

Рис. 3.

по формулам

$$x_{kj}^{(i+1)} = x_{kj}^{(i)} + sq, \quad y_{kj}^{(i+1)} = y_{kj}^{(i)} + sp, \quad (2.18)$$

где $s = (\Delta x_{kj}^{(i)} q + \Delta y_{kj}^{(i)} p) d$, d — демпфирующий множитель, $d > 0$. Координаты этих вновь полученных точек и задают новое положение граничных точек.

Сейчас мы приведем несколько примеров сеток, построенных с помощью описанного алгоритма. Сетка на рис. 1 получена по алгоритму, использующему в качестве конформного прообраза пару сложенных параллелограммов. На рис. 2 приведена сетка для области, которая давно используется как тестовый пример [1]. Мы улучшили сетку, построенную в [1], за счет изменения квазиконформного прообраза. Если прежде в качестве прообраза выбирался квадрат или прямоугольник, то теперь мы взяли многоугольник, составленный из семи прямоугольников (рис. 3), вследствие чего сетка стала гораздо более равномерной.

Мы используем следующий алгоритм для вычисления касательного вектора к границе физической области. По заданным трем точкам $(x, y)_{i-1}$, $(x, y)_i$, $(x, y)_{i+1}$ строим окружность, за параметр которой примем угол φ с вершиной в точке $i-1$, опирающийся на дугу $i, i+1$, и определим касательный вектор к этой окружности в точке i . Таким образом, касательный вектор (q, p) вычисляется по формулам $q = (x_{i+1} - x_i) \cos \varphi - (y_{i+1} - y_i) \sin \varphi$, $p = (x_{i+1} - x_i) \sin \varphi + (y_{i+1} - y_i) \cos \varphi$, где

$$\sin \varphi = \frac{(x_{i+1} - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}) - (x_i - x_{i-1})(y_{i+1} - y_{i-1})}{\sqrt{(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Численное решение многомерных задач газовой динамики/С. К. Годунов, Л. В. Забродин, М. Я. Иванов и др.— М.: Наука, 1976.— 400 с.
2. Гордиенко В. М. О конформном отображении шестиугольника // Численные методы механики сплошной среды.— 1976.— № 4.— С. 57—60.

Е. И. РОМЕНСКИЙ

МЕТОД РАСЧЕТА ДВУМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ МАКСВЕЛЛА

В данной работе описана явная разностная схема Годунова первого порядка точности для нелинейной модели Максвелла упругопластической среды с релаксацией касательных напряжений. Схема Годунова для задач газовой динамики изложена в [1], в настоящее время она получила развитие в виде схем высокого порядка точности [2]. Уравнения, с которыми ниже придется иметь дело, впервые были сформулированы в [3] и более подробно описаны в [4]. Отметим, что тех-

нология расчета, содержащаяся в [1], перенесена на рассматриваемые уравнения в [5]. Вариант разностной схемы, приведенный здесь, несколько отличается от [5].

Будем конструировать схему исходя из уравнений, записанных в движущейся криволинейной системе координат. Введение криволинейных координат позволяет работать с прямоугольной разностной сеткой на плоскости. Далее, движущаяся система отсчета дает уже параллелепипедную сетку в пространственных и временной координатах. При таком подходе в уравнениях появляются скорости движения точек сетки. Их следует определять исходя, например, из требования, чтобы разностная сетка была «хорошей». В приведенных ниже численных примерах мы требуем почти ортогональности сетки. Существенным отличием от схем [4, 5] является то, что мы все рассчитываемые величины относим к точкам сетки. Это облегчает, например, расчет движения границ области.

Отметим, что в данной работе рассматривается разностная схема только для случая плоской геометрии. В случае цилиндрической симметрии появятся дополнительные младшие члены в уравнениях — модификация разностной схемы будет несложной. Описанная технология, возможно, не совсем еще совершенна, тем не менее приведенные расчеты продемонстрировали ее гибкость, так что остаются пути ее дальнейшего улучшения и развития.

Численные примеры, рассмотренные в работе, иллюстрируют образование остаточных напряжений при движении импульса давления по поверхности металлической пластины. Расчеты показали, что в случае, когда амплитуда пика давления не сильно превосходит предел текучести, после прохождения импульса образуется слой сжимающих напряжений, который в дальнейшем приводит к изгибу всей пластины. В случае, когда амплитуда давления существенно превышает предел текучести, пластические деформации приводят к сильному нагреву слоя у поверхности — анализ остаточных напряжений следует приводить с учетом процессов теплопередачи.

При создании данной методики большую роль сыграло обсуждение различных вопросов с С. К. Годуновым. При расчетах использованы набор программ построения разностных сеток, написанный Г. А. Чумаковым, и набор программ решения задач о распаде разрыва, созданный А. Н. Малышевым. Всем им автор глубоко признателен.

§ 1. УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ МАКСВЕЛЛА В ДВИЖУЩЕЙСЯ КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В этом параграфе будут выписаны уравнения нелинейной среды Максвелла в движущейся криволинейной системе координат, а также двумерный вариант данных уравнений. Это понадобится в дальнейшем для конструирования разностной схемы.

При преобразованиях уравнений удобно исходить из их декартовой формы. Пусть имеется декартова система координат x^i , $i = 1, 2, 3$. Уравнения, с которыми придется иметь дело, состоят из законов сохранения энергии, импульса и уравнений эволюции тензора эффективных упругих деформаций [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho (E + u_\alpha u^\alpha / 2)}{\partial t} + \frac{\partial [\rho u^j (E + u_\alpha u^\alpha / 2) - \sigma^j_\beta u^\beta]}{\partial x^j} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u^i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^i u^j - \sigma^{ij})}{\partial x^j} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial t} + u^\alpha \frac{\partial G_{ij}}{\partial x^\alpha} + G_{i\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j} + G_{j\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} = \Phi_{ij}.$$

В (1.1) проведено разделение на ковариантные и контравариантные компоненты векторов и тензоров. Теперь для того, чтобы записать систему в криволинейных координатах, достаточно производные по x^j заменить на ковариантные производные.

Поясним смысл функций, входящих в (1.1): u^i — вектор скорости; G_{ij} — компоненты метрического тензора эффективных упругих деформаций (в ненапряженном состоянии $G_{ij} = g_{ij}^0$ — метрический тензор, в данном случае $g_{ij}^0 = \delta_{ij}$); σ^{ij} — тензор напряжений; E — плотность внутренней энергии; ρ — массовая плотность; Φ_{ij} — нелинейные релаксационные члены.

Плотность внутренней энергии является функцией тензора G_j^i и энтропии S :

$$E = E(G_1^1, G_2^1, \dots, G_3^3, S).$$

Напряжения вычисляются с помощью внутренней энергии по формулам Мурнагана

$$\sigma_j^i = -2\rho G_j^\alpha \frac{\partial E}{\partial G_i^\alpha}, \quad (1.2)$$

а плотность ρ — по формуле

$$\rho = \rho_0 \sqrt{\det \|G_j^i\|}, \quad (1.3)$$

где $\rho_0 = \text{const}$ — начальная плотность. Релаксационные члены определяются по формуле

$$\Phi_{ij} = -\frac{1}{\tau} \left(G_{ij} - \frac{3J_3}{J_2} g_{ij}^0 \right), \quad (1.4)$$

где J_2, J_3 — инварианты тензора G_j^i :

$$J_2 = \begin{vmatrix} G_1^1 & G_2^1 \\ G_1^2 & G_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G_2^2 & G_3^2 \\ G_2^3 & G_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G_3^3 & G_1^3 \\ G_3^1 & G_1^1 \end{vmatrix}, \quad J_3 = \begin{vmatrix} G_1^1 & G_2^1 & G_3^1 \\ G_1^2 & G_2^2 & G_3^2 \\ G_1^3 & G_2^3 & G_3^3 \end{vmatrix},$$

τ — функция релаксации, имеющая размерность времени, зависящая от G_j^i и от S . Отметим, что τ , как правило, существенно нелинейная функция своих аргументов.

Используя (1.3) и уравнения эволюции тензора G_j^i , можно убедиться, что имеет место уравнение неразрывности (выражающее закон сохранения массы)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^i}{\partial x^i} = 0. \quad (1.5)$$

Поскольку уравнение неразрывности является следствием уравнений для G_j^i , его можно включить в полную систему уравнений движения, исключив одно из уравнений для G_j^i . Это и будет сделано в дальнейшем при построении разностной схемы.

Из системы (1.1) вытекает также уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u^\alpha \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} = \kappa,$$

выражающее второй закон термодинамики — закон возрастания энтропии. Необходимое условие неубывания энтропии ($\kappa \geq 0$) накладывает ограничения на вид внутренней энергии, которые необходимы для корректности уравнений (1.1). Рассматриваемые уравнения являются квазилинейной гиперболической системой [3].

Для численной реализации удобно использовать уравнения, записанные в движущихся криволинейных координатах. Дело в том, что расчетная область в пространстве x^i декартовой системы наблюдателя, как правило, является весьма сложной, с кривыми границами. Разностную сетку внутри области естественно связывать с граничными поверхностями. Поэтому линии разностной сетки можно считать линиями криволинейной системы координат. В процессе расчета область может существенно измениться, в соответствии с этим меняется и разностная сетка внутри. Следовательно, каждой точке сетки приписана своя скорость движения — скорость криволинейной системы координат.

Пусть движение точек сетки задается формулами

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} d\xi^j + \tilde{u}^i dt = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} (d\xi^j + \tilde{\mu}^j dt), \quad (1.6)$$

где ξ^i — криволинейные координаты, $\tilde{u}^i$ — декартовы скорости точек сетки, $\tilde{\mu}^i$ — скорости точек сетки в криволинейной системе координат ξ^j .

С помощью формальной техники тензорного исчисления [6] уравнения движения (1.1), (1.5) можно записать в движущейся криволинейной системе координат, определяемой соотношением (1.6). При этом уравнение неразрывности примет вид

$$\frac{\partial g\rho}{\partial t} + \frac{\partial g\rho(\mu^\alpha - \tilde{\mu}^\alpha)}{\partial \xi^\alpha} = 0. \quad (1.7)$$

Уравнения для скоростей будут следующими:

$$\frac{\partial g\rho\mu^k}{\partial t} + \frac{\partial g[\rho(\mu^\alpha - \tilde{\mu}^\alpha)\mu^k - \sigma^{k\alpha}]}{\partial \xi^\alpha} + g\rho\mu^\alpha \frac{\partial \tilde{\mu}^k}{\partial \xi^\alpha} + g(\rho\mu^\alpha\mu^\beta - \sigma^{\alpha\beta})\Gamma_{\alpha\beta}^k = 0. \quad (1.8)$$

Закон сохранения энергии запишется таким образом:

$$\frac{\partial g\rho(E + \mu_\alpha\mu^\alpha/2)}{\partial t} + \frac{\partial g[\rho(\mu^\alpha - \tilde{\mu}^\alpha)(E + \mu_\alpha\mu^\alpha/2) - \sigma_\beta^\alpha\mu^\beta]}{\partial \xi^\alpha} = 0. \quad (1.9)$$

Уравнения эволюции тензора деформаций примут вид

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial t} + (\mu^\alpha - \tilde{\mu}^\alpha) \frac{\partial G_{ij}}{\partial \xi^\alpha} + G_{i\alpha} \frac{\partial (\mu^\alpha - \tilde{\mu}^\alpha)}{\partial \xi^j} + G_{j\alpha} \frac{\partial (\mu^\alpha - \tilde{\mu}^\alpha)}{\partial \xi^i} = \Phi_{ij}. \quad (1.10)$$

Поясним обозначения, встречающиеся в уравнениях (1.7) — (1.10). Все величины здесь отнесены к криволинейной системе координат; μ^i — контравариантные компоненты вектора скорости частиц среды в системе ξ^i , σ^{ij} — контравариантные компоненты тензора напряжений, G_{ij} — ковариантные компоненты тензора деформаций.

С криволинейной системой координат ξ^α связан метрический тензор $g_{ij} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^j}$. Определитель матрицы $\left\| \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right\|$ обозначим $g = \det \left\| \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right\|$.

Величины с разным порядком индексов могут быть получены друг из друга с помощью метрического тензора, например: $\sigma^{ij} = g^{i\alpha} \sigma_{\alpha}^j = g^{i\alpha} g^{\beta\alpha} \sigma_{\beta j}$, $\mu_i = g_{i\alpha} \mu^\alpha$, $G_j^i = g^{i\alpha} G_{\alpha j}$.

Напряжения вычисляются через уравнение состояния по формулам (1.2), плотность — по формуле (1.3), релаксационные члены — по формуле $\Phi_{ij} = -\frac{1}{\tau} \left(G_{ij} - \frac{3J_3}{J_2} g_{ij} \right)$, $\Gamma_{\alpha\beta}^k$ — символы Кристоффеля криволинейной системы координат ξ^i :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^k = \frac{1}{2} g^{k\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial \xi^\beta} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\mu} \right). \quad (1.11)$$

При расчетах мы будем использовать смешанные компоненты тензора

G_j^i , уравнения его эволюции можно получить из (1.10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_j^i}{\partial t} + (\mu^\alpha - \tilde{\mu}^\alpha) \frac{\partial G_j^i}{\partial \xi^\alpha} + G_\alpha^i \frac{\partial \mu^\alpha}{\partial \xi^j} + g^{i\beta} g_{j\gamma} G_\alpha^\gamma \frac{\partial \mu^\alpha}{\partial \xi^\beta} + \\ + G_j^\alpha \frac{\partial \tilde{\mu}^i}{\partial \xi^\alpha} - G_\alpha^i \frac{\partial \tilde{\mu}^\alpha}{\partial \xi^j} + \mu^\alpha G_j^\gamma g^{i\beta} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial \xi^\alpha} = \Phi_j^i, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $\Phi_j^i = g^{i\alpha} \Phi_{\alpha j} = -\frac{1}{\tau} \left(G_j^i - \frac{3J}{J_2} \delta_j^i \right)$. Отметим, что при выводе (1.12) необходимо применить уравнения эволюции метрического тензора $g_{ij} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^j}$, которые нетрудно получить из условий интегрируемости в соотношениях (1.6):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right) = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \tilde{\mu}^\alpha}{\partial \xi^j} + \tilde{\mu}^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right).$$

Из последней формулы легко следуют уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} &= \tilde{\mu}^\alpha \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^\alpha} + g_{i\alpha} \frac{\partial \tilde{\mu}^\alpha}{\partial \xi^j} + g_{j\alpha} \frac{\partial \tilde{\mu}^\alpha}{\partial \xi^i}, \\ \frac{\partial g}{\partial t} &= \tilde{\mu}^\alpha \frac{\partial g}{\partial \xi^\alpha} + g \frac{\partial \tilde{\mu}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial g \tilde{\mu}^\alpha}{\partial \xi^\alpha}. \end{aligned}$$

В расчетах будем использовать нормированные компоненты (отнесенные к единичному базису) векторов и тензоров, определяемые формулами

$$\mu_*^h = \sqrt{g_{hh}} \mu^h, \quad \sigma_{\beta*}^\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} \sqrt{g^{\beta\beta}} \sigma_\beta^\alpha, \quad G_{\beta*}^\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} \sqrt{g^{\beta\beta}} G_\beta^\alpha. \quad (1.13)$$

Выпишем теперь двумерный плоский вариант системы уравнений нелинейной модели Максвелла.

Далее уже не будем использовать тензорные обозначения. Для удобства введем некоторые обозначения, обычно применяемые в двумерном случае. Пусть x, y — декартовы, а ξ, η — криволинейные координаты. Для матрицы Якоби примем

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= A \cos \varphi, & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= -B \sin \psi, \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= A \sin \varphi, & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= B \cos \psi, \end{aligned}$$

где φ и ψ — углы между осями x, ξ и y, η соответственно; A и B — длины векторов, касательных к координатным линиям системы ξ, η . Метрический тензор g_{ij} будет следующим:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & AB \sin \omega \\ AB \sin \omega & B^2 \end{pmatrix},$$

где $\omega = \varphi - \psi$ ($\pi/2 - \varphi + \psi$) — угол между осями ξ и η). Определитель якобиана равен $g = \sqrt{\det \|g_{ij}\|} = AB \cos \omega$. Тензор g^{ij} , обратный к g_{ij} , вычисляется по формуле

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A^2 \cos^2 \omega} & -\frac{\sin \omega}{AB \cos^2 \omega} \\ -\frac{\sin \omega}{AB \cos^2 \omega} & \frac{1}{B^2 \cos^2 \omega} \end{pmatrix}.$$

Символы Кристоффеля (1.11) в данных обозначениях имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\partial \ln A}{\partial \xi} - \operatorname{tg}^2 \omega \frac{\partial \ln B}{\partial \xi} - \operatorname{tg} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{A}{B} \frac{\operatorname{tg} \omega}{\cos \omega} \frac{\partial \ln A}{\partial \eta}, \\ \Gamma_{12}^1 &= -\frac{B}{A} \frac{\operatorname{tg} \omega}{\cos \omega} \frac{\partial \ln B}{\partial \xi} + \frac{1}{\cos^2 \omega} \frac{\partial \ln A}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= -\frac{B^2}{A^2 \cos^2 \omega} \frac{\partial \ln B}{\partial \xi} + \frac{B \sin \omega}{A \cos^2 \omega} \frac{\partial \ln A}{\partial \xi} + \frac{B}{A \cos \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \eta}, \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{A \operatorname{tg} \omega}{B \cos \omega} \frac{\partial \ln B}{\partial \xi} + \frac{A}{B \cos \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{A^2}{B^2 \cos^2 \omega} \frac{\partial \ln A}{\partial \eta}, \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{\cos^2 \omega} \frac{\partial \ln B}{\partial \xi} - \frac{A \operatorname{tg} \omega}{B \cos \omega} \frac{\partial \ln A}{\partial \eta}, \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{B \operatorname{tg} \omega}{A \cos \omega} \frac{\partial \ln B}{\partial \xi} - \operatorname{tg}^2 \omega \frac{\partial \ln A}{\partial \eta} - \frac{\partial \ln B}{\partial \eta} - \operatorname{tg} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \eta},
\end{aligned}$$

Используя (1.13), для нормированных компонент векторов и тензоров получим

$$\begin{aligned}
\mu_*^1 &= A\mu^1, \quad \mu_*^2 = B\mu^2, \quad \tilde{\mu}_*^1 = \tilde{A}\mu^1, \quad \tilde{\mu}_*^2 = B\tilde{\mu}^2, \\
\begin{pmatrix} G_1^1 & G_2^1 \\ G_1^2 & G_2^2 \end{pmatrix}_* &= \begin{pmatrix} G_1^1/\cos \omega & G_2^1 A/(B \cos \omega) \\ G_1^2 B/(A \cos \omega) & G_2^2/\cos \omega \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}_* &= \begin{pmatrix} \sigma_1^1/\cos \omega & \sigma_2^1 A/(B \cos \omega) \\ \sigma_1^2 B/(A \cos \omega) & \sigma_2^2/\cos \omega \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Обозначая теперь $u = \mu_*^1$, $v = \mu_*^2$, $\mu = \tilde{\mu}_*^1$, $\nu = \tilde{\mu}_*^2$, $p_\beta^\alpha = \sigma_{\beta*}^\alpha$, $G_j^i = G_{j*}^i$, выпишем двумерную систему уравнений.

Уравнение неразрывности (1.7) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (AB \cos \omega \rho) + \frac{\partial}{\partial \xi} P_1 + \frac{\partial}{\partial \eta} Q_1 = 0, \quad (1.14)$$

$$P_1 = B \cos \omega \rho (u - \mu), \quad Q_1 = A \cos \omega \rho (v - \nu).$$

Уравнения для скоростей u , v будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (B \cos \omega \rho u) + \frac{\partial}{\partial \xi} P_2 + \frac{\partial}{\partial \eta} Q_2 &= F_2, \\
\frac{\partial}{\partial t} (A \cos \omega \rho v) + \frac{\partial}{\partial \xi} P_3 + \frac{\partial}{\partial \eta} Q_3 &= F_3,
\end{aligned} \quad (1.15)$$

где

$$P_2 = \frac{B}{A} [\cos \omega \rho u (u - \mu) - p_1^1 + \sin \omega p_2^1],$$

$$Q_2 = \cos \omega \rho u (v - \nu) + \sin \omega p_1^1 - p_2^1,$$

$$P_3 = \cos \omega \rho v (u - \mu) - p_1^2 + \sin \omega p_2^2,$$

$$Q_3 = \frac{A}{B} [\cos \omega \rho v (v - \nu) + \sin \omega p_1^2 - p_2^2].$$

$$\begin{aligned}
F_2 &= -B \cos \omega \rho u \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\mu}{A} \right) - A \cos \omega \rho v \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu}{A} \right) - \frac{B}{A} [\cos \omega \rho u^2 - p_1^1 + \\
&+ \sin \omega p_2^1] \Gamma_{11}^1 - 2 [\cos \omega \rho uv - p_1^2 + \sin \omega p_2^2] \Gamma_{12}^1 - \frac{A}{B} [\cos \omega \rho v^2 + \sin \omega p_1^2 - \\
&- p_2^2] \Gamma_{22}^1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3 &= -B \cos \omega \rho u \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\nu}{B} \right) - A \cos \omega \rho v \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\nu}{B} \right) - \frac{B}{A} [\cos \omega \rho u^2 - p_1^1 + \\
&+ \sin \omega p_2^1] \Gamma_{11}^2 - 2 [\cos \omega \rho uv + \sin \omega p_1^1 - p_2^1] \Gamma_{12}^2 - \frac{A}{B} [\cos \omega \rho v^2 + \sin \omega p_1^2 - \\
&- p_2^2] \Gamma_{22}^2.
\end{aligned}$$

Эволюцию деформаций будем описывать уравнениями для величин $G_1^1 \cos \omega - G_3^3$, $G_2^2 \cos \omega - G_3^3$, $\frac{B}{A} \cos \omega G_2^1$:

$$\frac{\partial}{\partial t} (G_1^1 \cos \omega - G_3^3) + \frac{u - \mu}{A} \frac{\partial}{\partial \xi} (G_1^1 \cos \omega - G_3^3) + \frac{v - \nu}{B} \frac{\partial}{\partial \eta} (G_1^1 \cos \omega - G_3^3) +$$

$$\begin{aligned}
& + R_{11}^{11} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u}{A} \right) + R_{12}^{11} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{v}{B} \right) + R_{21}^{11} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u}{A} \right) + R_{22}^{11} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{v}{B} \right) = F_1^1 - \\
& \quad - \frac{1}{\tau} (G_1^1 \cos \omega - G_3^3), \\
& \frac{\partial}{\partial t} (G_2^2 \cos \omega - G_3^3) + \frac{u-\mu}{A} \frac{\partial}{\partial \xi} (G_2^2 \cos \omega - G_3^3) + \frac{v-\nu}{B} \frac{\partial}{\partial \eta} (G_2^2 \cos \omega - G_3^3) + \\
& + R_{11}^{22} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u}{A} \right) + R_{12}^{22} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{v}{B} \right) + R_{21}^{22} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u}{A} \right) + R_{22}^{22} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{v}{B} \right) = F_2^2 - \\
& \quad - \frac{1}{\tau} (G_2^2 \cos \omega - G_3^3), \quad (1.16) \\
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B}{A} \cos \omega G_2^1 \right) + \frac{u-\mu}{A} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{B}{A} \cos \omega G_2^1 \right) + \frac{v-\nu}{B} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{B}{A} \cos \omega G_2^1 \right) + \\
& + R_{11}^{12} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u}{A} \right) + R_{12}^{12} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{v}{B} \right) + R_{21}^{12} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u}{A} \right) + R_{22}^{12} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{v}{B} \right) = F_2^1 - \\
& \quad - \frac{1}{\tau} \frac{B}{A} \cos \omega G_2^1.
\end{aligned}$$

В этих уравнениях коэффициенты R_{pq}^{mn} вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
R_{11}^{11} &= \frac{(1 + \cos^2 \omega) G_1^1 + \sin \omega G_1^2}{\cos \omega}, & R_{12}^{11} &= \frac{B}{A} \frac{(1 + \cos^2 \omega) G_2^1 + \sin \omega G_2^2}{\cos \omega}, \\
R_{21}^{11} &= -\frac{A}{B} \operatorname{tg} \omega (G_1^1 + \sin \omega G_1^2), & R_{22}^{11} &= -\operatorname{tg} \omega (G_2^1 + \sin \omega G_2^2), \\
R_{11}^{22} &= -\operatorname{tg} \omega (G_1^2 + \sin \omega G_1^1), & R_{12}^{22} &= -\frac{B}{A} \operatorname{tg} \omega (G_2^2 + \sin \omega G_2^1), \\
R_{21}^{22} &= \frac{A}{B} \frac{\sin \omega G_1^1 + (1 + \cos^2 \omega) G_1^2}{\cos \omega}, & R_{22}^{22} &= \frac{\sin \omega G_2^1 + (1 + \cos^2 \omega) G_2^2}{\cos \omega}, \\
R_{11}^{12} &= \frac{B}{A} \frac{G_1^2 + \sin \omega G_1^1}{\cos \omega}, & R_{12}^{12} &= \frac{B^2}{A^2} \frac{G_2^2 + \sin \omega G_2^1}{\cos \omega}, \\
R_{21}^{12} &= \frac{\cos 2\omega G_1^1 - \sin \omega G_1^2}{\cos \omega}, & R_{22}^{12} &= \frac{B}{A} \frac{G_2^1 \cos 2\omega - \sin \omega G_2^2}{\cos \omega}.
\end{aligned}$$

Правые части F_j^i имеют вид

$$\begin{aligned}
F_1^1 &= \frac{B}{A} \cos \omega G_2^1 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\nu}{B} \right) - \frac{A}{B} \cos \omega G_1^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu}{A} \right) - \frac{u}{A} \left[R_{11}^{11} \frac{\partial \ln A}{\partial \xi} + R_{11}^{22} \frac{\partial \ln B}{\partial \xi} + \right. \\
& + (G_1^2 - \sin \omega G_1^1) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \left. \right] - \frac{\nu}{B} \left[R_{11}^{11} \frac{\partial \ln A}{\partial \eta} + R_{11}^{22} \frac{\partial \ln B}{\partial \eta} + (G_1^1 - \sin \omega G_1^2) \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right], \\
F_2^2 &= -\frac{B}{A} \cos \omega G_2^1 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\nu}{B} \right) + \frac{A}{B} \cos \omega G_1^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu}{A} \right) - \frac{u}{A} \left[R_{22}^{11} \frac{\partial \ln A}{\partial \xi} + R_{22}^{22} \frac{\partial \ln B}{\partial \xi} + \right. \\
& + (G_2^1 - \sin \omega G_2^2) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \left. \right] - \frac{\nu}{B} \left[R_{22}^{11} \frac{\partial \ln A}{\partial \eta} + R_{22}^{22} \frac{\partial \ln B}{\partial \eta} + (G_2^2 - \sin \omega G_2^1) \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right], \\
F_2^1 &= \frac{B}{A} \cos \omega G_2^1 \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\nu}{B} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\mu}{A} \right) \right] + (G_1^1 - G_2^2) \cos \omega \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu}{A} \right) - \\
& - \frac{u}{A} \left[R_{12}^{11} \frac{\partial \ln A}{\partial \xi} + R_{12}^{22} \frac{\partial \ln B}{\partial \xi} + \frac{B}{A} (G_2^2 - \sin \omega G_2^1) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right] - \frac{\nu}{B} \left[R_{12}^{11} \frac{\partial \ln A}{\partial \eta} + \right. \\
& + R_{12}^{22} \frac{\partial \ln B}{\partial \eta} + \frac{B}{A} (G_2^1 - \sin \omega G_2^2) \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \left. \right].
\end{aligned}$$

Закон сохранения энергии будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} (AB \cos \omega \rho e) + \frac{\partial}{\partial \xi} P_s + \frac{\partial}{\partial \eta} Q_s = 0, \quad (1.17)$$

где

$$e = E + \frac{u^2 + v^2}{2} + uv \sin \omega,$$

$$P_3 = B \cos \omega [\rho(u - \mu)e - \mu p_1^1 \cos \omega - \nu p_2^1 \cos \omega],$$

$$Q_3 = A \cos \omega [\rho(v - \nu)e - \mu p_1^2 \cos \omega - \nu p_2^2 \cos \omega].$$

Следует отметить, что те члены в уравнениях, которые содержат производные метрических параметров A , B , ω криволинейной системы координат ξ , η , можно записать неединственным образом, так как для якобиана преобразования $\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}$ имеют место условия совместности

$$\frac{\partial}{\partial \xi^p} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^q} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi^q} \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^p} \right) = 0. \text{ Подробно эти условия мы выписывать не будем.}$$

Заметим, что уравнение для G_1^2 не понадобится, так как справедливо тождество $G_1^2 = G_2^1 + \sin \omega (G_2^2 - G_1^1)$, вытекающее из условий симметрии тензора G .

Итак, мы получили систему двумерных уравнений (1.14)–(1.17), и для нее будем конструировать разностную схему. В эти уравнения входят скорости движения криволинейной системы координат μ , ν , которые необходимо каким-то образом определить. Естественно это сделать из соображений существования «хорошей» разностной сетки, в § 2 мы на этом остановимся подробнее.

В заключение приведем ряд формул, требуемых при реализации разностной схемы. Плотность выражается через физические компоненты тензора деформаций следующим образом:

$$\rho = \rho_0 [(G_1^1 G_2^2 - G_2^1 G_1^2) G_3^3]^{1/2} \cos \omega.$$

Первый и второй инварианты тензора деформации вычисляются по формулам

$$J_1 = (G_1^1 + G_2^2) \cos \omega + G_3^3,$$

$$J_2 = (G_1^1 G_2^2 - G_2^1 G_1^2) \cos^2 \omega + (G_1^1 + G_2^2) G_3^3 \cos \omega.$$

Третий инвариант — это $J_3 = (\rho/\rho_0)^2$. От этих инвариантов зависит внутренняя энергия изотропной среды. Физические компоненты тензора напряжений определяются следующим образом:

$$p_1^1 = -2\rho \left[G_1^1 E_{J_1} + ((G_1^1 G_2^2 - G_2^1 G_1^2) \cos \omega + G_1^1 G_3^3) E_{J_2} + \frac{J_3 E_{J_3}}{\cos \omega} \right],$$

$$p_2^2 = -2\rho \left[G_2^2 E_{J_1} + ((G_1^1 G_2^2 - G_2^1 G_1^2) \cos \omega + G_2^2 G_3^3) E_{J_2} + \frac{J_3 E_{J_3}}{\cos \omega} \right],$$

$$p_3^3 = -2\rho [G_3^3 E_{J_1} + (G_1^1 + G_2^2) G_3^3 \cos \omega E_{J_2} + J_3 E_{J_3}],$$

$$p_2^1 = -2\rho G_2^1 (E_{J_1} + G_3^3 E_{J_2}),$$

$$p_1^2 = -2\rho G_1^2 (E_{J_1} + G_3^3 E_{J_2}).$$

Инвариант тензора напряжений, называемый *интенсивностью касательных напряжений*, который является одним из аргументов функции релаксации τ , выглядит так:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} [(p_1^1 - p_2^2)^2 \cos^2 \omega + (p_2^2 \cos \omega - p_3^3)^2 + (p_3^3 - p_1^1 \cos \omega)^2 + 6p_2^1 p_1^2 \cos \omega]^{1/2}.$$

§ 2. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ МАКСВЕЛЛА

Перейдем к описанию разностной схемы для уравнений из § 1. Отметим, что система криволинейных координат ξ, η позволяет использовать прямоугольную разностную сетку на плоскости ξ, η . Для построения криволинейной системы координат в расчетной области можно, например, использовать алгоритмы построения разностных сеток, изложенные в [1]. Далее, при данном способе введения движущихся координат ξ, η по формуле (1.6) разностная сетка в пространстве t, ξ, η будет параллелепипедной. В связи с этим разностная схема выписывается достаточно несложно.

Для простоты предположим, что расчетная область на плоскости x, y является образом прямоугольника на плоскости ξ, η . Число точек равно $j = 1, \dots, J$ по координате ξ и $k = 1, \dots, K$ по координате η . Расстановка точек предполагается равномерной.

Все неизвестные функции будем относить к точкам разностной сетки (а не к ячейкам сетки, как в [1]). Пусть в момент времени t_n известны все функции $u_{j,k}^n, v_{j,k}^n, (G_\beta^\alpha)_{j,k}^n, S_{j,k}^n$. Кроме того, известны координаты сетки $x_{j,k}^n, y_{j,k}^n$ (и значит, ее метрические параметры $A_{j,k}^n, B_{j,k}^n, \omega_{j,k}^n$), а также скорости движения $\mu_{j,k}^n, \nu_{j,k}^n$ всех точек сетки. Необходимо определить функции $u_{j,k}^{n+1}, v_{j,k}^{n+1}, (G_\beta^\alpha)_{j,k}^{n+1}, S_{j,k}^{n+1}$ в момент времени $t_{n+1} = t_n + \Delta t$.

Поскольку мы имеем дело с параллелепипедной сеткой, частные производные заменим разностными отношениями. Например, в точке $x_{j,k}, y_{j,k}$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(AB \cos \omega) &= \frac{1}{\Delta t} [(AB \cos \omega)_{j,k}^{n+1} \rho_{j,k}^{n+1} - (AB \cos \omega)_{j,k}^n \rho_{j,k}^n], \\ \frac{\partial}{\partial \xi} P_1 &= \frac{1}{\Delta \xi} [(P_1)_{j+1/2,k} - (P_1)_{j-1/2,k}], \\ \frac{\partial}{\partial \eta} Q_1 &= \frac{1}{\Delta \eta} [(Q_1)_{j,k+1/2} - (Q_1)_{j,k-1/2}].\end{aligned}$$

Здесь величины с полуцелыми индексами относятся к серединам отрезков, соединяющих точки с соответствующими целыми индексами. Эти величины можно определять различными способами. Мы будем использовать процедуру распада разрыва в акустическом приближении. Ниже будет кратко описана эта методика.

Используя указанную разностную аппроксимацию для уравнения неразрывности (1.14) и уравнений баланса импульса (1.15), получим

$$\begin{aligned}(AB \cos \omega)_{j,k}^{n+1} \rho_{j,k}^{n+1} &= (AB \cos \omega)_{j,k}^n \rho_{j,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} [(P_1)_{j+1/2,k} - \\ &\quad - (P_1)_{j-1/2,k}] - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} [(Q_1)_{j,k+1/2} - (Q_1)_{j,k-1/2}], \\ (B \cos \omega)_{j,k}^{n+1} \rho_{j,k}^{n+1} u_{j,k}^{n+1} &= (B \cos \omega)_{j,k}^n \rho_{j,k}^n u_{j,k}^n + (F_2)_{j,k}^n \Delta t - \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} [(P_2)_{j+1/2,k} - (P_2)_{j-1/2,k}] - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} [(Q_2)_{j,k+1/2} - (Q_2)_{j,k-1/2}], \\ (A \cos \omega)_{j,k}^{n+1} \rho_{j,k}^{n+1} v_{j,k}^{n+1} &= (A \cos \omega)_{j,k}^n \rho_{j,k}^n v_{j,k}^n + (F_3)_{j,k}^n \Delta t - \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} [(P_3)_{j+1/2,k} - (P_3)_{j-1/2,k}] - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} [(Q_3)_{j,k+1/2} - (Q_3)_{j,k-1/2}].\end{aligned}$$

В уравнениях (1.16) для тензора деформаций G_β^α производные также заменяются разностями в точках с полуцелыми индексами, а коэффициенты при производных берутся в точках с целыми индексами. Релаксационные члены аппроксимируются следующим образом: числитель берется с верхнего слоя по времени, а знаменатель τ — с нижнего. Таким образом,

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{\tau_{j,k}^n}\right) [(G_1^1)_{j,k}^{n+1} \cos \omega_{j,k}^{n+1} - (G_3^3)_{j,k}^{n+1}] = (G_1^1)_{j,k}^n \cos \omega_{j,k}^n - (G_3^3)_{j,k}^n -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \frac{u_{j,k}^n - \mu_{j,k}^n}{A_{j,k}^n} [G_1^1 \cos \omega - G_3^3]_{j-1/2,k}^{j+1/2,k} - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \frac{v_{j,k}^n - \nu_{j,k}^n}{B_{j,k}^n} [G_1^1 \cos \omega - G_3^3]_{j,k-1/2}^{j,k+1/2} - \\
& - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (R_{11}^{11})_{j,k}^n \left[\frac{u}{A} \right]_{j-1/2,k}^{j+1/2,k} - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (R_{12}^{11})_{j,k}^n \left[\frac{v}{B} \right]_{j-1/2,k}^{j+1/2,k} - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} (R_{21}^{11})_{j,k}^n \left[\frac{u}{A} \right]_{j,k-1/2}^{j,k+1/2} - \\
& \quad - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} (R_{22}^{11})_{j,k}^n \left[\frac{v}{B} \right]_{j,k-1/2}^{j,k+1/2} + (F_1^1)_{j,k}^n \Delta t, \\
& \left(1 + \frac{\Delta t}{\tau_{j,k}^n} \right) [(G_2^2)_{j,k}^{n+1} \cos \omega_{j,k}^{n+1} - (G_3^3)_{j,k}^{n+1}] = (G_2^2)_{j,k}^n \cos \omega_{j,k}^n - (G_3^3)_{j,k}^n - \\
& - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \frac{u_{j,k}^n - \mu_{j,k}^n}{A_{j,k}^n} [G_2^2 \cos \omega - G_3^3]_{j-1/2,k}^{j+1/2,k} - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \frac{v_{j,k}^n - \nu_{j,k}^n}{B_{j,k}^n} [G_2^2 \cos \omega - G_3^3]_{j,k-1/2}^{j,k+1/2} - \\
& \quad - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (R_{11}^{22})_{j,k}^n \left[\frac{u}{A} \right]_{j-1/2,k}^{j+1/2,k} - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (R_{12}^{22})_{j,k}^n \left[\frac{v}{B} \right]_{j-1/2,k}^{j+1/2,k} - \\
& \quad - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} (R_{21}^{22})_{j,k}^n \left[\frac{u}{A} \right]_{j,k-1/2}^{j,k+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} (R_{22}^{22})_{j,k}^n \left[\frac{v}{B} \right]_{j,k-1/2}^{j,k+1/2} + (F_2^2)_{j,k}^n \Delta t, \\
& \left(1 + \frac{\Delta t}{\tau_{j,k}^n} \right) \left(\frac{B}{A} \cos \omega \right)_{j,k}^{n+1} (G_2^1)_{j,k}^{n+1} = \left(\frac{B}{A} \cos \omega \right)_{j,k}^n (G_2^1)_{j,k}^n - \\
& - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \frac{u_{j,k}^n - \mu_{j,k}^n}{A_{j,k}^n} \left[\frac{B}{A} \cos \omega G_2^1 \right]_{j-1/2,k}^{j+1/2,k} - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \frac{v_{j,k}^n - \nu_{j,k}^n}{B_{j,k}^n} \left[\frac{B}{A} \cos \omega G_2^1 \right]_{j,k-1/2}^{j,k+1/2} - \\
& \quad - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (R_{11}^{12})_{j,k}^n \left[\frac{u}{A} \right]_{j-1/2,k}^{j+1/2,k} - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (R_{12}^{12})_{j,k}^n \left[\frac{v}{B} \right]_{j-1/2,k}^{j+1/2,k} - \\
& \quad - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} (R_{21}^{12})_{j,k}^n \left[\frac{u}{A} \right]_{j,k-1/2}^{j,k+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} (R_{22}^{12})_{j,k}^n \left[\frac{v}{B} \right]_{j,k-1/2}^{j,k+1/2} + (F_2^1)_{j,k}^n \Delta t.
\end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения $[Z]_{j-1/2,k}^{j+1/2,k} = Z_{j+1/2,k}^n - Z_{j-1/2,k}^n$, $[Z]_{j,k-1/2}^{j,k+1/2} = Z_{j,k+1/2}^n - Z_{j,k-1/2}^n$. Уравнение для энергии (1.17) аппроксимируется следующим образом:

$$\begin{aligned}
& (AB \cos \omega)_{j,k}^{n+1} \rho_{j,k}^{n+1} e_{j,k}^{n+1} = (AB \cos \omega)_{j,k}^n \rho_{j,k}^n e_{j,k}^n - \\
& - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} [(P_8)_{j+1/2,k} - (P_8)_{j-1/2,k}] - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} [(Q_8)_{j,k+1/2} - (Q_8)_{j,k-1/2}].
\end{aligned}$$

Мы пришли к системе разностных уравнений, которая для каждой точки разрешается в таком порядке: вначале из уравнений определяем

$\rho_{j,k}^{n+1}$, $u_{j,k}^{n+1}$, $v_{j,k}^{n+1}$, $(G_1^1)_{j,k}^{n+1} \cos \omega_{j,k}^{n+1} - (G_3^3)_{j,k}^{n+1}$, $(G_2^2)_{j,k}^{n+1} \cos \omega_{j,k}^{n+1} - (G_3^3)_{j,k}^{n+1}$, $(G_2^1)_{j,k}^{n+1}$, затем находим $(G_2^2)_{j,k}^{n+1}$ по формуле

$$\begin{aligned}
(G_2^2)_{j,k}^{n+1} &= (G_2^1)_{j,k}^{n+1} + \operatorname{tg} \omega_{j,k}^{n+1} [(G_2^2)_{j,k}^{n+1} \cos \omega_{j,k}^{n+1} - \\
&- (G_3^3)_{j,k}^{n+1}] - [(G_1^1)_{j,k}^{n+1} \cos \omega_{j,k}^{n+1} - (G_3^3)_{j,k}^{n+1}].
\end{aligned}$$

Далее, из уравнения получаем

$$e_{j,k}^{n+1} = E_{j,k}^{n+1} + \frac{1}{2} [(u_{j,k}^{n+1})^2 + (v_{j,k}^{n+1})^2] + u_{j,k}^{n+1} v_{j,k}^{n+1} \sin \omega_{j,k}^{n+1}.$$

После этого по известным величинам

$\rho_{j,k}^{n+1} = \rho_0 \{ [(G_1^1)_{j,k}^{n+1} (G_2^2)_{j,k}^{n+1} - (G_2^1)_{j,k}^{n+1} (G_3^3)_{j,k}^{n+1}]^{1/2} \cos \omega_{j,k}^{n+1},$
 $(G_1^1)_{j,k}^{n+1} \cos \omega_{j,k}^{n+1} - (G_3^3)_{j,k}^{n+1}, (G_2^2)_{j,k}^{n+1} \cos \omega_{j,k}^{n+1} - (G_3^3)_{j,k}^{n+1}, (G_2^1)_{j,k}^{n+1}, (G_1^2)_{j,k}^{n+1}$
определяем $(G_3^3)_{j,k}^{n+1}$ как корень алгебраического уравнения; наконец, по известным $E_{j,k}^{n+1}$, $(G_\beta^\alpha)_{j,k}^{n+1}$ вычисляем $S_{j,k}^{n+1}$.

Итак, мы выписали расчетные формулы для определения параметров состояния сплошной среды $u_{j,k}^{n+1}$, $v_{j,k}^{n+1}$, $(G_\beta^\alpha)_{j,k}^{n+1}$, $S_{j,k}^{n+1}$ на верхнем временном слое во внутренних точках сетки. При этом предполагались из-

вестными метрические параметры A, B, ω на верхнем и нижнем временных слоях, а также скорости $\mu_{j,k}^n, v_{j,k}^n$ всех точек сетки. Заметим, что метрические параметры на верхнем слое вычисляются по известным координатам точек $x_{j,k}^{n+1}, y_{j,k}^{n+1}$, которые находятся по формулам

$$\begin{aligned}x_{j,k}^{n+1} &= x_{j,k}^n + (\mu_{j,k}^n \cos \varphi_{j,k}^n - v_{j,k}^n \sin \psi_{j,k}^n) \Delta t, \\y_{j,k}^{n+1} &= y_{j,k}^n + (\mu_{j,k}^n \sin \varphi_{j,k}^n + v_{j,k}^n \cos \psi_{j,k}^n) \Delta t,\end{aligned}$$

где углы φ и ψ определяются из формул (см. § 1)

$$\sin \varphi = \frac{1}{A} y_{\xi}, \sin \psi = -\frac{1}{B} x_{\eta}.$$

Скажем несколько слов о построении разностной сетки. В каждый момент времени мы строим ее исходя из положения границ. Вначале с помощью процедуры граничного распада разрыва определяются криволинейные компоненты скорости движения граничных точек μ или v (в зависимости от границы), нормальные к границе в плоскости ξ, η . Далее, путем применения сеточного функционала (см. ниже), подправляется исходная сетка на нижнем слое и прогнозируются скорости движения точек сетки μ и v , которые минимизируют функционал для области на нижнем слое. Суммарные скорости движения точек определяются как сумма скоростей, полученных интерполяцией движения граничных точек внутрь области, и скоростей, полученных в результате применения функционала.

Теперь кратко опишем, каким образом мы используем сеточный функционал. Будем основываться на одном из алгоритмов, изложенных в [1], использующих построение квазиконформного отображения. Рассмотрим простейшую расчетную область — криволинейный четырехугольник. Построение разностной сетки в такой области можно трактовать как отыскание функций $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$, обеспечивающих взаимно однозначное отображение счетной области на прямоугольник D в плоскости ξ, η . Такое отображение можно осуществить квазиконформно. Оно доставляет минимум функционалу

$$\Phi = \int_D \frac{e^{p-q} (x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2) - 2 \sin(\alpha - \beta) (x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta}) + e^{q-p} (x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2)}{\cos(\alpha - \beta)} d\xi d\eta.$$

Функционал Φ в данном случае минимизируется по $x, y, p - q$, а угол $\gamma = \alpha - \beta$ задан. Уравнения Эйлера для x, y имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} B \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} B \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial x}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} A \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} B \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} B \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} C \frac{\partial y}{\partial \eta} &= 0,\end{aligned}$$

где $A = \frac{e^{p-q}}{\cos(\alpha - \beta)}, B = \operatorname{tg}(\alpha - \beta), C = \frac{e^{q-p}}{\cos(\alpha - \beta)}$. Уравнение для определения значения $p - q$, доставляющего минимум функционалу, таково:

$$p - q = \frac{1}{2} \ln \frac{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2}{x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2}.$$

Данный алгоритм допускает движение точек по границе расчетной области.

Численная реализация поиска минимума Φ осуществляется в виде итерационного процесса. Пусть заданы «начальные» значения координат $x_{j,k}, y_{j,k}, j = \overline{1, J}, k = \overline{1, K}$, а также «начальное» значение параметра $p - q$. Введем разностный аналог функционала Φ :

$$\tilde{\Phi} = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J (A L_{j-1/2, k-1/2} - 2 B M_{j-1/2, k-1/2} + C R_{j-1/2, k-1/2});$$

при этом предполагаем, что ищется отображение на прямоугольник в плоскости ξ, η с длинами сторон $J-1$ и $K-1$ соответственно. Здесь $L_{j-1/2, k-1/2}$, $M_{j-1/2, k-1/2}$, $R_{j-1/2, k-1/2}$ — разностные аналоги выражений $x_i^2 + y_i^2$, $x_i x_\eta + y_i y_\eta$, $x_\eta^2 + y_\eta^2$, вычисляемые по формулам

$$\begin{aligned} L_{j-1/2, k-1/2} &= \frac{1}{2} [(x_{j,k} - x_{j-1,k})^2 + (x_{j,k-1} - x_{j-1,k-1})^2 + \\ &\quad + (y_{j,k} - y_{j-1,k})^2 + (y_{j,k-1} - y_{j-1,k-1})^2], \\ M_{j-1/2, k-1/2} &= \frac{1}{4} [(x_{j,k} - x_{j-1,k} + x_{j,k-1} - x_{j-1,k-1})(x_{j,k} - x_{j,k-1} + \\ &\quad + x_{j-1,k} - x_{j-1,k-1}) + (y_{j,k} - y_{j-1,k} + y_{j,k-1} - \\ &\quad - y_{j-1,k-1})(y_{j,k} - y_{j,k-1} + y_{j-1,k} - y_{j-1,k-1})], \\ R_{j-1/2, k-1/2} &= \frac{1}{2} [(x_{j,k} - x_{j,k-1})^2 + (x_{j-1,k} - x_{j-1,k-1})^2 + \\ &\quad + (y_{j,k} - y_{j,k-1})^2 + (y_{j-1,k} - y_{j-1,k-1})^2]. \end{aligned}$$

Теперь можно получить разностные уравнения, соответствующие достижению минимума функционала $\tilde{\Phi}$:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_{j,k}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_{j,k}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial (e^{p-q})} = 0.$$

На практике итерационный процесс осуществляется так: вначале по имеющейся «начальной» сетке $x_{j,k}$, $y_{j,k}$ вычисляются коэффициенты A , B , C , далее при фиксированных A , B , C вычисляются новые координаты сетки по формулам

$$x_{j,k}^{(n+1)} = x_{j,k}^{(n)} - \theta^{(n)} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_{j,k}^{(n)}}, \quad y_{j,k}^{(n+1)} = y_{j,k}^{(n)} - \theta^{(n)} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_{j,k}^{(n)}}.$$

Заметим, что коэффициенты B , A , C находятся по формулам $B = \operatorname{tg} \gamma$, где $\gamma = \alpha - \beta$ — заданный угол, $A = \frac{1}{\cos \gamma} \sqrt{R/L}$, $C = \frac{1}{\cos \gamma} \sqrt{L/R}$,

где $R = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J R_{j-1/2, k-1/2}$, $L = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J L_{j-1/2, k-1/2}$. Итерационный параметр $\theta^{(n)}$ выбирается по формуле

$$\theta^{(n)} = \frac{\theta^0}{2(A^{(n)} + C^{(n)}) + B}, \quad 0 < \theta^0 < 2,$$

обеспечивающей устойчивость процесса. Учитывая приведенные выше формулы, получим итерационные уравнения для определения $x_{j,k}$, $y_{j,k}$:

$$\begin{aligned} x_{j,k}^{(n+1)} &= x_{j,k}^{(n)} - \theta^{(n)} \{4(A + C)x_{j,k}^{(n)} - \Delta(x)_{j-1/2, k+1/2} - \\ &\quad - \Delta(x)_{j+1/2, k+1/2} - \Delta(x)_{j+1/2, k-1/2} - \Delta(x)_{j-1/2, k-1/2}\}, \\ y_{j,k}^{(n+1)} &= y_{j,k}^{(n)} - \theta^{(n)} \{4(A + C)y_{j,k}^{(n)} - \Delta(y)_{j-1/2, k+1/2} - \\ &\quad - \Delta(y)_{j+1/2, k+1/2} - \Delta(y)_{j+1/2, k-1/2} - \Delta(y)_{j-1/2, k-1/2}\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(z)_{j \pm 1/2, k+1/2} &= Az_{j \mp 1, k} \pm Bz_{j \mp 1, k+1} + Cz_{j, k+1}, \\ \Delta(z)_{j \mp 1/2, k-1/2} &= Az_{j \mp 1, k} \mp Bz_{j \mp 1, k-1} + Cz_{j, k-1}. \end{aligned}$$

Оператор $\Delta(z)$ введен Г. А. Чумаковым.

Для точек сетки, принадлежащих границе, итерационный процесс несколько иной. Здесь необходимо следить, чтобы точки, находящиеся в начальный момент на границе, двигались по границе. Процесс устроен следующим образом. Вначале из условий экстремума разностного функционала $\tilde{\Phi}$ для граничных точек вычисляем полное смещение точек по

формулам

$$z_{j,k}^{(n+1)} - z_{j,k}^{(n)} = \frac{1}{2(A+C)} (\Delta(z^{(n)})_{j-1/2,k\pm 1/2} + \Delta(z^{(n)})_{j+1/2,k\pm 1/2}) - z_{j,k}^{(n)}$$

для верхней (знак $-$) и нижней (знак $+$) границ,

$$z_{j,k}^{(n+1)} - z_{j,k}^{(n)} = \frac{1}{2(A+C)} (\Delta(z^{(n)})_{j+1/2,k-1/2} + \Delta(z^{(n)})_{j\pm 1/2,k+1/2}) - z_{j,k}^{(n)}$$

для левой (знак $+$) и правой (знак $-$) границ. Здесь под $z_{j,k}$ подразумевается как $x_{j,k}$, так и $y_{j,k}$. После этого полученные смещения граничных точек проектируются на границу области.

Описанный выше процесс применим как для построения «начальной» сетки, так и для подправки ее в ходе расчета (для этого, как правило, достаточно одной итерации).

§ 3. О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О РАСПАДЕ РАЗРЫВА В АКУСТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В этом параграфе кратко опишем способ вычисления величин с полусцелыми индексами, называемыми в [1] «большими» величинами. Поскольку для рассматриваемых в данной работе уравнений задача о распаде разрыва в нелинейной постановке не исследовалась, естественно использовать акустическое приближение для ее решения.

Основная трудность заключается в приведении системы линейных уравнений (для одной пространственной переменной) к каноническому виду записи в римановых инвариантах. После того как имеется указанный вид, решение задачи о распаде разрыва труда не составляет и сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Сейчас мы укажем достаточно простой алгоритм приведения одномерной системы линеаризованных уравнений нелинейной теории упругости к канонической записи в римановых инвариантах. Линеаризуя систему (1.14) — (1.17) относительно постоянного фона $u^0, v^0, G_{\beta}^{0\alpha}, S^0$ и предполагая постоянными метрические параметры A^0, B^0, ω^0 , а также скорости сетки μ^0, ν^0 , получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{u^0 - \mu^0}{A^0} \frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{v^0 - \nu^0}{B^0} \frac{\partial W}{\partial \eta} + K \frac{\partial z}{\partial \xi} + L \frac{\partial z}{\partial \eta} &= 0, \\ \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{u^0 - \mu^0}{A^0} \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \frac{v^0 - \nu^0}{B^0} \frac{\partial Z}{\partial \eta} + M \frac{\partial W}{\partial \xi} + N \frac{\partial W}{\partial \eta} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где векторы W и Z составлены из скоростей, компонент тензора деформаций и энтропии:

$$W = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} G_1^1 \\ G_2^2 \\ G_2^1 \\ G_3^3 \\ S \end{bmatrix}.$$

«Большие» величины в данной разностной схеме определяются из решения одномерных задач о распаде разрыва. Мы остановимся для примера на случае, когда искомые функции не зависят от η . Вводя оператор $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u^0 - \mu^0}{A^0} \frac{\partial}{\partial \xi}$, одномерный вариант системы (3.1) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} + K \frac{\partial Z}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{dZ}{dt} + M \frac{\partial W}{\partial \xi} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Характеристики системы (3.1) удобно вычислять с помощью сведения к системе второго порядка путем исключения. Для этого к первому уравнению системы применим оператор $\frac{d}{dt}$ и, исключая производную $\frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial \xi}$, найденную дифференцированием второго уравнения по ξ , получим

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 W - \Lambda \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} W = 0, \quad (3.3)$$

где в данном случае $\Lambda = KM$ — матрица второго порядка. Заметим, что для системы (3.1) Λ является не симметричной, для того, чтобы соответствующая матрица стала симметричной, нужно поднять один индекс с помощью метрического тензора.

Поскольку (3.1) является гиперболической системой, матрица Λ представима в виде $\Lambda = P^{-1} D_{\Lambda}^2 P$, где $D_{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ — матрица, на диагонали которой стоят скорости звуковых волн. Вводя новые неизвестные функции $V = PW$, систему (3.3) можно записать в виде

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 V - D_{\Lambda}^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} V = 0.$$

Сведем это матричное уравнение к системе векторных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} - D_{\Lambda}^2 \frac{\partial G}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{dG}{dt} - \frac{\partial F}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned}$$

с помощью замены $\frac{dV}{dt} = F$, $\frac{\partial V}{\partial \xi} = G$. Последнюю систему просто привести к характеристической форме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (F + D_{\Lambda} G) - D_{\Lambda} \frac{\partial}{\partial \xi} (F + D_{\Lambda} G) &= 0, \\ \frac{d}{dt} (F - D_{\Lambda} G) + D_{\Lambda} \frac{\partial}{\partial \xi} (F - D_{\Lambda} G) &= 0. \end{aligned}$$

Возвращаясь к прежним независимым функциям $F = P \frac{dW}{dt}$, $G = P \frac{\partial W}{\partial \xi}$, получим систему уравнений второго порядка

$$\frac{d}{dt} \left(P \frac{dW}{dt} \pm D_{\Lambda} P \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) \mp D_{\Lambda} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(P \frac{dW}{dt} \pm D_{\Lambda} P \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) = 0.$$

Умножим теперь это матричное уравнение слева на матрицу P^{-1} и обозначим $\Lambda^{1/2} = P^{-1} D_{\Lambda} P$, тогда

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dW}{dt} \pm \Lambda^{1/2} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) \mp D_{\Lambda} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{dW}{dt} \pm \Lambda^{1/2} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) = 0.$$

И наконец, выражая $\frac{dW}{dt} = -K \frac{\partial Z}{\partial \xi}$ из системы (3.2), находим

$$\frac{d}{dt} \left(-K \frac{\partial Z}{\partial \xi} \pm \Lambda^{1/2} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) \mp D_{\Lambda} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-K \frac{\partial Z}{\partial \xi} \pm \Lambda^{1/2} \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) = 0.$$

Заметив теперь, что производную по ξ можно исключить, окончательно получим уравнения в римановых инвариантах, отвечающие звуковым волнам:

$$\frac{d}{dt} (W \pm \Lambda^{-1/2} K Z) \pm D_{\Lambda} \frac{\partial}{\partial \xi} (W \pm \Lambda^{-1/2} K Z) = 0. \quad (3.4)$$

У системы (3.2) кроме звуковых характеристик есть еще характеристики — линии тока. Нетрудно убедиться, что соответствующие уравнения

в римановых инвариантах следующие:

$$\frac{d}{dt} G_2^2 = 0, \quad \frac{d}{dt} G_3^3 = 0, \quad \frac{dS}{dt} = 0. \quad (3.5)$$

Заметим, что когда распад разрыва производится по координате η , в систему (3.5) вместо уравнения $\frac{dG_2^2}{dt} = 0$ войдет уравнение $\frac{dG_1^1}{dt} = 0$.

После того как известен вид системы (3.4), (3.5) в римановых инвариантах, решение задачи о распаде разрыва является чисто алгебраической задачей и в данном случае может быть выписано явными формулами. Систему линейных уравнений получаем при выяснении того, какие римановы инварианты приносятся по характеристикам в данную точку на плоскости t, ξ .

Для решения задачи о граничном распаде разрыва необходимо вместо части римановых инвариантов (уходящих) взять линеаризованные граничные условия. Скорости, получающиеся из решения этой задачи, дают возможность определить скорость граничной точки, а все распадаемые «большие» величины служат для вычисления потоков.

Условие устойчивости (условие Куранта) [1] для данной разностной схемы выглядит следующим образом:

$$\Delta t \leq \left(\frac{1}{\Delta t_\xi} + \frac{1}{\Delta t_\eta} \right)^{-1},$$

где

$$\Delta t_\xi = \frac{\Delta \xi}{\max \left(\frac{u^0 - \mu^0}{A^0} + \lambda_\xi, \lambda_\xi - \frac{u^0 - \mu^0}{A^0} \right)},$$

$$\Delta t_\eta = \frac{\Delta \eta}{\max \left(\frac{v^0 - \nu^0}{B^0} + \lambda_\eta, \lambda_\eta - \frac{v^0 - \nu^0}{B^0} \right)},$$

λ_ξ и λ_η — максимальные собственные значения матрицы Λ соответствующих одномерных задач. Максимумы берутся по всем точкам, в которых производится распад разрыва.

§ 4. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Для иллюстрации сконструированной разностной схемы рассмотрим задачу о движении импульса давления по поверхности металлической пластины. Материалом пластины является медь. Уравнение состояния выбрано в виде

$$E = \frac{K_0}{2\alpha^2} (J_3^{\alpha/2} - 1)^2 + \frac{B_0}{2} J_3^{\beta/2} (J_1^2/3 - J_2) + c_V T_0 J_3^{\gamma/2} (e^{S/c_V} - 1),$$

где J_1, J_2, J_3 — инварианты тензора деформации:

$$J_1 = (G_1^1 + G_2^2) \cos \omega + G_3^3, \quad J_2 = (G_1^1 G_2^2 - G_2^1 G_1^2) \cos^2 \omega + G_3^3 (G_1^1 + G_2^2) \cos \omega, \quad J_3 = (G_1^1 G_2^2 - G_2^1 G_1^2) G_3^3 \cos^2 \omega.$$

Здесь интерполяционные константы имеют следующие значения: $K_0 = c_0^2 - \frac{4}{3} b_0^2$, $c_0 = 4.65 \cdot 10^5$ см/с — скорость продольных звуковых волн, $b_0 = 2.14 \cdot 10^5$ см/с — скорость поперечных звуковых волн, $B_0 = b_0^2$, $c_V = 0.412$ Дж/(г · град) — удельная теплоемкость при постоянном объеме, $T_0 = 300$ К, $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$; значение начальной плотности было $\rho_0 = 8.9$ г/см³.

В приведенном выше уравнении состояния первое слагаемое имеет смысл упругой «холодной» энергии объемного сжатия, второе слагаемое — энергии формоизменения, а третье — тепловой энергии.

Для замыкания модели необходимо задать функцию релаксации касательных напряжений, которая выбиралась следующей [7]:

$$\tau(\sigma, T) = \tau_0 \left(\frac{\rho_0 B_0}{n_0 \sigma} \right)^{n(T)-1} \exp(\mu U(T)/RT),$$

$$\text{где } n(T) = \frac{1}{n_1} [(n_2 T/\theta_0 - 1)^2 + n_3]^{-1}, \quad U(T) = \frac{c_0^2 T}{n_4 \theta_0} (1 - n_5 T/\theta_0) n(T),$$

$\tau_0 = 23.98 \cdot 10^{-5}$ с, $n_0 = 0.39 \cdot 10^4$, $n_1 = 0.0184$, $n_2 = 0.955$, $n_3 = 1.902$, $n_4 = 140$, $n_5 = 7.22$, $\theta_0 = 315$ К, $\mu = 63.54$ г, $R = 8.31 \cdot 10^7$ г·см²/(с²·град). Данная формула для τ с указанными константами дает значение динамического предела текучести около 0.3 ГПа при моделировании деформации стержней [7] в широком диапазоне скоростей деформации.

Рассмотрение задачи о движении импульса давления по пластине вызвано работой [8], в которой она изучалась в упрощенной постановке. Там в рамках линейной модели для малых деформаций в случае установившегося движения было показано, что на поверхности пластины, после прохождения по ней импульса давления, возникает слой остаточных сжимающих напряжений.

Расчеты, проведенные по технологии, описанной выше, также показали образование остаточных напряжений, которые в дальнейшем приводят к изгибу всей пластины. Всюду используется алгоритм построения сетки с помощью функционала из § 2 при $\gamma = 0$.

Продemonстрируем результаты расчета одной такой задачи. Была взята пластина длиной 10 см, толщиной 1 см, занимающая прямоугольник $[0,10] \times [0,1]$. По одной из поверхностей пластины был пущен импульс давления со скоростью $2 \cdot 10^5$ см/с (назовем эту поверхность «верхней», а противоположную — «нижней»). Формула, задающая профиль давления, действующего по нормали к пластине, имеет вид $\bar{p}(t, x) = \varphi(t)p(t, x)$, где

$$\varphi(t) = \begin{cases} t, & t \leq 10^{-5} \text{ с}, \\ 1, & t > 10^{-5} \text{ с}, \end{cases}$$

$$p(t, x) = \begin{cases} 0, & t - x/2 < 0, \\ p_0 \sin[10(t - x/2)], & 0 \leq t - x/2 \leq \pi, \\ 0, & t - x/2 > \pi; \end{cases}$$

здесь $p_0 = 1.5$ ГПа. Таким образом, пик давления имеет ширину $\pi/5$ см

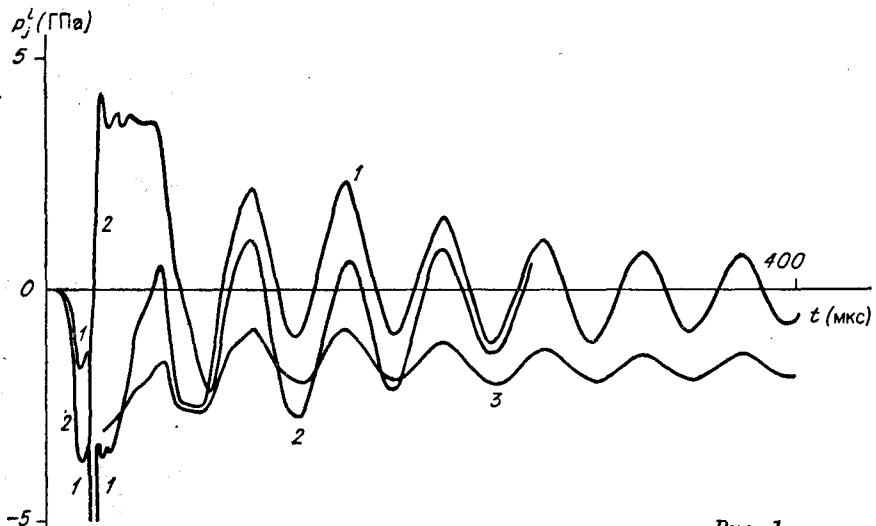


Рис. 1.

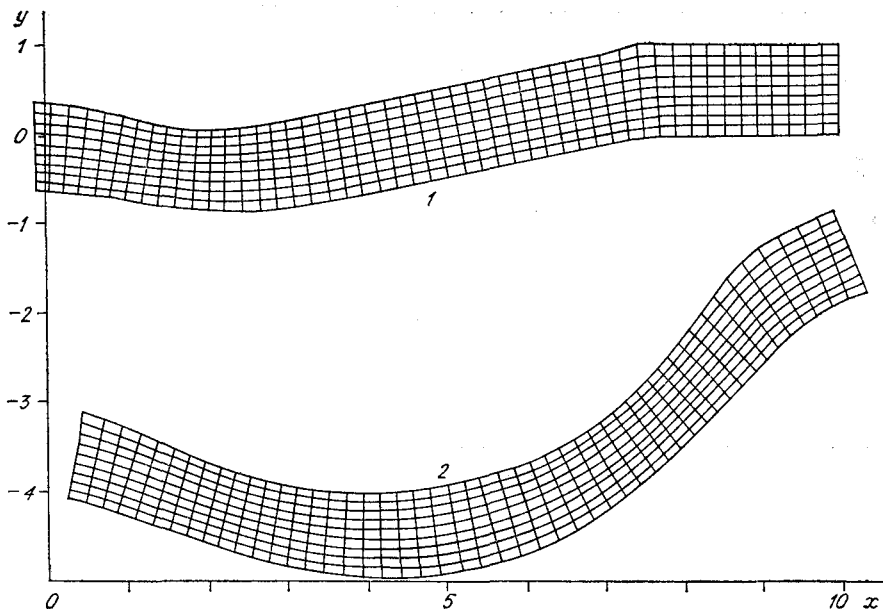


Рис. 2.

и нарастает от нуля на левом конце пластины до максимума за 10^{-5} с, пройдя за это время 2 см.

В расчете было взято 50 точек по координате ξ и 10 точек по η . В начальный момент (ξ, η) и (x, y) совпадают, число шагов расчета было взято 2400. На рис. 1 приведена зависимость напряжения p_1^1 от времени в точках с номерами (25,9) — кривая 1 и (25,2) — кривая 2, где 25 — номер точки по оси ξ , а 9 и 2 — номера по оси η . Приведена также кривая p_3^3 напряжения, действующего перпендикулярно плоскости (x, y) в точке (25,9). Нумерация точек идет слева направо и снизу вверх.

Видно, что сразу после прохождения импульса давления у верхней поверхности пластины напряжение p_1^1 сжимающее и совершает мелкие колебания вблизи предела текучести, а у нижней поверхности — растягивающее и также колеблется вблизи предела текучести. Далее начинается сложный колебательный процесс, приводящий к выравниванию напряжений и колебаниям около нулевого уровня. При этом пластина изгибается, снимая остаточные напряжения; выпуклость, естественно, обращена кверху. Амплитуда прогиба не превышает 1 мм.

Напряжение p_2^2 , действующее по толщине пластины, в процессе колебаний близко к нулю. Температура в результате пластических деформаций вблизи верхней поверхности повышается не более чем на 10 К.

Таким образом, в данной задаче мы увидели возникновение остаточных напряжений после пластических деформаций и последствия этого — изгиб пластины.

Заметим, что рассмотренный импульс давления не очень велик по амплитуде, поэтому деформа-

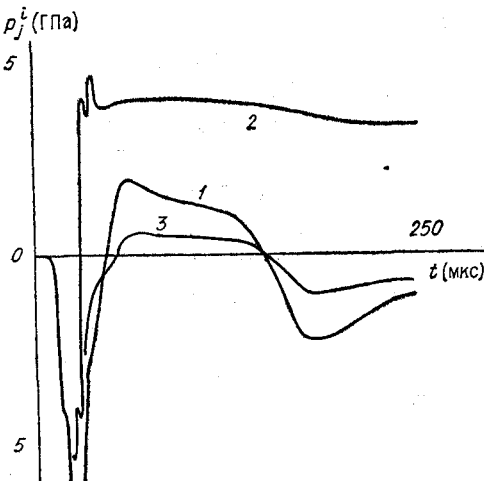


Рис. 3.

ции, возникающие здесь, не слишком большие. При увеличении амплитуды давления процесс становится более сложным — температура, растущая за счет пластических деформаций, становится большой. В результате возникают термические напряжения и картина становится совсем не похожей на предыдущую.

Рассмотрим также задачу о движении импульса давления по поверхности пластины, профиль его зададим тем же самым, но увеличим амплитуду $p_0 = 15$ ГПа, и возьмем $\varphi(t)$ убывающим до нуля на другом конце пластины:

$$\varphi(t) = \begin{cases} t, & t < 10^{-5} \text{с}, \\ 1, & 10^{-5} \text{с} < t < 3.7 \cdot 10^{-5} \text{с}, \\ 4.7 - t, & 3.7 \cdot 10^{-5} \text{с} < t < 4.7 \cdot 10^{-5} \text{с}, \\ 0, & t > 4.7 \cdot 10^{-5} \text{с}. \end{cases}$$

На рис. 2 показано движение пластины с течением времени. Фигуры 1 и 2 отвечают моментам времени $t = 39.6$ мкс и $t = 172.3$ мкс соответственно.

Поведение напряжений совершенно отличается от ранее рассмотренной задачи. На рис. 3 представлена зависимость напряжения p_1^1 от времени в точках с номерами (25,9) — кривая 1 и (25,2) — кривая 2. Как видно после прохождения импульса давления, напряжение p_1^1 вблизи верхней части пластины становится положительным (растягивающим). Это происходит за счет теплового расширения, обусловленного высокой температурой порядка 900 К. Спустя некоторое время напряжение p_1^1 вверху опять становится сжимающим, что, по-видимому, обусловлено изменением формы пластины. Кривая 3 изображает зависимость напряжения p_3^3 от времени в точке (25,9). Напряжение p_2^2 после прохождения импульса давления всюду мало. Температура, как уже говорилось, велика и достигает 900 К.

Для описания дальнейшего поведения пластины при больших временах необходимо учитывать процессы теплопроводности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Численное решение многомерных задач газовой динамики/С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов и др.— М.: Наука, 1976.— 400 с.
2. Colella P., Woodward P. The numerical simulation of two-dimensional flow with strong shocks // J. Comput. Phys.— 1984.— V. 54, N 1.— P. 115—173.
3. Годунов С. К., Роменский Е. И. Нестационарные уравнения нелинейной теории в эйлеровых координатах // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1972.— № 6.— С. 124—144.
4. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды.— М.: Наука, 1978.— 304 с.
5. Мерзиевский Л. А., Реснянский А. Д. Численное моделирование деформирования и разрушения пологой конической облицовки // Физика горения и взрыва.— 1987.— № 2.— С. 102—110.
6. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1.— М.: Наука, 1973.— 536 с.
7. Годунов С. К., Денисенко В. В., Козин Н. С., Кузьмина Н. К. Применение релаксационной модели вязкоупругости при расчете одноосных однородных деформаций и уточнении интерполяционных формул максвелловской вязкости // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1975.— № 5.— С. 162—167.
8. Годунов С. К., Сергеев-Альбов Н. Н. Уравнения линейной теории упругости с точечными максвелловскими источниками релаксации напряжений // Там же.— 1977.— № 4.— С. 140—152.