А. В. ТЫЩЕНКО

ПОСТРОЕНИЕ КОНФОРМНЫХ СЕТОК В ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

При численном решении уравнений с частными производными в областях произвольной формы широко используются различные методы машинного расчета сеток. В работах С. К. Годунова и Г. П. Прокопова [1, 2] был предложен алгоритм построения конформной сетки в криволинейном четырехугольнике, основанный на известной теореме о том, что любую односвязную область с четырьмя отмеченными на границе точками можно конформно отобразить на параллелограмм. Отмеченные точки при этом перейдут в угловые. Отношение сторон параллелограмма является конформным инвариантом и подлежит определению в процессе счета. Если задать в параллелограмме естественную сетку, образованную отрезками, параллельными его сторонам, то прообраз этой сетки и будет конформной сеткой в исходной области. Задача о поиске конформного отображения и параллелограмма, являющегося конформным образом криволинейного четырехугольника, реализована в виде задачи минимизации специального функционала [1, 2, 3, с. 227].

Доказанные в данной работе теоремы позволяют развить идеи С. К. Годунова и Г. П. Прокопова на случай двусвязной области. Пусть требуется построить сетку в двусвязной области P. Отметим на внешней границе области три точки a_1, a_2, a_3 и на внутренней — четыре точки b_1, b_2, b_3, b_4.

Одна из доказанных ниже теорем состоит в том, что всегда можно найти конформное отображение области P на область, ограниченную двумя прямоугольниками, причем стороны внешнего и внутреннего прямоугольников взаимно параллельны. При этом отмеченные на границах точки a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4 перейдут в угловые точки прямоугольников, а прообраз четвертой угловой точки определяется автоматически и зависит от выбора семи отмеченных ранее точек. Эта теорема является аналогом теоремы об отображении криволинейного четырехугольника на прямоугольник.

Доказанная в работе теорема 2 позволяет при выполнении некоторых условий регулировать угол между линиями сетки.

В § 3 выписан функционал, минимизируя который, можно построить сетку в исходной двусвязной области. В § 4 указан возможный способ построения сетки в двусвязной области сложной формы.

§ 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЯ ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ НА ОБЛАСТЬ, ОГРАНИЧЕННУЮ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛОГРАММАМИ

Пусть P — круговое кольцо $q < |z| < 1$, $z \in \mathbb{C}$, его граница $\partial P = \partial P_1 \cup \cup \partial P_2$, где $\partial P_1 = \{z, \ |z| = q\}$ и $\partial P_2 = \{z / |z| = 1\}$. Известно [4, с. 173; 5] обобщение формулы Кристоффеля — Шварца на случай двусвязных областей, а именно, функция $f(z)$ взаимно однозначно и конформно отображающая круговое кольцо на двусвязную область, внешней и внутренней границей которой являются многоугольники, имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{c_1} \int\limits_{z_0}^{z} \prod_{k=1}^{n} \left[\Theta\left(\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z}{a_k}, q\right)\right]^{\delta_k - 1} \frac{dz}{z^2} + c_2, \tag{1}$$

где z_0 — точка кольца P, точки a_k принадлежат ∂P и являются прообразами угловых точек границ области $f(P)$, $\pi\delta_k$ — внутренние по отношению к области $f(P)$ углы при вершинах $A_k = f(a_k)$, c_1 и c_2 — произвольные комплексные постоянные.

Тэта-функция Θ_1 представляется в виде бесконечного произведения [4, с. 74]

$$\Theta_1(v, q) = -iH_0(q)\,q^{1/4}(e^{i\pi v} - e^{-i\pi v})\prod_{k=1}^{\infty}(1 - q^{2k}e^{i2\pi v})(1 - q^{2k}e^{-i2\pi v}),$$

где $H_0(q) = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 - q^{2k})$. Воспользовавшись этим разложением и формулой (1), получим, что производная функции $f'(z)$ равна

$$f'(z) = \frac{1}{c_1 z^2}\prod_{k=1}^{n}\left[\Theta_1\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z}{a_k}, q\right)\right]^{\delta_k - 1} =$$

$$= \frac{1}{c_1 z^2}\prod_{k=1}^{n}(-iH_0(q)\,q^{1/4})^{\delta_k - 1}\prod_{k=1}^{n}\left[\widehat{\Theta}\left(\frac{z}{a_k}\right)\right]^{\delta_k - 1}, \tag{2}$$

где $\widehat{\Theta}(\xi) = (\xi^{1/2} - \xi^{-1/2})\prod\limits_{j=1}^{\infty}(1 - q^{2j}\xi)(1 - q^{2j}/\xi)$.

Всюду в дальнейшем будем считать, что постоянная c_1 выбрана так, что

$$\frac{1}{c_1}\prod_{k=1}^{n}\left(-iH_0(q)\,q^{\frac{1}{4}}\right)^{\delta_k - 1} = 1.$$

Следующей леммой мы часто будем пользоваться в дальнейшем.

Лемма 1. *Для функции* $\widehat{\Theta}(\xi)$ *имеем*

$$\arg\widehat{\Theta}(qe^{i\omega}) = \pi - \frac{\omega}{2} + 2\pi k_1, \quad k_1 \in \mathbf{Z},$$

$$\arg\widehat{\Theta}(q^{-1}e^{i\omega})\,\frac{\omega}{2} + 2\pi k_2, \quad k_2 \in \mathbf{Z},$$

$$\arg\widehat{\Theta}(e^{i\omega}) = \begin{cases}\pi/2 + 2\pi k_3, & \textit{если} \quad \omega \in\,]0, 2\pi[,\\ 3\pi/2 + 2\pi k_3, & \textit{если} \quad \omega \in\,]-2\pi, 0[.\end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\xi = qe^{i\omega}$. Верна следующая цепочка равенств:

$$\widehat{\Theta}(qe^{i\omega}) = (q^{1/2}e^{i\omega/2} - q^{-1/2}e^{-i\omega/2})\prod_{j=1}^{\infty}(1 - q^{2j-1}e^{-i\omega})(1 - q^{2j+1}e^{i\omega}) =$$

$$= -q^{-1/2}e^{-i\omega/2}(1 - qe^{i\omega})\prod_{j=1}^{\infty}(1 - q^{2j-1}e^{-i\omega})(1 - q^{2j+1}e^{i\omega}) =$$

$$= -q^{-1/2}e^{-i\omega/2}\prod_{j=1}^{\infty}|1 - q^{2j-1}e^{i\omega}|^2.$$

Отсюда следует первое равенство. Аналогично

$$\widehat{\Theta}(q^{-1}e^{i\omega}) = (q^{-1/2}e^{i\omega/2} - q^{1/2}e^{-i\omega/2})\prod_{j=1}^{\infty}(1 - q^{2j+1}e^{-i\omega})(1 - q^{2j-1}e^{i\omega}) =$$

$$= q^{-1/2}e^{i\omega/2}(1 - qe^{-i\omega})\prod_{j=1}^{\infty}(1 - q^{2j+1}e^{-i\omega})(1 - q^{2j-1}e^{i\omega}) =$$

$$= q^{-1/2}e^{i\omega/2}\prod_{j=1}^{\infty}|1 - q^{2j-1}e^{i\omega}|^2.$$

Последняя формула верна, так как

$$\widehat{\Theta}(e^{i\omega}) = (e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2})\prod_{j=1}^{\infty}(1 - q^{2j}e^{-i\omega})(1 - q^{2j}e^{i\omega}) =$$

$$= 2i \sin \omega/2 \prod_{j=1}^{\infty} |1 - q^{2j} e^{i\omega}|^2.$$

Лемма доказана.

Пусть на границе кольца P отмечены восемь точек $a_k = e^{i\alpha_k}$, $b_k = q e^{i\beta_k}$, $k = 1, 4$, причем для определенности будем считать, что $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < 2\pi$, $0 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4 < 2\pi$. Поставим в соответствие точкам a_k числа $\delta^k \in (0, 1)$, точкам b_k — числа $\delta_k \in (0, 1)$ такие, что $\sum\limits_{k=1}^{4} \delta^k = \sum\limits_{k=1}^{4} \delta_k = 2$. Согласно формуле (1) функция

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} \prod_{k=1}^{4} \left[\widehat{\Theta}\left(\frac{z}{a_k}\right)\right]^{(\delta^k - 1)} \left[\widehat{\Theta}\left(\frac{z}{b_k}\right)\right]^{(1-\delta_k)} \frac{dz}{z^2}$$

при $z_0 \in P$ осуществляет конформное отображение кольца $q < |z| < 1$ на область, ограниченную двумя четырехугольниками, причем внутренние углы при вершинах четырехугольников $A_k = f(a_k)$ и $B_k = f(b_k)$ равняются δ^k и $2 - \delta_k$ соответственно.

Вычислим угол между векторами $\overrightarrow{A_1 A_2}$ и $\overrightarrow{B_1 B_2}$. Для этого необходимо рассмотреть поведение функций $\widehat{\Theta}(z/a_k)$ и $\widehat{\Theta}(z/b_k)$ при движении точки z от внутренней до внешней границы.

Выберем углы φ_1 и φ_2 так, что $\beta_1 < \varphi_1 < \beta_2$, $\alpha_1 < \varphi_2 < \alpha_2$, $\varphi_1 \geqslant \varphi_2$. Очевидно, что это всегда можно сделать. Пусть

$$\varphi(r) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{1 - q} r + \frac{\varphi_1 - q\varphi_2}{1 - q}.$$

При изменении r от q до 1 линия, образованная точкой $z = re^{i\varphi(r)}$, соединит некоторые точки дуг $(\widehat{a_1, a_2})$ и $(\widehat{b_1, b_2})$. Выбрав значения функций $\widehat{\Theta}(re^{i\varphi(r)}/a_k)$, $\widehat{\Theta}(re^{i\varphi(r)}/b_k)$ при $r = q$ и меняя r от q до 1, мы однозначно получим значения этих аргументов при $r = 1$. Отметим, что из утверждений леммы 1 этот результат следует с точностью до 2π.

Пользуясь явным видом функции $\widehat{\Theta}(\xi)$, несложно проверить, что точки $\widehat{\Theta}(re^{i\varphi(r)}/a_k)$ и $\widehat{\Theta}(re^{i\varphi(r)}/b_k)$ не могут делать оборота вокруг центра при r, меняющемся от q до 1, и, следовательно, если положим

$$\arg \widehat{\Theta}(re^{i\varphi(r)})|_{r=q} = \arg \widehat{\Theta}\left(qe^{i\varphi_1}\right) = \pi - \frac{\varphi_1}{2},$$

$$\arg \widehat{\Theta}(re^{i\quad r)}/a_k)/_{r=q} = \arg \widehat{\Theta}\left(qe^{i(\varphi_1 - \alpha_k)}\right) = \pi - \frac{\varphi_1 - \alpha_k}{2}, \ k = 2, 3, 4,$$

$$\arg \widehat{\Theta}(re^{i\varphi(r)}/b_1)|_{r=q} = \arg \widehat{\Theta}\left(e^{i(\varphi_1 = \beta_1)}\right) = \pi/2,$$

$$\arg \widehat{\Theta}(re^{i\varphi(r)}/b_k)|_{r=q} = \arg \widehat{\Theta}\left(e^{i(\varphi_1 - \beta_k)}\right) = 3\pi/2, \ k = 2, 3, 4,$$

то имеем

$$\arg \widehat{\Theta}(re^{i\varphi(r)})|_{r=1} = \arg \widehat{\Theta}\left(e^{i\varphi_2}\right) = \pi/2,$$

$$\arg \widehat{\Theta}(re^{i\varphi(r)}/a_k)|_{r=1} = \arg \widehat{\Theta}\left(e^{i(\varphi_2 - \alpha_k)}\right) = 3\pi/2 \text{ при } k = 2, 3, 4,$$

$$\arg \widehat{\Theta}(re^{i\varphi(r)}/b_1)|_{r=1} = \arg \widehat{\Theta}\left(q^{-1} e^{i(\varphi_2 - \beta_1)}\right) = \frac{\varphi_2 - \beta_1}{2},$$

$$\arg \widehat{\Theta}(re^{i\varphi(r)}/b_k)|_{r=1} = \arg \widehat{\Theta}\left(q^{-1} e^{i(\varphi_2 - \beta_k)}\right) = 2\pi + \frac{\varphi_2 - \beta_k}{2}, \ k = 2, 3, 4.$$

Таким образом,

$$\arg \overrightarrow{A_1 A_2} - \arg \overrightarrow{B_1 B_2} = \arg\left(f'\left(e^{i\varphi_2}\right) ie^{i\varphi_2} d\varphi\right) - \arg\left(f'\left(qe^{i\varphi_1}\right) iqe^{i\varphi_1} d\varphi\right) =$$

$$= -2\varphi_2 + (\delta^1 - 1)\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\sum_{k=2}^{4}(\delta^k - 1) + (1-\delta_1)\left(\frac{\varphi_2 - \beta_1}{2}\right) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{k}(1-\delta_k)\left(2\pi + \frac{\varphi_2 - \beta_k}{2}\right) + \frac{\pi}{2} + \varphi_2 - \left[-2\varphi_1(\delta^1 - 1)\left(\pi - \frac{\varphi_1}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=2}^{4}(\delta^k - 1)\left(\pi - \frac{\varphi_1 - \alpha_k}{2}\right) + (1-\delta_1)\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\sum_{k=2}^{4}(1-\delta_k) + \frac{\pi}{2} + \varphi_1\right] =$$

$$= \pi(\delta_1 - \delta^1) + \sum_{k=1}^{4}\left[(1-\delta^k)\frac{\alpha_k}{2} + (\delta_k - 1)\frac{\beta_k}{2}\right].$$

Таким образом, доказана следующая

Лемма 2. *Пусть функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение кольца $q < |z| < 1$ с отмеченными на границах точками $a_k = e^{i\alpha_k}$, $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < 2\pi, b_k = qe^{i\beta_k}$, $0 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4$ на область, границами которой являются четырехугольники такие, что внутренние углы при вершинах $A_k = f(a_k)$, $B_k = f(b_k)$ равны δ^k и $2 - \delta_k$ соответственно. Тогда угол γ между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}$ вычисляется по формуле*

$$\gamma = \pi(\delta_1 - \delta^1) + \sum_{k=1}^{4}\left[(1-\delta^k)\frac{\alpha_k}{2} + (\delta_k - 1)\frac{\beta_k}{2}\right].$$

В качестве примера рассмотрим кольцо

$$P = \{z/q < |z| < 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = i,\ a_3 = -1,\ a_4 = -i,$$
$$b_1 = q,\ b_2 = iq,\ b_3 = -q,\ b_4 = -iq\}.$$

Пусть $\delta^1 = \delta^3 = \omega_1$, $\delta^2 = \delta^4 = 1 - \omega_1$, $\delta_1 = \delta_3 = \omega_2$, $\delta_2 = \delta_4 = 1 - \omega_2$, где ω_1, $\omega_2 \in (0,\ 1)$. Тогда из принципа симметрии вытекает, что кольцо P можно конформно отобразить на область, внешней и внутренней границами которой являются ромбы. При этом внутренние углы при вершинах A_1 и B_1 равны ω_1 и $2 - \omega_2$ соответственно, а прямая, проходящая через точки A_1, A_3, B_1, B_3, перпендикулярна прямой, проходящей через точки A_2, A_4, B_2, B_4. Несложно видеть, что величины углов между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}$, найденные по формуле леммы 2 и геометрически, совпадают и равны $\pi(\omega_2 - \omega_1)/2$.

§ 2. ТЕОРЕМЫ ОБ ОТОБРАЖЕНИИ ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ НА ШАБЛОН

Пусть границами двусвязной области являются параллелограммы $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$ с внутренними углами δ и $2 - \delta$ при вершинах A_1 и B_1 соответственно. Если при этом стороны двух параллелограммов взаимно параллельны, то эту область будем обозначать символом $S(\delta)$ и называть *шаблоном*. Естественной сеткой в области $S(\delta)$ является сетка, образованная отрезками, параллельными сторонам параллелограммов (рис. 1).

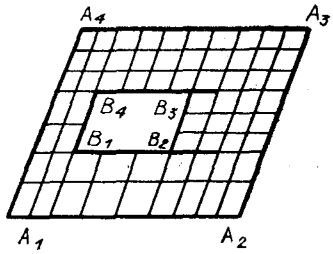

Рис. 1.

Если известно конформное отображение некоторой двусвязной области P на шаблон $S(\delta)$, то естественная сетка в шаблоне индуцирует сетку в области P, углы между линиями которой равны $\delta\pi$ и $(1-\delta)\pi$. При $\delta = 0.5$ сетка является ортогональной.

Обозначим символом $P(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4)$ двусвязную область с отмеченными на внешней границе точками a_1, a_2, a_3, a_4, а на внутренней границе — точками b_1, b_2, b_3, b_4. Будем говорить, что область $P(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4)$ *конформно эквивалентна* $S(\delta)$, если существует конформное отображение f области P на $S(\delta)$ такое, что $A_k = f(a_k)$, $B_k = f(b_k)$.

Теорема 1. *На внешней границе двусвязной области P существует единственная точка a такая, что область $P(a_1, a_2, a_3, a, b_1, b_2, b_3, b_4)$ конформно эквивалентна шаблону $S(0.5)$. Если a совпадает с одной из точек a_1, a_2, a_3, то две стороны шаблона являются лучами.*

Доказательство. Область P без ограничения общности можно считать круговым кольцом $q < |z| < 1$. На границе этого кольца выбраны точки $a_k = e^{i\alpha_k}$, $k = \overline{1, 3}$; $b_k = qe^{i\beta_k}$, $k = \overline{1, 4}$. Причем, можно считать, что $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < 2\pi$, $0 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4 < 2\pi$.

Выберем на внешней границе еще одну точку $a = e^{i\alpha}$, $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. В этом случае существует отображение кольца $q < |z| < 1$ на область, ограниченную двумя прямоугольниками, такое, что отмеченные точки переходят в угловые, т. е. $f(a_k) = A_k$, $f(a) = A$, $f(b_k) = B_k$.

Из доказанной в § 1 леммы 2 следует, что вне зависимости от того, какой дуге принадлежит точка a, угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ (или $\overrightarrow{A_1A}$, если точка $a \in \overset{\frown}{(a_1, a_2)}$) и $\overrightarrow{B_1B_2}$ вычисляется по формуле

$$\gamma(\alpha) = \frac{1}{4}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \beta_4).$$

Так как α лежит в интервале $[0, 2\pi)$, то существует единственное значение $\alpha = \hat{\alpha}$ такое, что $\gamma(\hat{\alpha})$ кратно $\pi/2$, и, следовательно, область $A_1A_2A_3AB_1B_2B_3B_3$ является шаблоном.

Если полученное значение $\hat{\alpha}$ совпадает с одним из значений α_k, то выполнено второе условие теоремы: внешний прямоугольник вырождается в треугольник с одной вершиной в бесконечности. Теорема доказана.

Замечание. В качестве примера вырожденного случая приведем область P с семью отмеченными на границе точками, отображающуюся на шаблон с бесконечными сторонами. Пусть

$$P = \{z/q < |z| < 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = i,\ a_3 = e^{i5\pi/4},$$
$$b_1 = q,\ b_2 = iq,\ b_3 = -q,\ b_4 = iq\},$$

тогда $\gamma(\alpha) = \frac{1}{4}\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right)$. Значение $\gamma(\alpha)$ кратно $\pi/2$ в случае $\alpha = 5\pi/4$, т. е. при $a = a_3$.

В случае произвольного $\delta \in (0, 1)$, $\delta \neq 0.5$ выбор семи точек на границе P не может осуществляться произвольно. В частности, это является следствием того, что область $S(\delta)$ при $\delta \neq 0.5$ является шаблоном только тогда, когда угол γ между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ (или $\overrightarrow{A_1A}$, если точка $a \in \overset{\frown}{(a_1, a_2)}$) и $\overrightarrow{B_1B_2}$ кратен π, а не $\pi/2$, как при $\delta = 0.5$.

Теорема 2. *Пусть на внешней границе кольца $q < |z| < 1$ выбраны точки $a_k = e^{i\alpha_k}$, $k = \overline{1, 3}$, $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < 2\pi$, а на внутренней — точки $b_k = qe^{i\beta_k}$, $0 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \beta_4 < 2\pi$. Тогда на внешней границе существует точка $a = e^{i\alpha}$ такая, что область $P(a_1, a_2, a_3, a, b_1, b_2, b_3, b_4)$ конформно эквивалентна области $S(\delta)$, если и только если в интервале*

$$\left[\frac{(1-\delta)}{2}(\alpha_2 - \beta_1 - \beta_3) + \frac{\delta}{2}(\alpha_3 - \beta_2 - \beta_4), \frac{(1-\delta)}{2}(\alpha_3 - \beta_1 - \beta_3) + \right.$$
$$\left. + \frac{\delta}{2}(\alpha_2 - \beta_2 - \beta_4) + \delta\pi\right]$$

содержится число, кратное π. Отметим, что у $S(\delta)$ внешняя граница может вырождаться.

Доказательство. Выберем произвольно на внешней границе точку $a = e^{i\alpha}$, $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. В этом случае существует отображение

$f(z)$ этого кольца на область, границами которой являются параллелограммы, а отмеченные точки являются прообразами угловых точек, при этом внутренние углы при вершинах A_1 и B_1 равняются δ и $2-\delta$ соответственно. Нас интересует величина угла между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ (или $\overrightarrow{A_1A}$, если $a\in(\overset{\frown}{a_1, a_2})$) и $\overrightarrow{B_1B_2}$. В зависимости от того, на какой из трех дуг $(\overset{\frown}{a_1, a_2})$ $(\overset{\frown}{a_2, a_3})$ и $(\overset{\frown}{a_3, a_1})$ находится точка a, возможны три случая.

Случай 1. Предположим, что $a\in(\overset{\frown}{a_1, a_2})$, т. е. $\alpha\in(0, \alpha_2)$. Тогда угол $\gamma^1(\alpha)$ между векторами $\overrightarrow{A_1A}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}$ вычисляется по формуле

$$\gamma^1(\alpha)=\frac{1-\delta}{2}(\alpha_2-\beta_1-\beta_3)+\frac{\delta}{2}(\alpha+\alpha_3-\beta_2-\beta_4).$$

Случай 2. Пусть $a\in(\overset{\frown}{a_2, a_3})$, т. е. $\alpha\in(\alpha_2, \alpha_3)$. Тогда угол $\gamma^2(\alpha)$ между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}$ вычисляется по формуле

$$\gamma^2(\alpha)=\frac{(1-\delta)}{2}(\alpha-\beta_1-\beta_3)+\frac{\delta}{2}(\alpha_2+\alpha_3-\beta_2-\beta_4).$$

Случай 3. Пусть $a\in(\overset{\frown}{a_3, a_1})$, т. е. $\alpha\in(\alpha_3, 2\pi)$. Тогда угол $\gamma^3(\alpha)$ между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}$ вычисляется по формуле

$$\gamma^3(\alpha)=\frac{(1-\delta)}{2}(\alpha_3-\beta_1-\beta_3)+\frac{\delta}{2}(\alpha_2+\alpha-\beta_2-\beta_4).$$

Несложно заметить, что функция

$$\gamma(\alpha)=\begin{cases}\gamma^1(\alpha) & \text{при} \quad \alpha\in(0, \alpha_2),\\ \gamma^2(\alpha) & \text{при} \quad \alpha\in(\alpha_2, \alpha_3),\\ \gamma^3(\alpha) & \text{при} \quad \alpha\in(\alpha_3, 2\pi)\end{cases}$$

непрерывна и монотонно возрастает. Таким образом, для того, чтобы область, ограниченная двумя параллелограммами, была шаблоном, необходимо и достаточно выполнения следующего условия: в интервале $(\gamma^1(0), \gamma^3(2\pi))$ должно содержаться число, кратное π. Теорема доказана.

Замечания 1. Отрезок $(\gamma^1(0), \gamma^3(2\pi))$ не всегда содержит число, кратное π. Пусть $\delta=1/3$ и

$$P=\{z/q<|z|<1,\ a_1=1,\ a_2=e^{i\pi/6},\ a_3=e^{i\pi/3},$$
$$b_1=q,\ b_2=iq,\ b_3=-q,\ b_4=-iq\}.$$

Тогда $\gamma^1(0)=-5\pi/9$, $\gamma^3(2\pi)=-7\pi/36$. Очевидно, что интервал $(-5\pi/9, -7\pi/36)$ не содержит число, кратное π.

2. Если существует точка a такая, что область $P(a_1, a_2, a_3, a, b_1, b_2, b_3, b_4)$ конформно эквивалентна шаблону $S(\delta)$, то она единственна. Действительно, длина интервала $(\gamma^1(0), \gamma^3(2\pi))$ равна $\gamma^3(2\pi)-\gamma^1(0)=$ $=\frac{1-2\delta}{2}(\alpha_3-\alpha_2)+\pi\delta$ и, как несложно заметить, строго меньше π.

§ 3. ФУНКЦИОНАЛ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ СЕТКИ

Пусть P — двусвязная область, в которой требуется построить сетку с углом между линиями $\pi\delta$, $0<\delta<1$. На внешней границе выберем точки a_1, a_2, a_3, на внутренней — точки b_1, b_2, b_3, b_4. Всюду далее мы будем предполагать, что выбор точек удовлетворяет следующим условиям:

— существует точка a такая, что область $P(a_1, a_2, a_3, a, b_1, b_2, b_3, b_4)$ конформно эквивалентна шаблону $S(\delta)$,

— искомая точка a принадлежит дуге $(\widehat{a_3, a_1})$,

— векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}$ сонаправлены.

Тогда задачу об отыскании точки a, геометрических параметров шаблона и конформного отображения $U=f^{-1}$ шаблона на область P можно рассматривать как вариационную задачу о минимизации некоторого функционала $\Phi(U, S(\delta))$, определенного на множестве шаблонов $S(\delta)$ и функциях, отображающих шаблон на область P. Подобный подход был осуществлен в работах [1; 2; 3, с. 227] в случае односвязной области. В этом случае аналогом используемых в данной работе теорем 1 и 2 явилась известная теорема о том, что любую односвязную область с четырьмя отмеченными на границе точками можно конформно отобразить на параллелограмм так, что отмеченные точки перейдут в угловые. Отношение сторон параллелограмма зависит от выбора точек и подлежит определению.

Пусть шаблон $\widehat{S}(\delta)$, соответствующий области P с семью отмеченными точками, найден. Тогда для функции $\widehat{U}(\xi, \eta)=\widehat{x}(\xi, \eta)+i\widehat{y}(\xi, \eta)$, конформно отображающей шаблон $\widehat{S}(\delta)$ на область P, выполнены условия Коши — Римана и, следовательно,

$$\iint\limits_{\widehat{S}(\delta)} [(\widehat{x}_\xi - \widehat{y}_\eta)^2 + (\widehat{x}_\eta + \widehat{y}_\xi)^2]\, d\xi\, d\eta = 0. \tag{3}$$

Шаблон $S(\delta)$ определяется однозначно с точностью до нормировки. Нормировку шаблона зададим следующим образом:

— координаты точки A_1 равны 0,

— вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ направлен вдоль оси ξ, $|A_1A_2|=1$,

— угол между осью η и вектором $\overrightarrow{A_1A_4}$ равняется $(1-2\delta)\pi/2$.

Из формулы (3) следует, что

$$\Phi(u, S(\delta)) \triangleq \iint\limits_{S(\delta)} (x_\xi^2 + y_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\eta^2)\, d\xi\, d\eta \geqslant 2\,|P|,$$

где $|P|$ — площадь исходной области. Функционал $\Phi(U, S(\delta))$ определен на множестве шаблонов $S(\delta)$ и на классе функций $U(\xi, \eta)= =x(\xi, \eta)+iy(\xi, \eta)$, отображающих $S(\delta)$ на область P и обладающих следующими свойствами:

— существует $\Phi(U, S(\delta))$,

— на границах шаблона функция U устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками границ шаблона и области, причем

$$U(A_k)=a_k,\quad k=1, 2, 3,\quad U(B_k)=b_k,\quad k=1, 2, 3, 4.$$

Единственный минимум функционала $\Phi(U, S(\delta))$ достигается на нормированном шаблоне $S(\delta)$ и конформном отображении U шаблона $S(\delta)$ на P. При этом на внешней границе определяется четвертая угловая точка, которая, как предполагалось раньше, лежит на дуге (a_3, a_1).

Шаблон $S(\delta)$ удобно разбить на восемь счетных областей (рис. 2) отрезками, выходящими из точек B_k параллельно сторонам параллелограммов. Третье из постулированных в начале параграфа условий означает, что точки A_1 и B_1 — угловые точки одной счетной области. Обозначим области $A_1C_1B_1C_8$, $C_1C_2B_2B_1$, ..., $C_8B_1B_4C_7$ символами $S_1, S_2, \ldots, S_8$ соответственно. Тогда $S(\delta)=S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_8$. Геометрические характеристики шаблона считаем заданными следующим образом:

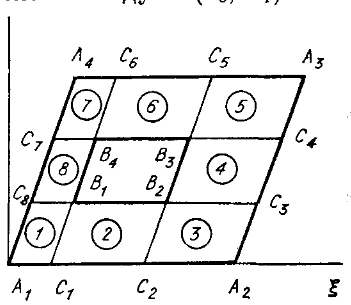

Рис. 2.

$$|A_1C_1| = e^{p_1}, \quad |C_1C_2| = e^{p_2}, \quad |C_2A_2| = e^{p_3},$$
$$|A_2C_3| = e^{q_1}, \quad |C_3C_4| = e^{q_2}, \quad |C_4A_3| = e^{q_3}.$$

Условие нормировки $|A_1A_2| = 1$ означает, что $e^{p_1} + e^{p_2} + e^{p_3} = 1$. С учетом этого функционал можно переписать в следующем виде:

$$\Phi(u, S(\delta)) = \int\limits_{S(\delta)}\int (|U_\xi|^2 + |U_\eta|^2)\, d\xi\, d\eta = \sum_{i=1}^{8} \int\limits_{S_i}\int (|U_\xi|^2 + |U_\eta|^2)\, d\xi\, d\eta.$$

Для каждой счетной области сделаем замену переменных, сводящую исходную область S_i к единичному квадрату. Например, для первой области имеем $\xi = e^{p_1}\alpha + e^{q_1}\cos\delta\beta$, $\eta = e^{q_1}\sin\delta\beta$ и, следовательно,

$$\int\limits_{S_1}\int (|U_\xi|^2 + |U_\eta|^2)\, d\xi\, d\eta = \int_0^1\int_0^1 \left[\left(e^{-p_1}\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(e^{-p_1}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)^2 + \right.$$
$$+ \left(e^{-p_1}\operatorname{ctg}\delta\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \frac{e^{-q_1}}{\sin\delta}\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)^2 +$$
$$\left. + \left(-e^{-p_1}\operatorname{ctg}\delta\frac{\partial y}{\partial\alpha} + \frac{e^{-q_1}}{\sin\delta}\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)^2\right] e^{p_1+q_1}\sin\delta\, d\alpha\, d\beta =$$
$$= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{e^{q_1-p_1}}{\sin\delta}\left|\frac{\partial U_1}{\partial\alpha}\right|^2 - 2\operatorname{ctg}\delta\operatorname{Re}\left(\frac{\partial U_1}{\partial\alpha}\frac{\overline{\partial U_1}}{\partial\beta}\right) + \frac{e^{p_1-q_1}}{\sin\delta}\left|\frac{\partial U_1}{\partial\beta}\right|^2\right) d\alpha\, d\beta.$$

Если ввести обозначение

$$F(p, q, U) = \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{e^{q-p}}{\sin\delta}\left|\frac{\partial U}{\partial\alpha}\right|^2 - 2\operatorname{ctg}\delta\operatorname{Re}\left(\frac{\partial U}{\partial\alpha}\frac{\overline{\partial U}}{\partial\beta}\right) + \frac{e^{p-q}}{\sin\delta}\left|\frac{\partial U}{\partial\beta}\right|^2\right) d\alpha\, d\beta,$$

то, сделав аналогичные замены для всех счетных областей, будем иметь

$$\Phi(U, S(\delta)) = F(p_1, q_1, U_1) + F(p_2, q_1, U_2) + F(p_3, q_1, U_3) +$$
$$+ F(p_3, q_2, u_4) + F(p_3, q_3, U_5) + F(p_2, q_3, U_6) +$$
$$+ F(p_1, q_3, U_7) + F(p_1, q_2, U_8).$$

На функции $U_k(\alpha, \beta)$ наложены граничные условия склейки:

$$U_1(1, \beta) = U_2(0, \beta), \qquad U_2(1, \beta) = U_3(0, \beta),$$
$$U_3(\alpha, 1) = U_4(\alpha, 0), \qquad U_4(\alpha, 1) = U_5(\alpha, 0),$$
$$U_5(0, \beta) = U_6(1, \beta), \qquad U_6(0, \beta) = U_7(1, \beta),$$
$$U_7(\alpha, 0) = U_8(\alpha, 1), \qquad U_8(\alpha, 0) = U_1(\alpha, 1).$$

Граничные условия, индуцированные граничными условиями на $U(\xi, \eta)$, имеют вид:

— точки $U_1(\alpha, 0)$, $U_2(\alpha, 0)$, $U_3(\alpha, 0)$ принадлежат дуге $(\widehat{a_1, a_2})$,

— точки $U_3(1, \beta)$, $U_4(1, \beta)$, $U_5(1, \beta)$ принадлежат дуге $(\widehat{a_2, a_3})$,

— точки $U_5(\alpha, 1)$, $U_6(\alpha, 1)$, $U_7(\alpha, 1)$, $U_8(0, \beta)$, $U_7(0, \beta)$, $U_1(0, \beta)$ принадлежат дуге $(\widehat{a_3, a_1})$,

— точки $U_2(\alpha, 1)$, $U_4(0, \beta)$, $U_6(\alpha, 0)$, $U_8(1, \beta)$ принадлежат дугам $(\widehat{b_1, b_2})$, $(\widehat{b_2, b_3})$, $(\widehat{b_3, b_4})$ и $(\widehat{b_4, b_1})$ соответственно.

§ 4. ОРТОГОНАЛЬНАЯ СЕТКА В ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Пусть P — двусвязная область и известно конформное отображение этой области на область, ограниченную двумя многоугольниками, такими, что внутренние углы при вершинах равны либо $\pi/2$, либо $3\pi/2$ и каждый отрезок внешней границы параллелен или ортогонален любому отрезку внутренней границы. Будем называть такие области шаблоном, так как простейшей областью такого типа являются области вида $S(0.5)$, внешняя и внутренняя граница которых прямоугольники.

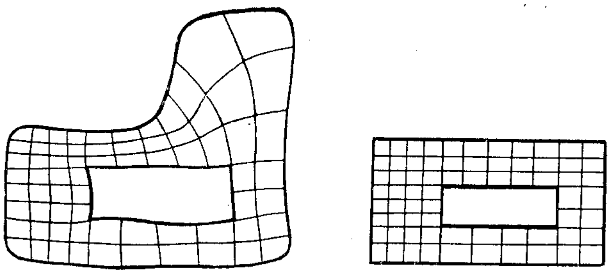

Рис. 3.

В шаблоне легко построить ортогональную сетку, линии которой параллельны сторонам многоугольников. Конформный прообраз этой сетки образует ортогональную сетку в области P. В зависимости от формы шаблона, в области P можно построить ортогональные сетки различной топологической структуры, которую надо выбирать, исходя из формы границы. Поясним это утверждение на примере области, изображенной на рис. 3, 4.

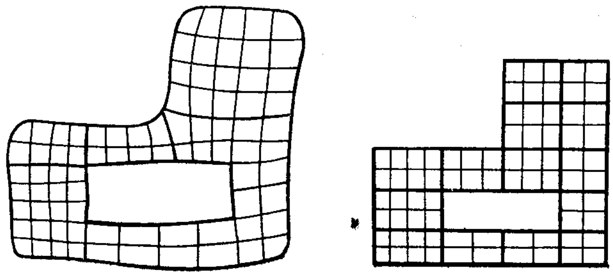

Рис. 4.

На рис. 3 схематически изображена сетка, которая была бы построена по шаблону, внешняя и внутренняя границы которого прямоугольники. Однако более естественной в этой области выглядит сетка, построенная по шаблону, внешняя граница которого есть прямолинейный шестиугольник, а внутренняя — прямоугольник. Схематический вид такой ортогональной сетки изображен на рис. 4.

Для произвольной двусвязной области P встает следующий вопрос: какие данные необходимы для того, чтобы ортогональная сетка заданной топологической структуры существовала и была единственной?

В теореме 1 (§ 2) утверждалось, что если зафиксировать три точки на внешней и четыре точки на внутренней границах, то всегда существует конформное отображение этой области на шаблон $S(0.5)$, при котором отмеченные точки переходят в угловые. Прообраз четвертой угловой точки на внешней границе определяется автоматически единственным образом. Отметим, что возможна вырожденная ситуация, когда четвертая угловая точка совпадает с одной из выбранных ранее точек. В этом случае внешняя граница шаблона вырождается в треугольник с одной из вершин в бесконечности.

Оказывается, подобная теорема выполнена и для шаблонов более сложной формы. Имеют место легко проверяемые утверждения.

Пусть $\mathscr{L}$ — замкнутый многоугольник с внутренними углами при вершинах A_j, равными $\pi\alpha_j$, где α_j либо 0.5, либо 1.5. Тогда

а) число вершин A_j четно, причем число $\alpha_j = 0.5$ на четыре больше числа $\alpha_j = 1.5$,

б) суммарная величина внутренних углов равна $2\pi(M-1)$, где $2M$ — число вершин, $M \geqslant 2$, т. е.

$$\sum_{j=1}^{2M} \alpha_j = 2(M-1).$$

Если $\pi\alpha^j$ — внешний угол при вершине A_j, то

$$\sum_{j=1}^{2M} \alpha^j = \sum_{j=1}^{2M} (2-\alpha_j) = 2(M+1).$$

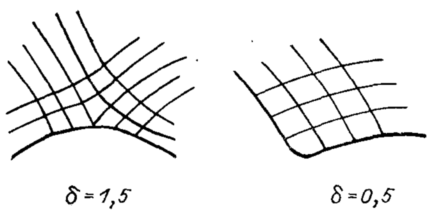

Рис. 5.

Отметим на внешней границе двусвязной области P, без ограничения общности ее можно считать круговым кольцом, $2M-1$ точку a_j $(j=\overline{1,\ 2M-1})$, $M \geqslant 2$, на внутренней границе — $2L$ точку b_j $(j=\overline{1,\ 2L})$, $L \geqslant 2$. Точкам a_j поставим в соответствие числа δ^j, равные либо 0.5, либо 1.5 такие, что

$$\sum_{j=1}^{2M-1} \delta^j + \delta = 2(M-1),$$

где δ — некоторое число, равное либо 0.5, либо 1.5.

Точкам b_j поставим в соответствие числа δ_j, равные либо 0.5, либо 1.5 такие, что

$$\sum_{j=1}^{2L} \delta_j = 2(L+1).$$

Геометрически условие выбора для граничной точки числа δ, равного 0.5 или 1.5, означает выбор характера поведения линий сетки в окрестностях этой точки (рис. 5).

Выберем на внешней границе еще одну точку a. Функция

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} \left[\widehat{\Theta}\left(\frac{z}{a}\right)\right]^{\delta-1} \prod_{j=1}^{2M-1} \left[\widehat{\Theta}\left(\frac{z}{a_j}\right)\right]^{\delta^j-1} \prod_{j=1}^{2L} \left[\widehat{\Theta}\left(\frac{z}{b_j}\right)\right]^{\delta_j-1} \frac{dz}{z^2},$$

где z_0 — точка кольца P, осуществляет конформное отображение области P на область, ограниченную прямолинейными многоугольниками, у которых внутренние углы при вершинах $A_j = f(a_j)$, $A = f(a)$, $B_j = f(b_j)$ равны $\pi\delta^j$, $\pi\delta$ и $\pi\delta_j$ соответственно.

Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1, можно показать, что всегда существует единственная точка a на внешней границе такая, что $f(P)$ — шаблон. Если a будет совпадать с одной из точек a_j, то $f(P)$ — вырожденный шаблон, т. е. некоторые из граничных отрезков обращаются либо в точку, либо в луч.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Годунов С. К., Прокопов Г. П.** О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1967.— Т. 7, № 5.— С. 1031—1059.
2. **Прокопов Г. П.** Построение ортогональных разностных сеток посредством расчета конформных отображений.— М., 1970.— 16 с.— (Препр./АН СССР. Ин-т прикладной математики; № 45).
3. **Годунов С. К., Забродин А. В. и др.** Численное решение многомерных задач газовой динамики.— М.: Наука, 1976.
4. **Ахиезер Н. И.** Элементы теории эллиптических функций.— М.: Наука, 1970.
5. **Голузин Г. М.** О конформном отображении двусвязных областей, ограниченных прямолинейными и круговыми многоугольниками/Конформные отображения односвязных и многосвязных областей.— Л.; М.: Наука, 1937.— С. 98—110.