

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ОБЛАСТЯХ ТИПА МИКРОКАНАЛА

Приближенное решение краевых задач для эллиптических уравнений — одной из интенсивно развивающихся направлений в численных методах [1—10]. Наряду с работами, развивающими традиционные методы (конечно-разностные методы [1], методы интегральных уравнений [1—3]), появляются статьи, предлагающие новые подходы [4—6]. В данной работе описана технология и приведены результаты численной реализации метода решения осесимметричной задачи Дирихле для трехмерного уравнения Лапласа, предложенного и обоснованного в [7]. Там же кратко охарактеризованы и близкие методы [8—11]. По мнению авторов, к преимуществам используемого здесь метода следует отнести прежде всего то, что он позволяет учитывать априорную аналитическую информацию о задаче, в частности, особенности искомого решения в окрестностях угловых точек границы. При этом точно выполняются граничные условия и искомая функция аппроксимируется так, что разность между точным решением и приближенным гармонична. Немаловажно также и то, что численная реализация предложенного метода достаточно проста.

В данной статье задача Дирихле решается в областях типа микроканала, т. е. областях, составными частями которых являются цилиндры с высотой, много большей радиуса основания. При решении с гарантированной точностью переопределенных систем линейных уравнений авторы использовали пакет программ по линейной алгебре PALINA, идеология которого изложена в [13, 14]. Пакет разработан в отделе дифференциальных уравнений Института математики СО АН СССР чл.-кор. АН СССР С. К. Годуновым, сотрудниками В. И. Костиным, О. П. Кириллюком и др.

Авторы признательны чл.-кор. АН СССР С. К. Годунову, докт. физ.-мат. наук А. М. Блохину и всем сотрудникам отдела, принимавшим участие в неоднократных содержательных и полезных обсуждениях.

§ 1. СХЕМА МЕТОДА

Коротко изложим основные идеи метода, предложенного в [7]. Пусть исходная область Ω разбита на L осесимметричных частей $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_L$ и

а) для любого $m=1, 2, \dots, L-1$ существуют числа z_m, R_m такие, что шар $B(z_m, R_m) = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + (z - z_m)^2 \leq R_m^2\}$ лежит строго внутри области $\Omega_m \cap \Omega_{m+1}$;

б) граница Γ области Ω распадается на L частей $\Gamma_m = \partial\Omega_m \setminus (\partial\Omega_m \cap \partial\Omega)$, $m=1, 2, \dots, L$, каждая из которых либо осесимметричная поверхность, либо окружность.

Будем считать, что в каждой из областей Ω_m ($m=1, \dots, L$) известна полная последовательность линейно независимых гармонических z -осесимметричных функций $U_k^m(x, y, z)$ ($k=1, 2, \dots$), обращающихся в нуль на Γ_m . Ввиду осесимметричности, в качестве аргументов функций U_k^m можно взять параметры $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и z , т. е. $U_k^m = U_k^m(\rho, z)$.

Рассмотрим следующую краевую задачу: требуется найти в Ω гармоническую функцию $U = U(\rho, z)$, принадлежащую пространству $W_2^1(\Omega')$, где Ω' — произвольный компакт, лежащий в $\bar{\Omega}$, и принимающий на границе $\partial\Omega$ заданное значение F .

Обозначим F_m сужение F на Γ_m и $D(F_m)$ — класс гармонических z -осесимметричных функций в Ω_m , имеющих конечный интеграл Дирихле на любом компакте из Ω_m и принимающих значение F_m на Γ_m .

Если $f_m(\rho, z) \in D(F_m)$, то любой элемент $U^m(\rho, z)$ из $D(F_m)$ можно представить в виде сходящегося ряда

$$U^m(\rho, z) = f_m(\rho, z) + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^m U_k^m(\rho, z), \quad (1.1)$$

где X_k^m ($k = 1, 2, \dots$) — постоянные коэффициенты. Поэтому в каждой области Ω_m ($m = 1, \dots, L$) в качестве приближения к решению естественно брать частичную сумму ряда (1.1). Такой подход использовался, например, в работах [8–11], в которых авторы предлагают различные способы согласования локальных представлений решения.

Метод согласования локальных разложений, предлагаемый в данной статье, состоит в следующем. Для каждого m ($m = 1, \dots, L - 1$) выберем внутри $\Omega_m \cap \Omega_{m+1}$ на оси z точку z_m , которую будем называть точкой склейки. Возьмем параметр $\alpha_m > 0$ такой, что шар $B(z_m, \alpha_m)$ лежит в $\Omega_m \cap \Omega_{m+1}$. Тогда минимум функционала

$$\sum_{m=1}^{L-1} \int_{B(z_m, \alpha_m)} |\nabla(U^m - U^{m+1})|^2 dx dy dz \quad (1.2)$$

по всевозможным последовательностям коэффициентов X_k^m ($m = 1, \dots, L$; $k = 1, 2, \dots$) достигается на тех же последовательностях, которые соответствуют разложениям U в ряды (1.1).

Следом в точке z_0 гармонической в $B(z_0, \gamma)$ функции $U(\rho, z)$ будем называть следующий вектор из l_2 :

$$\bar{U}_\gamma(z_0) = \left((0, z_0), \frac{\gamma}{1!} \frac{\partial U}{\partial z}(0, z_0), \dots, \frac{\gamma^j}{j!} \frac{\partial^j U}{\partial z^j}(0, z_0), \dots \right).$$

Если сфера S_γ ограничивает шар $B(z_0, \gamma)$ и норма функции

$$\|U\|_{W_2^1(B(z_0, \gamma))}^2 = \frac{1}{4\pi\gamma^2} \int_{S_\gamma} |U|^2 dS + \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{B(z_0, \gamma)} |\nabla U|^2 dV$$

конечна, то $\bar{U}_\gamma(z_0)$ принадлежит l_2 и при этом (см. [7])

$$\|U\|_{W_2^1(B(z_0, \gamma))}^2 = \|\bar{U}_\gamma(z_0)\|_{l_2}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{\gamma^j}{j!} \frac{\partial^j U}{\partial z^j}(0, z_0) \right]^2.$$

Минимум функционала

$$\sum_{m=1}^{L-1} \|U^m - U^{m+1}\|_{W_2^1(B(z_m, \alpha_m))}^2 = \sum_{m=1}^{L-1} \|(\overline{U^m - U^{m+1}})_{\alpha_m}(z_m)\|_{l_2}^2 \quad (1.3)$$

достигается на той же последовательности X_k^m ($m = 1, \dots, L$; $k = 1, \dots$), на которой достигается минимум функционала (1.2). При этом для соответствующих функций U^m ($m = 1, \dots, L$) имеем

$$\|(\overline{U^m - U^{m+1}})_{\alpha_m}(z_m)\|_{l_2} = 0 \quad (m = 1, \dots, L - 1), \quad (1.4)$$

где z_m — точка склейки. Если набор функций U^m ($m = 1, \dots, L$), удовлетворяющих условиям (1.4), найден, то решение $U(\rho, z)$ задачи совпадает в каждой из компонент Ω_m с функцией $U^m(\rho, z)$.

Условия (1.4) можно переписать в виде системы линейных уравнений. Именно, обозначим

$$a_{jk}^m(z, \gamma) = \frac{\gamma^{j-1}}{(j-1)!} \frac{\partial^{j-1}}{\partial z^{j-1}} U_k^m(0, z).$$

Справедливы равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}^m(z_m, \gamma_m) X_k^m - \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}^{m+1}(z_m, \gamma_m) X_k^{m+1} =$$

$$= \frac{\gamma_m^{j-1}}{(j-1)!} \frac{\partial^{j-1}}{\partial z^{j-1}} (f^{m+1}(0, z_m) - f^m(0, z_m)) \quad (m = 1, 2, \dots, L-1; j = 1, 2, \dots).$$

(1.5)

Уравнения (1.5) можно записать в матричном виде. Положим $X = (X^1, X^2, \dots, X^L)^T$; $X^m = (X_1^m, X_2^m, \dots, X_k^m, \dots)$; $F = (F^1, F^2, \dots, F^{L-1})^T$; $F^m = (F_1^m, F_2^m, \dots, F_k^m, \dots)$;

$$F_k^m = \frac{\gamma_m^{k-1}}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} (f^{m+1}(0, z_m) - f^m(0, z_m)).$$

Тогда система (1.5) равносильна системе линейных уравнений $AX = F$, где бесконечная матрица A имеет блочный вид.

При численном решении задачи ограничимся конечным числом N_m уравнений в каждой точке склейки z_m и аппроксимируем решение в каждой из областей Ω_m конечным рядом, состоящим из M_m гармоник. В этих предположениях вместо системы линейных уравнений (1.5) с бесконечной матрицей A , нужно решать переопределенную систему линейных уравнений

$$A_{N,M} X_M = F_N,$$

где

$$N = (N_1, N_2, \dots, N_{L-1}); \quad M = (M_1, M_2, \dots, M_L);$$

$$X_M = (X_{M_1}^1, X_{M_2}^2, \dots, X_{M_L}^L)^T; \quad X_{M_m}^m = (X_1^m, X_2^m, \dots, X_{M_m}^m);$$

$$F_N = (F_{N_1}^1, F_{N_2}^2, \dots, F_{N_{L-1}}^{L-1})^T; \quad F_{N_m}^m = (F_1^m, F_2^m, \dots, F_{N_m}^m);$$

$$A_{J,K}^m = \|a_{jk}^m\|_{j=1,J}^{k=1,K};$$

$$A_{N,M} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{N_1, M_1}^1(z_1, \gamma_1) - A_{N_1, M_2}^2(z_1, \gamma_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{N_2, M_2}^2(z_2, \gamma_2) - A_{N_2, M_3}^3(z_2, \gamma_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots - A_{N_{L-1}, M_L}^L(z_{L-1}, \gamma_{L-1}) \end{bmatrix}$$

В заключение отметим, что для решения полученной системы линейных уравнений использовался метод итерационного уточнения [14].

§ 2. БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ В ОБЪЕДИНЕНИИ ДВУХ ШАРОВ

В качестве одной из компонент разбиения области типа микроканала удобно использовать множество Ω_* , получающееся объединением двух шаров (рис. 1). Как базисную систему гармонических осесимметричных в области Ω_* функций используем последовательность, предложенную ранее в [12]. Первый элемент этой последовательности, функция $U_0(\rho, z)$, достаточно хорошо, по мнению авторов, моделирует возможную особенность решения в окрестности окружности, по которой пересекаются границы шаров, образующих Ω_* . Функция $U_1(\rho, z)$ — тождественная единица, все остальные функции — гармонические полиномы.

Для реализации изложенного в § 1 метода необходимо уметь вычислять на оси симметрии все производные по z гармонических функций базисной последовательности. Доказанные ниже леммы позволяют организовать эти вычисления.

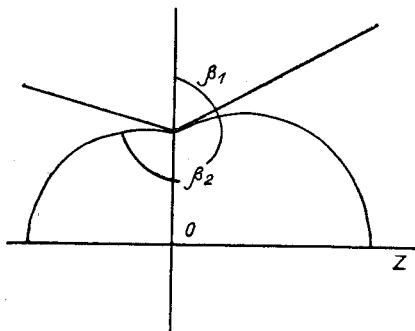


Рис. 1.

Пусть (α, β, φ) — тороидальные координаты, связанные с декартовыми координатами (x, y, z) формулами

$$x = \frac{\operatorname{sh} \alpha \cos \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta},$$

$$z = \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}.$$

Будем считать, что $0 \leq \alpha < \infty$, $0 \leq \beta < 2\pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. В этом случае прямой $\rho = 0$ будет соответствовать отрезок $\alpha = 0$, $0 < \beta < 2\pi$, а области, изображенной на рис. 1, — области $0 < \alpha < \infty$, $\beta_1 < \beta < \beta_2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Зададим последовательность функций $\tilde{U}_k(\alpha, \beta)$ ($k = 1, \dots$) следующими рекуррентными соотношениями:

$$\tilde{U}_1(\alpha, \beta) = 1,$$

$$\tilde{U}_k(\alpha, \beta) = \frac{(2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2}}{(k-1)} \mathcal{D}_\beta \left(\frac{\tilde{U}_{k-1}(\alpha, \beta)}{(2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2}} \right), \quad k \geq 2.$$

В [12] показано, что при $k \geq 2$ функции $U_k(\rho, z) = \tilde{U}_k(\alpha(\rho, z), \beta(\rho, z))$ — гармонические полиномы от переменных x, y, z , обращающиеся в нуль на окружности $x^2 + y^2 = 1$, лежащей в плоскости $z = 0$.

Построим рекуррентные формулы, позволяющие организовать вычисление функций U_k в произвольной точке (ρ, z) . Для этого заметим, что

$$\tilde{U}_k(\alpha, \beta) = \frac{\mathcal{P}(\alpha, \beta)^{k-1}}{(k-1)!} \mathcal{D}_\beta^{k-1} \left(\frac{1}{\mathcal{P}(\alpha, \beta)} \right), \quad k \geq 2,$$

где $\mathcal{P}(\alpha, \beta) = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2}$. Имеет место следующая

Лемма 1. При $k > 1$ справедливы равенства

$$U_k(\rho, z) = - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=0}^{j-1} \frac{1}{j!l!} d_l(\rho, z) U_{j-l}(\rho, z) U_{k-j}(\rho, z), \quad (2.1)$$

где

$$d_l(\rho, z) = \begin{cases} z/2, & \text{если } l - 4[l/4] = 0, \\ (z^2 + \rho^2 - 1)/4, & \text{если } l - 4[l/4] = 1, \\ -z/2, & \text{если } l - 4[l/4] = 2, \\ -(z^2 + \rho^2 - 1)/4, & \text{если } l - 4[l/4] = 3. \end{cases}$$

Доказательство. Пользуясь формулой Лейбница, получаем

$$0 = \mathcal{D}_\beta^{k-1}(\mathcal{P}(\alpha, \beta) \mathcal{P}^{-1}(\alpha, \beta)) = \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j \mathcal{D}_\beta^j(\mathcal{P}(\alpha, \beta)) \mathcal{D}_\beta^{k-j-1}(\mathcal{P}^{-1}(\alpha, \beta)) =$$

$$= \mathcal{P}(\alpha, \beta) \mathcal{D}_\beta^{k-1}(\mathcal{P}^{-1}(\alpha, \beta)) + \sum_{j=1}^{k-1} C_{k-1}^j \mathcal{D}_\beta^{j-1}(\sin \beta \mathcal{P}^{-1}(\alpha, \beta)) \mathcal{D}_\beta^{k-j-1}(\mathcal{P}^{-1}(\alpha, \beta)),$$

из чего следует, что

$$\tilde{U}_k(\alpha, \beta) = - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=0}^{j-1} \frac{1}{j!l!} \mathcal{D}_\beta^l(\sin \beta) \mathcal{P}^{-2}(\alpha, \beta) \tilde{U}_{j-l} \tilde{U}_{k-j}.$$

Отсюда несложно получить равенства (2.1), поскольку

$$\sin \beta \mathcal{P}^{-2}(\alpha, \beta) = z/2, \quad \cos \beta \mathcal{P}^{-2}(\alpha, \beta) = (z^2 + \rho^2 - 1)/4.$$

Лемма доказана.

Выпишем первые пять членов последовательности $U_k(\rho, z)$ ($k = 1, 2, \dots$):

$$U_1(\rho, z) = 1,$$

$$U_2(\rho, z) = -z/2,$$

$$U_3(\rho, z) = (2z^2 - \rho^2 + 1)/8,$$

$$U_4(\rho, z) = (-6z^3 + 9z\rho^2 - 5z)/48,$$

$$U_5(\rho, z) = (24z^4 - 72z^2 + 9\rho^4 + 28z^2 - 14\rho^2 + 5)/384.$$

Для вычисления производных по z функций $U_k(\rho, z)$ на оси симметрии воспользуемся рекуррентными соотношениями

$$\bar{U}_1(\alpha, \beta) = 1,$$

$$\bar{U}_k(\alpha, \beta) = \frac{\mathcal{P}(\alpha, \beta)}{(k-1)!} \mathcal{D}_\beta^{k-1}(\mathcal{P}^{-1}(\alpha, \beta)), \quad k \geq 2.$$

Так как оси z соответствует отрезок $\alpha = 0$, $0 < \beta < 2\pi$, то справедливы равенства

$$U_1(0, z) = 1,$$

$$\begin{aligned} U_k(0, z) &= \frac{\mathcal{P}(0, \beta)(0, z)}{(k-1)!} \mathcal{D}_\beta^{k-1}(\mathcal{P}^{-1}(0, \beta(0, z))) = \\ &= \frac{(1 - \cos \beta)^{1/2}}{(k-1)!} \mathcal{D}_\beta^{k-1}((1 - \cos \beta)^{-1/2}) = \sin \frac{\beta}{2} \mathcal{D}_\beta^{k-1}\left(\frac{1}{\sin \beta/2}\right), \quad k \geq 2, \end{aligned}$$

где $\sin \beta/2 = 1/\sqrt{1+z^2}$.

Лемма 2. *Имеют место следующие равенства:*

$$U_1(0, z) = 1, \quad U_2(0, z) = -z/2,$$

$$U_{2k+1}(0, z) = \sum_{l=1}^k \frac{(-1)^l}{(2l-1)! 2^{2l-1}} \left\{ z U_{2k-2l+2} - \frac{1}{4l} U_{2k-2l+1} \right\}, \quad (2.2)$$

$$U_{2k+2}(0, z) = -z U_{2k+1}/2 + \sum_{l=1}^k \frac{(-1)^l}{(2l)! 2^{2l}} \left\{ U_{2k-2l+2} + \frac{z}{2(2l+1)} U_{2k-2l+1} \right\}. \quad (2.3)$$

Доказательство. Согласно формуле Лейбница

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{D}_\beta^{k-1} \left(\frac{\sin \beta/2}{\sin \beta/2} \right) = \sin \beta/2 \mathcal{D}_\beta^{k-1} \left(\frac{1}{\sin \beta/2} \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^{k-1} C_{k-1}^j \mathcal{D}_\beta^j(\sin \beta/2) \mathcal{D}_\beta^{k-1-j} \left(\frac{1}{\sin \beta/2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} U_{2k+1} &= \frac{1}{(2k)!} \sin \beta/2 \mathcal{D}_\beta^{2k} \left(\frac{1}{\sin \beta/2} \right) = \\ &= -\frac{1}{(2k)!} \sum_{j=1}^{2k} C_{2k}^j \mathcal{D}_\beta^j(\sin \beta/2) \mathcal{D}_\beta^{2k-j} \left(\frac{1}{\sin \beta/2} \right) = \\ &= -\sum_{l=1}^k \frac{1}{(2l-1)!(2k-2l+1)!} \left\{ \mathcal{D}_\beta^{2l-1}(\sin \beta/2) \mathcal{D}_\beta^{2k-2l+1} \left(\frac{1}{\sin \beta/2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2k-2l+1)}{2l} \mathcal{D}_\beta^{2l}(\sin \beta/2) \mathcal{D}_\beta^{2k-2l} \left(\frac{1}{\sin \beta/2} \right) \right\} = \\ &= \sum_{l=1}^k \frac{(-1)^l}{(2l-1)! 2^{2l-1}} \{ z U_{2k-2l+2} - U_{2k-2l+1}/4l \}. \end{aligned}$$

Равенство (2.3) получается аналогично. Лемма доказана.

Введем обозначение

$$U_{n,k} = \frac{\gamma^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} U_k(0, z).$$

Лемма 3. При $k \geq 1$ имеют место равенства

$$U_{n,2k+1} = \sum_{l=1}^{K_1} \frac{(-1)^l}{(2l-1)! 2^{2l-1}} \left\{ z U_{n,2k-2l+2} + \right. \\ \left. + \gamma U_{n-1,2k-2l+2} - \frac{1}{4l} U_{n,2k-2l+1} \right\}, \text{ если } n \leq 2k+2, \quad (2.4)$$

$$U_{n,2k+1} = 0, \text{ если } n \geq 2k+1, \quad (2.5)$$

$$U_{n,2k+2} = -z U_{n,2k+1} - \gamma U_{n-1,2k+1}/2 + \\ + \sum_{l=1}^{K_2} \frac{(-1)^{l+1}}{(2l)! 2^{2l}} \left\{ U_{n,2k-2l+2} + \frac{z}{2(2l+1)} U_{n,2k-2l+1} + \right. \\ \left. + \frac{\gamma}{2(2l+1)} U_{n-1,2k-2l+1} \right\}, \text{ если } n \leq 2k+2, \quad (2.6)$$

$$U_{n,2k+2} = 0, \text{ если } n \geq 2k+3, \quad (2.7)$$

где

$$K_1 = \min \left(\left[\frac{2k-n+3}{2} \right], k \right), \quad K_2 = \left[\frac{2k-n+2}{2} \right].$$

Равенства (2.4)–(2.7) являются прямым следствием формул (2.2), (2.3). Параметры K_1 и K_2 , ограничивающие индексы суммирования, получаются из несложных комбинаторных рассуждений с использованием того, что $U_{n,k} = 0$ при $n \geq k+1$.

Функция $U_0(\rho, z) = \tilde{U}_0(\alpha, \beta)$ имеет в тороидальной системе координат вид [12]

$$\tilde{U}_0(\alpha, \beta) = -\frac{(2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2}}{2} \int_{\beta}^{\pi} \frac{d\varphi}{(2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \varphi)^{1/2}}.$$

При больших α (в окрестности окружности $x^2 + y^2 = 1, z = 0$) вычисления удобно проводить с помощью асимптотической формулы

$$\tilde{U}_0(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha} \right)^{1/2} (\pi - \beta) + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^j (-1 - 2(k-1))}{(2 \operatorname{ch} \alpha)^j j!} \int_{\beta}^{\pi} \cos^j \varphi d\varphi.$$

Помимо самой функции $U_0(\rho, z)$ необходимо вычислять и все производные по z функции $U_0(0, z)$. Для этого заметим, что функция $U_0(\alpha, \beta)$ при $\alpha = 0$ (т. е. на оси z) имеет вид

$$\tilde{U}_0(0, \beta) = -\frac{(1 - \cos \beta)^{1/2}}{2} \int_{\beta}^{\pi} \frac{d\varphi}{(1 - \cos \varphi)^{1/2}} = \sin \beta/2 \ln (\operatorname{tg} \beta/4),$$

поэтому

$$U_0(0, z) = \frac{\ln (\sqrt{1+z^2} - z)}{\sqrt{1+z^2}}.$$

График этой функции и ее первых двух производных изображен на рис. 2.

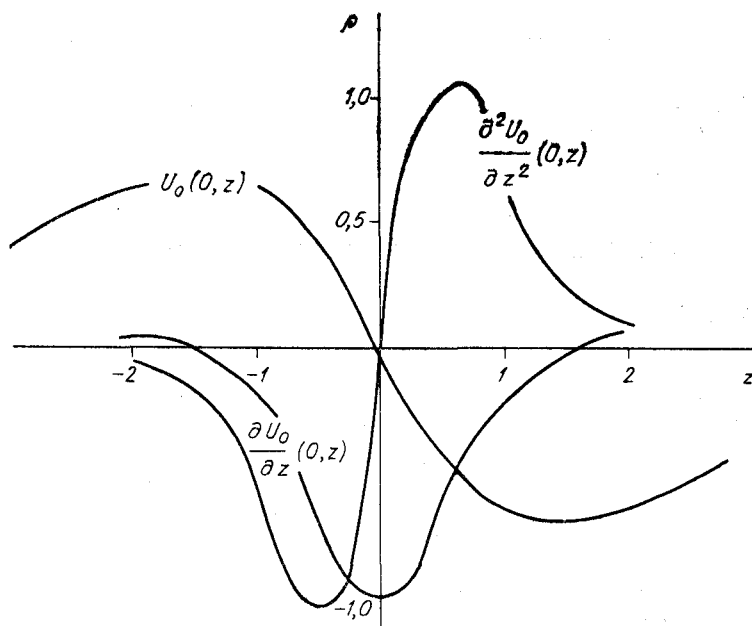


Рис. 2.

Пусть

$$U_{n,0} = \frac{\gamma^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}} U_0(0, z), \quad n \geq 1,$$

где γ — произвольный нормировочный множитель. Справедлива следующая

Лемма 4. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned} U_{1,0} &= \ln(\sqrt{1+z^2} - z)/\sqrt{1+z^2}, \quad U_{2,0} = -\frac{\gamma}{1+z^2}(zU_{1,0} + 1), \\ U_{k,0} &= -\frac{\gamma}{(1+z^2)(k-1)}((2k-3)zU_{k-1,0} + (k-2)\gamma U_{k-2,0}) \quad (k \geq 3). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Доказательство. При $k=1, 2, 3$ формулы (2.8) несложно проверить прямым вычислением. Предположим, что при $k \geq 4$

$$U_{k,0} = -\frac{\gamma}{(1+z^2)(k-1)}((2k-3)zU_{k-1,0} + (k-2)\gamma U_{k-2,0}).$$

Покажем, что

$$U_{k+1,0} = -\frac{\gamma}{(1+z^2)k}((2k-1)zU_{k,0} + (k-1)\gamma U_{k-1,0}).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} U_{k+1,0} &= \frac{\gamma}{k} \frac{\partial}{\partial z} U_{k,0} = \frac{\gamma}{k} \left\{ \frac{2z}{(1+z^2)^2} \left[\frac{(2k-3)}{(k-1)} \gamma z U_{k-1,0} + \frac{(k-2)}{(k-1)} \gamma^2 U_{k-2,0} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(1+z^2)} \left(\frac{2k-3}{k-1} \right) \left[\gamma U_{k-1,0} + \gamma z \frac{\partial U_{k-1,0}}{\partial z} + \frac{(k-2)}{(2k-3)} \gamma^2 \frac{\partial U_{k-2,0}}{\partial z} \right] \right\} = \\ &= -\frac{\gamma}{(1+z^2)k} \left\{ \frac{(1-z^2)}{(1+z^2)} \frac{(2k-3)}{(k-1)} \gamma U_{k-1,0} - \frac{2z(k-2)\gamma^2}{(k-1)(1+z^2)} U_{k-2,0} + \right. \\ &\quad \left. + (2k-3)zU_{k,0} + \frac{(k-2)^2}{(k-1)} \gamma U_{k-1,0} \right\} = \\ &= -\frac{\gamma}{(1+z^2)k} \left\{ \frac{(1-z^2)}{(1+z^2)} \frac{(2k-3)}{(k-1)} \gamma U_{k-1,0} - \frac{2z(k-2)\gamma^2}{(1+z^2)(k-1)} U_{k-2,0} + \right. \end{aligned}$$

$$+ (2k-1)zU_{k,0} - \frac{2z}{1+z^2} \left(\left(\frac{2k-3}{k-1} \right) \gamma z U_{k-1,0} + \frac{(k-2)}{(k-1)} \gamma^2 U_{k-2,0} \right) - \\ - \frac{(k-2)^2}{(k-1)} \gamma U_{k-1,0} \Big\} = - \frac{\gamma}{(1+z^2)^k} \{ (2k-1)zU_{k,0} + (k-1)\gamma U_{k-1,0} \}.$$

Лемма доказана.

§ 3. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА

Рассмотрим область Ω , образованную полупространством R_-^3 и цилиндром, примыкающим к нему (рис. 3). Радиус сечения цилиндра будем считать равным единице. Выберем декартову систему координат так, чтобы ось z совпадала с осью цилиндра, а граница полупространства R_-^3 лежала бы в плоскости $z=0$. Разобьем область Ω на три пересекающиеся компоненты $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$, где $\Omega_1 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, z \leq 0\}$ — конус, $\Omega_2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ или } x^2 + y^2 + (z - z_1)^2 \leq 1 + z_1^2\}$ — объединение двух шаров, а $\Omega_3 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0\}$ — цилиндр. Числовой параметр z_1 в определении Ω_2 можно изменять.

Мы ищем гармоническую в Ω функцию $U = U(\rho, z)$, удовлетворяющую краевым условиям

$$\begin{aligned} U(\rho, 0) &= \varphi(\rho) \quad \text{при } 1 \leq \rho < \infty, \\ U(1, z) &= \psi(z) \quad \text{при } z \leq 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$|U(\rho, z) - f_1(\rho, z)| \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho^2 + z^2 \rightarrow \infty, z \leq 0,$$

$$|U(\rho, z) - f_3(\rho, z)| \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty,$$

где φ, ψ, f_1 и f_3 — заданные функции. Кроме того, предполагаем, что функции $f_1(\rho, z)$ и $f_3(\rho, z)$ z -осесимметричны и гармонические в Ω_1 и Ω_3 соответственно. При этом

$$f_1(\rho, z) = \varphi(\rho), \quad 1 \leq \rho < \infty,$$

$$f_3(\rho, z) = \psi(z), \quad z \geq 0.$$

Искомая гармоническая z -осесимметричная функция U может быть представлена в виде следующего ряда:

$$U(\rho, z) = f_1(\rho, z) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_{\nu_k} \left(\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) (\rho^2 + z^2)^{-\frac{\nu_k+1}{2}}. \quad (3.2)$$

Здесь $P_{\nu}(\xi)$ — функция Лежандра первого рода степени ν , а положительные параметры ν_k определяются условием $P_{\nu_k}(0) = 0$, т. е. $\nu_k = 2k + 1$.

Эта же функция $U(\rho, z)$ может быть представлена в области Ω_2 так:

$$U(\rho, z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k U_k(\rho, z), \quad (3.3)$$

где U_k ($k=0, 1, \dots$) — последовательность гармонических функций, рассмотренная в § 2. В области Ω_3 функция $U(\rho, z)$ представима в виде

$$U(\rho, z) = f_3(\rho, z) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_0(j_k \rho) e^{-j_k z}. \quad (3.4)$$

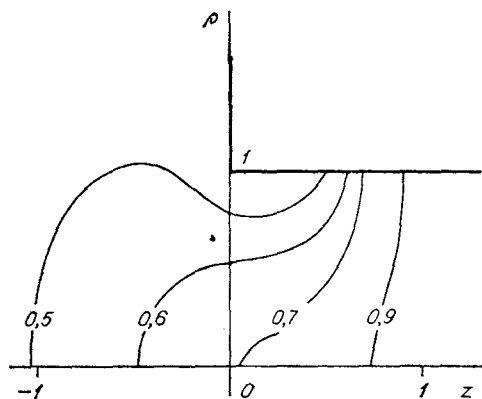


Рис. 3.

Т а б л и ц а 1

M_1	7	8	9	10
M_2	7	8	10	12
M_3	7	8	9	10
$\mu(A)$	$0.576 \cdot 10^5$	$0.446 \cdot 10^6$	$0.443 \cdot 10^7$	$0.364 \cdot 10^8$
$\theta(A, F)$	$0.201 \cdot 10^{-3}$	$0.106 \cdot 10^{-3}$	$0.992 \cdot 10^{-5}$	$0.188 \cdot 10^{-5}$
ε	$0.278 \cdot 10^{-15}$	$0.304 \cdot 10^{-14}$	$0.110 \cdot 10^{-14}$	$0.136 \cdot 10^{-14}$

Здесь $J_0(\xi)$ — функция Бесселя, а j_k — положительные корни уравнения $J_0(j_k) = 0$. Численные значения первых сорока параметров j_k приведены в [15].

Аппроксимируем искомую функцию $U(\rho, z)$ в каждой из областей Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 частичными суммами рядов (3.2) — (3.4):

$$U^1(\rho, z) = f_1(\rho, z) + \sum_{k=1}^{M_1} X_k^1 P_{\nu_k} \left(\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) (\rho^2 + z^2)^{-\frac{\nu_k+1}{2}} \text{ в } \Omega_1,$$

$$U^2(\rho, z) = \sum_{k=0}^{M_2} X_k^2 U_k(\rho, z) \text{ в } \Omega_2,$$

$$U^3(\rho, z) = f_3(\rho, z) + \sum_{k=1}^{M_3} X_k^3 J_0(j_k \rho) e^{-j_k z} \text{ в } \Omega_3.$$

Коэффициенты X_k^i в этих разложениях будем находить, минимизируя функционал $\|A_{N,M} \mathbf{X}_M - \mathbf{F}_N\|^2$, матрица $A_{N,M}$ и векторы $\mathbf{F}_N$ и $\mathbf{X}_M$ определены в § 1. Число обусловленности матрицы $A_{N,M}$ растет при увеличении N_1 , N_2 , M_1 , M_2 и M_3 .

В табл. 1 приведены значения некоторых параметров алгебраической задачи, получающиеся при $f_1 \equiv 0$, $f_3 = z$ для разных значений M_1 , M_2 и M_3 . Число уравнений в точках склейки равно 40, т. е. $N_1 = N_2 = 40$. Параметр $\mu(A)$ — число обусловленности матрицы $A_{N,M}$. Отметим, что для построения $A_{N,M}$ необходимо задавать нормирующие множители α_1 , α_2 и точки склейки z_1 , z_2 . Варьируя их, можно добиваться уменьшения $\mu(A)$.

Параметр $\Theta(A, F)$ характеризует аппроксимационное качество полученного решения и определяется следующим равенством:

$$\Theta(A, F) = \lim_{N_1, N_2 \rightarrow \infty} \frac{\|A_{N,M} \mathbf{X}_M - \mathbf{F}_N\|}{\|\mathbf{F}_N\|}.$$

Параметр ε — гарантированная точность решения переопределенной системы.

На рис. 3 изображены эквипотенциальные линии поля, полученного при $N_1 = N_2 = 40$, $M_1 = 10$, $M_2 = 12$, $M_3 = 10$.

Вычисления по предложенной схеме можно организовать также для области, образованной двумя соосными цилиндрами с радиусами сечения r и R соответственно ($r \leq R$). Такая область разбивается на три перекрывающиеся компоненты $\Omega_0 = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$, где $\Omega_1 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq r^2, z \leq 0\}$ — цилиндр с сечением радиуса r , $\Omega_2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$ — шар, $\Omega_3 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq R^2, z \geq 0\}$ — цилиндр с сечением радиуса R .

В задаче Дирихле вместо (3.1) ставим следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} U(r, z) &= \psi_1(z) \quad \text{при } z \leq 0, \\ U(R, z) &= \psi_2(z) \quad \text{при } z \geq 0, \end{aligned}$$

Таблица 2

M_1	9	10	10	14
M_2	10	14	18	16
M_3	9	10	10	14
$\mu(A)$	$0,801 \cdot 10^4$	$0,861 \cdot 10^5$	$0,120 \cdot 10^7$	$0,909 \cdot 10^7$
$\theta(A, F)$	$0,837 \cdot 10^{-4}$	$0,817 \cdot 10^{-5}$	$0,241 \cdot 10^{-5}$	$0,413 \cdot 10^{-6}$
ε	$0,235 \cdot 10^{-15}$	$0,230 \cdot 10^{-15}$	$0,267 \cdot 10^{-15}$	$0,310 \cdot 10^{-15}$

$$\begin{aligned} U(\rho, 0) &= \varphi(\rho) \quad \text{при } r \leq \rho \leq R, \\ |U(\rho, z) - f_1(\rho, z)| &\rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty, \\ |U(\rho, z) - f_3(\rho, z)| &\rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь $\psi_1, \psi_2, \varphi, f_1, f_3$ — известные функции, причем $f_1(\rho, z), f_3(\rho, z)$ z-осесимметричные и гармонические в Ω_1 и Ω_3 соответственно. Кроме того,

$$\begin{aligned} f_1(r, z) &= \psi_1(z) \quad \text{при } z \leq 0, \\ f_3(R, z) &= \psi_2(z) \quad \text{при } z \geq 0, \\ f_3(\rho, 0) &= \varphi(\rho) \quad \text{при } r \leq \rho \leq R. \end{aligned}$$

В области Ω_1 функция U представима в виде

$$U(\rho, z) = f_1(\rho, z) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0 \left(j_k \frac{\rho}{r} \right) e^{j_k \frac{z}{r}}, \quad (3.6)$$

где $J_0(\xi)$ — функция Бесселя, а j_k — корни уравнения $J_0(j_k) = 0$. В области Ω_2 функция $U(\rho, z)$ разлагается в ряд типа (3.3), т. е.

$$U(\rho, z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k U_k(\rho, z), \quad (3.7)$$

где $U_k(\rho, z)$ ($k = 0, 1, \dots$) — последовательность гармонических функций, рассмотренная в § 2. Наконец, в области Ω_3 функцию $U(\rho, z)$ можно представить следующим образом:

$$U(\rho, z) = f_3(\rho, z) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k W_k(\rho, z). \quad (3.8)$$

Здесь W_k — гармонические в Ω_3 функции, удовлетворяющие граничным условиям

$$\begin{aligned} W_k(R, z) &= 0 \quad \text{при } z \geq 0, \\ W_k(\rho, 0) &= 0 \quad \text{при } r \leq \rho \leq R, \\ W_k(\rho, 0) &= J_0 \left(j_k \frac{\rho}{r} \right) \quad \text{при } 0 \leq \rho \leq r, \\ W_k(\rho, z) &\rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Несложно заметить, что функция $W_k(\rho, z)$ разлагается в ряд

$$W_k(\rho, z) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i^k J_0 \left(j_i \frac{\rho}{R} \right) e^{-j_i \frac{z}{R}},$$

где

$$C_i^k = \frac{2}{R^2 J_1^2(j_i)} \int_0^r J_0 \left(j_k \frac{\rho}{r} \right) \rho J_0 \left(j_i \frac{\rho}{R} \right) d\rho.$$

В каждой из компонент Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 функцию $U(\rho, z)$ будем аппроксимировать частичной суммой соответствующего ряда (3.6) — (3.8):

$$U^1(\rho, z) = f_1(\rho, z) + \sum_{k=1}^{M_1} X_k^1 J_0 \left(j_k \frac{\rho}{r} \right) e^{j_k z/r} \text{ в } \Omega_1,$$

$$U^2(\rho, z) = \sum_{k=0}^{M_2} X_k^2 U_k(\rho, z) \text{ в } \Omega_2,$$

$$U^3(\rho, z) = f_3(\rho, z) + \sum_{k=1}^{M_3} X_k^3 W_k(\rho, z) \text{ в } \Omega_3.$$

Коэффициенты X_k^i в этих разложениях находим, минимизируя квадратичный функционал $\|A_{N,M} X_M - F_N\|^2$; матрица $A_{N,M}$ и векторы F_N и X_M определены в § 1.

В табл. 2 приведены значения параметров $\mu(A)$, $\Theta(A, F)$, ε алгебраической задачи, получающиеся при $\psi_1 = 0$, $f_1(\rho, z) = 0$, $\psi_2(z) = z$, $f_2(\rho, z) = z$ для различных значений M_1 , M_2 и M_3 . Как и прежде, число уравнений в каждой точке склейки равно 40, т. е. $N_1 = N_2 = 40$.

На рис. 4 представлен график осевого распределения потенциала и его производных до второго порядка включительно.

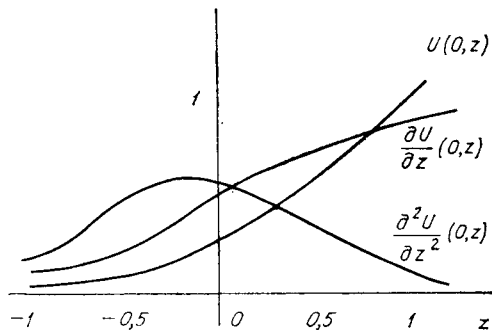


Рис. 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрофизики. — М.: Наука, 1985. — 335 с.
2. Иванов В. Я. Методы автоматизированного проектирования приборов электроники. Часть 1. Алгоритмы расчета физических полей. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986. — 194 с.
3. Численные методы оптимизации эмиссионных электронно-оптических систем / В. П. Ильин, В. А. Катешов, Ю. В. Куликов, М. А. Монастырский. — Новосибирск: Наука: Сиб. отд-ние, 1987. — 192 с.
4. Белых В. Н. Численные алгоритмы без насыщения в нестационарных задачах гидродинамики идеальной жидкости со свободными границами // Вычислительные проблемы в задачах математической физики. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. — (Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 11). — С. 3—66.
5. Волков Е. А. Развитие метода квадратур для уравнения Лапласа и конформных отображений // Тр. Мат. ин-та В. А. Стеклова АН СССР. — 1987. — Т. 180. — С. 83—85.
6. Лебедев В. И., Агашков В. И. Операторы Пуанкаре — Стеклова и их приложения в анализе. — М.: Отдел вычислительной математики АН СССР, 1983. — 184 с.
7. Васкевич В. Л. К приближенному решению задачи Дирихле в составных пространственных областях // Численный анализ. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. — (Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 15). — С. 93—126.
8. Власов А. Г., Шапиро Ю. А. Методы расчета эмиссионных электронно-оптических систем. — Л.: Машиностроение, 1974. — 194 с.
9. Шаманский В. Е. Приближенный метод решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. — 1955. — Т. 100, № 6. — С. 1049—1052.
10. Курзин В. Б. Об одном методе склеивания для решения линейных краевых задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1969. — Т. 9, № 5. — С. 1184—1188.

11. **Смелов В. В.** Обоснование итерационного процесса по подобластям для задач теории переноса в нечетном P_{2N+1} приближении.— Новосибирск, 1980.— 27 с.— (Препр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Вычисл. Центр; № 71).
12. **Васкевич В. Л.** Об одной системе гармонических полиномов в пространстве // Краевые задачи для уравнений с частными производными.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1988.— С. 53—64.
13. **Гарантированная точность** решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах/Годунов С. К., Антонов А. Г., Кирилук О. П., Костин В. И.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.— 456 с.
14. **Кирилук О. П.** Итерационное уточнение решения систем линейных уравнений.— Новосибирск, 1989.— 32 с.— (Препр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 7).
15. **Грей Э., Мэтьюз Г.** Функции Бесселя и их приложения к физике и механике.— М.: Изд-во иностр. лит., 1953.— 371 с.