

$$\beta_0(x) = \beta_0(0) + \beta_0'(0)\, x + \frac{1}{2}\beta_0''(0)\, x^2, \quad \xi_0(0) = -\eta_0(0) = \frac{2}{A},$$

$$\alpha_0(0) = 1, \quad \beta_0(0) = 2\widetilde{C}, \quad \widetilde{C} = \frac{1}{AR_k}, \quad \xi_0'(0) = -\eta_0'(0) = -\frac{2}{R_k A^2},$$

$$\alpha_0'(0) = \widetilde{C}, \quad \beta_0'(0) = -\frac{6}{A^2R_k^2} + \frac{2\Phi'''(0)}{3A^3}, \quad \xi_0''(0) = \frac{6}{R_k^2A^3} - \frac{\Phi'''(0)}{3A^4},$$

$$\eta_0''(0) = -\frac{38}{5R_k^2A^3} + \frac{3\Phi'''(0)}{5A^4}, \quad \alpha_0''(0) = \frac{\Phi'''(0)}{2A^3} - \frac{5}{A^2R_k^2},$$

$$\beta_0''(0) = -\frac{121}{15}\tilde{C}\frac{\Phi'''(0)}{A^3} + \frac{198}{5}\tilde{C}^3 + \frac{8}{15}\frac{\Phi^{(IV)}(0)}{A^4},$$

$$\xi_0'''(0) = \frac{1}{5}\frac{\Phi^{(IV)}(0)}{A^5} + \frac{3}{5}\tilde{C}\frac{\Phi'''(0)}{A^4} - \frac{102}{5}\frac{\tilde{C}^3}{A},$$

$$\eta_0'''(0) = \frac{13}{35}\frac{\Phi^{(IV)}(0)}{A^5} - \frac{289}{35}\tilde{C}\frac{\Phi'''(0)}{A^4} + \frac{1242}{35}\frac{\tilde{C}^3}{A},$$

$$\alpha_0'''(0) = \frac{1}{2}\frac{\Phi^{(IV)}(0)}{A^4} - \frac{83}{10}\tilde{C}\frac{\Phi'''(0)}{A^3} + \frac{219}{5}\tilde{C}^3;$$

$$\xi_1(x) = -\frac{1}{2}\widehat{Q}\xi_0(x) - \xi_0'(x), \quad \eta_1(x) = -\frac{1}{2}\widehat{Q}\eta_0(x) - \eta_0'(x),$$

$$\alpha_1(x) = -\frac{1}{2}\widehat{Q}\alpha_0(x) - \alpha_0'(x), \quad \beta_1(x) = -\frac{1}{2}\widehat{Q}\beta_0(x) - \beta_0'(x),$$

$$\widehat{Q} = \frac{\Phi''(z)}{(\Phi'(z))^2}, \quad \xi_0'(x) = \frac{d}{dx}\xi_0(x) \quad \text{и т. д.};$$

$$\xi_2(x) = \frac{1}{2}\xi_0''(x) + \frac{1}{2}\widehat{Q}\xi_0'(x) + \frac{7}{20}\left(\widehat{Q}' + \frac{1}{2}\widehat{Q}^2\right)\xi_0(x),$$

$$\eta_2(x) = \frac{1}{2}\eta_0''(x) + \frac{1}{2}\widehat{Q}\eta_0'(x) + \frac{5}{12}\left(\widehat{Q}' + \frac{1}{2}\widehat{Q}^2\right)\eta_0(x),$$

$$\alpha_2(x) = \frac{1}{2}\alpha_0''(x) + \frac{1}{2}\widehat{Q}\alpha_0'(x) + \frac{5}{12}\left(\widehat{Q}' + \frac{1}{2}\widehat{Q}^2\right)\alpha_0(x),$$

$$\beta_2(x) = \frac{1}{2}\beta_0''(x) + \frac{1}{2}\widehat{Q}\beta_0'(x) + \frac{7}{20}\left(\widehat{Q}' + \frac{1}{2}\widehat{Q}^2\right)\beta_0(x),$$

$$\widehat{Q}' = \frac{d}{dx}\widehat{Q} = \frac{\Phi'''(z)}{(\Phi'(z))^3} - 2\widehat{Q}^2, \quad \xi_0''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\xi_0(x) \quad \text{и т. д.};$$

$$\xi_3(x) = -\frac{1}{6}\xi_0''(x) - \frac{1}{4}\widehat{Q}\xi_0''(x) - \frac{7}{20}\left(\widehat{Q}' + \frac{1}{2}\widehat{Q}^2\right)\xi_0'(x) - $$
$$- \left(\frac{191}{840}\widehat{Q}\widehat{Q}' + \frac{19}{140}\widehat{Q}'' + \frac{11}{240}\widehat{Q}^3\right)\xi_0(x),$$

$$\eta_3(x) = -\frac{1}{6}\eta_0'''(x) - \frac{1}{4}\widehat{Q}\eta_0''(x) - \frac{5}{12}\left(\widehat{Q}' + \frac{1}{2}\widehat{Q}^2\right)\eta_0'(x) - $$
$$- \left(\frac{37}{120}\widehat{Q}\widehat{Q}' + \frac{11}{60}\widehat{Q}'' + \frac{1}{16}\widehat{Q}^3\right)\eta_0(x),$$

$$\alpha_3(x) = -\frac{1}{6}\alpha_0'''(x) - \frac{1}{4}\widehat{Q}\alpha_0''(x) - \frac{5}{12}\left(\widehat{Q}' + \frac{1}{2}\widehat{Q}^2\right)\alpha_0'(x) - $$
$$- \left(\frac{37}{120}\widehat{Q}\widehat{Q}' + \frac{11}{60}\widehat{Q}'' + \frac{1}{16}\widehat{Q}^3\right)\alpha_0(x),$$

$$\beta_3(x) = -\frac{1}{4}\widehat{Q}\beta_0''(x) - \frac{7}{20}\left(\widehat{Q}' + \frac{1}{2}\widehat{Q}^2\right)\beta_0'(x) - $$
$$- \left(\frac{191}{840}\widehat{Q}\widehat{Q}' + \frac{19}{140}\widehat{Q}'' + \frac{11}{240}\widehat{Q}^3\right)\beta_0(x),$$

$$\widehat{Q}'' = \frac{d^2}{dx^2}\widehat{Q} = \frac{\Phi^{(IV)}(z)}{(\Phi'(z))^4} - \frac{7\Phi''(z)\Phi'''(z)}{(\Phi'(z))^5} + 8\widehat{Q}^3, \quad \xi_0'''(x) = \frac{d^3}{dx^3}\xi_0(x) \quad \text{и т. д.};$$

$$B_{01}(x) = \frac{\Phi'''(0)}{12A^3}x^2\xi_0(x) + \frac{x^3\xi_0(x)}{15A^4}\left(\Phi^{(IV)}(0) - \frac{2\Phi''(0)\Phi'''(0)}{A}\right),$$

$$B_{11}(x) = B_{11}(0) + B_{11}'(0)x,$$

$$B_{21}(x) = -B_{11}'(0) - \frac{1}{2}\widehat{Q}B_{11}(x) - \frac{2}{3}\left(B_{01}''(x) + \widehat{Q}B_{01}'(x)\right) +$$

$$+\frac{1}{6}\widetilde{X}_{21}(x)+\frac{\Phi'''(z)\,\widetilde{T}_{11}(x)}{12\Phi'(z)}+\frac{\Phi^{(IV)}(z)\,R_{01}(x)}{48\,(\Phi'(z))^2},$$

$$B_{11}(0)=0,\quad B'_{11}(0)=-\frac{4\Phi'''(0)}{3A^4},\quad B'_{01}(x)=\frac{d}{dx}B_{01}(x),$$

$$B''_{01}(x)=\frac{d^2}{dx^2}B_{01}(x),\quad \widetilde{X}_{21}(x)=\widetilde{V}_{21}(x)\,X_{01}(x)+\widetilde{V}_{11}(x)\,X_{11}(x)+\widetilde{V}_{01}(x)\,X_{21}(x),$$

$$X_{01}(x)=-\frac{2\Phi'''(0)}{3A^3}x^2-\frac{8x^3}{15A^4}\left(\Phi^{(IV)}(0)-\frac{2\Phi''(0)\,\Phi'''(0)}{A}\right),$$

$$X_{11}(x)=\frac{4\Phi'''(0)}{3A^3}x+\frac{8x^2}{5A^4}\left(\Phi^{(IV)}(0)-\frac{2\Phi''(0)\,\Phi'''(0)}{A}\right)-x\eta_0^2(x)\frac{\Phi'''(z)}{\Phi'(z)},$$

$$X_{21}(x)=-\frac{2\Phi'''(0)}{3A^3}-\frac{8x}{5A^4}\left(\Phi^{(IV)}(0)-\frac{2\Phi''(0)\,\Phi'''(0)}{A}\right)+$$

$$+\frac{\Phi'''(z)}{2\Phi'(z)}\left(\xi_0(x)+2\eta_0^2(x)+4x\eta_0(x)\,\eta'_0(x)\right)+\frac{x\eta_0^2(x)\,\Phi^{(IV)}(z)}{2\,[\Phi'(z)]^2}.$$

$$\widetilde{V}_{01}(x)=-\frac{1}{4}\xi_0(x),\quad \widetilde{V}_{11}(x)=\frac{1}{4}\xi'_0(x)+\frac{1}{8}\widehat{Q}\xi_0(x),$$

$$\widetilde{V}_{21}(x)=-\frac{1}{8}\xi''_0(x)-\frac{1}{8}\widehat{Q}\xi'_0(x)-\frac{3}{16}\widehat{Q}'\xi_0(x)-\frac{3}{32}\xi_0(x)\,\widehat{Q}^2,$$

$$\widetilde{T}_{11}(x)=\frac{1}{2}\xi_0^3(x)+\frac{1}{2}\xi_0(x)\,\eta_0^2(x)+x\eta_0(x)\,\eta'_0(x)\,\xi_0(x)+$$

$$+\frac{1}{2}x\eta_0^2(x)\,\xi'_0(x)+\frac{9}{4}\widehat{Q}\eta_0^2(x)\,\xi_0(x)\,x,$$

$$R_{01}(x)=-3x\eta_0^2(x)\,\xi_0(x),\quad F_{01}(x)=-\frac{\Phi'''(0)}{2A^3}x,$$

$$F_{11}(x)=-F'_{01}(x)-\frac{1}{2}\widehat{Q}F_{01}(x)+\frac{1}{2}\widetilde{Y}_{01}(x)+\frac{\Phi'''(z)}{4\Phi'(z)}P_{01}(x)+$$

$$+\frac{\Phi^{(IV)}(z)\,S_{01}(x)}{16(\Phi'(z))^2},\quad F'_{01}(x)=\frac{d}{dx}F_{01}(x),$$

$$\widetilde{Y}_{01}(x)=\frac{1}{6}\frac{\Phi'''(z)}{\Phi'(z)}\xi_0(x)\,[x\eta_0(x)\,\beta_0(x)-\alpha_0(x)\,\xi_0(x)]+$$

$$+\frac{1}{6}x\eta_0(x)\left(\widehat{Q}'+\frac{1}{2}\widehat{Q}^2\right)Y_{02}(x),$$

$$Y_{02}(x)=-\frac{2\Phi'''(0)}{3A^2}x-\frac{7\Phi^{(IV)}(0)}{15A^3}x^2+\frac{3\Phi''(0)\,\Phi'''(0)}{5A^4}x^2,$$

$$P_{01}(x)=\frac{1}{2}\alpha_0(x)\,\xi_0^2(x)-\frac{1}{2}x\xi_0(x)\,\eta_0(x)\,\beta_0(x)+$$

$$+\frac{1}{2}x\widehat{Q}\eta_0^2(x)\,\alpha_0(x),\quad S_{01}(x)=-x\alpha_0(x)\,\eta_0^2(x),$$

$$F_{21}(x)=-\frac{5}{6}F'_{11}(x)-\frac{5}{12}\widehat{Q}F_{11}(x)+\frac{1}{12}\widetilde{Y}_{11}(x)+$$

$$+\frac{\Phi'''(z)}{24\Phi'(z)}P_{11}(x)+\frac{\Phi^{(IV)}(z)}{96\,(\Phi'(z))^2}S_{11}(x),$$

$$F'_{11}(x)=\frac{\Phi'''(0)}{4A^3}\left(\frac{\widehat{Q}'}{\Phi'(z)}x+\widehat{Q}\right)+\frac{1}{2}\widetilde{Y}'_{01}(x)+$$

$$+\frac{P_{01}(x)}{4\,(\Phi'(z))^2}\left(\Phi^{(IV)}(z)-\frac{\Phi''(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi'(z)}\right)+\frac{\Phi'''(z)}{4\Phi'(z)}P'_{01}(x)+$$

$$+\frac{\Phi^{(IV)}(z)}{16\,(\Phi'(z))^2}S'_{01}(x)-\frac{\Phi^{(IV)}(z)\,\Phi''(z)}{8\,(\Phi'(z))^4}S_{01}(x)+\frac{\Phi^{(V)}(0)}{16\,(\Phi'(z))^3}S_{01}(x),$$

$$\widetilde{Y}'_{01}(x)=\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{\Phi^{(IV)}(z)}{(\Phi'(z))^2}-\frac{\Phi''(z)\,\Phi'''(z)}{(\Phi'(z))^3}\right)(x\eta_0(x)\beta_0(x)\xi_0(x)-\right.$$

$$-\alpha_0(x)\xi_0^2(x))+\frac{\Phi'''(z)}{\Phi'(z)}\left(\eta_0(x)\beta_0(x)\xi_0(x)+x\eta_0'(x)\beta_0(x)\xi_0(x)+\right.$$

$$+x\eta_0(x)\beta_0'(x)\xi_0(x)+x\eta_0(x)\beta_0(x)\xi_0'(x)-\alpha_0'(x)\xi_0^2(x)-$$

$$-2\alpha_0(x)\xi_0'(x)\xi_0(x))+\left[\left(\widehat{Q}+\frac{1}{2}\widehat{Q}^2\right)\eta_0(x)+x(\widehat{Q}''+\widehat{Q}\widehat{Q}')\eta_0(x)+\right.$$

$$\left.\left.+x\left(\widehat{Q}'+\frac{1}{2}\widehat{Q}^2\right)\eta_0'(x)\right]Y_{02}(x)+x\left(\widehat{Q}'+\frac{1}{2}\widehat{Q}^2\right)\eta_0(x)Y_{02}'(x)\right\},$$

$$Y_{02}'(x)=\overline{A}_2+2\overline{B}_2x,\quad \overline{A}_2=-\frac{2}{3}\frac{\Phi'''(0)}{A^2},\quad \overline{B}_2=-\frac{7\Phi^{(IV)}(0)}{15A^3}+\frac{3\Phi''(0)\,\Phi'''(0)}{15A^4},$$

$$P_{01}'(x)=\frac{1}{2}\left[2\xi_0(x)\xi_0'(x)\alpha_0(x)+\xi_0^2(x)\alpha_0'(x)-\xi_0(x)\eta_0(x)\beta_0(x)-\right.$$

$$-x\xi_0'(x)\eta_0(x)\beta_0(x)-x\xi_0(x)\eta_0'(x)\beta_0(x)-x\xi_0(x)\eta_0(x)\beta_0'(x)+$$

$$\left.+\widehat{Q}\eta_0^2(x)\alpha_0(x)+x\widehat{Q}'\eta_0^2(x)\alpha_0(x)+x\widehat{Q}\eta_0^2(x)\alpha_0'(x)+2x\widehat{Q}\eta_0(x)\eta_0'(x)\alpha_0(x)\right],$$

$$S_{01}'(x)=-\alpha_0(x)\eta_0^2(x)-x\alpha_0'(x)\eta_0^2(x)-2x\alpha_0(x)\eta_0(x)\eta_0'(x),$$

$$\widetilde{Y}_{11}(x)=\widetilde{V}_{01}(x)Y_{11}(x)+\widetilde{V}_{11}(x)Y_{01}(x)-x\widetilde{V}_{02}(x)Y_{12}(x)-x\widetilde{V}_{12}(x)Y_{02}(x)+$$

$$+\widetilde{V}_{02}(x)Y_{02}(x),$$

$$Y_{11}(x)=\frac{2\Phi'''(z)}{3\Phi'(z)}\left[x\eta_0(x)\beta_0'(x)+x\eta_0'(x)\beta_0(x)+\eta_0(x)\beta_0(x)-\alpha_0(x)\xi_0'(x)-\right.$$

$$\left.-\alpha_0'(x)\xi_0(x)\right]+\frac{4}{15(\Phi'(z))^2}\left[\Phi^{(IV)}(z)+\frac{\Phi''(z)\,\Phi'''(z)}{2\Phi'(z)}\right][x\eta_0(x)\beta_0(x)-\alpha_0(x)\xi_0(x)],$$

$$Y_{01}(x)=\frac{2\Phi'''(z)}{3\Phi'(z)}[\xi_0(x)\alpha_0(x)-x\eta_0(x)\beta_0(x)],\ \widetilde{V}_{02}(x)=-\frac{5}{6}\left(\widehat{Q}'+\frac{1}{2}\widehat{Q}^2\right)\eta_0(x),$$

$$Y_{12}(x)=\frac{2\Phi'''(0)}{3A^2}+\frac{14\Phi^{(IV)}(0)}{15A^3}x-\frac{6\Phi''(0)\,\Phi'''(0)}{5A^4}x+\frac{\Phi'''(z)}{\Phi'(z)}\eta_0(x)\alpha_0(x),$$

$$\widetilde{V}_{12}(x)=\frac{1}{6}\eta_0'(x)\left(\widehat{Q}'+\frac{1}{2}\widehat{Q}^2\right)+\left(\frac{3}{20}\widehat{Q}'\widehat{Q}+\frac{34}{15}\widehat{Q}''+\frac{1}{24}\widehat{Q}^3\right)\eta_0(x),$$

$$P_{11}(x)=-\frac{1}{2}\xi_0^2(x)\alpha_0'(x)-\xi_0'(x)\xi_0(x)\alpha_0(x)-\frac{5}{4}\widehat{Q}\xi_0^2(x)\alpha_0(x)-$$

$$-\frac{1}{2}x\eta_0(x)\beta_0'(x)\xi_0(x)-\frac{1}{2}x\eta_0'(x)\beta_0(x)\xi_0(x)+\frac{3}{4}x\widehat{Q}\eta_0(x)\beta_0(x)\xi_0(x)+$$

$$+\frac{1}{2}x\eta_0(x)\beta_0(x)\xi_0'(x)-\frac{1}{2}x\widehat{Q}\eta_0^2(x)\alpha_0'(x)-x\widehat{Q}\eta_0'(x)\eta_0(x)\alpha_0(x)-$$

$$-\frac{11}{12}x\widehat{Q}^2\eta_0^2(x)\alpha_0(x)-\frac{1}{3}x\eta_0^2(x)\alpha_0(x)\widehat{Q}',$$

$$S_{11}(x)=\alpha_0(x)\xi_0^2(x)+\alpha_0(x)\eta_0^2(x)+2x\alpha_0(x)\eta_0(x)\eta_0'(x)+$$

$$+x\alpha_0'(x)\eta_0^2(x)+\frac{3}{2}\widehat{Q}x\alpha_0(x)\eta_0^2(x)-2x\eta_0(x)\beta_0(x)\xi_0(x),$$

$$\widehat{G}_{01}(x)\equiv 0,\quad \widehat{G}_{11}(x)=\frac{1}{2}\widetilde{\widetilde{X}}_{01}(x)+\frac{\Phi'''(z)}{4\Phi'(z)}\widetilde{T}_{01}(x)+\frac{\Phi^{(IV)}(z)\,S_{01}(x)}{16(\Phi'(z))^2},$$

$$\widetilde{\widetilde{X}}_{01}(x)=\frac{x\Phi'''(z)}{3\Phi'(z)}\beta_0(x)\eta_0(x)\xi_0(x)-\frac{\alpha_0(x)}{6(\Phi'(z))^3}\left[\Phi'''(z)-\frac{3(\Phi''(z))^2}{2\Phi'(z)}\right]X_{01}(x),$$

$$\widetilde{T}_{01}(x) = \frac{1}{2}\widehat{Q}\, x\alpha_0(x)\,\eta_0^2(x) - x\beta_0(x)\,\xi_0(x)\,\eta_0(x),$$

$$\widehat{G}_{21}(x) = -\frac{5}{6}\widehat{G}'_{11}(x) - \frac{5}{12}\widehat{Q}\widehat{G}_{11}(x) + \frac{1}{12}\widetilde{\widetilde{X}}_{11}(x) + $$

$$+ \frac{\Phi'''(z)}{24\Phi'(z)}\widetilde{T}_{11}(x) + \frac{\Phi^{(\mathrm{IV})}(z)}{96(\Phi'(z))^2} S_{11}(x),$$

$$\widehat{G}'_{11}(x) = \frac{1}{2}\widetilde{\widetilde{X}}'_{01}(x) + \frac{\widetilde{T}_{01}(x)}{4(\Phi'(z))^2}\left[\Phi^{(\mathrm{IV})}(z) - \frac{\Phi'''(z)\,\Phi''(z)}{\Phi'(z)}\right] + $$

$$+ \frac{\Phi'''(z)}{4\Phi'(z)}\left\{\frac{1}{2}\widehat{Q}'\, x\alpha_0(x)\,\eta_0^2(x) + \frac{1}{2}\widehat{Q}\alpha_0(x)\,\eta_0^2(x) + \frac{1}{2}\widehat{Q}x\alpha'_0(x)\,\eta_0^2(x) + \right.$$

$$+ \widehat{Q}x\alpha_0(x)\,\eta_0(x)\,\eta'_0(x) - \beta_0(x)\,\xi_0(x)\,\eta_0(x) - x\left[\beta'_0(x)\,\xi_0(x)\,\eta_0(x) + \right.$$

$$\left.\left. + \beta_0(x)\,\xi'_0(x)\,\eta_0(x) + \beta_0(x)\,\xi_0(x)\,\eta'_0(x)\right]\right\} + \frac{\Phi^{(\mathrm{IV})}(z)\,S'_{01}(x)}{16(\Phi'(z))^2} + $$

$$+ \frac{S_{01}(x)}{16(\Phi'(z))^3}\left[\Phi^{(\mathrm{V})}(0) - \frac{2\Phi^{(\mathrm{IV})}(z)\,\Phi''(z)}{\Phi'(z)}\right],$$

$$\widetilde{\widetilde{X}}'_{01}(x) = \frac{\Phi'''(z)}{3\Phi'(z)}\beta_0(x)\,\eta_0(x)\,\xi_0(x) + \frac{x\Phi'''(z)}{3\Phi'(z)}\left[\beta'_0(x)\,\eta_0(x)\,\xi_0(x) + \right.$$

$$\left. + \beta_0(x)\,\eta'_0(x)\,\xi_0(x) + \beta_0(x)\,\eta_0(x)\,\xi'_0(x)\right] + $$

$$+ \frac{x}{3(\Phi'(z))^2}\beta_0(x)\,\eta_0(x)\,\xi_0(x)\left[\Phi^{(\mathrm{IV})}(z) - \frac{\Phi''(z)\,\Phi'''(z)}{\Phi'(z)}\right] - $$

$$- \frac{\alpha_0(x)}{6(\Phi'(z))^4}\left[\Phi^{(\mathrm{IV})}(z) - \frac{6\Phi'''(z)\,\Phi''(z)}{\Phi'(z)} + \frac{6(\Phi''(z))^3}{(\Phi'(z))^2}\right] X_{01}(x) - $$

$$- \frac{\alpha'_0(x)}{6(\Phi'(z))^3}\left[\Phi'''(z) - \frac{3(\Phi''(z))^2}{2\Phi'(z)}\right] X_{01}(x) - $$

$$- \frac{\alpha_0(x)}{6(\Phi'(z))^3}\left[\Phi'''(z) - \frac{3(\Phi''(z))^2}{2\Phi'(z)}\right] X'_{01}(x),$$

$$X'_{01}(x) = 2\overline{A}_1 x + 3\overline{B}_1 x^2, \quad \overline{A}_1 = -\frac{2\Phi'''(0)}{3A^3}, \quad \overline{B}_1 = -$$

$$- \frac{8}{15A^4}\left[\Phi^{(\mathrm{IV})}(0) - \frac{2\Phi''(0)\,\Phi'''(0)}{A}\right],$$

$$\widetilde{\widetilde{X}}_{11}(x) = \widetilde{W}_{11}(x)X_{01}(x) + \widetilde{W}_{01}(x)X_{11}(x) + $$

$$+ \widetilde{W}_{02}(x)X_{02}(x) - x\left[\widetilde{W}_{12}(x)X_{02}(x) + \widetilde{W}_{02}(x)X_{12}(x)\right],$$

$$\widetilde{W}_{11}(x) = \frac{1}{6}\alpha'_0(x)\left(\widehat{Q}' + \frac{1}{2}\widehat{Q}^2\right) + \alpha_0(x)\left[\frac{3}{20}\widehat{Q}'\widehat{Q} + \frac{34}{15}\widehat{Q}'' + \frac{1}{24}\widehat{Q}^3\right],$$

$$\widetilde{W}_{01}(x) = -\frac{1}{6}\alpha_0(x)\left(\widehat{Q}' + \frac{1}{2}\widehat{Q}^2\right), \quad \widetilde{W}_{02}(x) = -\frac{1}{4}\beta_0(x),$$

$$X_{02}(x) = \frac{4\Phi'''(z)}{3\Phi'(z)}\eta_0(x)\,\xi_0(x), \quad \widetilde{W}_{12}(x) = \frac{1}{4}\beta'_0(x) + \frac{1}{8}\widehat{Q}\beta_0(x),$$

$$X_{12}(x) = -\frac{8}{15}\eta_0(x)\,\xi_0(x)\frac{\Phi^{(\mathrm{IV})}(z)}{(\Phi'(z))^2} - \frac{4\Phi'''(z)}{3\Phi'''(z)}\left[\xi_0(x)\,\eta'_0(x) + \eta_0(x)\,\xi'_0(x)\right] - $$

$$- \frac{4}{15}\eta_0(x)\,\xi_0(x)\frac{\Phi'''(z)\,\Phi''(z)}{(\Phi'(z))^3},$$

$$\widetilde{T}_{11}(x) = x\left[\xi'_0(x)\,\eta_0(x)\,\beta_0(x) + \xi_0(x)\,\eta'_0(x)\,\beta_0(x) + \xi_0(x)\,\eta_0(x)\,\beta'_0(x) + \right.$$

$$+ \frac{5}{2}\widehat{Q}\eta_0(x)\,\xi_0(x)\,\beta_0(x) - \frac{1}{2}\eta_0^2(x)\,\widehat{Q}\alpha'_0(x) - \frac{1}{2}\eta_0^2(x)\,\widehat{Q}'\alpha_0(x) - $$

$$-\frac{11}{12}\widehat{Q}^2\eta_0^2(x)\alpha_0(x)-\widehat{Q}\alpha_0(x)\eta_0(x)\eta_0'(x)\Big]+\eta_0(x)\xi_0(x)\beta_0(x)-$$

$$-\frac{1}{2}\widehat{Q}\alpha_0(x)\left[\xi_0^2(x)+\eta_0^2(x)\right],$$

$$\widehat{C}_{01}(x)=\frac{1}{8}x\beta_0(x)Y_{02}(x),\quad \widehat{C}_{11}(x)=\widehat{C}_{11}(0)+\widehat{C}_{11}'(0)x,$$

$$\widehat{C}_{11}(0)=0,\quad \widehat{C}_{11}'(0)=\frac{2\Phi''(0)\Phi'''(0)}{3A^4}-\frac{\Phi^{(IV)}(0)}{8A^3},$$

$$\widehat{C}_{21}(x)=-\widehat{C}_{11}'(0)-\frac{1}{2}\widehat{Q}\widehat{C}_{11}(x)-\frac{2}{3}\widehat{C}_{01}''(x)-\frac{2}{3}\widehat{Q}\widehat{C}_{01}'(x)+$$

$$+\frac{1}{6}\widetilde{Y}_{21}(x)+\frac{\Phi'''(z)}{12\Phi'(z)}\widetilde{P}_{11}(x)+\frac{\Phi^{(IV)}(z)}{48(\Phi'(z))^2}\widetilde{S}_{01}(x),$$

$$\widehat{C}_{01}''(x)=\frac{\beta_0(x)}{A^2}\left\{-\frac{1}{6}\Phi'''(0)+\frac{x}{20A}\left[-7\Phi^{(IV)}(0)+\frac{9\Phi''(0)\Phi'''(0)}{A}\right]\right\}+$$

$$+\frac{\beta_0'(x)x}{A^2}\left\{-\frac{1}{3}\Phi'''(0)+\frac{x}{20A}\left[-7\Phi^{(IV)}(0)+\frac{9\Phi''(0)\Phi'''(0)}{A}\right]\right\}+$$

$$+\frac{\beta_0''(x)x^2}{2A^2}\left\{-\frac{1}{6}\Phi'''(0)+\frac{x}{60A}\left[-7\Phi^{(IV)}(0)+\frac{9\Phi''(0)\Phi'''(0)}{A}\right]\right\},$$

$$\widehat{C}_{01}'(x)=\frac{\beta_0(x)x}{A^2}\left\{-\frac{1}{6}\Phi'''(0)+\frac{x}{40A}\left[-7\Phi^{(IV)}(0)+\frac{9\Phi''(0)\Phi'''(0)}{A}\right]\right\}+$$

$$+\frac{\beta_0'(x)x^2}{2A^2}\left\{-\frac{1}{6}\Phi'''(0)+\frac{x}{60A}\left[-7\Phi^{(IV)}(0)+\frac{9\Phi''(0)\Phi'''(0)}{A}\right]\right\},$$

$$\widetilde{\widetilde{Y}}_{21}(x)=\widetilde{W}_{02}(x)\left[Y_{12}(x)-xY_{22}(x)\right]+$$

$$+\widetilde{W}_{12}(x)\left[Y_{02}(x)-xY_{12}(x)\right]-x\widetilde{W}_{22}(x)Y_{02}(x),$$

$$Y_{22}(x)=-\frac{7}{15}\frac{\Phi^{(IV)}(0)}{A^3}+\frac{3\Phi''(0)\Phi'''(0)}{5A^4}-\frac{\Phi^{(IV)}(z)}{2(\Phi'(z))^2}\eta_0(x)\alpha_0(x)-$$

$$-\frac{\Phi'''(z)}{2\Phi'(z)}\left[2\eta_0(x)\alpha_0'(x)+2\eta_0'(x)\alpha_0(x)-\xi_0(x)\beta_0(x)\right],$$

$$\widetilde{W}_{22}(x)=-\frac{1}{8}\beta_0''(x)-\frac{1}{8}\widehat{Q}\beta_0(x)-\frac{3}{16}\widehat{Q}'\beta_0(x)-\frac{3}{32}\widehat{Q}^2\beta_0(x),$$

$$\widetilde{P}_{11}(x)=\frac{7}{4}x\widehat{Q}\alpha_0(x)\eta_0(x)\beta_0(x)-\frac{1}{2}\widehat{Q}\alpha_0^2(x)\xi_0(x)+$$

$$+\frac{1}{2}\beta_0(x)\eta_0(x)\alpha_0(x)-\frac{x}{2}\xi_0(x)\beta_0^2(x)+\frac{1}{2}x\eta_0(x)\alpha_0'(x)\beta_0(x)+$$

$$+\frac{1}{2}x\eta_0'(x)\alpha_0(x)\beta_0(x)+\frac{1}{2}x\eta_0(x)\alpha_0(x)\beta_0'(x),$$

$$\widetilde{S}_{01}(x)=\alpha_0(x)\left[\xi_0(x)\alpha_0(x)-2x\eta_0(x)\beta_0(x)\right],$$

$$d_{01}(x)=-\frac{1}{8}\xi_0(x)\widehat{Z}_{01}(x),\ \widehat{Z}_{01}(x)=\overline{A}x+\overline{B}x^2+\overline{K}x^3,$$

$$\overline{A}=\frac{\Phi'''(0)}{A},\quad \overline{B}=\frac{\Phi^{(IV)}(0)}{2A^2}-\frac{\Phi''(0)\Phi'''(0)}{3A^3},$$

$$\overline{K}=2\widehat{Z}_{12}(0)+\frac{1}{3}\left[8\alpha_0''(0)\frac{\Phi'''(0)}{\Phi'(0)}-\frac{2}{3}\widehat{Q}^2(0)\frac{\Phi'''(0)}{\Phi'(0)}+\right.$$

$$\left.+\frac{8}{3}\widehat{Q}'(0)\frac{\Phi'''(0)}{A}+\frac{\Phi^{(V)}(0)}{A^3}+\frac{\Phi^{(IV)}(0)\Phi''(0)}{A^4}-\frac{(\Phi'''(0))^2}{A^4}\right],$$

$$\widehat{Z}_{12}(x)=-\frac{4}{3}\left[\alpha_0(x)\beta_0'(x)+\alpha_0'(x)\beta_0(x)\right]\frac{\Phi'''(z)}{\Phi'(z)}-$$

$$-\frac{4}{15}\alpha_0(x)\beta_0(x)\widehat{Q}\frac{\Phi'''(z)}{\Phi'(z)}-\frac{8}{15}\alpha_0(x)\beta_0(x)\frac{\Phi^{(IV)}(z)}{(\Phi'(z))^2},$$

$$d_{11}(x)=d_{11}(0)+d_{11}'(0)x,\quad d_{11}(0)=\frac{\Phi'''(0)}{2A^2},$$

$$d'_{11}(0)=\frac{\Phi^{(IV)}(0)}{8A^3}-\frac{2\Phi''(0)\,\Phi'''(0)}{3A^4},$$

$$d_{21}(x)=-d'_{11}(x)-\frac{1}{2}\widehat{Q}d_{11}(x)-\frac{2}{3}d''_{01}(x)-\frac{2}{3}\widehat{Q}d'_{01}(x)+\frac{1}{6}\widetilde{Z}_{21}(x)+$$

$$+\frac{\Phi'''(z)}{12\Phi'(z)}Q_{11}(x)+\frac{\Phi^{(IV)}(z)}{48(\Phi'(z))^2}\widetilde{S}_{01}(x),$$

$$d'_{11}(x)\equiv d'_{11}(0),\quad d''_{01}(x)=-\frac{1}{8}\left[\widehat{Z}_{01}(x)\xi''_0(x)+2\widehat{Z}'_{01}(x)\xi'_0(x)+\widehat{Z}''_{01}(x)\xi_0(x)\right],$$

$$\widehat{Z}'_{01}(x)=\overline{A}+2\overline{B}x+3\overline{K}x^2,\quad \widehat{Z}''_{01}(x)=2\overline{B}+6\overline{K}x,\quad d'_{01}(x)=$$

$$=-\frac{1}{8}\left[\widehat{Z}_{01}(x)\xi'_0(x)+\widehat{Z}'_{01}(x)\xi_0(x)\right],$$

$$\widetilde{Z}_{21}(x)=\widetilde{V}_{01}(x)\widehat{Z}_{21}(x)+\widetilde{V}_{11}(x)\widehat{Z}_{11}(x)+\widetilde{V}_{21}(x)\widehat{Z}_{01}(x),$$

$$\widehat{Z}_{21}(x)=\overline{B}+3\overline{K}x-\frac{\Phi'''(z)}{\Phi'(z)}\left[\frac{1}{2}x\beta_0^2(x)+2\alpha_0(x)\alpha'_0(x)\right]-\frac{\Phi^{(IV)}(z)}{2(\Phi'(z))^2}\alpha_0^2(x),$$

$$\widehat{Z}_{11}(x)=-\overline{A}-2\overline{B}x-3\overline{K}x^2+\frac{\Phi'''(z)}{\Phi'(z)}\alpha_0^2(x),$$

$$Q_{11}(x)=-\xi_0(x)\alpha_0(x)\alpha'_0(x)-\frac{1}{2}\alpha_0^2(x)\xi'_0(x)-\frac{5}{4}\widehat{Q}\xi_0(x)\alpha_0^2(x)-$$

$$-\frac{1}{2}x\beta_0^2(x)\xi_0(x)+x\widehat{Q}\alpha_0(x)\eta_0(x)\beta_0(x),\quad \delta_{01}(x)=-\frac{1}{8}\xi_0(x)\Phi''(0),$$

$$\delta_{11}(x)=\delta_{11}(0)+\delta'_{11}(0)x,\quad \delta_{11}(0)=-\frac{(\Phi''(0))^2}{4A^3},$$

$$\delta'_{11}(0)=\left[(\Phi''(0))^2-\frac{\Phi'''(0)}{3}\right]\frac{\Phi''(0)}{4A^4},\quad \delta_{21}(x)=-\delta'_{11}(x)-\frac{1}{2}\widehat{Q}\delta_{11}(x)-$$

$$-\frac{2}{3}\delta''_{01}(x)-\frac{2}{3}\widehat{Q}\delta'_{01}(x)+\frac{1}{6}\widetilde{V}_{21}(x)\Phi''(0),$$

$$\delta'_{11}(x)\equiv\delta'_{11}(0),\quad \delta''_{01}(x)=-\frac{1}{8}\xi''_0(x)\Phi''(0),\quad \delta'_{01}(x)=-\frac{1}{8}\xi'_0(x)\Phi''(0),$$

$$e_{01}(x)=e'_{01}(0)x,\quad e'_{01}(0)=\frac{3\Phi''(0)\,\Phi'''(0)}{8A^3}-\frac{\Phi^{(IV)}(0)}{16A^2},$$

$$e_{11}(x)=-e'_{01}(0)-\frac{1}{2}\widehat{Q}e_{01}(x)+\frac{1}{2}\widetilde{\widetilde{Z}}_{01}(x)+\frac{\Phi'''(z)}{4\Phi'(z)}\widetilde{Q}_{01}(x)+\frac{\Phi^{(IV)}(z)}{16(\Phi'(z))^2}\widetilde{R}_{01}(x),$$

$$\widetilde{\widetilde{Z}}_{01}(x)=\widehat{Z}_{01}(x)\widetilde{W}_{01}(x)+x\alpha_0(x)\beta_0^2(x)\frac{\Phi'''(z)}{3\Phi'(z)},$$

$$\widetilde{Q}_{01}(x)=-\frac{1}{2}\widehat{Q}\alpha_0^3(x)-x\alpha_0(x)\beta_0^2(x),\quad \widetilde{R}_{01}(x)=\alpha_0^3(x),$$

$$\varepsilon_{01}(x)=\frac{(\Phi''(0))^2}{8A^2}+\varepsilon'_{01}(0)x,\quad \varepsilon'_{01}(0)=\frac{\Phi''(0)\,\Phi'''(0)}{4A^3}-\frac{7(\Phi''(0))^3}{16A^4},$$

$$\varepsilon_{11}(x)=-\varepsilon'_{01}(0)-\frac{1}{2}\widehat{Q}\varepsilon_{01}(x)+\frac{1}{2}\widetilde{W}_{01}(x)\Phi''(0),$$

$$\tau_0(x)=\sum_{k=0}^{3}t^0_{k1}(x)x^{k+1/2},\quad t^0_{01}(x)=\frac{2\lambda_1}{\Phi'(z)},\quad t^0_{11}(x)=\frac{4\lambda_1\Phi''(z)}{3(\Phi'(z))^3},$$

$$t^0_{21}(x)=\frac{8\lambda_1}{15(\Phi'(z))^4}\left[\frac{3(\Phi''(z))^2}{\Phi'(z)}-\Phi'''(z)\right],$$

$$t^0_{31}(x)=-\frac{16\lambda_1}{105(\Phi'(z))^5}\left[-\Phi^{(IV)}(z)+\frac{10\Phi'''(z)\,\Phi''(z)}{\Phi'(z)}-\frac{15(\Phi''(z))^3}{(\Phi'(z))^2}\right],$$

$$\tau_1(x)=\sum_{k=0}^{3}t^0_{k2}(x)x^k,$$

$$t_{02}^0(x)=\frac{2\lambda_1}{A}\left\{-1+\frac{2\Phi''(0)}{3A^2}x-\frac{4}{15A^3}\left[\frac{3(\Phi''(0))^2}{A}-\Phi'''(0)\right]x^2+\right.$$
$$\left.+\frac{8}{105A^4}\left[\Phi^{(IV)}(0)-\frac{10\Phi''(0)\Phi'''(0)}{A}+\frac{15(\Phi''(0))^3}{A^2}\right]x^3\right\},$$
$$t_{12}^0(x)=\frac{4\lambda_1}{A^3}\left\{-\frac{1}{3}\Phi''(0)+\frac{4}{15A}\left[\frac{3(\Phi''(0))^2}{A}-\Phi'''(0)\right]x-\right.$$
$$\left.-\frac{4}{35A^2}\left[\Phi^{(IV)}(0)-\frac{10\Phi''(0)\Phi'''(0)}{A}+\frac{15(\Phi''(0))^3}{A^2}\right]x^2\right\},$$
$$t_{22}^0(x)=\frac{8\lambda_1}{5A^4}\left\{-\frac{(\Phi''(0))^2}{A}+\frac{\Phi'''(0)}{3}+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{7A}\left[\Phi^{(IV)}(0)-\frac{10\Phi''(0)\Phi'''(0)}{A}+\frac{15(\Phi''(0))^3}{A^2}\right]x\right\},$$
$$t_{32}^0(x)=-\frac{16\lambda_1}{105A^5}\left[\Phi^{(IV)}(0)-\frac{10\Phi''(0)\Phi'''(0)}{A}+\frac{15(\Phi''(0))^3}{A^2}\right],$$
$$\tau_2(x)=\sum_{k=0}^{3}t_{k1}^0(x)\left(k+\frac{1}{2}\right)x^{k-1/2},\quad \Delta_{01}(x)=-\frac{1}{2\Phi'(z)}\lambda_1X_{01}(x),$$
$$\Delta_{11}(x)=\frac{\lambda_1}{2\Phi'(z)}\left\{2\bar{A}_1(x)+3\bar{B}_1x^2-x\eta_0^2(x)\frac{\Phi'''(z)}{\Phi'(z)}-2\widehat{Q}\left(\bar{A}_1+\bar{B}_1x\right)x^2\right\},$$
$$\Delta_{21}(x)=\frac{\lambda_1}{6\Phi'(z)}\left\{-\frac{3}{2}X_{01}''(x)+6X_{01}'(x)\widehat{Q}+4X_{01}(x)\left[\frac{\Phi'''(z)}{(\Phi'(z))^3}-3\widehat{Q}^2\right]+\right.$$
$$+\frac{\Phi'''(z)}{2\Phi'(z)}\left[\xi_0^2(x)+6\eta_0^2(x)+12x\eta_0(x)\eta_0'(x)-8x\eta_0^2(x)\widehat{Q}\right]+$$
$$\left.+\frac{5}{2}x\eta_0^2(x)\frac{\Phi^{(IV)}(z)}{(\Phi'(z))^2}\right\},$$
$$X_{01}''(x)=2\bar{A}_1+6\bar{B}_1x,\quad \rho_{01}(x)=\bar{C}x+\bar{D}x^2,\quad \bar{C}=-\lambda_1\varkappa_2\frac{\Phi'''(0)}{A^3},$$
$$\bar{D}=\lambda_1\varkappa_2\left[-\frac{5\Phi^{(IV)}(0)}{6A^4}+\frac{2\Phi'''(0)}{3A^3}-\frac{3\Phi''(0)\Phi\ \ (0)}{2A^5}\right],$$
$$\rho_{11}(x)=-\bar{C}-2\bar{D}x+\lambda_1\varkappa_2\frac{\Phi'''(z)}{6(\Phi'(z))^2}\left[\xi_0(x)\alpha_0(x)-x\eta_0(x)\beta_0(x)\right],$$
$$\rho_{21}(x)=\bar{D}+\frac{1}{8}\lambda_1\varkappa_2\left[Y_{11}(x)-Y_{01}'(x)+Y_{01}(x)\widehat{Q}\right],$$
$$Y_{01}'(x)=\frac{2}{3}\left\{\frac{\Phi'''(z)}{\Phi'(z)}\left[\xi_0'(x)\alpha_0(x)+\xi_0(x)\alpha_0'(x)-x\eta_0'(x)\beta_0(x)-\right.\right.$$
$$\left.-x\eta_0(x)\beta_0'(x)-\eta_0(x)\beta_0(x)\right]+\left[\xi_0(x)\alpha_0(x)-\right.$$
$$\left.\left.-x\eta_0(x)\beta_0(x)\right]\left[\frac{\Phi^{(IV)}(z)}{(\Phi'(z))^2}-\frac{\Phi'''(z)\Phi''(z)}{(\Phi'(z))^3}\right]\right\},$$
$$t_{01}(x)=-\frac{\lambda_1A}{R_h\Phi'(z)},\quad t_{11}(x)=-\frac{2\lambda_1A}{R_h}\frac{\Phi''(z)}{(\Phi'(z))^3},$$
$$t_{21}(x)=\frac{4\lambda_1A}{3R_h(\Phi'(z))^4}\left[\Phi'''(z)-\frac{3(\Phi''(z))^2}{\Phi'(z)}\right],$$
$$t_{31}(x)=-\frac{8\lambda_1A}{15R_h(\Phi'(z))^5}\left[\Phi^{(IV)}(z)-\frac{10\Phi''(z)\Phi'''(z)}{\Phi'(z)}+\frac{15(\Phi''(z))^3}{(\Phi'(z))^2}\right],$$
$$T_{01}(x)=-\frac{\lambda_1}{2\Phi'(z)}\widehat{Z}_{01}(x),\quad T_{11}(x)=\frac{\lambda_1}{2\Phi'(z)}\left[\widehat{Z}_{01}'(x)-2\widehat{Z}_{01}'(x)\widehat{Q}+\alpha_0^2(x)\frac{\Phi'''(z)}{\Phi'(z)}\right],$$

$$T_{21}(x)=\frac{\lambda_1}{4\Phi'(z)}\Big\{-\widehat{Z}''_{01}(x)+4\widehat{Z}'_{01}(x)\Phi'''(z)+\frac{8}{3}\widehat{Z}_{01}(x)\Big[\frac{\Phi'''(z)}{(\Phi'(z))^3}-3\widehat{Q}^2\Big]-$$
$$-\frac{5}{3}\alpha_0^2(x)\frac{\Phi^{(IV)}(z)}{(\Phi'(z))^2}+\frac{\Phi'''(z)}{\Phi'(z)}\Big[\frac{8}{3}\widehat{Q}\alpha_0^2(x)-\frac{1}{3}x\beta_0^2(x)-4\alpha_0(x)\alpha_0'(x)\Big]\Big\},$$

$$T_{31}(x)\equiv 0,\quad \tau_3(x)=\sum_{k=0}^{2}(k+1)\,t^0_{k+1,2}(x)\,x^k,\quad \Delta_{02}(x)=\frac{4\lambda_1\Phi'''(0)}{3A^4}x,$$

$$\Delta_{12}(x)=\frac{\lambda_1}{3}\Big[\xi_0(x)\,\eta_0(x)\frac{\Phi'''(z)}{(\Phi'(z))^2}-\frac{4\Phi'''(0)}{A^4}\Big],$$

$$\Delta_{22}(x)=\frac{\lambda_1}{8\Phi'(z)}\left[X_{12}(x)+X_{02}(x)\widehat{Q}-X'_{02}(x)\right],$$

$$X'_{02}(x)=\frac{4}{3}\Big\{\left[\eta_0'(x)\,\xi_0(x)+\eta_0(x)\,\xi_0'(x)\right]\frac{\Phi'''(z)}{\Phi'(z)}+$$
$$+\eta_0(x)\,\xi_0(x)\Big[\frac{\Phi^{(IV)}(z)}{(\Phi'(z))^2}-\frac{\Phi'''(z)\,\Phi''(z)}{(\Phi'(z))^3}\Big]\Big\},$$

$$\rho_{02}(x)=-\frac{\lambda_1\varkappa_2}{2\Phi'(z)}Y_{02}(x),$$

$$\rho_{12}(x)=\frac{\lambda_1\varkappa_2}{2\Phi'(z)}\Big[Y'_{02}(x)-2Y_{02}(x)\widehat{Q}+\eta_0(x)\,\alpha_0(x)\frac{\Phi'''(z)}{\Phi'(z)}\Big],$$

$$\rho_{22}(x)=\frac{\lambda_1\varkappa_2}{4\Phi'(z)}\Big\{-Y''_{02}(x)+4Y'_{02}(x)\Phi'''(z)+\frac{8}{3}Y_{02}(x)\Big[\frac{\Phi'''(z)}{(\Phi'(z))^3}-3\widehat{Q}^2\Big]-$$
$$-\frac{5}{3}\eta_0(x)\,\alpha_0(x)\frac{\Phi^{(IV)}(z)}{(\Phi'(z))^2}+\frac{\Phi'''(z)}{\Phi'(z)}\Big[\frac{1}{3}\xi_0(x)\,\beta_0(x)-2\alpha_0(x)\,\eta_0'(x)-$$
$$-2\eta_0(x)\,\alpha_0'(x)+\frac{8}{3}\eta_0(x)\,\alpha_0(x)\widehat{Q}\Big]\Big\},$$

$$Y''_{02}(x)\equiv 2\overline{B}_2,\quad t_{02}(x)=\lambda_1\Big[\frac{2\Phi''(0)}{R_kA^2}+\overline{D}_2x\Big],\quad \overline{D}_2=$$
$$=\frac{4}{3R_kA^3}\Big[\Phi'''(0)-\frac{3(\Phi''(0))}{A^2}\Big],$$

$$t_{12}(x)\equiv-\lambda_1\overline{D}_2,\quad t_{22}(x)\equiv 0,\quad T_{02}(x)=\lambda_1\Big[-\frac{\Phi'''(0)}{A^2}+\overline{F}x\Big],$$

$$\overline{F}=-\frac{2\Phi^{(IV)}(0)}{3A^3}+\frac{(\Phi'''(0))^2}{A^2}+\frac{2\Phi''(0)\,\Phi'''(0)}{3A^4},$$

$$T_{12}(x)=\lambda_1\Big[-\overline{F}+\frac{1}{3}\alpha_0(x)\,\beta_0(x)\frac{\Phi'''(z)}{(\Phi'(z))^2}\Big],$$

$$T_{22}(x)=\frac{\lambda_1}{8\Phi'(z)}\left[\widehat{Z}_{12}(x)-\widehat{Z}'_{02}(x)+\widehat{Z}_{02}(x)\widehat{Q}\right],$$

$$\widehat{Z}_{02}(x)=\frac{4}{3}\alpha_0(x)\,\beta_0(x)\frac{\Phi'''(z)}{\Phi'(z)},$$

$$\widehat{Z}'_{02}(x)=\frac{4}{3}\Big\{\left[\alpha_0'(x)\,\beta_0(x)+\alpha_0(x)\,\beta_0'(x)\right]\frac{\Phi'''(z)}{\Phi'(z)}+$$
$$+\alpha_0(x)\,\beta_0(x)\Big[\frac{\Phi^{(IV)}(z)}{(\Phi'(z))^2}-\frac{\Phi'''(z)\,\Phi''(z)}{(\Phi'(z))^3}\Big]\Big\},$$

$$v_0^{(1)}=\Big[\sqrt{x_1}\,V'_{01}(x_1)+\frac{V_{01}(x_1)}{2\sqrt{x_1}}\Big]A_1,\quad v_0^{(2)}=\sqrt{x_1}\,V_{01}(x_1),$$

$$w_0^{(1)}=A_1W'_{01}(x_1),\quad w_0^{(2)}=W_{01}(x_1),\quad H^{(1)}=V'_{02}(x_1)\,A_1,\quad H^{(2)}=V_{02}(x_1),$$

$$K^{(1)} = A_1\left[\sqrt{x_1}\,W'_{02}(x_1) + \frac{W_{02}(x_1)}{2\sqrt{x_1}}\right], \quad K^{(2)} = \sqrt{x_1}\,W_{02}(x_1),$$

$$P^{(1)} = A_1\left[\sqrt{x_1}\,V'_{11}(x_1) + \frac{V'_{01}(x_1)}{2\sqrt{x_1}} + \frac{V_{11}(x_1)}{2\sqrt{x_1}} - \frac{V_{01}(x_1)}{4x_1^{3/2}}\right],$$

$$P^{(2)} = \sqrt{x_1}\,V_{11}(x_1) + \frac{V_{01}(x_1)}{2\sqrt{x_1}}, \quad Q^{(1)} = A_1 W'_{11}(x_1), \quad Q^{(2)} = W_{11}(x_1),$$

$$V'_{01}(x_1) = \sum_{k=0}^{2} \widehat{\xi}_k(x_1)\,x_1^k, \quad W'_{01}(x_1) = \sum_{k=0}^{2} \widetilde{\alpha}_k(x_1)\,x_1^k, \quad V'_{02}(x_1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{2} \widehat{\eta}_k(x_1)\,x_1^k, \quad W'_{02}(x_1) = \sum_{k=0}^{2} \widetilde{\beta}_k(x_1)\,x_1^k,$$

$$V'_{11}(x_1) = \sum_{k=0}^{1} (k+1)\,\widehat{\xi}_{k+1}(x_1)\,x_1^k, \quad W'_{11}(x_1) = \sum_{k=0}^{1} (k+1)\,\widetilde{\alpha}_{k+1}(x_1)\,x_1^k,$$

$$\widehat{\xi}_0(x_1) = \xi_1(x_1) + \xi'_0(x_1) = -\frac{1}{2}\widehat{Q}(z_1)\,\xi_0(x_1),$$

$$\widehat{\xi}_1(x_1) = \frac{1}{2}\xi'_0(x_1)\,\widehat{Q}(z_1) + \left[\frac{1}{5}\widehat{Q}'(z_1) + \frac{7}{20}\widehat{Q}^2(z_1)\right]\xi_0(x_1),$$

$$\widehat{\xi}_2(x_1) = -\frac{1}{4}\widehat{Q}(z_1)\,\xi''_0(x_1) - \frac{1}{5}\widehat{Q}'(z_1)\,\xi'_0(x_1) - \frac{7}{20}\widehat{Q}^2(z_1)\,\xi'_0(x_1) -$$

$$-\xi_0(x_1)\left[\frac{2}{35}\widehat{Q}''(z_1) - \frac{93}{280}\widehat{Q}(z_1)\,\widehat{Q}'(z_1) - \frac{11}{80}\widehat{Q}^3(z_1)\right],$$

$$\widetilde{\alpha}_0(x_1) = -\frac{1}{2}\widehat{Q}(z_1)\,\alpha_0(x_1), \quad \widetilde{\alpha}_1(x_1) = \frac{1}{2}\widehat{Q}(z_1)\,\alpha'_0(x_1) +$$

$$+\left[\frac{1}{3}\widehat{Q}'(z_1) + \frac{5}{12}\widehat{Q}^2(z_1)\right]\alpha_0(x_1),$$

$$\widetilde{\alpha}_2(x_1) = -\frac{1}{4}\widehat{Q}(z_1)\,\alpha''_0(x_1) - \frac{1}{3}\widehat{Q}'(z_1)\,\alpha'_0(x_1) - \frac{5}{12}\widehat{Q}^2(z_1)\,\alpha'_0(x_1) -$$

$$-\alpha_0(x_1)\left[\frac{2}{15}\widehat{Q}''(z_1) + \frac{61}{120}\widehat{Q}(z_1)\,\widehat{Q}'(z_1) + \frac{3}{16}\widehat{Q}^3(z_1)\right],$$

$$\widehat{\eta}_0(x_1) = -\frac{1}{2}\widehat{Q}(z_1)\,\eta_0(x_1), \quad \widehat{\eta}_1(x_1) = \frac{1}{2}\widehat{Q}(z_1)\,\eta'_0(x_1) +$$

$$+\left[\frac{1}{3}\widehat{Q}'(z_1) + \frac{5}{12}\widehat{Q}^2(z_1)\right]\eta_0(x_1),$$

$$\widehat{\eta}_2(x_1) = -\frac{1}{4}\widehat{Q}(z_1)\,\eta''_0(x_1) - \frac{1}{3}\widehat{Q}'(z_1)\,\eta'_0(x_1) - \frac{5}{12}\widehat{Q}^2(z_1)\,\eta'_0(x_1) -$$

$$-\left[\frac{2}{15}\widehat{Q}''(z_1) + \frac{61}{120}\widehat{Q}(z_1)\,\widehat{Q}'(z_1) + \frac{3}{16}\widehat{Q}^3(z_1)\right]\eta_0(x_1),$$

$$\widetilde{\beta}_0(x_1) = -\frac{1}{2}\widehat{Q}(z_1)\,\beta_0(x_1), \quad \widetilde{\beta}_1(x_1) = \frac{1}{2}\widehat{Q}(z_1)\,\beta'_0(x_1) +$$

$$+\left[\frac{1}{5}\widehat{Q}'(z_1) + \frac{7}{20}\widehat{Q}^2(z_1)\right]\beta_0(x_1),$$

$$\widetilde{\beta}_2(x_1) = -\frac{1}{4}\widehat{Q}(z_1)\,\beta''_0(x_1) - \beta'_0(x_1)\left[\frac{1}{5}\widehat{Q}'(z_1) + \frac{7}{20}\widehat{Q}^2(z_1)\right] -$$

$$-\beta_0(x_1)\left[\frac{2}{35}\widehat{Q}''(z_1) - \frac{93}{280}\widehat{Q}(z_1)\,\widehat{Q}'(z_1) - \frac{11}{80}\widehat{Q}^3(z_1)\right],$$

$$v'_0(\tau) = v_0^{(1)}\,\bar{v}'(\tau) + v_0^{(2)}\,\bar{w}'(\tau), \quad w'_0(\tau) = w_0^{(1)}\,\bar{v}'(\tau) + w_0^{(2)}\,\bar{w}'(\tau),$$

$$B'(z_1) = A_1 \sum_{n=0}^{2} \widetilde{B}_{n1}(x_1)\,x_1^{n-3/2}, \quad \widetilde{B}_{01}(x_1) = -\frac{1}{2}B_{01}(x_1),$$

$$\widetilde{B}_{11}(x_1)=\frac{1}{2}B_{11}(x_1)+B'_{01}(x_1),\quad \widetilde{B}_{21}(x_1)=\frac{3}{2}B_{21}(x_1)+B'_{11}(0),$$

$$\Gamma_0\left[\tau, v_0(\tau), v_0^2(\tau)\right]=\frac{4\Phi'''(\tau)v_0'(\tau)+\Phi^{(\mathrm{IV})}(\tau)v_0(\tau)}{32\Phi^{1/2}(\tau)}v_0^2(\tau)-$$

$$-\frac{2\Phi'(\tau)v_0'(\tau)+\Phi''(\tau)v_0(\tau)}{16\Phi^{3/2}(\tau)}\left\{X_0(z_1)+\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)v_0^2(\zeta)\,d\zeta\right\},$$

$$X_0(z_1)=\sum_{k=0}^{2}X_{k1}(x_1)x_1^k,$$

$$F'(z_1)=A_1\left[F'_{01}(x_1)+F_{11}(x_1)+\left(F'_{11}(x_1)+2F_{21}(x_1)\right)x_1\right],$$

$$\widetilde{\Gamma}_0\left[\tau, v_0(\tau), v_0(\tau)w_0(\tau)\right]=\frac{4\Phi'''(\tau)v_0'(\tau)+\Phi^{(\mathrm{IV})}(\tau)v_0(\tau)}{32\Phi^{1/2}(\tau)}v_0(\tau)w_0(\tau)-$$

$$-\frac{2\Phi'(\tau)v_0'(\tau)+\Phi''(\tau)v_0(\tau)}{16\Phi^{3/2}(\tau)}\left\{Y_0(z_1)+\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)v_0(\zeta)w_0(\zeta)\,d\zeta\right\},$$

$$Y_0(z_1)=Y_{01}(x_1)x_1^{3/2}+Y_{11}(x_1)x_1^{5/2},\quad \widehat{G}_0'(z_1)=$$
$$=A_1\{\widehat{G}_{11}(x_1)+\left[\widehat{G}'_{11}(x_1)+2\widehat{G}_{21}(x_1)\right]x_1\},$$

$$\widehat{G}_0(z_1)=\widehat{G}_{11}(x_1)x_1,\quad D'(z_1)=C'(z_1)+A_1\sum_{n=0}^{2}D_{n1}(x_1)x_1^{n-3/2},$$

$$C'(z_1)=A_1\sum_{n=0}^{2}\widetilde{C}_{n1}(x_1)x_1^{n-3/2},\quad \widetilde{C}_{01}(x_1)=-\frac{1}{2}\widehat{C}_{01}(x_1),\quad \widetilde{C}_{11}(x_1)=$$
$$=\widehat{C}'_{01}(x_1)+\frac{1}{2}\widehat{C}_{11}(x_1),$$

$$\widetilde{C}_{21}(x_1)=\widehat{C}'_{11}(0)+\frac{3}{2}\widehat{C}_{21}(x_1),\quad D_{01}(x_1)=-\frac{1}{2}\left[d_{01}(x_1)+\delta_{01}(x_1)\right],$$

$$D_{11}(x_1)=\frac{1}{2}\left[d_{11}(x_1)+\delta_{11}(x_1)\right]+d'_{01}(x_1)+\delta'_{01}(x_1),$$

$$D_{21}(x_1)=\frac{3}{2}\left[d_{21}(x_1)+\delta_{21}(x_1)\right]+d'_{11}(x_1)+\delta'_{11}(x_1),$$

$$\widetilde{\widetilde{\Gamma}}_0\left[\tau, v_0(\tau), w_0^2(\tau)\right]=\frac{4\Phi'''(\tau)v_0'(\tau)+\Phi^{(\mathrm{IV})}(\tau)v_0(\tau)}{32\Phi^{1/2}(\tau)}w_0^2(\tau)-$$

$$-\frac{2\Phi'(\tau)v_0'(\tau)+\Phi''(\tau)v_0(\tau)}{16\Phi^{3/2}(\tau)}\left\{\widehat{Z}_0(z_1)+\int_{z_1}^{\tau}\Phi'''(\zeta)w_0^2(\zeta)\,d\zeta\right\},$$

$$\widehat{Z}_0(z_1)=\sum_{n=0}^{2}\widehat{Z}_{n1}(x_1)x_1^n,$$

$$E'(z_1)=A_1\left[e'_{01}(0)+\varepsilon'_{01}(0)+\varepsilon_{11}(x_1)+e_{11}(x_1)\right],$$

$$X_1(z_1)=X_{02}(x_1)x_1^{3/2}+X_{12}(x_1)x_1^{5/2},$$

$$v_1(z)=H^{(1)}\overline{v}(z)+H^{(2)}\overline{w}(z),$$

$$Y_1(z_1)=\sum_{n=0}^{2}Y_{n2}(x_1)x_1^n,$$

$$w_1(z)=K^{(1)}\overline{v}(z)+K^{(2)}\overline{w}(z),$$

$$\widehat{Z}_1(z_1)=\widehat{Z}_{02}(x_1)x_1^{3/2}+\widehat{Z}_{12}(x_1)x_1^{5/2}.$$

Таблица 1

i / $z=\zeta_i$		2 0.0400	8 0.1376	15 0.2515	21 0.3492	28 0.4631	34 0.5607	41 0.6746	47 0.7722	54 0.8861	61 1.0000
v_0	т.	0.5600	1.0125	1.3263	1.5184	1.6872	1.7967	1.8911	1.9474	1.9870	2.0000
	в.	0.5600	1.0125	1.3263	1.5184	1.6872	1.7966	1.8911	1.9474	1.9870	2.0000
w_0	т.	0.9800	0.9312	0.8742	0.8254	0.7685	0.7197	0.6627	0.6139	0.5569	0.5000
	в.	0.9800	0.9312	0.8742	0.8254	0.7685	0.7197	0.6627	0.6139	0.5569	0.5000
H	т.	—3.9200	—3.7247	—3.4969	—3.3017	—3.0739	—2.8786	—2.6508	—2.4556	—2.2278	—2.0000
	в.	—3.9200	—3.7247	—3.4969	—3.3017	—3.0739	—2.8786	—2.6508	—2.4556	—2.2278	—2.0000
K	т.	0.2800	0.5063	0.6632	0.7592	0.8436	0.8983	0.9456	0.9737	0.9935	1.0000
	в.	0.2800	0.5063	0.6632	0.7592	0.8436	0.8983	0.9456	0.9737	0.9935	1.0000
P	т.	13.7200	6.8509	4.6100	3.5897	2.8001	2.3061	1.8579	1.5482	1.2489	1.0000
	в.	13.7200	6.8596	4.6174	3.5972	2.8076	2.3139	1.8656	1.5557	1.2566	1.0081
Q	т.	—1.9600	—1.8624	—1.7485	—1.6508	—1.5369	—1.4393	—1.3254	—1.2278	—1.1139	—1.0000
	в.	—1.9600	—1.8624	—1.7485	—1.6509	—1.5370	—1.4394	—1.3255	—1.2278	—1.1139	—1.0000
B	т.	0.0057	0.0374	0.0954	0.1606	0.2542	0.3499	0.4812	0.6124	0.7903	1.0000
	в.	0.0066	0.0407	0.1004	0.1666	0.2613	0.3577	0.4891	0.6206	0.7996	1.0129
G	т.	0.0200	0.0688	0.1258	0.1746	0.2315	0.2803	0.3373	0.3861	0.4431	0.5000
	в.	0.0201	0.0705	0.1273	0.1761	0.2330	0.2817	0.3387	0.3874	0.4440	0.5006
F	т.	0.0200	0.0688	0.1258	0.1746	0.2315	0.2803	0.3373	0.3861	0.4431	0.5000
	в.	0.0201	0.0689	0.1258	0.1746	0.2315	0.2804	0.3374	0.3862	0.4429	0.4996
D	т.	—1.6800	—0.7931	—0.4934	—0.3538	—0.2446	—0.1760	—0.1140	—0.0718	—0.0319	—0.0000
	в.	—1.6808	—0.7961	—0.4969	—0.3577	—0.2488	—0.1804	—0.1187	—0.0765	—0.0367	—0.0049
C	т.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

	B.	—0.0001	—0.0004	—0.0006	—0.0007	—0.0009	—0.0009	—0.0010	—0.0011	—0.0011	—0.0011
E	T.	0.1225	0.1164	0.1093	0.1032	0.0961	0.0900	0.0828	0.0767	0.0696	0.0625
	B.	0.1220	0.1151	0.1073	0.1009	0.0934	0.0871	0.0797	0.0735	0.0663	0.0591
t_{000}	T.	0.5638	1.0371	1.3882	1.6213	1.8476	2.0143	2.1849	2.3147	2.4501	2.5708
	B.	0.5638	1.0370	1.3881	1.6212	1.8476	2.0143	2.1848	2.3147	2.4499	2.5700
t_{100}	T.	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000
	B.	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000
t_{200}	T.	14.5657	8.4066	6.6923	6.0216	5.5715	5.3275	5.1352	5.0202	4.9241	4.8562
	B.	14.5657	8.4090	6.6955	6.0250	5.5749	5.3310	5.1389	5.0239	4.9277	4.8599
t_{020}	T.	0.0057	0.0369	0.0928	0.1543	0.2405	0.3264	0.4407	0.5509	0.6947	0.8562
	B.	0.0043	0.0355	0.0914	0.1529	0.2391	0.3251	0.4393	0.5496	0.6934	0.8546
t_{011}	T.	0.0400	0.1376	0.2515	0.3492	0.4631	0.5607	0.6746	0.7722	0.8861	1.0000
	B.	0.0412	0.1388	0.2527	0.3503	0.4642	0.5618	0.6757	0.7735	0.8876	1.0015
t_{002}	T.	—1.7150	—0.8564	—0.5762	—0.4487	—0.3500	—0.2883	—0.2322	—0.1935	—0.1561	—0.1250
	B.	—1.7198	—0.8618	—0.5819	—0.4544	—0.3557	—0.2940	—0.2380	—0.1992	—0.1618	—0.1308
t_{300}	T.	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333
	B.	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333
t_{120}	T.	—0.1600	—0.5505	—1.0061	—1.3966	—1.8522	—2.2427	—2.6983	—3.0888	—3.5444	—4.0000
	B.	—0.1599	—0.5504	—1.0061	—1.3966	—1.8525	—2.2429	—2.6982	—3.0889	—3.5445	—3.9997
t_{111}	T.	—0.8400	—1.5188	—1.9895	—2.2776	—2.5308	—2.6950	—2.8367	—2.9211	—2.9805	—3.0000
	B.	—0.8265	—1.5052	—1.9759	—2.2640	—2.5173	—2.6815	—2.8232	—2.9079	—2.9672	—2.9867
t_{102}	T.	—0.4800	—0.4312	—0.3742	—0.3254	—0.2685	—0.2197	—0.1627	—0.1139	—0.0569	—0.0000
	B.	—0.4800	—0.4312	—0.3742	—0.3254	—0.2685	—0.2197	—0.1627	—0.1139	—0.0568	0.0001

Таблица 2

i / $z = \zeta_i$		2 / 0.0300	12 / 0.1280	22 / 0.2260	33 / 0.3337	43 / 0.4317	54 / 0.5395	64 / 0.6375	74 / 0.7355	85 / 0.8432	101 / 1.0000
v_0	т.	0.4862	0.9789	1.2663	1.4914	1.6457	1.7753	1.8639	1.9287	1.9753	2.0000
	в.	0.4862	0.9789	1.2663	1.4914	1.6456	1.7753	1.8639	1.9287	1.9752	2.0000
w_0	т.	0.9850	0.9360	0.8870	0.8331	0.7841	0.7303	0.6813	0.6323	0.5784	0.5000
	в.	0.9850	0.9360	0.8870	0.8331	0.7841	0.7303	0.6813	0.6323	0.5784	0.5000
H	т.	—3.9400	—3.7440	—3.5481	—3.3325	—3.1366	—2.9210	—2.7251	—2.5291	—2.3135	—2.0000
	в.	—3.9400	—3.7440	—3.5481	—3.3325	—3.1366	—2.9210	—2.7250	—2.5291	—2.3135	—2.0000
K	т.	0.2431	0.4895	0.6331	0.7457	0.8228	0.8877	0.9320	0.9644	0.9876	1.0000
	в.	0.2431	0.4895	0.6331	0.7457	0.8228	0.8876	0.9320	0.9644	0.9876	1.0000
P	т.	15.9639	7.1597	4.9709	3.7232	2.9891	2.4030	1.9920	1.6582	1.3549	1.0000
	в.	15.9639	7.1512	4.9555	3.7020	2.9645	2.3757	1.9633	1.6292	1.3252	0.9684
Q	т.	—1.9700	—1.8720	—1.7740	—1.6663	—1.5683	—1.4605	—1.3625	—1.2645	—1.1568	—1.0000
	в.	—1.9700	—1.8721	—1.7741	—1.6663	—1.5684	—1.4606	—1.3626	—1.2647	—1.1569	—1.0001
B	т.	0.0037	0.0335	0.0806	0.1494	0.2265	0.3279	0.4360	0.5609	0.7199	1.0000
	в.	0.0041	0.0353	0.0833	0.1527	0.2303	0.3325	0.4406	0.5652	0.7220	1.0041
G	т.	0.0150	0.0640	0.1130	0.1669	0.2159	0.2697	0.3187	0.3677	0.4216	0.5000
	в.	0.0141	0.0628	0.1108	0.1638	0.2121	0.2654	0.3141	0.3629	0.4169	0.4953
F	т.	0.0150	0.0640	0.1130	0.1669	0.2159	0.2697	0.3187	0.3677	0.4216	0.5000
	в.	0.0145	0.0627	0.1112	0.1647	0.2133	0.2669	0.3158	0.3648	0.4189	0.4975
D	т.	—1.9651	—0.8338	—0.5422	—0.3722	—0.2708	—0.1894	—0.1325	—0.0867	—0.0459	—0.0000
	в.	—1.9672	—0.8386	—0.5482	—0.3790	—0.2781	—0.1973	—0.1408	—0.0953	—0.0547	—0.0086
C	т.	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

	B.	—0.0000	—0.0002	—0.0003	—0.0004	—0.0004	—0.0005	—0.0005	—0.0005	—0.0006	—0.0006
E	T.	0.1231	0.1170	0.1109	0.1041	0.0980	0.0913	0.0852	0.0790	0.0723	0.0625
	B.	0.1229	0.1162	0.1098	0.1028	0.0965	0.0896	0.0834	0.0772	0.0704	0.0606
t_{000}	T.	0.4887	1.0009	1.3187	1.5873	1.7892	1.9799	2.1318	2.2674	2.4010	2.5708
	B.	0.4887	1.0009	1.3187	1.5874	1.7894	1.9802	2.1322	2.2676	2.4010	2.5705
t_{100}	T.	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000
	B.	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000	—4.0000
t_{200}	T.	16.6969	8.6611	6.9489	6.1042	5.6729	5.3729	5.1897	5.0593	4.9564	4.8562
	B.	16.6969	8.6661	6.9544	6.1100	5.6788	5.3786	5.1953	5.0651	4.9624	4.8625
t_{020}	T.	0.0037	0.0330	0.0787	0.1438	0.2153	0.3069	0.4018	0.5080	0.6386	0.8562
	B.	0.0030	0.0323	0.0780	0.1432	0.2146	0.3062	0.4012	0.5077	0.6383	0.8550
t_{011}	T.	0.0300	0.1280	0.2260	0.3337	0.4317	0.5395	0.6375	0.7355	0.8432	1.0000
	B.	0.0307	0.1286	0.2266	0.3345	0.4325	0.5403	0.6383	0.7362	0.8442	1.0026
t_{002}	T.	—1.9955	—0.8950	—0.6214	—0.4654	—0.3736	—0.3004	—0.2490	—0.2073	—0.1694	—0.1250
	B.	—1.9979	—0.8987	—0.6252	—0.4692	—0.3774	—0.3041	—0.2526	—0.2109	—0.1731	—0.1289
t_{300}	T.	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333
	B.	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333	—5.3333
t_{120}	T.	—0.1200	—0.5119	—0.9038	—1.3349	—1.7269	—2.1580	—2.5499	—2.9418	—3.3729	—4.0000
	B.	—0.1199	—0.5118	—0.9037	—1.3349	—1.7271	—2.1588	—2.5511	—2.9426	—3.3721	—3.9921
t_{111}	T.	—0.7293	—1.4684	—1.8994	—2.2371	—2.4685	—2.6630	—2.7959	—2.8931	—2.9629	—3.0000
	B.	—0.7202	—1.4591	—1.8899	—2.2278	—2.4593	—2.6541	—2.7873	—2.8845	—2.9540	—2.9909
t_{102}	T.	—0.4850	—0.4360	—0.3870	—0.3331	—0.2841	—0.2303	—0.1813	—0.1323	—0.0784	—0.0000
	B.	—0.4850	—0.4360	—0.3870	—0.3331	—0.2841	—0.2301	—0.1811	—0.1322	—0.0783	0.0008

Программа. Численные расчеты выполнялись с помощью написанной для этой цели программы. Программа написана на алгоритмическом языке ФОРТРАН. Программа содержит 11 подпрограмм, работой которых управляет головная программа ТЕСТ.

1. В первой части программы ТЕСТ задаются основные параметры N, N1, Z1, ZA, KAP2, LAM1, UC, RC, RK и массив OZ(N) координат ζ_i, $i = 1, \ldots, N$. Во второй части программы вычисляются значения электростатического потенциала и его производных, соответствующих случаю сферического конденсатора. При этом $\Phi(z) = \mathrm{ALF} \cdot z/(\mathrm{RK} - z)$, где $\mathrm{ALF} = \frac{\mathrm{UC}}{\mathrm{RK} - \mathrm{RC}}$. По этим данным вычисляются коэффициенты пространственных и временных аберраций в точках ζ_i, $i = 2, \ldots, N$, с использованием формул, приведенных выше. Кроме того, высчитываются точные значения коэффициентов аберраций в тех же точках. В результате работы программы ТЕСТ печатаются и те и другие значения коэффициентов аберраций.

2. Подпрограмма DAT присваивает значения элементам массивов D и C, определяющих метод Рунге — Кутта 10-го порядка.

3. Подпрограмма PROGON служит для нахождения величин G_i, $i = 1, \ldots, N$, используемых при построении сплайнов для $\Phi(z), \ldots$ $\ldots, \Phi^{(\mathrm{IV})}(z)$.

4. Подпрограмма POT4 присваивает параметры подпрограммы F, F1, F2, F3, F4 значения сплайнов для $\Phi(z), \ldots, \Phi^{(\mathrm{IV})}(z)$ в точке z.

5. Подпрограмма POT1 присваивает параметрам подпрограммы F, F1, F2, F3, F4 значения точного потенциала и его производных $\Phi(z), \ldots$ $\ldots, \Phi^{(\mathrm{IV})}(z)$ в точке z.

6. Подпрограмма UPRK вычисляет решение параксиального уравнения на отрезке $z_1 < z \leqslant \mathrm{ZA}$ в узлах ζ_i, $i = \mathrm{N1} + 1, \ldots, \mathrm{N}$, и в промежуточных узлах, задаваемых в массиве OZL(L). Вызываемая подпрограмма — RKT.

7. Подпрограмма RKT вычисляет решение системы, состоящей из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в точке B по начальным данным, заданным в точке $A (A < B)$ за один шаг методом Рунге — Кутта 10-го порядка. Вызываемая подпрограмма — PF.

8. Подпрограмма PF задает правую часть системы, состоящей из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, эквивалентной параксиальному уравнению. Вызываемая подпрограмма — POT4.

9. Подпрограмма ABSF вычисляет точные значения коэффициентов пространственных аберраций в узлах ζ_i, $i = 2, \ldots, N$.

10. Подпрограмма TABSF вычисляет точные значения коэффициентов временных аберраций в узлах ζ_i, $i = 2, \ldots, N$.

11. Подпрограмма KOED вычисляет приближенные значения коэффициентов пространственных и временных аберраций. Вызываемые подпрограммы — POT4, SIMPS.

12. Подпрограмма SIMPS служит для вычисления величин

$$S_1 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx, \qquad S_2 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

методом Симпсона, т. е. по значениям x_i, $f(x_i)$, $i = 0, 1, 2$, строится интерполяционный полином Лагранжа, который и интегрируется.

Расчеты на ЭВМ. В табл. 1, 2 помещены результаты тестовых расчетов, полученных на ЭВМ ЕС-1060 (в таблицах сокращение «т» означает точный, а «в»— вычисленный коэффициенты). Значения параметров взяты следующие: $\mathrm{N1} = 2$, $\mathrm{ZA} = \mathrm{UC} = \mathrm{RC} = \mathrm{ALF} = \mathrm{LAM1} = \mathrm{KAP2} = 1$, $\mathrm{RK} = 2$. Узлы ζ_i, $i = 1, \ldots, N$, выбирались так:

$$\zeta_1 = 0, \quad \zeta_2 = \mathrm{Z1}, \quad \zeta_N = ZA, \quad \zeta_i = \frac{\mathrm{ZA} - \mathrm{Z1}}{\mathrm{N} - \mathrm{N1}}(i - 1), \quad i = 3, \ldots \mathrm{N} - 1.$$

Время выполнения рабочей программы составляет 5.42 с при N = 61 (см. табл. 1) и 9.43 с при N = 101 (см. табл. 2).

Необходимо отметить следующий факт. Чем ближе к нулю мы берем Z1, тем точнее в этой точке вычисляются коэффициенты пространственных и временных аберраций, а также начальные данные для расчета коэффициентов аберраций на отрезке $z_1 < z \leqslant ZA$. Однако при этом значения некоторых коэффициентов в точке $z = Z1$ резко возрастают, что вызывает трудности при расчете этих коэффициентов. Эти трудности можно избежать, если взять более густую или неравномерную сетку или ввести больше дополнительных узлов. Такие возможности предусмотрены программой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Численные** методы оптимизации эмиссионных электронно-оптических систем/ В. П. Ильин, В. А. Катешов, Ю. В. Куликов, М. А. Монастырский.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987.— 192 с.
2. **Иванов В. Я.** Методы автоматизированного проектирования приборов электроники.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986.
3. **Глазер В.** Основы электронной оптики.— М.: Гостехиздат, 1957.— 763 с.
4. **Брюхе Е., Шерцер О.** Геометрическая электронная оптика.— Л.: Газетно-журн. изд-во, 1943.— 393 с.
5. **Куликов Ю. В., Монастырский М. А., Фейгин Х. И.** Теория аберраций третьего порядка катодных линз. Аберрации катодных линз с комбинированными электрическими полями и магнитными полями // Радиотехника и электроника.— 1978.— Т. 23, № 1.— С. 167—174.
6. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1971.— 576 с.
7. **Монастырский М. А.** Об асимптотике решений параксиального уравнения электронной оптики // ЖТФ.— 1978.— Т. 48, вып. 6.— С. 1117—1122.
8. **Завьялов Ю. С., Квасов Б. Н., Мирошниченко В. Л.** Методы сплайн-функций.— М.: Наука, 1980.— 350 с.
9. **Hairer E.** A Runge-Kutta Method of Order 10 // J. Inst. Maths. Applics.— 1978.— V. 21.— P. 47—59.

С. К. ГОДУНОВ, Е. И. РОМЕНСКИЙ, Г. А. ЧУМАКОВ

ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ СЕТОК В СЛОЖНЫХ ОБЛАСТЯХ С ПОМОЩЬЮ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Работа посвящена описанию вычислительного алгоритма для построения криволинейных разностных сеток в сложных областях. Идея излагаемого ниже алгоритма является развитием работы [1], в которой предложен способ построения разностных сеток путем отыскания квазиконформного отображения данной области на квадрат. Это отображение является суперпозицией конформного и чебышевского и определяется путем минимизации некоторого функционала. Продолжением [1] является работа [2], в которой доказано существование специального квазиконформного отображения криволинейного шестиугольника на два сложенных квадрата. В этом случае возникает новый объект — эйлерова внутренняя граница, разделяющая исходную область на две подобласти с различными параметрами чебышевского отображения и которая находится из условия минимума соответствующего функционала. Название