ПЕРЕХОДНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННОЗНАЧНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Д. А. Коршунов

В работе изучаются переходные явления, возникающие при исследовании стационарных вещественнозначных эргодических цепей Маркова, близких в известном смысле к неэргодическим и имеющих траектории, уходящие на бесконечность. При этом удается построить приближения для стационарных распределений «допредельных» цепей.

§ 1. ФОРМУЛИРОВКИ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $\{X_n^{(\varepsilon)}\}_{n=0}^{\infty}$ — семейство (по $\varepsilon \geq 0$) однородных вещественнозначных цепей Маркова (по n) с переходной функцией $P^{(\varepsilon)}(x, B)$, $x \in \mathbf{R}$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$, где $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$ — σ-алгебра борелевских множеств на $\mathbf{R}$. Мы будем опускать индекс (0) у характеристик предельной цепи $X_n \equiv X_n^{(0)}$. Основным объектом изучения будет инвариантная мера $\pi^{(\varepsilon)}$, соответствующая цепи $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$, т. е. мера, удовлетворяющая уравнению

$$\pi^{(\varepsilon)}(B) = \int_{\mathbf{R}} P^{(\varepsilon)}(x, B)\, \pi^{(\varepsilon)}(dx)\,, \quad \pi^{(\varepsilon)}(\mathbf{R}) = 1\,. \tag{1.1}$$

Если цепь $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$, $\varepsilon > 0$, эргодическая, то речь будет идти об асимптотическом поведении стационарного распределения цепей $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Ниже предполагаем, что уравнение (1.1) при $\varepsilon > 0$ имеет единственное решение. Это имеет место, если выполнены условия эргодичности цепи $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$, включающие в себя наличие «сноса» цепи в сторону некоторого компакта (см. (1.6)) и условие «перемешивания» типа условия Дуба — Дёблина (см. (1.7)). В этом случае распределения $P^{(\varepsilon)}(x, n, \cdot)$ сходятся по вариации к $\pi^{(\varepsilon)}(\cdot)$ при $n \to \infty$ и такая инвариантная мера $\pi^{(\varepsilon)}(\cdot)$ единственная.

Найти явно стационарное распределение $\pi^{(\varepsilon)}$ удается лишь в очень немногих частных случаях. Однако, если рассматривать цепи, близкие к неэргодическим, то можно доказать собирательные предельные теоремы о стационарном распределении $\pi^{(\varepsilon)}$ (при некоторых условиях регулярности), позволяющие явно строить приближения для этого распределения.

Введем семейство случайных величин таких, что распределение случайной величины $\xi^{(\varepsilon)}(x)$ совпадает с распределением скачка цепи $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$ из состояния x:

$$\mathbf{P}\left\{ x + \xi^{(\varepsilon)}(x) \in B \right\} = P^{(\varepsilon)}(x, B)\,.$$

Условия регулярности связаны с предположением о «нагруженности» цепей Маркова $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$, означающим, что «средний снос» $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$ стремится к нулю:

$$\lim_{|x|\to\infty,\ \varepsilon\downarrow 0} \mathbf{E}\ \xi^{(\varepsilon)}(x) = 0\,. \tag{1.2}$$

Ниже мы рассмотрим асимптотическое поведение распределения $\pi^{(\varepsilon)}$ при $\varepsilon\downarrow 0$ и при некоторых моментных предположениях относительно $\xi^{(\varepsilon)}(x)$. Если цепь $\{X_n\}$ имеет единственное инвариантное распределение, и переходное ядро «слабо непрерывно», т.е. для всякого $y\in\mathbf{R}$ имеет место сходимость

$$P^{(\varepsilon)}(x,\cdot) \Rightarrow P(y,\cdot) \quad \text{при} \quad x\to y,\ \varepsilon\downarrow 0\,, \tag{1.3}$$

то рассматриваемая задача есть задача об устойчивости или непрерывной зависимости $\pi^{(\varepsilon)}\Rightarrow\pi$ при $\varepsilon\downarrow 0$. Если цепь $\{X_n\}$ не имеет собственного инвариантного распределения ($|X_n|\to\infty$ по вероятности при $n\to\infty$), то возникает задача о переходных явлениях, которые описывают асимптотическое поведение инвариантного распределения цепи $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$ при $\varepsilon\downarrow 0$.

В параграфах 1 и 3—6 подробно рассматриваются переходные явления для цепей Маркова, принимающих значения на положительной полуоси. Переходные явления для цепей Маркова, принимающие значения на всей оси $\mathbf{R}$, изучаются в § 7.

До конца настоящего параграфа считаем, что $X_n^{(\varepsilon)}\ge 0$. Обозначим

$$m^{(\varepsilon)}(x) = \mathbf{E}\ \xi^{(\varepsilon)}(x)\,, \qquad b^{(\varepsilon)}(x) = \mathbf{E}\ \left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^2. \tag{1.4}$$

Предполагаем поведение $m^{(\varepsilon)}(x)$ и $b^{(\varepsilon)}(x)$ достаточно регулярным при $x\to\infty,\varepsilon\downarrow 0$. В частности, считаем, что

$$\begin{gathered}\lim_{x\to\infty} m(x)\,x = \mu\,, \qquad -\infty\le\mu\le\infty\,,\\ \lim_{x\to\infty} b(x) = b, \qquad 0<b<\infty, \qquad \sup_x b(x) < \infty\,.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Параметры μ и b, характеризующие асимптотическое поведение первых двух моментов скачков процесса, играют определяющую роль при классификации асимптотического поведения распределения $\pi^{(\varepsilon)}$. Они также существенны для эргодичности цепи $\{X_n\}$ (см., например, [1]).

Обозначим $\tau(x) = \min\{\,n\ge 1:\ X_n\le N\,|\,X_0 = x\,\}$. Справедлива

Теорема А [1]. *Пусть функция $V(x)$ неотрицательна. Если*

$$\sup_{x>N} \mathbf{E}\left(V(x+\xi(x)) - V(x)\right) < 0, \quad \sup_x \mathbf{E}\left(V(x+\xi(x)) - V(x)\right) < \infty$$

при некотором $N\ge 0$, то $\sup\limits_{x\le N} \mathbf{E}\,\tau(x) < \infty$.

В условиях теоремы А имеет место равномерная положительная возвратность $[0,N]$. В частности, для $V(x) = x^2$ получаем, что если

$$\sup_{x>N} \left(2x\,m(x) + b(x)\right) < 0, \quad \sup_x\left(2x\,m(x) + b(x)\right) < \infty \tag{1.6}$$

при некотором $N \geq 0$, то $\sup\limits_{x \leq N} \mathbf{E}\,\tau(x) < \infty$.

Как известно, равномерная положительная возвратность множества $[0, N]$ при некоторых дополнительных условиях влечет эргодичность цепи $\{X_n\}$. Например, при условии существования вероятностной меры φ на $\mathfrak{B}$, вещественного числа $p > 0$ и натурального числа $m \geq 1$ таких, что

$$\mathbf{P}\,\{\, X_m \in B \mid X_0 = x \,\} \geq p\,\varphi(B) \tag{1.7}$$

для всех $x \in [0, N]$ и $B \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$, и условии апериодичности цепи $\{X_n\}$ (см., например, [2, 3]).

В нашем случае выполнение (1.6) определяется отношением $2\mu/b$. Из теоремы А следует, что если $2\mu/b < -1$ и верно неравенство (1.7), то апериодическая цепь $\{X_n\}$ будет эргодической.

Мы будем рассматривать такой тип зависимости $P^{(\varepsilon)}(x, \cdot)$ от параметра ε, что $m^{(\varepsilon)}(x)$ характеризуется отрицательным сносом $-\varepsilon$ по отношению к $m(x)$, так что $\lim_{x\to\infty} m^{(\varepsilon)}(x) = -\varepsilon$ и цепи $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$ эргодичны при $\varepsilon \downarrow 0$, если выполнено условие (1.7). Более точно, мы предполагаем, что

$$m^{(\varepsilon)}(x) = -\varepsilon + \mu/x + o\,(\varepsilon + 1/x), \quad x \to \infty,\ \varepsilon \downarrow 0,\ -\infty \leq \mu \leq \infty,$$

$$\sup_{x,\,\varepsilon} b^{(\varepsilon)}(x) < \infty, \qquad \lim_{x\to\infty,\ \varepsilon\downarrow 0} b^{(\varepsilon)}(x) = b, \quad 0 < b < \infty\,. \tag{1.8}$$

Частным случаем такой схемы серий является случайное блуждание $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$, которое задается равенством $X_{n+1}^{(\varepsilon)} = \max\left(0, X_n^{(\varepsilon)} + \xi_n^{(\varepsilon)}\right)$, где $\xi_n^{(\varepsilon)}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathbf{E}\,\xi_n^{(\varepsilon)} = -\varepsilon$, $\mathbf{E}\,(\xi_n^{(\varepsilon)})^2 \to b$. В этом случае $\mu = 0$. Предельные теоремы для случайного блуждания этого вида рассмотрены в [4—9].

В формулировках теорем мы предполагаем, что выполнены следующие условия:

цепи $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$, $\varepsilon \geq 0$, однородны,

цепи $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$, $\varepsilon > 0$, имеют единственное инвариантное распределение.

Кроме того в теоремах 2, 5 и частично в теоремах 3, 4 (именно, в пунктах (б)) предполагается, что переходное ядро удовлетворяет следующему условию: для любого компакта $K \subset \mathbf{R}^+$ существует $\varepsilon_* = \varepsilon_*(K) > 0$ такое, что

$$\inf_{x \in K,\ \varepsilon \leq \varepsilon_*} \mathbf{P}\,\{\, X_n^{(\varepsilon)} \notin K \text{ для некоторого } n \mid X_0^{(\varepsilon)} = x \,\} > 0\,. \tag{1.9}$$

Для выполнения условия (1.9) достаточно, чтобы для любых x, $x_* \in \mathbf{R}^+$ существовало n такое, что $\mathbf{P}\,\{\, X_n \geq x_* \mid X_0 = x \,\} > 0$, и переходное ядро удовлетворяло условию непрерывности (1.3).

Теорема 1 (устойчивость, $2\mu < -b$). *Пусть справедливы асимптотические представления* (1.8) *и случайные величины* $\left(\max\left(0, \xi^{(\varepsilon)}(x)\right)\right)^2$ *равномерно по* $x \geq 0$ *и* $\varepsilon \geq 0$ *интегрируемы*:

$$\sup_{x,\,\varepsilon} \mathbf{E} \left\{ \left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^2 ;\ \xi^{(\varepsilon)}(x) > N \right\} \to 0\,,\ N \to \infty\,. \tag{1.10}$$

Предположим, что $2\mu < -b$, *цепь* $\{X_n\}$ *имеет единственное инвариантное распределение* π *и переходное ядро удовлетворяет условию* (1.3). *Тогда инвариантное распределение* $\pi^{(\varepsilon)}$ *цепи* $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$ *слабо сходится к* π *при* $\varepsilon \downarrow 0$.

Заметим, что в условиях теоремы 1 предельная цепь $\{X_n\}$ имеет единственное инвариантное распределение, если она удовлетворяет условию перемешивания (1.7).

В дальнейшем нам удобно изучать асимптотическое поведение $\pi^{(\varepsilon)}$ в терминах случайных величин $X^{(\varepsilon)}$, имеющих соответствующее распределение $\pi^{(\varepsilon)}$. Закон распределения случайной величины X будем обозначать через $\mathfrak{L}(X)$.

Теорема 2 (сходимость к Г-распределению, $2\mu > -b$). *Пусть справедливы асимптотические представления* (1.8), *условие* (1.9), *и пусть случайные величины* $(\xi^{(\varepsilon)}(x))^2$ *равномерно по* x *и* $\varepsilon \geq 0$ *интегрируемы*:

$$\sup_{x,\,\varepsilon} \mathbf{E} \left\{ \left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^2 ;\ |\xi^{(\varepsilon)}(x)| > N \right\} \to 0\,, \qquad N \to \infty\,. \tag{1.11}$$

Если $\infty > 2\mu > -b$, *то при* $\varepsilon \downarrow 0$ *имеет место слабая сходимость*

$$\mathfrak{L}\left(2\,\varepsilon\, X^{(\varepsilon)}\right) \Rightarrow \Gamma_{1/b,\,1+2\mu/b}\,,$$

где $\Gamma_{\alpha,\,\lambda}$ — *гамма-распределение с параметрами* α *и* λ.

Оказывается, что в случае $2\mu = -b$ без уточнения остаточных членов в асимптотических представлениях (1.8) невозможно, вообще говоря, доказать собирательную предельную теорему для случайных величин $X^{(\varepsilon)}$.

Теорема 3 (критический случай, $2\mu = -b$). *Пусть*

$$m^{(\varepsilon)}(x) = -\varepsilon + \mu/x + \alpha/x \ln x + o(\varepsilon + 1/x \ln x)\,,$$

$$b^{(\varepsilon)}(x) = b + \beta/\ln x + o(\varepsilon + 1/\ln x) \tag{1.12}$$

при $x \to \infty$, $\varepsilon \downarrow 0$ *и, кроме того,*

$$\sup_{x,\,\varepsilon} \mathbf{E} \ \left| \xi^{(\varepsilon)}(x) \right|^{2+\delta} < \infty \tag{1.13}$$

для некоторого $\delta > 0$. *Пусть* $2\mu = -b$. *Тогда*

(а) *если* $2\alpha + \beta < -b$, *цепь* $\{X_n\}$ *имеет единственное инвариантное распределение* π *и переходное ядро удовлетворяет условию* (1.3), *то инвариантное распределение* $\pi^{(\varepsilon)}$ *слабо сходится к* π *при* $\varepsilon \downarrow 0$;

(б) *если* $2\alpha + \beta > -b$ *и выполнено условие* (1.9), *то при* $\varepsilon \downarrow 0$ *имеет место слабая сходимость*

$$\mathfrak{L}\left(\left(\frac{\ln X^{(\varepsilon)}}{\ln 1/\varepsilon} \right)^{1+(2\alpha+\beta)/b} \right) \Rightarrow \mathrm{U}\,[0,1]\,,$$

где $\mathrm{U}\,[0,1]$ — *равномерное на* $[0,1]$ *распределение.*

Введем обозначения для повторных логарифмов и их произведений:

$$l_o(x) = x, \quad l_{k+1}(x) = \ln(l_k(x)), \quad L_k(x) = \prod_{m=1}^{k} l_m(x).$$

Результаты, относящиеся к случаю $2\alpha + \beta = -b$, представляет следующая

Теорема 4 (полная классификация критического случая, $2\mu = -b$). *Пусть* $2 \le k < \infty$, *справедливы асимптотические представления*

$$\begin{aligned} m^{(\varepsilon)}(x) &= -\varepsilon + \frac{\mu}{x} + \sum_{m=1}^{k} \frac{\alpha_m}{x L_m(x)} + o\left(\varepsilon + \frac{1}{x L_k(x)}\right), \\ b^{(\varepsilon)}(x) &= b + \sum_{m=1}^{k} \frac{\beta_m}{L_m(x)} + o\left(\varepsilon + \frac{1}{L_k(x)}\right) \end{aligned} \tag{1.14}$$

при $x \to \infty, \varepsilon \downarrow 0$ *и выполнено условие* (1.13). *Пусть* $2\mu = -b$, $2\alpha_1 + \beta_1 = -b, \ldots, 2\alpha_{k-1} + \beta_{k-1} = -b$. *Тогда*

(а) *если* $2\alpha_k + \beta_k < -b$, *цепь* $\{X_n\}$ *имеет единственное инвариантное распределение* π *и переходное ядро удовлетворяет условию* (1.3), *то инвариантное распределение* $\pi^{(\varepsilon)}$ *слабо сходится к* π *при* $\varepsilon \downarrow 0$;

(б) *если* $2\alpha_k + \beta_k > -b$ *и выполнено условие* (1.9), *то при* $\varepsilon \downarrow 0$ *имеет место слабая сходимость*

$$\mathfrak{L}\left(\left(\frac{l_k(X^{(\varepsilon)})}{l_k(1/\varepsilon)}\right)^{1 + (2\alpha_k + \beta_k)/b}\right) \Rightarrow \mathrm{U}\,[0,1].$$

Замечание 1. Как будет следовать из результатов § 5 (см. формулы (5.5), (5.25)), в условиях теорем 3 и 4 (в случаях $2\alpha + \beta < -b$ и $2\alpha_k + \beta_k < -b$ соответственно) предельная цепь $\{X_n\}$ имеет единственное инвариантное распределение, если выполнено условие перемешивания (1.7).

В теоремах 1—4 описано асимптотическое поведение случайной величины $X^{(\varepsilon)}$ для собственных значений параметра $\mu = \infty$. Случай $\mu = -\infty$ включается в условия теоремы 1 об устойчивости (см. также теорему 6). Регулярный случай, соответствующий значению параметра $\mu = \infty$ будет изучен отдельно (см. теорему 5). Именно, рассмотрим ситуацию, когда

$$m^{(\varepsilon)}(x) = -\varepsilon + h(x) + o(\varepsilon + h(x)), \quad \sup_{x,\varepsilon} b^{(\varepsilon)}(x) < \infty \tag{1.15}$$

при $x \to \infty$, $\varepsilon \downarrow 0$, где $x h(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Предположим, что функция $h(x)$ регулярна:

$$h(x) = x^{-\lambda} L(x), \tag{1.16}$$

где $0 < \lambda \le 1$ и $L(x) > 0$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция, т. е. для любого $a > 0$ справедливо $L(ax) \sim L(x)$ при $x \to \infty$. Таким образом, функция $h(x)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $-\lambda$. Кроме того, предположим, что

$$1/h(x) \quad \text{вогнута}, \tag{1.17}$$

$$x\,h(x) \text{ вогнута.} \tag{1.18}$$

Из условия (1.17) следует, что

$$h(x) \text{ строго убывает,} \tag{1.19}$$

и мы можем определить число q_ε (при $\varepsilon \le h(1)$) как единственное решение уравнения

$$-\,\varepsilon + h(q_\varepsilon) = 0\,. \tag{1.20}$$

Имеет место следующая

Теорема 5 (сходимость к нормальному распределению, $\mu = \infty$). *Пусть справедливы асимптотические представления* (1.15) *и выполнены условия* (1.9), (1.16)—(1.18). *Тогда при* $\varepsilon \downarrow 0$

$$\mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)} \sim q_\varepsilon\,, \tag{1.21}$$

$$X^{(\varepsilon)}/q_\varepsilon \Rightarrow 1\,. \tag{1.22}$$

Если, кроме того,

$$\begin{gathered} m^{(\varepsilon)}(x) = -\,\varepsilon + h(x) + o\left(\sqrt{\varepsilon/q_\varepsilon} + \sqrt{h(x)/x}\,\right), \\ b^{(\varepsilon)}(x) = b + o(1)\,,\quad 0 < b < \infty, \end{gathered} \tag{1.23}$$

при $x \to \infty, \varepsilon \downarrow 0$ *и выполнено условие* (1.11), *то при* $\varepsilon \downarrow 0$

$$\mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)} = q_\varepsilon + o\left(\sqrt{q_\varepsilon/\varepsilon}\right) \tag{1.24}$$

и имеет место слабая сходимость

$$\mathfrak{L}\left(\left(X^{(\varepsilon)} - \mathrm{E}\,X^{(\varepsilon)}\right)\sqrt{\varepsilon/q_\varepsilon}\right) \Rightarrow \mathrm{N}\,(0, b/2\lambda)\,, \tag{1.25}$$

где $\mathrm{N}\,(0,\sigma^2)$ — *нормальное распределение с параметрами* 0 *и* σ^2.

Замечание 2. Если остаточные члены в (1.23) имеют вид

$$O\left(\sqrt{\varepsilon/q_\varepsilon}\right) \text{ или } O\left(\sqrt{h(x)/x}\,\right)$$

при $x \to \infty, \varepsilon \downarrow 0$, то сходимость (1.25) может и не иметь места.

Замечание 3. Условия (1.17) и (1.18) не являются сильно ограничительными; они выполнены, в частности, для функций $L(x) \equiv \equiv \mathrm{const} > 0$, $\ln x$, $1/\ln\ln x$ и т. п. Ясно, что эти условия можно предполагать выполненными не для всех x, а лишь для достаточно больших x. Можно также привести достаточные условия. Например, (1.17) и (1.18) выполнены, если первая и вторая производные функции $L(x)$ существуют и удовлетворяют соотношениям

$$x\,L'(x)/L(x) \to 0, \quad x^2 L''(x)/L(x) \to 0 \qquad \text{при} \quad x \to \infty\,.$$

Заметим также, что если $L_i(x)$, $i = 1, .., m$, удовлетворяют последним соотношениям, то функция

$$L(x) = \prod_{i=1}^{m} L_i^{\gamma_i}(x)\,,\ \ \gamma_i \in \mathbf{R}\,,$$

также удовлетворяет им.

В важном частном случае $L(x) \equiv \mathrm{const} > 0$ имеем

Следствие. *Пусть*

$$m^{(\varepsilon)}(x) = -\varepsilon + a/x^{\lambda} + o\left(\varepsilon^{(1+\lambda)/2\lambda} + 1/x^{(1+\lambda)/2}\right), \quad b^{(\varepsilon)}(x) = b + o(1)$$

при $x \to \infty, \varepsilon \downarrow 0$ *и выполнены условия* (1.9) *и* (1.11). *Тогда если* $a > 0$, $0 < \lambda < 1$, *то при* $\varepsilon \downarrow 0$

$$\mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)} = (a/\varepsilon)^{1/\lambda} + o\left((1/\varepsilon)^{(1+\lambda)/2\lambda}\right), \quad X^{(\varepsilon)} \varepsilon^{1/\lambda} \Rightarrow a^{1/\lambda},$$

$$\mathfrak{L}\left((X^{(\varepsilon)} - \mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)})\, \varepsilon^{(1+\lambda)/2\lambda}\right) \Rightarrow \mathrm{N}\left(0, b a^{1/\lambda}/2\lambda\right).$$

Следующая теорема обобщает теорему 1.

Теорема 6 (устойчивость). *Пусть*

$$\limsup_{x \to \infty} \left(\sup_{\varepsilon > 0} \left(2 x m^{(\varepsilon)}(x) + b^{(\varepsilon)}(x)\right)\right) < 0, \qquad \sup_{x, \varepsilon} b^{(\varepsilon)}(x) < \infty. \tag{1.26}$$

Предположим, что выполнено либо условие (1.10), *либо следующее условие:*

$$\mathrm{E}\left\{\left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^{2+\delta}; \xi^{(\varepsilon)}(x) \ge 0\right\} \le \Delta(x)\left(1 + x^{\delta}\right), \tag{1.27}$$

где $\delta > 0$, $\sup_x \Delta(x) < \infty$, $\Delta(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$. *Если цепь* $\{X_n\}$ *имеет единственное инвариантное распределение* π *и переходное ядро удовлетворяет условию* (1.3), *то инвариантное распределение* $\pi^{(\varepsilon)}$ *цепи* $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$ *слабо сходится к* π *при* $\varepsilon \downarrow 0$.

Теоремы 1—6 дают искомую классификацию предельного поведения инвариантного распределения цепей Маркова $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$ на полуоси при $\varepsilon \downarrow 0$. Они могут применяться для описания поведения ряда систем массового обслуживания, находящихся в нагруженном состоянии (см., например, [10, 11]).

Аналоги теорем 1 и 2, а также теоремы 3 в случае $\alpha = \beta = 0$ для дискретных цепей Маркова были получены в [10, 11]. При этом в теореме 1 вместо условия (1.10) предполагалось условие (1.13). Теоремы 3 и 6 для дискретных цепей Маркова приведены без доказательства в [12], и для вещественнозначных цепей — в [13]. Другие подходы к доказательству некоторых утверждений можно найти в [10, 11].

Вывод оценок моментов стационарного распределения для цепей Маркова, удовлетворяющих условию Харриса, содержится в [14, 15]. В отличие от названных работ, мы исследуем общие цепи Маркова и получаем для них оценки, равномерные по параметру ε.

§ 2. ЛЕММА О «СРЕДНЕМ СНОСЕ» СТАЦИОНАРНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

Нам потребуется одна лемма, содержание которой можно понять из следующего наблюдения. Пусть $\mathscr{X}$ — некоторое пространство с σ-алгеброй множеств $\mathfrak{B}(\mathscr{X})$, $\{\widetilde{X}_n\}$ — некоторая стационарная цепь Маркова со значе- чениями в $\mathscr{X}$, $\widetilde{\pi}$ — ее инвариантное распределение и $\widetilde{X}$ — случайный элемент с распределением $\widetilde{\pi}$. Пусть $V : (\mathscr{X}, \mathfrak{B}(\mathscr{X})) \to \mathbf{R}$ — измеримая функция. Обозначим «средний снос» пробной функции $V(x)$ через $v(x) \equiv \mathrm{E}\{V(x + \widetilde{\xi}(x)) - V(x)\}$.

Если существует $\mathbf{E}\, V(\widetilde{X})$, то «средний снос» цепи в стационарном режиме (т. е. когда $\widetilde{X}_n$ имеет распределение π при любом n) равен нулю:

$$0 = \mathbf{E}\left(V(\widetilde{X}_{n+1}) - V(\widetilde{X}_n)\right) = \int_{\mathscr{X}} v(x)\, \widetilde{\pi}(dx)\,.$$

Если $\mathbf{E}\, V(\widetilde{X})$ не существует, то последнее соотношение может не выполняться. Тем не менее, при некоторых ограничениях на $\xi(x)$ можно доказать неотрицательность или равенство нулю последнего интеграла. Справедлива

Лемма 1. *Пусть $V(x) \geq 0$ — измеримая функция такая, что*

$$\int_{\mathscr{X}} \max(0, v(x))\, \widetilde{\pi}(dx) \equiv \mathbf{E}\, \max(0, v(\widetilde{X})) < \infty\,. \tag{2.1}$$

Тогда

$$\int_{\mathscr{X}} v(x)\, \widetilde{\pi}(dx) \equiv \mathbf{E}\, v(\widetilde{X}) \geq 0\,. \tag{2.2}$$

Если, кроме того, существует число $c < \infty$ такое, что для всех x

$$\mathbf{E}\, \left| V(x + \xi(x)) - V(x) \right| \leq c\,(1 + |v(x)|)\,, \tag{2.3}$$

то

$$\int_{\mathscr{X}} v(x)\, \widetilde{\pi}(dx) \equiv \mathbf{E}\, v(\widetilde{X}) = 0\,. \tag{2.4}$$

Если выполнено (2.4) *и для множества $B \in \mathfrak{B}(\mathscr{X})$*

$$\sup_{x \in B} V(x) \leq \inf_{x \notin B} V(x), \tag{2.5}$$

то справедливо неравенство

$$\int_{\mathscr{X} \setminus B} v(x)\, \widetilde{\pi}(dx) \leq 0\,. \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного $N > 0$ рассмотрим ограниченную измеримую функцию $V_N(x) \equiv \min\,(V(x), N) \geq 0$. По определению

$$|V_N(x+y) - V_N(x)| \leq |V(x+y) - V(x)| \tag{2.7}$$

для любых $x, y \in \mathscr{X}$. «Средний снос» пробной функции $V_N(x)$ обозначим следующим образом:

$$v_N(x) \equiv \mathbf{E}\, \left\{ V_N(x + \xi(x)) - V_N(x) \right\}.$$

Поскольку $0 \leq V_N(x) \leq N$, существует $\mathbf{E}\, V_N(\widetilde{X})$ и, следовательно, имеет место тождество

$$0 = \int_{\mathscr{X}} v_N(x)\, \widetilde{\pi}(dx) \equiv \mathbf{E}\, v_N(\widetilde{X})\,. \tag{2.8}$$

Так как

$$0 \leq V_N(x) \uparrow V(x)\,, \quad N \to \infty\,, \tag{2.9}$$

при каждом $x \in \mathscr{X}$, по теореме о монотонной сходимости имеет место следующая сходимость моментов:

$$\nu_N(x) \to \nu(x), \qquad N \to \infty . \tag{2.10}$$

Кроме того, по определению функции V_N при любых $N \geq 0$, $x \in \mathscr{X}$ справедливо неравенство

$$\nu_N(x) \leq \max(0, \nu(x)) , \tag{2.11}$$

т. е. случайные величины $\nu_N(\widetilde{X})$ мажорируются случайной величиной $\eta_1 \equiv \max(0, \nu(\widetilde{X}))$, причем $\mathbf{E}\,\eta_1 < \infty$ в силу условия (2.1). Применяя последовательно (2.8), лемму Фату и (2.10), получаем

$$0 = \limsup_{N \to \infty} \mathbf{E}\,\nu_N(\widetilde{X}) \leq \mathbf{E} \limsup_{N \to \infty} \nu_N(\widetilde{X}) = \mathbf{E}\,\nu(\widetilde{X}) .$$

Неравенство (2.2) доказано.

Заметим, что ввиду (2.1) и (2.2)

$$\mathbf{E}\,|\,\nu(\widetilde{X})\,| < \infty . \tag{2.12}$$

Применяя последовательно (2.7) и (2.3), оценим $\nu_N(x)$:

$$\nu_N(x) \leq \mathbf{E}\,\,|\,V(x + \xi(x)) - V(x)\,| \leq c\,(1 + |\,\nu(x)\,|) .$$

Следовательно, случайные величины $\nu_N(\widetilde{X})$ мажорируются по модулю случайной величиной η_2:

$$|\,\nu_N(\widetilde{X})\,| \leq (1 + c)\,|\,\nu(\widetilde{X})\,| \equiv \eta_2 ,$$

причем $\mathbf{E}\,\eta_2 < \infty$ в силу (2.12). Используя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, из (2.8) получаем, что

$$0 = \lim_{N \to \infty} \mathbf{E}\,\nu_N(\widetilde{X}) = \mathbf{E} \lim_{N \to \infty} \nu_N(\widetilde{X}) .$$

Таким образом, $\mathbf{E}\,\nu(\widetilde{X}) = 0$ в силу (2.10). Равенство (2.4) доказано.

Рассмотрим пробную функцию

$$V_B(x) = \begin{cases} \sup\limits_{y \in B} V(y) , & \text{если } x \in B, \\ V(x) , & \text{если } x \notin B. \end{cases}$$

Обозначим средний снос функции $V_B(x)$ через

$$\nu_B(x) \equiv \mathbf{E}\,\{V_B(x + \xi(x)) - V_B(x)\} .$$

Заметим, что по построению пробной функции $V_B(x)$ и ввиду неравенства (2.5) при $x \in B$ имеем

$$\nu_B(x) = \mathbf{E}\,\,\{V(x + \xi(x)) - \sup_{y \in B} V(y)\,;\; x + \xi(x) \in \mathscr{X} \backslash B\} \geq 0 ,$$

а в силу $V_B \geq V$ при $x \notin B$ —

$$\nu_B(x) = \mathbf{E}\,\,\{V_B(x + \xi(x)) - V(x)\} \geq \mathbf{E}\,\,\{V(x + \xi(x)) - V(x)\} \equiv \nu(x) .$$

Следовательно,

$$\int_{\mathscr{X}\setminus B} v(x)\,\tilde{\pi}(dx) \le \int_{\mathscr{X}\setminus B} v_B(x)\,\tilde{\pi}(dx) \le \int_{\mathscr{X}} v_B(x)\,\tilde{\pi}(dx)\,. \tag{2.13}$$

Введем обозначение $W(x) = V(x) - V_B(x)$. Функция $W(x)$ ограничена: $|W(x)| \le \sup_{y\in B} V(y)$, поэтому

$$\int_{\mathscr{X}} \mathbf{E}\,\{W(x+\xi(x)) - W(x)\}\ \tilde{\pi}(dx) = 0\,.$$

Поскольку $\mathbf{E}\,W(x+\xi(x)) - W(x) = v(x) - v_B(x)$, в силу (2.4) имеем

$$\int_{\mathscr{X}} v_B(x)\ \tilde{\pi}(dx) = 0\,. \tag{2.14}$$

Из (2.13) и (2.14) следует (2.6). Лемма 1 доказана.

Замечание 4. Близкие результаты для дискретных цепей Маркова при более сильных ограничениях установлены в [16, 17].

Приведем несколько следствий леммы 1. В первом из них мы снимаем требование неотрицательности пробной функции $V(x)$, накладывая при этом более сильное, нежели (2.1) и (2.3), условие на приращения $\xi(x)$.

Следствие 1. *Пусть $V\colon \mathscr{X}\to \mathbf{R}$ — измеримая функция такая, что*

$$\int_{\mathscr{X}} \mathbf{E}\,|V(x+\xi(x)) - V(x)|\,\pi(dx) < \infty. \tag{2.15}$$

Тогда

$$\int_{\mathscr{X}} \mathbf{E}\,\{V(x+\xi(x)) - V(x)\}\,\pi(dx) = 0.$$

Доказательство. Обозначим

$$V_+(x) = \max(0, V(x))\,, \qquad V_-(x) = -\min(0, V(x)).$$

По определению

$$V(x) = V_+(x) - V_-(x), \tag{2.16}$$

$$|V_+(x+y) - V_+(x)| \le |V(x+y) - V(x)|, \tag{2.17}$$

$$|V_-(x+y) - V_-(x)| \le |V(x+y) - V(x)| \tag{2.18}$$

для любых $x,\ y\in\mathscr{X}$. Ввиду (2.15) и (2.17) пробная функция $V_+(x)$ удовлетворяет условиям (2.1) и (2.3). Следовательно,

$$\int_{\mathscr{X}} \mathbf{E}\,\{V_+(x+\xi(x)) - V_+(x)\}\,\pi(dx) = 0. \tag{2.19}$$

Аналогично

$$\int_{\mathscr{X}} \mathbf{E}\,\{V_-(x+\xi(x)) - V_-(x)\}\,\pi(dx) = 0. \tag{2.20}$$

Из (2.16), (2.19) и (2.20) вытекает следствие 1.

Следствие 2. *Пусть* $\mathcal{Y}$ — *сепарабельное банахово пространство с нормой* $\|\cdot\|$ *и σ-алгеброй* $\mathfrak{B}(\mathcal{Y})$, *порожденной этой нормой. Пусть* $V: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — *измеримое отображение такое, что*

$$\int_{\mathcal{X}} \mathbf{E}\, \|V(x+\xi(x)) - V(x)\|\, \pi(dx) < \infty.$$

Тогда

$$\int_{\mathcal{X}} \mathbf{E}\, \{V(x+\xi(x)) - V(x)\}\, \pi(dx) = 0 \in \mathcal{Y}.$$

Доказательство вытекает из следствия 1, примененного к всевозможным пробным функциям вида $L(V(x))$, где L — линейный функционал на $\mathcal{Y}$.

Следствие 3. *Пусть стационарная цепь Маркова* $\{\widetilde{X}_n\}$ *принимает значения в сепарабельном банаховом пространстве* $\mathcal{Y}$. *Тогда, если* $\int_{\mathcal{Y}} \mathbf{E}\, \|\xi(x)\|\, \pi(dx) < \infty$, *то* $\int_{\mathcal{Y}} \mathbf{E}\, \xi(x)\, \pi(dx) = 0 \in \mathcal{Y}$.

Доказательство вытекает из следствия 2 при $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ и $V(x) = x$.

§ 3. УСТОЙЧИВОСТЬ

Основная сложность при доказательстве устойчивости (теорема 6) состоит в том, чтобы показать ограниченность по вероятности семейства (по $\varepsilon \ge 0$) случайных величин $X^{(\varepsilon)}$. Для этого нам потребуется следующая

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда существует неотрицательная возрастающая неограниченная функция f такая, что* $\sup\limits_{\varepsilon \ge 0} \mathbf{E} f(X^{(\varepsilon)}) < \infty$.

Доказательство. Если выполнено условие (1.10) теоремы 6, искомая функция $f(x)$ строится следующим образом. Прежде всего отметим, что в силу (1.10) существует неограниченная возрастающая функция $g(x) \ge 0$ такая, что

$$\sup_{x,\, \varepsilon} \mathbf{E} \left\{ (\xi^{(\varepsilon)}(x))^2\, g(\xi^{(\varepsilon)}(x))\, ;\ \xi^{(\varepsilon)}(x) \ge 0 \right\} < \infty . \tag{3.1}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что функция $g(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и вогнута. Положим $f(x) \equiv g(\ln(1+x))$. В силу вогнутости g

$$\sup_{x \ge 0} x f'(x) \le g'(0) < \infty . \tag{3.2}$$

Оценим «средний снос» пробной функции $V_1(x) = x^2 f(x)$ в состоянии x. По формуле Тейлора имеем равенство

$$v_1^{(\varepsilon)}(x) \equiv \mathbf{E} \left\{ \left(x + \xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^2 f(x + \xi^{(\varepsilon)}(x)) - x^2 f(x) \right\} =$$

$$= \mathbf{E} \left\{ \xi^{(\varepsilon)}(x) \left(2 x f(x) + x^2 f'(x)\right) + (\xi^{(\varepsilon)}(x))^2\, \frac{1}{2} \left(2 f(x + \theta\, \xi^{(\varepsilon)}(x)) + \right.\right.$$

$$+\,4\big(x+\theta\,\xi^{(\varepsilon)}(x)\big)\,f'\big(x+\theta\,\xi^{(\varepsilon)}(x)\big)+\big(x+\theta\,\xi^{(\varepsilon)}(x)\big)^2 f''\big(x+\theta\,\xi^{(\varepsilon)}(x)\big)\Big)\Big\}\,,$$

где $0\le\theta=\theta\,(x,\xi)\le 1$. Используя (3.2), ввиду возрастания и вогнутости функции $f(x)$ получаем неравенство

$$\nu_1^{(\varepsilon)}(x)\le\big(2\,x\,f(x)+x^2 f'(x)\big)\,m^{(\varepsilon)}(x)+\big(2\,f(x)+c_1\big)\,b^{(\varepsilon)}(x)\,/2\,+$$

$$+\;\mathbf{E}\,\Big\{\big(\xi^{(\varepsilon)}(x)\big)^2 f\big(\theta\,\xi^{(\varepsilon)}(x)\big)\,;\;\xi^{(\varepsilon)}(x)\ge 0\Big\}\,.$$

Из условия (1.26) и неравенств (3.1), (3.2) вытекают равномерные по x и ε оценки

$$\nu_1^{(\varepsilon)}(x)\;\le\;\big(2\,x\,m^{(\varepsilon)}(x)+b^{(\varepsilon)}(x)\big)\,f(x)+c_2\;\le\;-\,c_3\,f(x)+c_4\,, \qquad (3.3)$$

где $c_3>0$ и $c_4<\infty$. В силу (3.3) выполнено условие (2.1) для пробной функции $V_1(x)=x^2 f(x)$. Применяя (2.2), получаем

$$0\;\le\;\int_0^\infty \nu_1^{(\varepsilon)}(x)\,\pi^{(\varepsilon)}(dx)\,.$$

В силу последнего неравенства и оценки (3.3) верно равномерное по ε неравенство

$$\sup_\varepsilon\int_0^\infty f(x)\,\pi^{(\varepsilon)}(dx)\;\equiv\;\sup_\varepsilon\;\mathbf{E}\,f\big(X^{(\varepsilon)}\big)\;\le\;\frac{c_4}{c_3}<\infty\,.$$

Таким образом, при условии (1.10) функция $f(x)$ построена.

Пусть выполнено условие (1.27). Докажем, что для некоторого $\delta_0\in(0,\delta)$ функция $f(x)=x^{\delta_0}$ искомая. Прежде всего заметим, что для любого $\delta'\in(0,\delta)$ в силу неравенства Гёльдера и условий (1.26), (1.27) имеют место равномерные по $\varepsilon\ge 0$ соотношения

$$\mathbf{E}\,\Big\{\big(\xi^{(\varepsilon)}(x)\big)^{2+\delta'}\,;\;\xi^{(\varepsilon)}(x)\ge 0\Big\}=$$

$$=\;\mathbf{E}\,\Big\{\big(\xi^{(\varepsilon)}(x)\big)^{2\,(\delta-\delta')/\delta}\big(\xi^{(\varepsilon)}(x)\big)^{(\delta\,\delta'+2\,\delta')/\delta}\,;\;\xi^{(\varepsilon)}(x)\ge 0\Big\}\le$$

$$\le\;\mathbf{E}\,\Big\{\Big(\big(\xi^{(\varepsilon)}(x)\big)^{2\,(\delta-\delta')/\delta}\Big)^{\delta/(\delta-\delta')}\,;\;\xi^{(\varepsilon)}(x)\ge 0\Big\}^{(\delta-\delta')/\delta}\;\times$$

$$\times\,\mathbf{E}\,\Big\{\Big(\big(\xi^{(\varepsilon)}(x)\big)^{(\delta\,\delta'+2\,\delta')/\delta}\Big)^{\delta/\delta'}\,;\;\xi^{(\varepsilon)}(x)\ge 0\Big\}^{\delta'/\delta}\;=\;o\big(x^{\delta'}\big)\quad\text{при } x\to\infty. \qquad (3.4)$$

Из условия (1.26) следует, что существует $\delta_0\in(0,\delta)$ такое, что

$$\limsup_{x\to\infty}\;\sup_{\varepsilon\ge 0}\;\big(x\,m^{(\varepsilon)}(x)+(1+\delta_0)\,b^{(\varepsilon)}(x)\,/2\big)=-\,2\,c_5<0\,. \qquad (3.5)$$

Воспользовавшись формулой Тейлора, вычислим «средний снос» пробной функции $V_2(x)=x^{\,2+\delta_0}$ в состоянии x:

$$\nu_2^{(\varepsilon)}(x)\equiv\;\mathbf{E}\,\Big\{\big(x+\xi^{(\varepsilon)}(x)\big)^{2+\delta_0}-x^{\,2+\delta_0}\Big\}=$$

$$= (2+\delta_0)\ \mathrm{E}\left\{x^{1+\delta_0}\xi^{(\varepsilon)}(x) + \frac{1+\delta_0}{2}\left(x+\theta\,\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^{\delta_0}\left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^2\right\},$$

где $0 \le \theta = \theta(x, \xi) < 1$. В силу вогнутости функции y^{δ_0} $(0<\delta_0<1)$, неравенства (3.5) и соотношения (3.4) справедливы равномерные по $\varepsilon \ge 0$ неравенства

$$v_2^{(\varepsilon)}(x) \le$$

$$\le (2+\delta_0)\left(m^{(\varepsilon)}(x)\,x^{1+\delta_0} + \frac{1+\delta_0}{2}\,x^{\delta_0}b^{(\varepsilon)}(x) + \frac{1+\delta_0}{2}\,\mathrm{E}\left\{\left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^{2+\delta_0};\ \xi^{(\varepsilon)}(x)\ge 0\right\}\right) \le$$

$$\le -c_5\,x^{\delta_0} + c_6, \tag{3.6}$$

где $c_5 > 0$ и $c_6 < \infty$. Как уже отмечалось выше, неравенства типа (3.6) (см. (3.3)) влекут равномерную по $\varepsilon \ge 0$ оценку

$$\int_0^\infty x^{\delta_0}\pi^{(\varepsilon)}(dx) \equiv \mathrm{E}\left(X^{(\varepsilon)}\right)^{\delta_0} \le \frac{c_6}{c_5} < \infty .$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 6. Непосредственно из леммы 2 следует ограниченность по вероятности семейства случайных величин $\{X^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon\ge 0}$, так как

$$\sup_\varepsilon \mathrm{P}\left\{X^{(\varepsilon)} > N\right\} \le \sup_\varepsilon \mathrm{E} f\left(X^{(\varepsilon)}\right)/f(N) \to 0 \qquad \text{при} \quad N\to\infty .$$

Поэтому всякое предельное при $\varepsilon\downarrow 0$ в смысле слабой сходимости распределение $\tilde\pi$, т. е. $\pi^{(\varepsilon_k)} \Rightarrow \tilde\pi$ при $\varepsilon_k \downarrow 0$, является собственным: $\tilde\pi([0,\infty)) = 1$. Докажем, что $\tilde\pi$ удовлетворяет уравнению (1.1) при $\varepsilon = 0$.

Пусть случайная величина $\tilde X$ имеет распределение $\tilde\pi$. Характеристические функции случайных величин $X^{(\varepsilon)}$, $\tilde X$, $\xi^{(\varepsilon)}(x)$ обозначим через

$$\varphi^{(\varepsilon)}(t) = \mathrm{E}\exp\left\{i\,t\,X^{(\varepsilon)}\right\},\quad \varphi(t) = \mathrm{E}\exp\left\{i\,t\,\tilde X\right\},\ \varphi^{(\varepsilon)}(x,t) = \mathrm{E}\exp\left\{i\,t\,\xi^{(\varepsilon)}(x)\right\}, \tag{3.7}$$

соответственно. Докажем, что для всякого компакта $K \subset \mathbf{R}^+$ имеет место равномерная по $x\in K$ сходимость

$$\sup_{x\in K}\ \left|\varphi^{(\varepsilon)}(x,t) - \varphi(x,t)\right| \to 0 \tag{3.8}$$

при $\varepsilon\downarrow 0$ и фиксированном $t\in\mathbf{R}$. Действительно, предположим противное. Не нарушая общности, можно считать, что существует последовательность точек $y(\varepsilon)\in K$ такая, что

$$\liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\ \left|\varphi^{(\varepsilon)}(y(\varepsilon),t) - \varphi(y(\varepsilon),t)\right| > 0 .$$

Выделим сходящуюся подпоследовательность $y(\varepsilon_k)\to y_0\in K$. Тогда

$$\left|\varphi^{(\varepsilon_k)}(y(\varepsilon_k),t) - \varphi(y(\varepsilon_k),t)\right| \le$$

$$\le |\varphi^{(\varepsilon_k)}(y(\varepsilon_k), t) - \varphi(y_0, t)| + |\varphi(y_0, t) - \varphi^{(\varepsilon_k)}(y(\varepsilon_k), t)| \to 0$$

при $\varepsilon_k \downarrow 0$ в силу слабой непрерывности переходного ядра (см. (1.3)). В результате приходим к противоречию. Таким образом, равномерная сходимость имеет место.

Далее, имеем

$$\left|\widetilde{\varphi}(t) - \int_0^\infty e^{itx} \varphi(x, t)\,\widetilde{\pi}(dx)\right| =$$

$$= \left|\widetilde{\varphi}(t) - \varphi^{(\varepsilon_k)}(t) - \int_0^\infty e^{itx}\left(\varphi(x, t)\,\widetilde{\pi}(dx) - \varphi^{(\varepsilon_k)}(x, t)\,\pi^{(\varepsilon_k)}(dx)\right)\right| \le$$

$$\le |\widetilde{\varphi}(t) - \varphi^{(\varepsilon_k)}(t)| + \int_0^N |\varphi(x, t) - \varphi^{(\varepsilon_k)}(x, t)|\,\pi^{(\varepsilon_k)}(dx) +$$

$$+\int_N^\infty |\varphi(x, t) - \varphi^{(\varepsilon_k)}(x, t)|\,\pi^{(\varepsilon_k)}(dx) + \left|\int_0^\infty e^{itx} \varphi(x, t)\left(\widetilde{\pi}(dx) - \pi^{(\varepsilon_k)}(dx)\right)\right| =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 . \tag{3.9}$$

Правая часть соотношения (3.9) стремится к нулю при $\varepsilon_k \downarrow 0$. Действительно,

$I_1 \to 0$ в силу слабой сходимости $\pi^{(\varepsilon_k)} \Rightarrow \widetilde{\pi}$;

$I_2 \to 0$ при всяком фиксированном $N \in \mathbf{R}$ в силу равномерной сходимости (3.8);

$I_3 \to 0$ при $N \to \infty$ равномерно по ε в силу ограниченности по вероятности семейства случайных величин $X^{(\varepsilon)}$ (см. лемму 2);

$I_4 \to 0$ при $\varepsilon_k \downarrow 0$, поскольку $\pi^{(\varepsilon_k)} \Rightarrow \widetilde{\pi}$ и функция $\psi(x) \equiv e^{itx}\varphi(x, t)$ непрерывна (см. (1.3)) и ограничена при фиксированном $t \in \mathbf{R}$.

Итак, в силу (3.9) при всяком $t \in \mathbf{R}$ имеет место равенство

$$\widetilde{\varphi}(t) = \int_0^\infty e^{itx} \varphi(x, t)\,\widetilde{\pi}(dx) ,$$

т. е. мера $\widetilde{\pi}$ удовлетворяет уравнению (1.1) при $\varepsilon = 0$. Поэтому мера $\widetilde{\pi}$ совпадает с инвариантной мерой π, соответствующей цепи $\{X_n\}$. Таким образом, всякий частичный предел (в смысле слабой сходимости) последовательности $\pi^{(\varepsilon)}$ есть π. Теорема 6 доказана.

§ 4. СХОДИМОСТЬ К Г-РАСПРЕДЕЛЕНИЮ

В настоящем параграфе мы докажем теорему 2 методом характеристических функций. Предварительно докажем вспомогательную лемму.

Лемма 3. *Пусть* $\widetilde{X}_n$ *— стационарная цепь Маркова такая, что*

$$\limsup_{x \to \infty} \widetilde{m}(x) < 0 , \qquad \sup_x \widetilde{b}(x) < \infty . \tag{4.1}$$

Тогда для любого γ, $0 \le \gamma \le 2$,

$$0 = \int_0^\infty \mathbf{E}\left\{(x + \tilde{\xi}(x))^\gamma - x^\gamma\right\}\tilde{\pi}(dx) \tag{4.2}$$

и для любого числа x_*

$$0 \ge \int_{x_*}^\infty \mathbf{E}\left\{(x + \tilde{\xi}(x))^\gamma - x^\gamma\right\}\tilde{\pi}(dx). \tag{4.3}$$

Доказательство проведем с помощью леммы 1. По условию существуют числа x_1 и $\Delta > 0$ такие, что при $x \ge x_1$

$$\tilde{m}(x) \le -\Delta < 0. \tag{4.4}$$

Поскольку функция $y^{\gamma/2}$ вогнута, при $x \ge x_1$ имеют место неравенства

$$\mathbf{E}(x + \tilde{\xi}(x))^\gamma \le \left(\mathbf{E}(x + \tilde{\xi}(x))^2\right)^{\gamma/2} \le$$
$$\le ((x + \tilde{m}(x))^2 + \tilde{b}(x))^{\gamma/2} \le (x - \Delta)^\gamma + (\tilde{b}(x))^{\gamma/2},$$

из которых вытекает оценка «среднего сноса» пробной функции y^γ,

$$\mathbf{E}\left\{(x + \tilde{\xi}(x))^\gamma - x^\gamma\right\} \le -\gamma\Delta x^{\gamma-1} + c_1, \quad c_1 < \infty, \tag{4.5}$$

справедливая при достаточно больших x. Далее, можно проверить, что для любых x, y, γ, $x \ge 0$, $y \ge -x$, $0 \le \gamma \le 2$, справедливо неравенство

$$(x + y)^\gamma \le x^\gamma + \gamma x^{\gamma-1}|y| + |y|^\gamma. \tag{4.6}$$

Поэтому

$$\mathbf{E}\ |(x + \tilde{\xi}(x))^\gamma - x^\gamma| \le \gamma x^{\gamma-1}\mathbf{E}\ |\tilde{\xi}(x)| + \mathbf{E}\ |\tilde{\xi}(x)|^\gamma \le$$
$$\le c_2\gamma x^{\gamma-1} + c_3 \le c_2\,|-\Delta\gamma x^{\gamma-1} + c_1|/\Delta + (c_3 + c_2 c_1/\Delta). \tag{4.7}$$

Таким образом, в силу (4.5) и (4.7) при любом γ, $0 \le \gamma \le 2$, выполнены условия (2.1) и (2.3) леммы 2 для возрастающей пробной функции y^γ. Следовательно, имеют место (4.2) и (4.3). Лемма 3 доказана.

Опишем схему доказательства теоремы о сходимости к Г-распределению. Сначала мы покажем (лемма 4), что средние значения случайных величин $2\varepsilon X^{(\varepsilon)}$ равномерно ограничены. Далее будет преодолена основная трудность — мы докажем (лемма 7), что случайные величины $X^{(\varepsilon)}$ «уходят» по распределению на бесконечность при $\varepsilon \downarrow 0$, т. е. для каждого фиксированного $x \ge 0$ имеет место сходимость $\mathbf{P}\{X^{(\varepsilon)} \le x\} \to 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Затем, исходя из уравнения (1.1), мы получим уравнение для характеристической функции инвариантного распределения $\pi^{(\varepsilon)}$. Сделав замену переменной, мы покажем, что характеристические функции случайных величин $2\varepsilon X^{(\varepsilon)}$ сходятся к характеристической функции Г-распределения.

Лемма 4. *Существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что справедливо равномерное по* ε, $\varepsilon \le \varepsilon_0$, *неравенство* $\sup\limits_{0<\varepsilon\le\varepsilon_0} \mathbf{E}\, 2\varepsilon X^{(\varepsilon)} < \infty$.

Доказательство. В силу (1.8) существуют числа $c_4 < \infty$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что при $x \ge 0$ и $\varepsilon \le \varepsilon_0$

$$2\,x\,m^{(\varepsilon)}(x) + b^{(\varepsilon)}(x) \;\le\; -\,x\,\varepsilon + c_4\,. \tag{4.8}$$

«Средний снос» пробной функции $V(x) = x^2$ в состоянии x оценивается следующим образом:

$$\mathrm{E}\left\{V(x + \xi^{(\varepsilon)}(x)) - V(x)\right\} = 2\,x\,m^{(\varepsilon)}(x) + b^{(\varepsilon)}(x) \;\le\; -\varepsilon\,x + c_4 < \infty \tag{4.9}$$

при $\varepsilon \le \varepsilon_0$. В частности,

$$\mathrm{E}\left\{V(x + \xi^{(\varepsilon)}(x)) - V(x)\right\} \le c_4 < \infty\,. \tag{4.10}$$

Следовательно, выполнено условие (2.1) для пробной функции y^2. Подставив (4.9) в (2.2), получим неравенства

$$0 \le \int_0^\infty \left(2\,x\,m^{(\varepsilon)}(x) + b^{(\varepsilon)}(x)\right)\pi^{(\varepsilon)}(dx) \;\le\; -\,\varepsilon \int_0^\infty x\;\pi^{(\varepsilon)}(dx) + c_4\,, \tag{4.11}$$

из которых при $\varepsilon \le \varepsilon_0$ вытекает $\mathrm{E}\,2\,\varepsilon\,X^{(\varepsilon)} \;\le\; 2\,c_4$. Лемма 4 доказана.

В следующей лемме устанавливается оценка «среднего сноса» некоторой пробной функции.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда существуют числа* $0 < \rho < 1$, $x_* \ge 0$, $\varepsilon_* > 0$ *и* c_5, $c_6 > 0$ *такие, что при* $x \ge x_*$, $\varepsilon \le \varepsilon_*$

$$\nu^{(\varepsilon)}(x) \equiv \mathrm{E}\,\left\{\left(x + \xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^{1+\rho} - x^{1+\rho}\right\} \;\ge\; -\,\varepsilon\,x^\rho\,c_5 + c_6\,x^{\rho-1}\,.$$

Доказательство. Так как $\mu + b/2 > 0$, существует $\rho \in (0\,,1)$ такое, что $(1+\rho)\,(\mu + \rho\,b/2) = 2\,c_6 > 0$. По формуле Тейлора

$$\nu^{(\varepsilon)}(x) = \mathrm{E}\left\{\,(1+\rho)\,x^\rho\,\xi^{(\varepsilon)}(x) + \frac{(1+\rho)\,\rho}{2}\left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^2\left(x + \theta\,\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^{\rho-1}\right\} \ge$$

$$\ge\; (1+\rho)\,x^\rho m^{(\varepsilon)}(x) + \frac{(1+\rho)\,\rho}{2}\,\mathrm{E}\left\{\left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^2\left(x + \theta\,\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^{\rho-1};\; \xi^{(\varepsilon)}(x) \le \sqrt{x}\,\right\},$$

где $0 \le \theta = \theta\,(x, \xi) \le 1$. Ввиду неравенства $\rho - 1 < 0$ и условия (1.11) имеем

$$\nu^{(\varepsilon)}(x) \ge (1+\rho)x^\rho m^{(\varepsilon)}(x) + \frac{(1+\rho)\rho}{2}x^{\rho-1}\,\mathrm{E}\left\{\left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\rho-1};\; \xi^{(\varepsilon)}(x) \le \sqrt{x}\right\} =$$

$$= (1+\rho)\,x^\rho m^{(\varepsilon)}(x) + (1+\rho)\,\rho\,x^{\rho-1}\,b^{(\varepsilon)}(x)/2 + o\left(x^{\rho-1}\right) \qquad \text{при } x \to \infty \tag{4.12}$$

равномерно по ε. В силу оценки (4.12), асимптотических представлений (1.8) и выбора числа ρ найдутся числа $x_* \ge 1$, $\varepsilon_* > 0$ такие, что при $x \ge x_*$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_*$ справедливо неравенство

$$\nu^{(\varepsilon)}(x) \ge -\,2(1+\rho\,)\,\varepsilon\,x^\rho + c_6\,x^{\rho-1}\,.$$

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть выполнено условие* (1.9). *Предположим, что для некоторых числовой последовательности* $\psi(\varepsilon) > 0$ *и компакта* K

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\ \pi^{(\varepsilon)}(K)\,/\psi(\varepsilon) > 0\,.$$

Тогда найдется компакт $K_* \subset \mathbf{R}\setminus K$ *такой, что*

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\ \pi^{(\varepsilon)}(K_*)\,/\psi(\varepsilon) > 0\,.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $K = [0, y]$ для некоторого y. Для натуральных чисел n, N и точки x, $x \le y$, обозначим $p^{(\varepsilon)}(x, n, N) = \mathbf{P}\,\{y + 1 \le X_n^{(\varepsilon)} \le N \mid X_0^{(\varepsilon)} = x\}$. Ввиду условия (1.9) существуют $\varepsilon_* > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при $x < y$ и $\varepsilon \le \varepsilon_*$

$$\sum_{n\ge 0}\sum_{N\ge y} p^{(\varepsilon)}(x, n, N) \ge \mathbf{P}\left\{X_n^{(\varepsilon)} \ge y \text{ при некотором } n \mid X_0^{(\varepsilon)} = x\right\} \ge \delta > 0\,. \tag{4.13}$$

Следовательно, по условию леммы имеем

$$0 < \limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^y \frac{\delta}{\psi(\varepsilon)}\pi^{(\varepsilon)}(dy) \le \limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\sum_n\sum_N\int_0^y \frac{p^{(\varepsilon)}(x, n, N)}{\psi(\varepsilon)}\,\pi^{(\varepsilon)}(dy) \le$$

$$\le \sum_n\sum_N \limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^y \frac{p^{(\varepsilon)}(x, n, N)}{\psi(\varepsilon)}\pi^{(\varepsilon)}(dy) \le \sum_n\sum_N \limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^\infty \frac{p^{(\varepsilon)}(x, n, N)}{\psi(\varepsilon)}\pi^{(\varepsilon)}(dy) =$$

$$= \sum_n\sum_N \limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\mathbf{P}\,\{y + 1 \le X^{(\varepsilon)} \le N\}}{\psi(\varepsilon)}\,. \tag{4.14}$$

Таким образом, при некотором N справедливо неравенство

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\mathbf{P}\,\{y + 1 \le X^{(\varepsilon)} \le N\}}{\psi(\varepsilon)} > 0\,, \tag{4.15}$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если для некоторого компакта* K

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\ \pi^{(\varepsilon)}(K) > 0\,,$$

то для любого x_* *найдется* $\bar{x}$ *такое, что*

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\pi^{(\varepsilon)}([x_*, \bar{x}]) > 0\,.$$

Доказательство вытекает из леммы 6 при $\psi(\varepsilon) \equiv 1$.

Следствие 2. *Пусть* x_* — *некоторое число и* $\psi(\varepsilon) > 0$ — *числовая последовательность. Если соотношение* $\pi^{(\varepsilon)}(K) = O(\psi(\varepsilon))$ *при* $\varepsilon\downarrow 0$ *справедливо для любого компакта* $K \subset [x_*, \infty)$, *то оно справедливо также для любого компакта* $K \subset \mathbf{R}^+$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть существуют компакт K и последовательность $\psi_*(\varepsilon) \uparrow \infty$ при $\varepsilon\downarrow 0$ такие, что

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \ \pi^{(\varepsilon)}(K) \,/(\psi(\varepsilon)\,\psi_*(\varepsilon)) > 0 .$$

По лемме 6 найдется компакт $K_* \subset [x_*, \infty)$ такой, что

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \ \pi^{(\varepsilon)}(K_*) \,/(\psi(\varepsilon)\,\psi_*(\varepsilon)) = a > 0 .$$

Так как $\psi_*(\varepsilon) \uparrow \infty$, имеем

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \ \pi^{(\varepsilon)}(K_*) \,/\psi(\varepsilon) \ \ge \ a \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \ \psi_*(\varepsilon) \ = \ \infty ,$$

что противоречит условию. Следствие 2 доказано.

Лемма 7. *В условиях теоремы* 2 *для любого фиксированного* $x \ge 0$ *имеет место сходимость* $\mathbf{P}\ \{X^{(\varepsilon)} \le x\} \to 0$ *при* $\varepsilon \downarrow 0$.

Доказательство. Пусть ρ и x_* такие же, как в лемме 5. Предположим, что утверждение леммы 7 неверно, т. е. существует число $x_1 \ge 0$ такое, что

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \ \mathbf{P}\left\{X^{(\varepsilon)} \le x_1\right\} > 0 . \tag{4.16}$$

По следствию 1 леммы 6 найдется $\bar{x}$ такое, что

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \ \mathbf{P}\left\{x_* < X^{(\varepsilon)} \le \bar{x}\right\} > 0 . \tag{4.17}$$

Воспользовавшись леммой 4, получим сходимость моментов при $\varepsilon \downarrow 0$ $(0 < \rho < 1)$:

$$\mathbf{E}\,\varepsilon\,(X^{(\varepsilon)})^{\rho} = \varepsilon^{1-\rho}\,\mathbf{E}\,(\varepsilon\,X^{(\varepsilon)})^{\rho} \ \le \varepsilon^{1-\rho}\,(\,\mathbf{E}\,\varepsilon\,X^{(\varepsilon)})^{\rho} \to 0 . \tag{4.18}$$

В силу леммы 5 и оценок (4.17), (4.18) справедливы неравенства

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{x_*}^{\infty} \mathbf{E}\left\{(x + \xi^{(\varepsilon)}(x))^{1+\rho} - x^{1+\rho}\right\}\pi^{(\varepsilon)}(dx) \ \ge$$

$$\ge \ \limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \left(-\,\varepsilon\, c_5\,\mathbf{E}\,(X^{(\varepsilon)})^{\rho} + c_6\,\mathbf{P}\left\{x_* \le X^{(\varepsilon)} \le \bar{x}\right\}\bar{x}^{\rho-1}\right) \ \ge$$

$$\ge \ c_6\,\bar{x}^{\,\rho-1} \limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \ \mathbf{P}\left\{x_* \le X^{(\varepsilon)} \le \bar{x}\right\} > 0 , \tag{4.19}$$

которые противоречат утверждению (4.3) леммы 3 ($\gamma = 1 + \rho$). Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы 2. Слабую сходимость распределения случайных величин $2\,\varepsilon\,X^{(\varepsilon)}$ к Г-распределению докажем методом характеристических функций. Отметим, что уравнение (1.1) эквивалентно следующему уравнению для характеристических функций:

$$\varphi^{(\varepsilon)}(t) \equiv \int_0^{\infty} e^{\,i\,t\,x}\,\pi^{(\varepsilon)}(dx) = \int_0^{\infty} e^{\,i\,t\,x}\,\varphi^{(\varepsilon)}(x, t)\,\pi^{(\varepsilon)}(dx) . \tag{4.20}$$

Здесь использованы обозначения (3.7). Разлагая характеристическую функцию $\varphi^{(\varepsilon)}(x, t)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, приходим к равенству

$$\varphi^{(\varepsilon)}(t) = \int_0^\infty e^{itx}\left(1 + m^{(\varepsilon)}(x)\, i\, t + \int_0^t \frac{\partial^2 \varphi^{(\varepsilon)}(x,\theta)}{\partial\theta^2}(t-\theta)\, d\theta\right)\pi^{(\varepsilon)}(dx)\,, \qquad (4.21)$$

следствием которого является соотношение

$$0 = \int_0^\infty e^{itx}\left(i\, m^{(\varepsilon)}(x) + \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\partial^2 \varphi^{(\varepsilon)}(x,\theta)}{\partial\theta^2}(t-\theta)\, d\theta\right)\pi^{(\varepsilon)}(dx)\,. \qquad (4.22)$$

Дифференцируя последнее равенство по t (это возможно при достаточно малых $\varepsilon > 0$ в силу леммы 4) и применяя формулу Тейлора, получаем основное равенство

$$0 = \int_0^\infty e^{itx}\, i\, x\left(i\, m^{(\varepsilon)}(x) + \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\partial^2 \varphi^{(\varepsilon)}(x,\theta)}{\partial\theta^2}(t-\theta)\, d\theta\right)\pi^{(\varepsilon)}(dx) +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{e^{itx}}{t^2}\int_0^t \frac{\partial^2 \varphi^{(\varepsilon)}(x,\theta)}{\partial\theta^2}\,\theta\, d\theta\, \pi^{(\varepsilon)}(dx)\,, \qquad (4.23)$$

Положим $t = 2\,\varepsilon\, s$. Тогда $\varphi^{(\varepsilon)}(t) = \mathbf{E}\exp\left\{ i\, 2\,\varepsilon\, s\, X^{(\varepsilon)}\right\} \equiv \beta^{(\varepsilon)}(s)$ представляет собой характеристическую функцию случайной величины $2\,\varepsilon\, X^{(\varepsilon)}$. Имеем

$$\frac{d\varphi^{(\varepsilon)}(t)}{dt} = \frac{1}{2\varepsilon}\,\frac{d\beta^{(\varepsilon)}(s)}{ds}\,.$$

Пусть $S > 0$ — произвольное число. Проведем оценку:

$$|\Delta(x,\varepsilon,\theta)| \;\equiv\; |\partial^2\varphi^{(\varepsilon)}(x,\theta)/\partial\theta^2 + b\,| \;\le$$

$$\le\; |b - b^{(\varepsilon)}(x)| \;+\; \left|\partial^2\varphi^{(\varepsilon)}(x,\theta)/\partial\theta^2\right|_{\theta=0} - \partial^2\varphi^{(\varepsilon)}(x,\theta)/\partial\theta^2\,| \;\le$$

$$\le\; |b - b^{(\varepsilon)}(x)| \;+ \mathbf{E}\left\{\left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^2 |\exp\left\{ i\,\theta\,\xi^{(\varepsilon)}(x)\right\} - 1|\;;\; |\xi^{(\varepsilon)}(x)| \le N\right\} +$$

$$+\, \mathbf{E}\left\{\left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^2 |\exp\left\{ i\,\theta\,\xi^{(\varepsilon)}(x)\right\} - 1|\;;\; |\xi^{(\varepsilon)}(x)| > N\right\} \le$$

$$\le\; |b - b^{(\varepsilon)}(x)| \;+ N^2\,\theta\, N + 2\,\mathbf{E}\left\{\left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^2;\; |\xi^{(\varepsilon)}(x)| > N\right\} = I_1 + I_2 + I_3\,. \qquad (4.24)$$

Заметим, что

$I_1 \to 0$ при $x \to \infty$, $\varepsilon \downarrow 0$ в силу (1.8);

$I_2 \to 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$ равномерно по x и θ, $|\theta| < 2\varepsilon S$, для любого фиксированного N;

$I_3 \to 0$ при $N \to \infty$ равномерно по x и ε в силу (1.11).

Следовательно, имеет место равномерная по θ, $|\theta| < 2\varepsilon S$, сходимость

$$\Delta(x, \varepsilon, \theta) \to 0 \qquad (4.25)$$

при $x \to \infty$ и $\varepsilon \downarrow 0$. Пусть

$$m^{(\varepsilon)}(x) = -\varepsilon + \mu/x + \Delta(x,\varepsilon)(\varepsilon + 1/x), \tag{4.26}$$

где $\Delta(x,\varepsilon) \to 0$ при $x \to \infty$, $\varepsilon \downarrow 0$. Используя представления (4.24) и (4.26), из (4.23) выводим уравнение

$$0 = \int_0^\infty e^{itx} i\,x\left(-i\varepsilon + \frac{i\mu}{x} + \Delta(x,\varepsilon) i\left(\varepsilon + \frac{1}{x}\right) - \frac{bt}{2} + \frac{1}{t}\int_0^t \Delta(x,\varepsilon,\theta)(t-\theta)\,d\theta\right)\pi^{(\varepsilon)}(dx) -$$

$$- \frac{b\varphi^{(\varepsilon)}(t)}{2} + \int_0^\infty e^{itx}\frac{1}{t^2}\int_0^t \Delta(x,\varepsilon,\theta)\,\theta\,d\theta\;\pi^{(\varepsilon)}(dx).$$

Выделим $d\beta^{(\varepsilon)}(s)/ds$, $\beta^{(\varepsilon)}(s)$ и остаточные члены:

$$\frac{d\beta^{(\varepsilon)}(s)}{ds}\left(\frac{i}{2} + \frac{bs}{2}\right) + \beta^{(\varepsilon)}(s)\left(\mu + \frac{b}{2}\right) =$$

$$= \int_0^\infty e^{itx} i\,x\left(\Delta(x,\varepsilon) i\varepsilon + \frac{1}{t}\int_0^t \Delta(x,\varepsilon,\theta)(t-\theta)\,d\theta\right)\pi^{(\varepsilon)}(dx) +$$

$$+ \int_0^\infty e^{itx}\left(-\Delta(x,\varepsilon) + \frac{1}{t^2}\int_0^t \Delta(x,\varepsilon,\theta)\,\theta\,d\theta\right)\pi^{(\varepsilon)}(dx) \equiv$$

$$\equiv \Delta_1(t,\varepsilon) + \Delta_2(t,\varepsilon). \tag{4.27}$$

Слагаемое $\Delta_1(t,\varepsilon)$ стремится к нулю при $\varepsilon \downarrow 0$ равномерно по t, $|t| < 2\varepsilon S$, в силу:

а) неравенства

$$\sup_{\varepsilon \le \varepsilon_0} |\Delta_1(t,\varepsilon)| \le c_7 N \pi^{(\varepsilon)}([0,N]) +$$

$$+ \sup_{\theta,\, x>N,\, \varepsilon\le\varepsilon_0} \left(|\Delta(x,\varepsilon)| + |\Delta(x,\varepsilon,\theta)|\right)\int_N^\infty x\,\pi^{(\varepsilon)}(dx)\,(\varepsilon + \varepsilon S),$$

б) равномерной по θ, $|\theta| < 2\varepsilon S$, сходимости

$$\sup_{x>N,\, \varepsilon\le\varepsilon_0}\left(|\Delta(x,\varepsilon)| + |\Delta(x,\varepsilon,\theta)|\right) \to 0 \qquad \text{при} \quad N \to \infty,\ \varepsilon_0 \downarrow 0;$$

в) лемм 4 и 7.

Слагаемое $\Delta_2(t,\varepsilon)$ стремится к нулю при $\varepsilon \downarrow 0$ равномерно по t, $|t| < 2\varepsilon S$, в силу:

а) неравенства

$$\sup_{\varepsilon\le\varepsilon_0} |\Delta_2(t,\varepsilon)| \le c_7 \pi^{(\varepsilon)}([0,N]) + \sup_{\theta,\, x>N,\, \varepsilon\le\varepsilon_0}\left(|\Delta(x,\varepsilon)| + |\Delta(x,\varepsilon,\theta)|/2\right),$$

б) равномерной по θ, $|\theta| < 2\varepsilon S$, сходимости при $N \to \infty$, $\varepsilon_0 \downarrow 0$:

$$\sup_{x>N,\, \varepsilon\le\varepsilon_0}\left(|\Delta(x,\varepsilon)| + |\Delta(x,\varepsilon,\theta)|/2\right) \to 0,$$

в) леммы 7.

Пренебрегая в (4.27) остаточными членами, при $\varepsilon \downarrow 0$ получаем

$$(i+b\,s)\frac{d\beta^{(\varepsilon)}(s)}{ds} = (-2\mu-b)\,\beta^{(\varepsilon)}(s)+\delta(s\,,\varepsilon)\,, \qquad \beta^{(\varepsilon)}(0)=1\,,$$

где $\delta(s\,,\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\downarrow 0$ равномерно по $|s|<S$. Решение этого уравнения представимо в виде

$$\beta^{(\varepsilon)}(s) = (1-i\,b\,s)^{-1-2\mu/b}+o\,(1)\,, \qquad \varepsilon\downarrow 0\,.$$

Таким образом, при $\varepsilon\downarrow 0$ имеет место сходимость характеристических функций $\beta^{(\varepsilon)}(t)\to\beta_\eta(t)$, где случайная величина η имеет гамма-распределение с параметрами $1/b$ и $1+2\mu/b$. Теорема 2 доказана.

§ 5. КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

В данном параграфе мы докажем теоремы 3 и 4.

Случай $2\alpha+\beta<-b$. Не ограничивая общности, можно считать, что цепи $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$ принимают значения на множестве $[e,\infty)$, т. е. для любого n с вероятностью 1 имеют место неравенства $\ln X_n^{(\varepsilon)}\ge 1$, $\ln X^{(\varepsilon)}\ge 1$. Вычисление «среднего сноса» некоторой пробной функции проводится в следующей лемме.

Лемма 8. *Пусть цепи $X_n^{(\varepsilon)}\ge e$ удовлетворяют условию* (1.13). *Тогда для пробной функции $V_r(x)$, $0\le V_r(x)\equiv x^2\ln^r x$, $x\ge e$, $r\ge 0$, «средний снос» из состояния x при $x\to\infty$ имеет следующий вид*:

$$v_r^{(\varepsilon)}(x) \equiv \mathbf{E}\left\{V_r\left(x+\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)-V_r(x)\right\} =$$

$$=\left(\left(2\,x\,m^{(\varepsilon)}(x)+b^{(\varepsilon)}(x)\right)\ln x+r\left(x\,m^{(\varepsilon)}(x)+3\,b^{(\varepsilon)}(x)\,/2\right)+o\,(1)\right)\ln^{r-1}x$$

равномерно по $\varepsilon\ge 0$.

Доказательство. Согласно формуле Тейлора справедливо разложение

$$v_r^{(\varepsilon)}(x) = \mathbf{E}\Big\{\xi^{(\varepsilon)}(x)\left(2\,x\ln^r x+r\,x\ln^{r-1}x\right)+$$

$$+\left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^2\left(\ln^r(x+\theta\xi^{(\varepsilon)}(x))+\frac{3r}{2}\ln^{r-1}(x+\theta\xi^{(\varepsilon)}(x))+\frac{r(r-1)}{2}\ln^{r-2}(x+\theta\,\xi^{(\varepsilon)}(x))\right)\Big\}=$$

$$=\left(\left(2\,x\,m^{(\varepsilon)}(x)+b^{(\varepsilon)}(x)\right)\ln x+r\left(x\,m^{(\varepsilon)}(x)+3\,b^{(\varepsilon)}(x)\,/2\right)\right)\ln^{r-1}x\,+$$

$$+\,\mathbf{E}\Big\{\left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^2\Big(\ln^r(x+\theta\,\xi^{(\varepsilon)}(x))-\ln^r x+\frac{3r}{2}\left(\ln^{r-1}(x+\theta\,\xi^{(\varepsilon)}(x))-\ln^{r-1}x\right)+$$

$$+\,r\,(r-1)\left(\ln^{r-2}(x+\theta\,\xi^{(\varepsilon)}(x))-\ln^{r-2}x+\ln^{r-2}x\right)\Big)\Big\}\,,$$

где $0\le\theta=\theta\,(x,\xi)\le 1$. Для завершения доказательства леммы достаточно установить, что для любого $s\ge -2$ равномерно по ε имеет место оценка

$$\mathbf{E}\left\{\left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^2\left(\ln^s(x+\theta\,\xi^{(\varepsilon)}(x))-\ln^s x\right)\right\} = o\left(\ln^{r-1}x\right),\ x\to\infty\,. \tag{5.1}$$

Действительно, разобьем область интегрирования на две части: $|\xi| \le \sqrt{x}$ и $|\xi| > \sqrt{x}$, а затем оценим математическое ожидание по каждой из них. Поскольку

$$\ln^s(x+\xi) - \ln^s x = O\left(\left(\ln^{s-1} x\right)/\sqrt{x}\right), \quad x \to \infty, \tag{5.2}$$

равномерно по $|\xi| \le \sqrt{x}$, справедлива равномерная по ε оценка

$$\left|\mathbf{E}\left\{\left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^2 \left(\ln^s(x+\theta\,\xi^{(\varepsilon)}(x)) - \ln^s x\right);\ |\xi^{(\varepsilon)}(x)| \le \sqrt{x}\right\}\right| \le$$
$$\le c_1\left(\ln^{s-1} x\right)/\sqrt{x} = o\left(\ln^{r-1} x\right), \quad x \to \infty. \tag{5.3}$$

Далее, используя справедливые при $x \ge e$, $\xi \ge 0$, $\delta < 4$ и подходящей константе $c_2 = c_2(|s|)$ неравенства

$$\ln^{|s|} x \le c_2\, x^{\delta/4}, \quad \ln^{|s|}(x+\xi) \le c_2\left(x^{\delta/4} + \xi^{\delta/4}\right),$$

оценим среднее по области $|\xi| > \sqrt{x}$. Имеем

$$\left|\mathbf{E}\left\{\left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^2 \left(\ln^s(x+\theta\,\xi^{(\varepsilon)}(x)) - \ln^s x\right);\ |\xi^{(\varepsilon)}(x)| > \sqrt{x}\right\}\right| \le$$
$$\le \mathbf{E}\left\{\left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^2 \left(\ln^{|s|}(x+|\xi^{(\varepsilon)}(x)|) + \ln^{|s|} x\right);\ |\xi^{(\varepsilon)}(x)| > \sqrt{x}\right\} \le$$
$$\le c_2\,\mathbf{E}\left\{\left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^2 \left(|\xi^{(\varepsilon)}(x)|^{\delta/4} + 2\,x^{\delta/4}\right);\ |\xi^{(\varepsilon)}(x)| > \sqrt{x}\right\} \le$$
$$\le c_2\,\mathbf{E}\ |\xi^{(\varepsilon)}(x)|^{2+\delta}\left(1/x^{3\delta/8} + 2/x^{\delta/4}\right) \le$$
$$\le c_3/x^{\delta/4} = o\left(\ln^{r-1} x\right) \quad \text{при } x \to \infty \tag{5.4}$$

равномерно по ε в силу условия (1.13). Из оценок (5.3) и (5.4) получаем соотношение (5.1). Лемма 8 доказана.

Случай $2\alpha + \beta < -b$. Существует число $r_* > 1$ такое, что $2\alpha+\beta+ + r_* b < 0$. В силу леммы 8 и асимптотических представлений (1.12) «средний снос» пробной функции $V_{r_*}(x)$ ($x \to \infty$, $\varepsilon \downarrow 0$) выражается в виде

$$v_{r_*}^{(\varepsilon)}(x) = \left(-2\varepsilon(1+o(1))\,x\ln x + 2\alpha + \beta + r_* b + o(1)\right)\ln^{r_*-1} x \le$$
$$\le (2\alpha+\beta+r_* b)\left(\ln^{r_*-1} x\right)/2 + c_4, \quad c_4 < \infty, \tag{5.5}$$

равномерно по x и $\varepsilon \le \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало. Ввиду выбора числа r_* правая часть (5.5) ограничена сверху равномерно по $x \ge e$ при всяком $\varepsilon \le \varepsilon_0$. По лемме 1 (см. (2.2)) имеем

$$0 \le \int_e^\infty v_{r_*}^{(\varepsilon)}(x)\,\pi^{(\varepsilon)}(dx), \quad \varepsilon \le \varepsilon_0.$$

Подставляя (5.5), получаем равномерную по $\varepsilon \le \varepsilon_0$ оценку

$$\mathbf{E}\ln^{r_*-1} X^{(\varepsilon)} \le 2\,c_4/(-2\alpha - \beta - r_* b) < \infty.$$

Таким образом, семейство случайных величин $X^{(\varepsilon)}$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, ограничено по вероятности. Из этого следует (см. § 3), что инвариантное распределение $\pi^{(\varepsilon)}$ устойчиво при $\varepsilon \downarrow 0$. Утверждение (а) теоремы 3 доказано.

Случай $2\alpha + \beta > -b$. Сходимость к равномерному распределению докажем в два этапа. Сначала покажем, что распределение $\pi^{(\varepsilon)}$ «уходит на бесконечность». Тогда мы сможем показать методом моментов, что при $\varepsilon \downarrow 0$ распределения случайных величин

$$\left(\frac{\ln X^{(\varepsilon)}}{\ln 1/\varepsilon}\right)^{1 + (2\alpha + \beta)/b}$$

сходятся к равномерному на $[0, 1]$ распределению. Именно, мы докажем для моментов порядка $m = 1, 2, \ldots$ следующую сходимость:

$$\mathbf{E}\left(\frac{\ln X^{(\varepsilon)}}{\ln 1/\varepsilon}\right)^m \to \frac{b + 2\alpha + \beta}{bm + b + 2\alpha + \beta} = \mathbf{E}\eta^m \qquad \text{при } \varepsilon \downarrow 0, \tag{5.6}$$

где случайная величина $\eta^{1 + (2\alpha + \beta)/b}$ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$.

В силу асимптотических представлений (1.12) существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ справедливо соотношение

$$\limsup_{x \to \infty} m^{(\varepsilon)}(x) \le -\varepsilon/2. \tag{5.7}$$

Лемма 9. *В условиях теоремы 3 при любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $r \ge 0$ имеет место равенство*

$$0 = \int_e^\infty v_r^{(\varepsilon)}(x)\,\pi^{(\varepsilon)}(dx). \tag{5.8}$$

Кроме того, при каждом $x_* \ge e$ выполняется неравенство

$$0 \ge \int_{x_*}^\infty v_r^{(\varepsilon)}(x)\,\pi^{(\varepsilon)}(dx). \tag{5.9}$$

Доказательство. В силу леммы 8 и соотношения (5.7) при фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и достаточно большом x справедлива оценка

$$v_r^{(\varepsilon)}(x) \le -\varepsilon x \ln^r x / 2. \tag{5.10}$$

Далее, ввиду леммы 8, неравенства (5.10) и равномерной по x и ε ограниченности моментов $\sup \mathbf{E} \max\big(0, \xi^{(\varepsilon)}(x)\big) < \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\,|V_r(x + \xi^{(\varepsilon)}(x)) - V_r(x)| &= \mathbf{E}\,|\xi^{(\varepsilon)}(x)|\,(2x\ln^r x + rx\ln^{r-1} x) + \\ &+ O(\ln^r x) = O(x \ln^r x) = O\big(v_r^{(\varepsilon)}(x)\big) \quad \text{при } x \to \infty. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Таким образом, соотношения (5.10) и (5.11) показывают, что для пробной функции $V_r(x)$ выполнены условия (2.1) и (2.3). Следовательно, справедливы (5.8) и (5.9). Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда*

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \quad \mathrm{E}\left(\varepsilon X^{(\varepsilon)}\right)^{1+\delta} < \infty\,, \tag{5.12}$$

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \quad \varepsilon\, \mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)} \ln X^{(\varepsilon)} < \infty\,. \tag{5.13}$$

Доказательство. Оценим «средний снос» пробной функции V, $V(x)=x^{2+\delta}$, из состояния x. Так как

$$(x+y)^{2+\delta} = x^{2+\delta} + (2+\delta)\left(y\,x^{1+\delta} + (1+\delta)\,y^2\,(x+\theta\, y)^{\delta}/2\right),$$

из неравенства $(x+y)^{\delta} \le x^{\delta} + |y|^{\delta}$ $(0<\delta<1)$, условия (1.13) и асимптотических представлений (1.12) вытекают соотношения

$$\mathrm{E}\,\left\{\left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^{2+\delta} - x^{2+\delta}\right\} \le$$

$$\le (2+\delta)\left(x^{1+\delta} m^{(\varepsilon)}(x) + (1+\delta)\left(b^{(\varepsilon)}(x)\,x^{\delta} + \mathrm{E}\,|\,\xi^{(\varepsilon)}(x)\,|^{2+\delta}\right)/2\right) \le$$

$$\le (2+\delta)\left(-\varepsilon\, x^{1+\delta}/2 + c_8\, x^{\delta}\right) \tag{5.14}$$

при $x \ge x_1$, $\varepsilon \le \varepsilon_1$, где x_1 достаточно велико и $\varepsilon_1 > 0$ достаточно мало. При $\varepsilon \le \varepsilon_1$ правая часть (5.14) равномерно по x ограничена сверху. Следовательно, по лемме 1 имеем неравенство

$$0 \le \int_e^{\infty} \mathrm{E}\,\left\{\left(x + \xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^{2+\delta} - x^{2+\delta}\right\}\pi^{(\varepsilon)}(dx)\,, \tag{5.15}$$

подставляя в которое (5.14), получаем при $\varepsilon \le \varepsilon_1$ соотношение

$$\varepsilon\, \mathrm{E}\left(X^{(\varepsilon)}\right)^{1+\delta} \le c_9\, \mathrm{E}\left(X^{(\varepsilon)}\right)^{\delta}. \tag{5.16}$$

В частности, при $\delta = 0$ имеем $\varepsilon\, \mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)} \le c_9$. Поскольку функция x^{δ} вогнута, справедливо неравенство $\mathrm{E}\left(X^{(\varepsilon)}\right)^{\delta} \le c_9^{\delta}/\varepsilon^{\delta}$, подставляя которое в (5.16), получаем (5.12).

Перейдем к доказательству (5.13). Полагая $r = 1$ в лемме 9, получим равенство

$$0 = \int_e^{\infty} v_1^{(\varepsilon)}(x)\, \pi^{(\varepsilon)}(dx)\,.$$

Применяя лемму 8 и подставляя асимптотические представления (1.12), приходим к соотношению

$$0 = \int_e^{\infty}\left(\left(2\,x\,m^{(\varepsilon)}(x) + b^{(\varepsilon)}(x)\right)\ln x + x\,m^{(\varepsilon)}(x) + \frac{3}{2}\,b^{(\varepsilon)}(x) + o\,(1)\right)\pi^{(\varepsilon)}(dx) =$$

$$= 2\,(-\varepsilon + o\,(\varepsilon))\,\mathrm{E}\,X^{(\varepsilon)} \ln X^{(\varepsilon)} + O\,(1) \qquad \text{при } \varepsilon\downarrow 0\,.$$

Следовательно, верно неравенство (5.13). Лемма 10 доказана.

Лемма 11. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *и* $2\alpha + \beta > -b$. *Тогда* $\mathrm{P}\left\{X^{(\varepsilon)} \le x\right\} \to 0$ *при* $\varepsilon\downarrow 0$ *для всякого фиксированного* $x \ge 0$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. существует число $x_1 \ge 0$ такое, что

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \mathbf{P}\left\{ X^{(\varepsilon)} \le x_1 \right\} > 0 .$$

Поскольку $2\alpha + \beta > -b$, существует $\rho \in (0,1)$ такое, что

$$2\alpha + \beta + \rho b > 0 . \qquad (5.17)$$

В силу леммы 8 существуют $x_* \ge e$, $\varepsilon_* > 0$, $c_{10} > 0$ и $c_{11} > 0$ такие, что при $x \ge x_*$ и $0 < \varepsilon \le \varepsilon_*$ для «среднего сноса» пробной функции $V_\rho(x) = x^2 \ln^\rho x$ справедлива следующая оценка:

$$v_\rho^{(\varepsilon)}(x) \ \ge\ -c_{10}\varepsilon x \ \ln^\rho x + c_{11} \ln^{\rho-1} x . \qquad (5.18)$$

Ввиду следствия 1 леммы 6 найдется $\overline{x} \ge e$ такое, что

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \mathbf{P}\left\{ x_* \le X^{(\varepsilon)} \le \overline{x} \right\} > 0 . \qquad (5.19)$$

Поскольку при всяком $N > 1$

$$\mathbf{E}\, \varepsilon X^{(\varepsilon)} \ln^\rho X^{(\varepsilon)} \le \varepsilon N \ln^\rho N + \mathbf{E}\left\{ \varepsilon X^{(\varepsilon)} \ln X^{(\varepsilon)};\ X^{(\varepsilon)} \ge N \right\} \ln^{\rho-1} N , \qquad (5.20)$$

по лемме 10 имеет место сходимость моментов

$$\mathbf{E}\, \varepsilon X^{(\varepsilon)} \ln^\rho X^{(\varepsilon)} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon\downarrow 0 . \qquad (5.21)$$

В силу (5.18), (5.19) и (5.21) справедливы неравенства

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{x_*}^{\infty} v_\rho^{(\varepsilon)}(x)\, \pi^{(\varepsilon)}(dx) \ \ge$$

$$\ge \limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \left(-\varepsilon c_{10} \mathbf{E}\, X^{(\varepsilon)} \ln^\rho X^{(\varepsilon)} + c_{11} \mathbf{P}\left\{ x_* \le X^{(\varepsilon)} \le \overline{x} \right\} \ln^{\rho-1} \overline{x} \right) \ge$$

$$\ge\ c_{11} \ln^{\rho-1} \overline{x}\ \limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \mathbf{P}\left\{ x_* \le X^{(\varepsilon)} \le \overline{x} \right\} > 0 ,$$

которые противоречат неравенству (5.9). Лемма 11 доказана.

Лемма 12. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *и* $2\alpha + \beta > -b$. *Тогда при* $\varepsilon\downarrow 0$ *имеет место сходимость* $2\varepsilon\, \mathbf{E}\, X^{(\varepsilon)} \ln X^{(\varepsilon)} \to b + 2\alpha + \beta$.

Доказательство. При выводе (5.13) установлено равенство

$$0 = 2\,(-\varepsilon + o(\varepsilon))\, \mathbf{E}\, X^{(\varepsilon)} \ln X^{(\varepsilon)} + b + 2\alpha + \beta + \int_e^\infty \Delta(x,\varepsilon)\, \pi^{(\varepsilon)}(dx) ,$$

где $\Delta(x,\varepsilon) \to 0$ при $x \to \infty$, $\varepsilon\downarrow 0$. Так как в силу леммы 11

$$\int_e^\infty \Delta(x,\varepsilon)\, \pi^{(\varepsilon)}(dx) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon\downarrow 0 ,$$

лемма 12 доказана.

Лемма 13. *При всяком* $m = 1, 2, \ldots$ *имеет место сходимость*

$$2\varepsilon\, \mathbf{E}\, \{X^{(\varepsilon)} \ln^m X^{(\varepsilon)}\} / \ln^{m-1}(1/\varepsilon) \to b + 2\alpha + \beta \quad \textit{при } \varepsilon\downarrow 0 .$$

Доказательство проведем в два этапа.

1. Пусть $\kappa > 0$. Применяя неравенство $\ln^m y \le c_{12} y^{\delta\kappa/2}$, а затем оценку (5.12), получаем

$$\varepsilon\,\mathrm{E}\,\left\{ X^{(\varepsilon)} \ln^m X^{(\varepsilon)}\,;\ \ln X^{(\varepsilon)} > (1+\kappa)\ln(1/\varepsilon) \right\} \le$$

$$\le c_{12}\,\varepsilon\,\mathrm{E}\,\left\{ \left(X^{(\varepsilon)}\right)^{1+\delta} / \left(X^{(\varepsilon)}\right)^{\delta(1-\kappa/2)}\,;\ X^{(\varepsilon)} > 1/\varepsilon^{1+\kappa} \right\} \le$$

$$\le c_{13}\,\varepsilon\,\varepsilon^{\delta(1+\kappa)(1-\kappa/2)}/\varepsilon^{1+\delta} = c_{13}\,\varepsilon^{\delta\kappa(1-\kappa)/2}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon\,\mathrm{E}\,X^{(\varepsilon)} \ln^m X^{(\varepsilon)} =$$

$$= \varepsilon\,\mathrm{E}\,\left\{ X^{(\varepsilon)} \ln^m X^{(\varepsilon)}\,;\ \ln X^{(\varepsilon)} > (1+\kappa)\ln(1/\varepsilon) \right\} +$$

$$+ \varepsilon\,\mathrm{E}\,\left\{ X^{(\varepsilon)} \ln^m X^{(\varepsilon)}\,;\ \ln X^{(\varepsilon)} \le (1+\kappa)\ln(1/\varepsilon) \right\} \le$$

$$\le c_{13}\,\varepsilon^{\delta\kappa(1-\kappa)/2} + \varepsilon\,\mathrm{E}\,\left\{ X^{(\varepsilon)} \ln X^{(\varepsilon)} \right\} \ln^{m-1}(1/\varepsilon)\,(1+\kappa)^{m-1}.$$

Используя лемму 12, выводим

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\ 2\,\varepsilon\,\mathrm{E}\,X^{(\varepsilon)} \ln^m X^{(\varepsilon)} / \ln^{m-1}(1/\varepsilon) \le (b + 2\alpha + \beta)(1+\kappa)^{m-1}.$$

Поскольку число $\kappa > 0$ выбрано произвольно, имеем

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\ 2\,\varepsilon\,\mathrm{E}\,X^{(\varepsilon)} \ln^m X^{(\varepsilon)} / \ln^{m-1}(1/\varepsilon) \le b + 2\alpha + \beta. \tag{5.22}$$

2. Проведем следующее преобразование:

$$X^{(\varepsilon)} \ln^m X^{(\varepsilon)} = X^{(\varepsilon)}\left(\ln X^{(\varepsilon)}\right)\left(\ln\left(X^{(\varepsilon)} \ln X^{(\varepsilon)}\right) - \ln\ln X^{(\varepsilon)}\right)^{m-1} =$$

$$= \left(X^{(\varepsilon)} \ln X^{(\varepsilon)}\right)\left(\ln^{m-1}\left(X^{(\varepsilon)} \ln X^{(\varepsilon)}\right)\right)\left(1 - \eta^{(\varepsilon)}\right),$$

где случайные величины $\eta^{(\varepsilon)}$ сходятся к нулю по вероятности. Так как «$X^{(\varepsilon)} \Rightarrow \infty$ при $\varepsilon\downarrow 0$» и функция $x \ln^{m-1} x$ выпукла при $x \ge 1$, имеем

$$\mathrm{E}\,X^{(\varepsilon)} \ln^m X^{(\varepsilon)} \sim \mathrm{E}\left(X^{(\varepsilon)} \ln X^{(\varepsilon)}\right) \ln^{m-1}\left(X^{(\varepsilon)} \ln X^{(\varepsilon)}\right) \ge$$

$$\ge \left(\mathrm{E}\,X^{(\varepsilon)} \ln X^{(\varepsilon)}\right) \ln^{m-1}\left(\mathrm{E}\,X^{(\varepsilon)} \ln X^{(\varepsilon)}\right).$$

Из последнего неравенства и леммы 12 вытекает

$$\liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\ 2\,\varepsilon\,\mathrm{E}\,X^{(\varepsilon)} \ln^m X^{(\varepsilon)} / \ln^{m-1}(1/\varepsilon) \ge b + 2\alpha + \beta. \tag{5.23}$$

Оценки (5.22) и (5.23) эквивалентны утверждению леммы 13.

Лемма 14. *При всяком $m = 1, 2, \ldots$ имеет место сходимость моментов*

$$\mathrm{E}\left(\ln^{m-1} X^{(\varepsilon)}\right) / \ln^{m-1}(1/\varepsilon) \to (b + 2\alpha + \beta)/(m\,b + 2\alpha + \beta), \qquad \varepsilon\downarrow 0.$$

Доказательство. По лемме 9 при достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливо тождество ($r = m$)

$$0 = \int_e^\infty v_m^{(\varepsilon)}(x)\,\pi^{(\varepsilon)}(dx)\,.$$

Применяя лемму 8 и используя асимптотические представления (1.12), приходим к равенствам

$$0=\int_e^\infty \left((2xm^{(\varepsilon)}(x)+b^{(\varepsilon)}(x))\ln x + m(xm^{(\varepsilon)}(x)+\tfrac{3}{2}b^{(\varepsilon)}(x))+\Delta(x,\varepsilon)\right)\ln^{m-1}x\,\pi^{(\varepsilon)}(dx)=$$

$$= \int_e^\infty \left(2\,(-\varepsilon+o\,(\varepsilon))\,x\ln x + 2\,\alpha+\beta+m\,b+\Delta(x,\varepsilon)\right)\ln^{m-1} x\;\pi^{(\varepsilon)}(dx)$$

при $\varepsilon\downarrow 0$, где $\Delta(x,\varepsilon)\to 0$ при $x\to\infty, \varepsilon\downarrow 0$. Поскольку в силу леммы 11 справедливо соотношение

$$\int_e^\infty \Delta(x,\varepsilon)\ln^{m-1} x\;\pi^{(\varepsilon)}(dx) = o\left(\mathrm{E}\ln^{m-1} X^{(\varepsilon)}\right) \quad \text{при } \varepsilon\downarrow 0\,,$$

имеем

$$2\,(\varepsilon+o\,(\varepsilon))\,\mathrm{E}\,X^{(\varepsilon)}\ln^m X^{(\varepsilon)} = \int_e^\infty (2\,\alpha+\beta+m\,b+\Delta(x,\varepsilon))\ln^{m-1} x\;\pi^{(\varepsilon)}(dx) =$$

$$= (2\,\alpha+\beta+m\,b+o\,(1))\;\mathrm{E}\;\ln^{m-1} X^{(\varepsilon)} \quad \text{при } \varepsilon\downarrow 0\,.$$

Применение леммы 13 завершает доказательство леммы 14, а вместе с тем и утверждения (б) теоремы 3.

Схема доказательства теоремы 4. Основные идеи доказательства те же, что и в теореме 3. Однако подробное изложение доказательства громоздко из-за присутствия многочисленных повторных логарифмов, поэтому мы отметим лишь основные отличия в доказательствах теорем 3 и 4.

Рассмотрим пробную функцию $V_m(x) = x^2\, l_1(x)\cdot\ldots\cdot l_{k-1}(x)\cdot l_k^m(x)\ge 0$, $m\ge 1$, на множестве $\{x:\ l_k(x)\ge 0\}$.

Лемма 15. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда «средний снос» пробной функции $V_m(x)$ из состояния x имеет вид*

$$v_m^{(\varepsilon)}(x) \equiv \mathrm{E}\left\{V_m(x+\xi^{(\varepsilon)}(x)) - V_m(x)\right\} = -2\,\varepsilon\,(1+o(1))\,x\,l_1(x)\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot l_{k-1}(x)\,l_k^m(x) + (2\alpha_k+\beta_k+mb+o(1))\,l_k^{m-1}(x)\,,\ x\to\infty,\ \varepsilon\downarrow 0\,. \quad (5.24)$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 8.

Пусть $2\,\alpha_k+\beta_k < -\,b$. Выберем число $\rho>1$ так, чтобы выполнялось неравенство $2\,\alpha_k+\beta_k+\rho\,b<0$. Положим $m=\rho$. В силу леммы 15 имеем неравенство

$$v_\rho^{(\varepsilon)}(x)\le (\,2\,\alpha_k+\beta_k+\rho\,b\,)\,l_k^{\rho-1}(x)\,/2 = -\,\kappa\,l_k^{\rho-1}(x)\,,\ \kappa>0\,, \quad (5.25)$$

при достаточно большом x и достаточно малом $\varepsilon>0$. Применение леммы 1 (как и при доказательстве теоремы 6) позволяет установить устойчивость инвариантного распределения.

Пусть $2\alpha_k + \beta_k > -b$. Имеют место следующие аналоги лемм 11 и 9:

а) распределение $\pi^{(\varepsilon)}$ сходится к бесконечности при $\varepsilon \downarrow 0$;

б) при любом натуральном m и достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$0 = \int \mathrm{E}\left\{ V_m(x + \xi^{(\varepsilon)}(x)) - V_m(x) \right\} \pi^{(\varepsilon)}(dx).$$

Из последнего тождества, равенства (5.24) и сходимости «$\pi^{(\varepsilon)} \Rightarrow \infty$ при $\varepsilon \downarrow 0$» вытекает соотношение

$$2\varepsilon\, \mathrm{E} X^{(\varepsilon)}\, l_1(X^{(\varepsilon)}) \cdot \ldots \cdot l_{k-1}(X^{(\varepsilon)})\, l_k^m(X^{(\varepsilon)}) \sim$$

$$\sim (2\alpha_k + \beta_k + b\,m)\, \mathrm{E}\, l_k^{m-1}(X^{(\varepsilon)}), \quad \varepsilon \downarrow 0. \tag{5.26}$$

В частности, при $m = 1$ имеем

$$2\,\varepsilon\, \mathrm{E} X^{(\varepsilon)}\, l_1(X^{(\varepsilon)}) \cdot \ldots \cdot l_k(X^{(\varepsilon)}) \to 2\,\alpha_k + \beta_k + b \quad \text{при } \varepsilon \downarrow 0. \tag{5.27}$$

Как и в лемме 13, можно показать, что для всякого натурального m имеет место сходимость

$$2\,\varepsilon\, \mathrm{E} X^{(\varepsilon)}\, l_1(X^{(\varepsilon)}) \cdot \ldots \cdot l_{k-1}(X^{(\varepsilon)})\, l_k^m(X^{(\varepsilon)}) \,/\, l_k^{m-1}(1/\varepsilon) \to 2\,\alpha_k + \beta_k + b \quad \text{при } \varepsilon \downarrow 0.$$

В сочетании с (5.26) это дает требуемую сходимость моментов

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathrm{E}\, \left(l_k(X^{(\varepsilon)}) \,/\, l_k(1/\varepsilon) \right)^{m-1} =$$

$$= (2\,\alpha_k + \beta_k + b)/(2\,\alpha_k + \beta_k + m\,b) = \mathrm{E}\,\eta^{m/(1 + (2\alpha_k + \beta_k)/b)},$$

где случайная величина η имеет равномерное распределение на $[0, 1]$.

§ 6. СХОДИМОСТЬ К НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ

В настоящем параграфе мы докажем теорему 5. Прежде всего заметим, что в силу леммы 7 случайные величины $X^{(\varepsilon)}$ «уходят по распределению на бесконечность» при $\varepsilon \downarrow 0$. Не ограничивая общности, предположим, что $\limsup\limits_{x \to \infty} m^{(\varepsilon)}(x) \le -\varepsilon/2$ при любом $\varepsilon > 0$.

Лемма 16. *Если числовая последовательность $a_\varepsilon \to \infty$ такая, что*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} h(a_\varepsilon)/\varepsilon = 1, \tag{6.1}$$

то

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} a_\varepsilon / q_\varepsilon = 1, \tag{6.2}$$

где число q_ε определено в (1.20). *Если*

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} h(a_\varepsilon)/\varepsilon < \infty, \tag{6.3}$$

то

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} a_\varepsilon / q_\varepsilon > 0. \tag{6.4}$$

Доказательство. Покажем справедливость первого утверждения. Пусть для определенности $a_\varepsilon \le q_\varepsilon$. Предположим, что (6.2) не верно. Не ограничивая общности, предположим, что существует число $c < 1$ такое, что $a_\varepsilon \le c\, q_\varepsilon$. Функция $h(x)$ убывает (см. (1.19)), а функция $L(x)$ медленно меняется, поэтому

$$h(a_\varepsilon) \ge h(c\,q_\varepsilon) \equiv 1/(c\,q_\varepsilon)^\lambda L(c\,q_\varepsilon) \sim (1/c)^\lambda h(q_\varepsilon) = \varepsilon / c^\lambda. \tag{6.5}$$

Поскольку $c < 1$ и $\lambda > 0$, имеем $\liminf\limits_{\varepsilon \downarrow 0} h(a_\varepsilon)/\varepsilon \ge 1/c^\lambda > 1$, что противоречит условию (6.1).

Для проверки второго утверждения допустим, что (6.4) не имеет места, т. е.

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} a_\varepsilon/(c\,q_\varepsilon) < 1$$

для любого числа $c > 0$. Применяя (6.5), в силу условия (6.3) получаем неравенства

$$1 \le \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} h(a_\varepsilon)/h(c\,q_\varepsilon) = \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} h(a_\varepsilon)\, c^\lambda/\varepsilon \le c_1 c^\lambda, \quad c_1 < \infty$$

для любого $c > 0$. Приходим к противоречию. Лемма 16 доказана.

Пусть функция $f(x) > 0$ выпукла или вогнута. Тогда для каждой точки x существует опорная прямая $D(x)$ к кривой f. Если опорная не единственна, то выберем любую из них и обозначим угол ее наклона через $d_f(x)$. Относительно функции $d_f(x)$ верна следующая

Лемма 17. *Если функция $f(x) > 0$ правильно меняется на бесконечности с показателем $\gamma \in \mathbf{R}$, то $d_f(x) = (\gamma + o(1)) f(x)/x$ при $x \to \infty$.*

Доказательство. Допустим для определенности, что $f(x)$ вогнута, и, следовательно, $0 \le \gamma \le 1$. Пусть $\delta > 0$. Так как $f(x)$ вогнута, угол наклона опорной прямой $D(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$(f(z) - f(x))/(z - x) \le d_f(x) \le (f(x) - f(y))/(x - y)$$

для любых точек x, y, z, $y < x < z$. Полагая $y = x(1 - \delta)$ и $z = x(1 + \delta)$, получаем

$$(f(x(1+\delta)) - f(x))/(\delta x) \le d_f(x) \le (f(x) - f(x(1-\delta)))/(\delta x).$$

Поскольку функция f правильно меняется с показателем γ, при $x \to \infty$ имеют место эквивалентности

$$(f(x(1+\delta)) - f(x))/(\delta x) \sim ((1+\delta)^\gamma - 1) f(x)/(\delta x),$$

$$(f(x) - f(x(1-\delta)))/(\delta x) \sim (1 - (1-\delta)^\gamma) f(x)/(\delta x),$$

из которых с помощью предыдущих неравенств находим

$$((1+\delta)^\gamma - 1)/\delta \le \liminf_{x \to \infty} \frac{x\, d_f(x)}{f(x)} \le \limsup_{x \to \infty} \frac{x\, d_f(x)}{f(x)} \le (1 - (1-\delta)^\gamma)/\delta.$$

В силу произвольности выбора числа $\delta > 0$ отсюда получаем утверждение леммы 17.

Лемма 18. *Имеет место равенство*

$$0 = \int_0^\infty \frac{m^{(\varepsilon)}(x)}{h(x)}\, \pi^{(\varepsilon)}(dx) + o(1), \qquad \varepsilon \downarrow 0.$$

Доказательство. Обозначим

$$V(x) \equiv \int_0^x \frac{dz}{h(z)}.$$

В силу предположения (1.17) функция $f(x) \equiv 1/h(x)$ вогнута, поэтому при любых x, z, $x \geq 0$, $z \geq -x$,

$$1/h(x+z) - 1/h(x) \leq z\, d_f(x).$$

Интегрируя последнее неравенство по z от 0 до y, получаем

$$\int_x^{x+y} \frac{dz}{h(z)} \leq \frac{y}{h(x)} + d_f(x)\frac{y^2}{2},$$

и, следовательно, справедливы неравенства

$$\mathrm{E}\left\{ V(x+\xi^{(\varepsilon)}(x)) - V(x) \right\} \leq m^{(\varepsilon)}(x)/h(x) + d_f(x)\, b^{(\varepsilon)}(x)/2, \tag{6.6}$$

$$\mathrm{E}\ \left| V(x+\xi^{(\varepsilon)}(x)) - V(x) \right| \leq \mathrm{E}\ \left|\xi^{(\varepsilon)}(x)\right| /h(x) + d_f(x)\, b^{(\varepsilon)}(x)/2. \tag{6.7}$$

Так как функция $V'(x) = 1/h(x)$ возрастает, функция $V(x)$ выпукла. Поэтому

$$\mathrm{E}\left\{ V(x+\xi^{(\varepsilon)}(x)) - V(x) \right\} \geq V'(x)\, m^{(\varepsilon)}(x) = m^{(\varepsilon)}(x)/h(x). \tag{6.8}$$

Из неравенств (6.6), (6.7) и леммы 17 вытекает, что пробная функция $V(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Значит справедливо тождество

$$0 = \int_0^\infty \mathrm{E}\left\{ V(x+\xi^{(\varepsilon)}(x)) - V(x) \right\} \pi^{(\varepsilon)}(dx).$$

Используя неравенства (6.6) и (6.8), приходим к равенству леммы.

Лемма 19. *Пусть выполнены условия* (1.15)—(1.18). *Тогда при* $\varepsilon \downarrow 0$ *имеет место сходимость* $X^{(\varepsilon)}/q_\varepsilon \Rightarrow 1$, *причем сходятся и средние значения*: $\mathrm{E}X^{(\varepsilon)}/q_\varepsilon \to 1$.

Доказательство. Из леммы 18, асимптотических представлений (1.15) и сходимости «$\pi^{(\varepsilon)} \Rightarrow \infty$ при $\varepsilon \downarrow 0$» следует равенство

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon\, \mathrm{E}\ 1/h(X^{(\varepsilon)}) = 1. \tag{6.9}$$

Поскольку функция $1/h(x)$ вогнута,

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} h(\mathrm{E}X^{(\varepsilon)})/\varepsilon \leq 1. \tag{6.10}$$

Согласно лемме 3 (при $\gamma = 2$) справедливо равенство

$$0 = \int_0^\infty \left(2x\, m^{(\varepsilon)}(x) + b^{(\varepsilon)}(x) \right) \pi^{(\varepsilon)}(dx). \tag{6.11}$$

Подставляя асимптотические представления (1.15) и используя сходимости $x\,h(x) \to \infty$ при $x \to \infty$ и «$\pi^{(\varepsilon)} \Rightarrow \infty$ при $\varepsilon \downarrow 0$», получаем, что

$$(\varepsilon + o(\varepsilon))\ \mathbf{E}\, X^{(\varepsilon)} = \mathbf{E}\, X^{(\varepsilon)}\, h\left(X^{(\varepsilon)}\right), \quad \varepsilon \downarrow 0\,.$$

По предположению (1.18) функция $x\,h(x)$ вогнута, поэтому

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0}\ h\left(\mathbf{E}\, X^{(\varepsilon)}\right) / \varepsilon \ \geq\ 1\,. \tag{6.12}$$

Из (6.10) и (6.12) вытекает асимптотика

$$h\left(\mathbf{E}\, X^{(\varepsilon)}\right) \sim \varepsilon \qquad \text{при } \varepsilon \downarrow 0, \tag{6.13}$$

откуда в силу леммы 16 следует сходимость моментов $\mathbf{E}\, X^{(\varepsilon)} / q_\varepsilon \to 1$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Далее, ввиду «$\pi^{(\varepsilon)} \Rightarrow \infty$» существует последовательность $x(\varepsilon) \to \infty$ такая, что

$$\mathbf{P}\left\{ X^{(\varepsilon)} \geq x(\varepsilon) \right\} \to 1 \qquad \text{при } \varepsilon \downarrow 0. \tag{6.14}$$

Полагая $\gamma = 1$ в лемме 3 и подставляя асимптотические представления (1.15), получаем

$$0 \geq \int\limits_{x(\varepsilon)}^{\infty} m^{(\varepsilon)}(x)\, \pi^{(\varepsilon)}(dx) \geq -\varepsilon + o(\varepsilon) + \mathbf{E}\left\{ h\left(X^{(\varepsilon)}\right);\ X^{(\varepsilon)} \geq x(\varepsilon) \right\}(1+o(1))\,.$$

Следовательно,

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0}\ \mathbf{E}\left\{ h\left(X^{(\varepsilon)}\right);\ X^{(\varepsilon)} \geq x(\varepsilon) \right\} / \varepsilon \ \leq\ 1\,. \tag{6.15}$$

Из (6.9), (6.14) и (6.15) имеем

$$0 \leq \mathbf{E}\left\{ \left(\sqrt{h\left(X^{(\varepsilon)}\right)/\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon / h\left(X^{(\varepsilon)}\right)}\ \right)^2;\ X^{(\varepsilon)} \geq x(\varepsilon) \right\} \leq$$

$$\leq \mathbf{E}\left\{ h\left(X^{(\varepsilon)}\right)/\varepsilon;\ X^{(\varepsilon)} \geq x(\varepsilon) \right\} - 2\,\mathbf{P}\left\{ X^{(\varepsilon)} \geq x(\varepsilon) \right\} + \mathbf{E}\left\{ \varepsilon / h\left(X^{(\varepsilon)}\right) \right\} \to 0$$

при $\varepsilon \downarrow 0$. Таким образом,

$$\sqrt{h\left(X^{(\varepsilon)}\right)/\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon / h\left(X^{(\varepsilon)}\right)} \Rightarrow 0 \qquad \text{при } \varepsilon \downarrow 0\,.$$

Отсюда $h\left(X^{(\varepsilon)}\right)/\varepsilon \Rightarrow 1$, и в силу первого утверждения леммы 16 имеет место сходимость $X^{(\varepsilon)} / q_\varepsilon \Rightarrow 1$ при $\varepsilon \downarrow 0$, что и требовалось доказать.

При проведении оценок нам будет полезна следующая

Лемма 20. *Пусть выполнены условия* (1.15)—(1.18). *Тогда при* $\varepsilon \downarrow 0$ *справедлива оценка*

$$\mathbf{E}\left(h\left(X^{(\varepsilon)}\right) / \left(1 + X^{(\varepsilon)}\right) \right) = O\left(\varepsilon / q_\varepsilon\right).$$

Доказательство. Рассмотрим возрастающую пробную функцию $\ln(1+x) \geq 0$. Поскольку эта функция вогнута, выполняются неравенства

$$\sup_{x,\,\varepsilon}\ \mathbf{E}\left\{ \ln\left(1+x+\xi^{(\varepsilon)}(x)\right) - \ln(1+x) \right\} \leq \sup_{x,\,\varepsilon}\ m^{(\varepsilon)}(x)/(1+x) < \infty\,,$$

$$\sup_{x,\,\varepsilon}\ \mathbf{E}\left| \ln\left(1+x+\xi^{(\varepsilon)}(x)\right) - \ln(1+x) \right| \leq \sup_{x,\,\varepsilon}\ \mathbf{E}\left| \xi^{(\varepsilon)}(x) \right| < \infty\,.$$

Таким образом, пробная функция $\ln(1+x)$ удовлетворяет условиям леммы 1. Следовательно, при любом $x_* \geq 0$

$$0 \geq \int_{x_*}^{\infty} \mathrm{E}\left\{\ln\left(1+x+\xi^{(\varepsilon)}(x)\right) - \ln(1+x)\right\}\pi^{(\varepsilon)}(dx).$$

Так как при любых x, y, $x \geq 0$, $y \geq -x$,

$$\ln(1+x+y) - \ln(1+x) \geq y/(1+x) - y^2 x^{-2} \ln(1+x),$$

имеем

$$0 \geq \int_{x_*}^{\infty}\left(\frac{m^{(\varepsilon)}(x)}{1+x} - \frac{b^{(\varepsilon)}(x)}{2(1+x)^2}\right)\pi^{(\varepsilon)}(dx). \tag{6.16}$$

В силу асимптотических представлений (1.15) и условия $x\,h(x)/\ln x \to \infty$ при $x \to \infty$ существуют $x_* > 0$ и $\varepsilon_* > 0$ такие, что при $x \geq x_*$, $\varepsilon \leq \varepsilon_*$ выполняется неравенство

$$\frac{m^{(\varepsilon)}(x)}{1+x} - \frac{b^{(\varepsilon)}(x)}{2(1+x)^2} \geq -\frac{2\varepsilon}{1+x} + \frac{h(x)}{2(1+x)},$$

подставляя которое в (6.16), получаем

$$4\varepsilon\,\mathrm{E}\left\{1/\left(1+X^{(\varepsilon)}\right);\ X^{(\varepsilon)} \geq x_*\right\} \geq \mathrm{E}\left\{h\left(X^{(\varepsilon)}\right)/\left(1+X^{(\varepsilon)}\right);\ X^{(\varepsilon)} \geq x_*\right\} \equiv \psi(\varepsilon). \tag{6.17}$$

Поскольку $\inf\limits_{x \in K} h(x)/(1+x) > 0$ для всякого компакта $K \subset [x_*, \infty)$, имеем $\pi^{(\varepsilon)}(K) = O(\psi(\varepsilon))$ при $\varepsilon \downarrow 0$, и в силу следствия 2 леммы 6, $\pi^{(\varepsilon)}([0, x_*]) = O(\psi(\varepsilon))$. Из последнего соотношения и неравенства (6.17) следует, что существует $c_1 > 0$ такое, что

$$\varepsilon\,\mathrm{E}\,1/\left(1+X^{(\varepsilon)}\right) \geq c_1\,\mathrm{E}\,h\left(X^{(\varepsilon)}\right)/\left(1+X^{(\varepsilon)}\right). \tag{6.18}$$

Положим

$$V(x) \equiv (1+\lambda)\int_x^{\infty}\frac{h(y)}{(1+y)^2}\,dy.$$

Так как функция $h(y)/(1+y)^2$ правильно меняется на бесконечности с показателем $-\lambda-2$, то, как известно (см. например, [18, с. 322]), функция $V(x)$ также правильно меняется, причем

$$V(x) \sim h(x)/x \qquad \text{при } x \to \infty. \tag{6.19}$$

Следовательно, найдется c_2 такое, что

$$h(x)/(1+x) \geq c_2\,V(x). \tag{6.20}$$

По построению производная

$$d\,V(1/z-1)/dz = (1+\lambda)\,h(1/z-1), \qquad z < 1,$$

возрастает в силу (1.19), и, следовательно, функция $V(1/z-1)$ выпукла. Отсюда и из неравенств (6.18)—(6.20) следует

$$\begin{aligned}\varepsilon\,\mathrm{E}\,1/(1+X^{(\varepsilon)}) &\ge c_1 c_2\,\mathrm{E}\,V\Big(1/\big(1/(1+X^{(\varepsilon)})\big)-1\Big) \ge \\ &\ge c_1 c_2\,V\Big(1/\,\mathrm{E}\big\{1/(1+X^{(\varepsilon)})\big\}-1\Big) \sim \\ &\sim c_3\,\mathrm{E}\big\{1/(1+X^{(\varepsilon)})\big\}\,h\Big(1/\,\mathrm{E}\big\{1/(1+X^{(\varepsilon)})\big\}\Big).\end{aligned}$$

Поэтому $h\Big(1/\,\mathrm{E}\big\{1/(1+X^{(\varepsilon)})\big\}\Big)=O(\varepsilon)$ при $\varepsilon\downarrow 0$ и, следовательно, в силу второго утверждения леммы 16 $\mathrm{E}\,1/(1+X^{(\varepsilon)})=O(1/q_\varepsilon)$. Подставляя последнее соотношение в (6.18), получаем заключение леммы 20.

Лемма 21. *Пусть функция* $\Delta(x,\varepsilon)$ *такая, что*

$$\sup_{x,\,\varepsilon}\ |\Delta(x,\varepsilon)|<\infty, \qquad \Delta(x,\varepsilon)=o\Big(\sqrt{\varepsilon/q_\varepsilon}+\sqrt{h(x)/x}\Big)$$

при $x\to\infty,\ \varepsilon\downarrow 0$. *Тогда при* $\varepsilon\downarrow 0$ *имеют место соотношения*

(a) $\mathrm{E}\,\Delta(X^{(\varepsilon)},\varepsilon)=o\Big(\sqrt{\varepsilon/q_\varepsilon}\Big)$,

(b) $\mathrm{E}\,X^{(\varepsilon)}\,\Delta(X^{(\varepsilon)},\varepsilon)=o\Big(\sqrt{\varepsilon\,q_\varepsilon}\Big)$.

Доказательство. По условию существует функция $\psi(x,\varepsilon)$ такая, что

$$\psi(x,\varepsilon)\to 0 \tag{6.21}$$

при $x\to\infty,\ \varepsilon\downarrow 0$ и при $x\ge N$

$$|\Delta(x,\varepsilon)|\ \le\ \psi(N,\ \varepsilon)\Big(\sqrt{\varepsilon/q_\varepsilon}+\sqrt{h(x)/x}\Big).$$

Следовательно, при любом $N>0$ имеет место оценка

$$\mathrm{E}\,|\Delta(X^{(\varepsilon)},\varepsilon)|\le\sup_{x,\,\varepsilon}|\Delta(x,\varepsilon)|\,\mathrm{P}\big\{X^{(\varepsilon)}<N\big\}+\psi(N,\varepsilon)\Big(\sqrt{\varepsilon/q_\varepsilon}+\mathrm{E}\sqrt{h(X^{(\varepsilon)})/X^{(\varepsilon)}}\Big).$$

Используя лемму 20, вогнутость функции $\sqrt{x}$ и сходимость (6.21), приходим к соотношению (a) леммы. Соотношение (b) следует из неравенства

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\ \ |X^{(\varepsilon)}\Delta(X^{(\varepsilon)},\varepsilon)|\ &\le\ \sup_{x,\,\varepsilon}\ |\Delta(x,\varepsilon)|\ N\,\mathrm{P}\ \big\{X^{(\varepsilon)}<N\big\}+\\ &+\psi(N,\varepsilon)\Big(\mathrm{E}\ X^{(\varepsilon)}\sqrt{\varepsilon/q_\varepsilon}+\mathrm{E}\sqrt{h(X^{(\varepsilon)})\,X^{(\varepsilon)}}\ \Big),\end{aligned}$$

леммы 18, вогнутости функции $\sqrt{h(x)\,x}$ и сходимости (6.21). Лемма 21 доказана.

Лемма 22. *Пусть справедливы асимптотические представления* (1.23). *Тогда выполнено асимптотическое разложение* (1.24) *при* $\varepsilon\downarrow 0$.

Доказательство. Согласно лемме 3 (при $\gamma=1$) выполняется равенство

$$0=\int_0^\infty m^{(\varepsilon)}(x)\,\pi^{(\varepsilon)}(dx). \tag{6.22}$$

Подставляя асимптотические представления (1.23) и применяя соотношение (a) леммы 21, получаем

$$\mathrm{E}\, h\left(X^{(\varepsilon)}\right) = \varepsilon + o\left(\sqrt{\varepsilon / q_\varepsilon}\right) \quad \text{при } \varepsilon \downarrow 0 . \tag{6.23}$$

Ввиду выпуклости функции $h(x)$ справедливо неравенство

$$h\left(\mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)}\right) \le \varepsilon + o\left(\sqrt{\varepsilon / q_\varepsilon}\right). \tag{6.24}$$

Подставляя асимптотические представления (1.23) в (6.11) и применяя соотношение (b) леммы 21, получаем при $\varepsilon \downarrow 0$

$$0 = -2\varepsilon\, \mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)} + 2\, \mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)} h\left(X^{(\varepsilon)}\right) + o\left(\sqrt{\varepsilon\, q_\varepsilon}\right). \tag{6.25}$$

Следовательно, в силу предположения (1.18) о вогнутости функции $x\, h(x)$ и асимптотики $\mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)} \sim q_\varepsilon$ имеем

$$h\left(\mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)}\right) \ge \varepsilon + o\left(\sqrt{\varepsilon / q_\varepsilon}\right) \quad \text{при } \varepsilon \downarrow 0 . \tag{6.26}$$

Из неравенств (6.24) и (6.26) вытекает асимптотическое разложение при $\varepsilon \downarrow 0$

$$h\left(\mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)}\right) = \varepsilon + o\left(\sqrt{\varepsilon / q_\varepsilon}\right). \tag{6.27}$$

Так как функция $h(x)$ выпукла, по лемме 17 для любых x, y, $x \le y$, верно соотношение $h(x) - h(y) \ge (x - y)\, d_h(y) \sim \lambda\, (y - x)\, h(y) / y$, $y \to \infty$. Положим $x \equiv \min\left(q_\varepsilon, \mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)}\right)$, $y \equiv \max\left(q_\varepsilon, \mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)}\right)$. Тогда

$$x \sim y \sim q_\varepsilon,\ h(x) \sim h(y) \sim \varepsilon,\ 0 \le h(x) - h(y) = \left| h\left(\mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)}\right) - \varepsilon \right|,$$
$$0 \le y - x = = \left| \mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)} - q_\varepsilon \right|.$$

Следовательно, $\left| \mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)} - q_\varepsilon \right| = O\left(\left| h\left(\mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)}\right) - \varepsilon \right| q_\varepsilon / \varepsilon \right)$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Применение (6.27) завершает доказательство леммы 22.

Пусть $Y^{(\varepsilon)} \equiv X^{(\varepsilon)} - \mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)}$. Определим случайную величину $r\left(Y^{(\varepsilon)}\right)$ из равенства

$$h(X^{(\varepsilon)}) \equiv h(\mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)} + Y^{(\varepsilon)}) = h\left(\mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)}\right) + d_h(\mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)})\, Y^{(\varepsilon)} + r\left(Y^{(\varepsilon)}\right). \tag{6.28}$$

Поскольку функция $h(x)$ выпукла, случайные величины $r\left(Y^{(\varepsilon)}\right)$ неотрицательны с вероятностью 1. Поэтому

$$\mathrm{E}\, \left| r(Y^{(\varepsilon)}) \right| = \mathrm{E}\, r(Y^{(\varepsilon)}) = \mathrm{E}\, h(X^{(\varepsilon)}) - h\left(\mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)}\right) = o\left(\sqrt{\varepsilon / q_\varepsilon}\right) \quad \text{при } \varepsilon \downarrow 0 \tag{6.29}$$

в силу равенств (6.23) и (6.27).

Доказательство теоремы 5. Сходимость при $\varepsilon \downarrow 0$ распределений случайных величин $\left(X^{(\varepsilon)} - \mathrm{E}\, X^{(\varepsilon)}\right) \sqrt{\varepsilon / q_\varepsilon} \equiv Y^{(\varepsilon)} \sqrt{\varepsilon / q_\varepsilon}$ к нормальному распределению $\mathrm{N}\,(0, b / 2\lambda)$ будет проведена методом характеристических функций. Исходным является уравнение (4.22). Подставляя асимптотические представления (1.23) в (4.22) и соотношение (a) леммы 21, приходим к равенству

$$0 = \int_0^\infty e^{itx} \cdot \left(i\, m^{(\varepsilon)}(x) - \left(b + \Delta(x, \varepsilon, t)\right) t / 2 \right) \pi^{(\varepsilon)}(dx) =$$

$$= \mathbf{E}\left(i\,h\,(X^{(\varepsilon)}) - \varepsilon\, i + b\,t/2\right)\,\exp\left\{i\,t\,X^{(\varepsilon)}\right\} + o\left(\sqrt{\varepsilon/q_\varepsilon} + t\right),\ \varepsilon\downarrow 0,\ t\to 0,$$

где $\Delta(x, \varepsilon, t) \to 0$ при $x \to \infty$, $\varepsilon\downarrow 0$ и $t \to 0$. Умножая равенство на величину $\exp\left\{-\,it\,\mathbf{E}\,X^{(\varepsilon)}\right\}$, получаем

$$0 = \mathbf{E}\left(\,i\,(h\,(X^{(\varepsilon)}) - \varepsilon)\,i - b\,t/2\,\right)\,\exp\left\{\,it\,Y^{(\varepsilon)}\right\} + o\left(\sqrt{\varepsilon/q_\varepsilon} + t\,\right)$$

при $\varepsilon\downarrow 0$, $t \to 0$. Так как в силу представления (6.28), равенства (6.27), леммы 17 и эквивалентностей (6.13) и (1.21)

$$h\,(X^{(\varepsilon)}) - \varepsilon \;=\; d_h\,(\mathbf{E}\,X^{(\varepsilon)})\;Y^{(\varepsilon)} + r\,(Y^{(\varepsilon)}) + o\left(\,\sqrt{\varepsilon/q_\varepsilon}\,\right) \;=$$

$$= \;(-\,\lambda + o\,(1))\,h\,(\mathbf{E}\,X^{(\varepsilon)})\;Y^{(\varepsilon)}\;/\;\mathbf{E}\,X^{(\varepsilon)} + r\,(Y^{(\varepsilon)}) + o\left(\,\sqrt{\varepsilon/q_\varepsilon}\,\right) \;=$$

$$= \;(-\,\lambda + o\,(1))\;Y^{(\varepsilon)}\,\varepsilon/q_\varepsilon + r\,(Y^{(\varepsilon)}) + o\left(\,\sqrt{\varepsilon/q_\varepsilon}\,\right)$$

при $\varepsilon\downarrow 0$, справедливо равенство

$$0 \;=\; (\,\lambda + o\,(1))\,(\varepsilon/q_\varepsilon)\,\mathbf{E}\,i\,Y^{(\varepsilon)}\;\exp\left\{i\,t\,Y^{(\varepsilon)}\right\} + \frac{b\,t}{2}\,\mathbf{E}\exp\left\{i\,t\,Y^{(\varepsilon)}\right\} -$$

$$-\;\;\mathbf{E}\,r\,(Y^{(\varepsilon)})\;\exp\left\{i\,t\,Y^{(\varepsilon)}\right\} + o\left(\sqrt{\varepsilon/q_\varepsilon} + t\,\right).$$

Используя оценку (6.29), полагая $t = s\sqrt{\varepsilon/q_\varepsilon}$ и домножая последнее равенство на $\sqrt{q_\varepsilon/\varepsilon}$, получаем при $\varepsilon\downarrow 0$

$$0 = (\lambda + o(1))\,\mathbf{E}\,i\,\sqrt{\varepsilon/q_\varepsilon}\;Y^{(\varepsilon)}\exp\left\{i\,s\,\sqrt{\varepsilon/q_\varepsilon}\;Y^{(\varepsilon)}\right\} + \frac{b\,s}{2}\,\mathbf{E}\exp\left\{i\,s\,\sqrt{\varepsilon/q_\varepsilon}\;Y^{(\varepsilon)}\right\} + o(1)$$

равномерно по s из любого компакта. Обозначим через $\varphi^{(\varepsilon)}(s)$ характеристическую функцию случайной величины $\sqrt{\varepsilon/q_\varepsilon}\;Y^{(\varepsilon)}$, т.е.

$$\varphi^{(\varepsilon)}(s) \;\equiv\; \mathbf{E}\exp\left\{i\,s\,\sqrt{\varepsilon/q_\varepsilon}\;Y^{(\varepsilon)}\right\}.$$

Заметим, что $\varphi^{(\varepsilon)}(s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\,\varphi^{(\varepsilon)}(s)}{d\,s} \;=\; -\,\frac{b\,s}{2\,\lambda}\;\varphi^{(\varepsilon)}(s) \;+\,\Delta(s, \varepsilon)$$

и начальному условию $\varphi^{(\varepsilon)}(0) = 1$, где $\Delta(s, \varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon\downarrow 0$ равномерно по s из произвольного компакта. Тогда $\varphi^{(\varepsilon)}(s)$ имеет вид

$$\varphi^{(\varepsilon)}(s) \;=\; \left(1 + \int_0^s \Delta(t, \varepsilon)\;e^{\;bt^2/4\lambda}\;dt\right)\,e^{-bs^2/4\lambda}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\varphi^{(\varepsilon)}(s) \;=\; e^{-\,b\,s^2/4\,\lambda}$ при любом $s \in \mathbf{R}$. Теорема 5 доказана.

§ 7. КЛАССИФИКАЦИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ЯВЛЕНИЙ ДЛЯ ЦЕПЕЙ МАРКОВА, ПРИНИМАЮЩИХ ЗНАЧЕНИЯ НА ВСЕЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

Достаточно подробное описание переходных явлений для цепей Маркова, принимающих значения в $\mathbf{R}^+$, дает нам возможность рассмотреть цепи Маркова, принимающие как положительные, так и отрицательные значения. В теоремах 7—9 приводится краткая классификация переходных явлений для цепей, принимающих значения в $\mathbf{R}$. Мы предполагаем, что

$$m^{(\varepsilon)}(x) = -\psi_+(\varepsilon) + \mu_+/x + o(\psi_+(\varepsilon) + 1/x), \quad -\infty \le \mu_+ \le \infty,$$

$$b^{(\varepsilon)}(x) = b_+ + o(1), \quad 0 < b_+ < \infty, \tag{7.1}$$

при $x \to \infty, \varepsilon \downarrow 0$, где $\psi_+(\varepsilon) \downarrow 0$, и

$$m^{(\varepsilon)}(x) = \psi_-(\varepsilon) + \mu_-/x + o(\psi_-(\varepsilon) + 1/x), \quad -\infty \le \mu_- \le \infty,$$

$$b^{(\varepsilon)}(x) = b_- + o(1), \quad 0 < b_- < \infty, \tag{7.2}$$

при $x \to -\infty, \varepsilon \downarrow 0$, где $\psi_-(\varepsilon) \downarrow 0$. Пусть

$$0 \le c_{\inf} \equiv \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \psi_+(\varepsilon)/\psi_-(\varepsilon) \le \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \psi_+(\varepsilon)/\psi_-(\varepsilon) \equiv c_{\sup} \le \infty .$$

Поскольку теперь цепи принимают значения в $\mathbf{R}$, следует дополнить условие (1.9) следующим образом: для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ существуют $\varepsilon_* = \varepsilon_*(x_1, x_2) > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при $\varepsilon \le \varepsilon_*$

$$\inf_{x_1 \le x \le x_2} \mathbf{P}\left\{X_n^{(\varepsilon)} \ge x_2 \text{ при некотором } n \mid X_0^{(\varepsilon)} = x\right\} \ge \delta > 0,$$

$$\inf_{x_1 \le x \le x_2} \mathbf{P}\left\{X_n^{(\varepsilon)} \le x_1 \text{ при некотором } n \mid X_0^{(\varepsilon)} = x\right\} \ge \delta > 0. \tag{7.3}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$2\mu_-/b_- \le 2\mu_+/b_+ . \tag{7.4}$$

Теорема 7. *Пусть имеют место асимптотические представления* (7.1), (7.2), *условия* (1.11) *и* (7.4). *Предположим, что* $2\mu_+ + b_+ < 0$, *цепь* $\{X_n\}$ *имеет единственное инвариантное распределение* π *и переходное ядро удовлетворяет условию* (1.3). *Тогда инвариантное распределение* $\pi^{(\varepsilon)}$ *цепи* $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$ *слабо сходится к* π *при* $\varepsilon \downarrow 0$.

Теорема 8. *Пусть имеют место асимптотические представления* (7.1), (7.2) *и выполняются условия* (1.11), (7.3). *Тогда, если выполнены неравенства* $2\mu_- + b_- < 0$ *и* $2\mu_+ + b_+ > 0$, *то при* $\varepsilon \downarrow 0$

$$\mathfrak{L}(2\psi_+(\varepsilon) X^{(\varepsilon)}) \Rightarrow \Gamma_{1/b_+,\, 1 + 2\mu_+/b_+} . \tag{7.5}$$

Теорема 9. *Пусть имеют место асимптотические представления* (7.1), (7.2) *и выполнены условия* (1.11), (7.3) *и* (7.4). *Предположим, что случайные величины* $\xi^{(\varepsilon)}(x)$ *равномерно по* x *и* ε *ограничены*:

$$\mathbf{P}\Big\{\ |\xi^{(\varepsilon)}(x)|\ \le L\Big\} = 1\,, \tag{7.6}$$

где $L < \infty$. *Тогда, если* $2\mu_- + b_- > 0$, *то имеют место условные сходимости*

$$\mathbf{P}\Big\{2\psi_+(\varepsilon)\,X^{(\varepsilon)} < x\ \big|\,X^{(\varepsilon)} \ge 0\Big\} \to \mathbf{P}\Big\{\eta_+ < x\Big\},\ \varepsilon\downarrow 0,\quad 0 \le x < \infty\,, \tag{7.7}$$

$$\mathbf{P}\Big\{2\psi_-(\varepsilon)\,X^{(\varepsilon)} > x\ \ \big|\ X^{(\varepsilon)} \le 0\Big\} \to \mathbf{P}\Big\{\eta_- < x\Big\},\ \varepsilon\downarrow 0,\quad -\infty < x \le 0\,, \tag{7.8}$$

где случайные величины $\eta_\pm$ *имеют гамма-распределения с параметрами* $1/b_\pm$ *и* $1 + 2\mu_\pm/b_\pm$. *Кроме того,*

(а) *если* $2\mu_-/b_- < 2\mu_+/b_+$ *и* $c_{\sup} < \infty$, *то для любого* $\delta > 0$ *при* $\varepsilon\downarrow 0$ *имеет место оценка*

$$\mathbf{P}\Big\{X^{(\varepsilon)} \le 0\Big\} = O\left(\psi_-^{2\mu_+/b_+ - 2\mu_-/b_- - \delta}(\varepsilon)\right); \tag{7.9}$$

(б) *если* $2\mu_-/b_- = 2\mu_+/b_+$ *и* $0 < c_{\inf} \le c_{\sup} < \infty$, *то множество предельных точек числовой последовательности* $\mathbf{P}\{X^{(\varepsilon)} \le 0\}$ *может совпадать с отрезком* $[0, 1]$.

Замечание 5. В силу пункта (б) мы видим, что если $2\mu_-/b_- = 2\mu_+/b_+$, то собирательные теоремы для распределения случайных величин $X^{(\varepsilon)}$ отсутствуют.

Замечание 6. Мы ограничились рассмотрением устойчивости и сходимости к Г-распределению ввиду большого числа вариантов сочетания предельного поведения инвариантного распределения на отрицательной и положительной полуосях. По той же причине не рассмотрены случаи $c_{\inf} = 0$ и $c_{\sup} = \infty$ (например, можно разобрать ситуации, когда $\psi_\pm(\varepsilon) = \varepsilon^{\gamma_\pm}$, где $\gamma_\pm > 0$, $\gamma_+ \ne \gamma_-$).

Доказательство теоремы 7 по существу вытекает из следующей леммы, являющейся аналогом леммы 2 для цепей Маркова со значениями в $\mathbf{R}$.

Лемма 23. *Если* $2\mu_+ + b_+ < 0$, *то семейство случайных величин* $\{\max(0, X^{(\varepsilon)})\}_{\varepsilon \ge 0}$ *ограничено по вероятности.*

Доказательство. Определим новую «срезанную» цепь Маркова $X^{(\varepsilon)}_{n*}$, переходные вероятности которой имеют вид

$$\begin{aligned} P^{(\varepsilon)}_*(x, B) &= P^{(\varepsilon)}(x, B)\,,\ \text{ если }\ x > 0 \text{ и } B \subset (0, \infty)\,,\\ P^{(\varepsilon)}_*(x, \{0\}) &= P^{(\varepsilon)}(x, (-\infty, 0])\,,\ \text{ если }\ x > 0\,,\\ P^{(\varepsilon)}_*(0, B) &= \int_{-\infty}^{0} P^{(\varepsilon)}(y, B)\,\pi^{(\varepsilon)}(dy)/\pi^{(\varepsilon)}((-\infty, 0])\,,\ \text{ если }\ B \subset (0, \infty)\,,\\ P^{(\varepsilon)}_*(0, \{0\}) &= \int_{-\infty}^{0} P^{(\varepsilon)}(y, (-\infty, 0))\,\pi^{(\varepsilon)}(dy)/\pi^{(\varepsilon)}((-\infty, 0])\,. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Если цепь $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$ находится в стационарном режиме (т. е. $X_n^{(\varepsilon)}$ имеет распределение $\pi^{(\varepsilon)}$), то $X_{n*}^{(\varepsilon)}$ и $X_n^{(\varepsilon)}\,\mathrm{I}\,\{X_n^{(\varepsilon)} \geq 0\}$ совпадают по распределению. Процесс $X_{n*}^{(\varepsilon)}$ — однородная цепь Маркова со значениями в $\mathbf{R}^+$ и с инвариантной мерой $\pi_*^{(\varepsilon)}$, где $\pi_*^{(\varepsilon)}(B) = \pi^{(\varepsilon)}(B)$ для $B \in \mathfrak{B}\,((0, \infty))$ и $\pi_*^{(\varepsilon)}(\{0\}) = \pi^{(\varepsilon)}((-\infty, 0])$. Условие (1.11) равномерной интегрируемости квадратов скачков гарантирует следующие равномерные по $\varepsilon \geq 0$ соотношения:

$$m_*^{(\varepsilon)}(x) = m^{(\varepsilon)}(x) - \mathbf{E}\,\left\{x+\xi^{(\varepsilon)}(x)\,;\ \xi^{(\varepsilon)}(x) \leq -x\right\} = m^{(\varepsilon)}(x)+o\,(1/x)\,, \tag{7.11}$$

$$b_*^{(\varepsilon)}(x) = b^{(\varepsilon)}(x) - \mathbf{E}\,\left\{\left(\xi^{(\varepsilon)}(x)\right)^2 - x^2\,;\ \xi^{(\varepsilon)}(x) \leq -x\right\} = b^{(\varepsilon)}(x)+o(1) \tag{7.12}$$

при $x \to \infty$. Кроме того, ввиду условия (1.11) семейство случайных величин $\left(\xi_*^{(\varepsilon)}(x)\right)^2$ равномерно интегрируемо:

$$\sup_{x \geq 0,\, \varepsilon \geq 0} \mathbf{E}\,\left\{\left(\xi_*^{(\varepsilon)}(x)\right)^2;\ \left|\xi_*^{(\varepsilon)}(x)\right| > N\right\} \to 0 \quad \text{при } N \to \infty\,. \tag{7.13}$$

Из (7.11) и (7.12) следует, что

$$\limsup_{x \to \infty,\, \varepsilon \downarrow 0} \left(2\,x\,m_*^{(\varepsilon)}(x) + b_*^{(\varepsilon)}(x)\right) =$$

$$= \limsup_{x \to \infty,\, \varepsilon \downarrow 0} \left(2\,x\,m^{(\varepsilon)}(x) + b^{(\varepsilon)}(x)\right) = 2\,\mu_+ + b_+ < 0\,. \tag{7.14}$$

Применив лемму 2 к цепям $\{X_{n*}^{(\varepsilon)}\}$, получим утверждение леммы 23.

Из леммы 23 и условия $2\mu_-/b_- \leq 2\mu_+/b_+ < -1$ вытекает, что семейства случайных величин $\{\max(0, X^{(\varepsilon)})\}_{\varepsilon \geq 0}$ и $\{\max(0, -X^{(\varepsilon)})\}_{\varepsilon \geq 0}$ стохастически ограничены. Следуя доказательству теоремы 6, можно показать, что стохастическая ограниченность семейства $\{\,|X^{(\varepsilon)}|\,\}_{\varepsilon \geq 0}$ влечет устойчивость инвариантного распределения при $\varepsilon \downarrow 0$. Теорема 7 доказана.

Доказательство теоремы 8. В силу условия (7.3) и следствия 1 леммы 6 верно следующее утверждение: если для некоторого компакта $K \subset \mathbf{R}$

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \pi^{(\varepsilon)}(K) > 0\,, \tag{7.15}$$

то для любого $x_* \in \mathbf{R}^+$ существует $\bar{x} \in \mathbf{R}^+$ такое, что

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \pi^{(\varepsilon)}([x_*, \bar{x}]) > 0\,. \tag{7.16}$$

Перейдем к срезанным на уровне 0 цепям $\{X_{n*}^{(\varepsilon)}\}$ (см. (7.10)). Для них в силу (7.11)—(7.13) выполнены все условия теоремы 2, за исключением, быть может, условия (1.9). Однако при доказательстве теоремы 2 это условие использовались лишь для доказательства сходимости

$$«\pi^{(\varepsilon)} \Rightarrow \infty \text{ при } \varepsilon \downarrow 0». \tag{7.17}$$

Заметим, что для любого числа $A > 0$ верно равенство

$$\mathbf{P}\left\{X^{(\varepsilon)} \le A\right\} = \mathbf{P}\left\{X^{(\varepsilon)} < -A\right\} + \mathbf{P}\left\{-A \le X^{(\varepsilon)} \le A\right\}, \tag{7.18}$$

где первое слагаемое в правой части стремится к нулю при $A \to \infty$ равномерно по ε в силу леммы 23 и условия $2\mu_- + b_- < 0$. Поэтому для доказательства (7.17) достаточно показать, что для любого компакта $K \subset \mathbf{R}$ при $\varepsilon \downarrow 0$ имеет место сходимость

$$\pi^{(\varepsilon)}(K) \to 0. \tag{7.19}$$

Предположим противное, т. е. для некоторого компакта $K \subset \mathbf{R}$ справедливо (7.15) и, следовательно, (7.16). Следуя далее доказательству леммы 6, примененной к срезанным на уровне 0 цепям $\{X^{(\varepsilon)}_{n*}\}$, получаем в результате (7.19) и тем самым (7.17). Таким образом, применение теоремы 2 к цепям $\{X^{(\varepsilon)}_{n*}\}$ законно и

$$\mathfrak{L}\left(2\psi_+(\varepsilon)\, X^{(\varepsilon)}_{n*}\right) \equiv \mathfrak{L}\left(2\psi_+(\varepsilon)\max\left(0, X^{(\varepsilon)}\right)\right) \Rightarrow \Gamma_{1/b_+,\ 1+2\mu_+/b_+}$$

при $\varepsilon \downarrow 0$. Теорема 8 доказана.

Доказательство теоремы 9 отличается от предыдущих рассмотрений тем, что мы не можем сослаться на теорему 2, поскольку хотя бы одна из сходимостей «$\pi^{(\varepsilon)} \Rightarrow \infty$ при $\varepsilon \downarrow 0$» или «$\pi^{(\varepsilon)} \Rightarrow -\infty$ при $\varepsilon \downarrow 0$», не имеет места. В связи с этим нам понадобится следующий уточненный аналог леммы 7 для цепей в $\mathbf{R}$:

Лемма 24. *Пусть* $2\mu_+ + b_+ > 0$ *и выполнено условие* (7.6). *Тогда для любого компакта* $K \subset \mathbf{R}$ *справедлива оценка*

$$\pi^{(\varepsilon)}(K) = o\left(\mathbf{P}\left\{X^{(\varepsilon)} \ge 0\right\}\right) \quad \textit{при } \varepsilon \downarrow 0.$$

Доказательство. Предположим противное, т. е. допустим, что $\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \pi^{(\varepsilon)}(K) / \mathbf{P}\{X^{(\varepsilon)} \ge 0\} > 0$ для некоторого компакта K. Полагая $\psi(\varepsilon) \equiv \mathbf{P}\{X^{(\varepsilon)} \ge 0\}$ в лемме 6, получаем, что для любого x_* существует $\overline{x}$ такое, что

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \pi^{(\varepsilon)}([x_*, \overline{x}]) / \mathbf{P}\left\{X^{(\varepsilon)} \ge 0\right\} > 0. \tag{7.20}$$

Далее, применяя лемму 3 (при $\gamma = 2$) к цепям $\{X^{(\varepsilon)}_{n*}\}$, выводим равенство

$$0 = \int_{+0}^{\infty} \left(2x\, m^{(\varepsilon)}_*(x) + b^{(\varepsilon)}_*(x)\right)\pi^{(\varepsilon)}(dx) + b^{(\varepsilon)}_*(0)\,\pi^{(\varepsilon)}_*(\{0\}). \tag{7.21}$$

По определению (7.10) и условию (7.6) имеем

$$b^{(\varepsilon)}_*(0)\,\pi^{(\varepsilon)}_*(\{0\}) \equiv \mathbf{E}\left(\xi^{(\varepsilon)}_*(0)\right)^2 \pi^{(\varepsilon)}_*(\{0\}) \equiv$$

$$\equiv \int_{-L}^{0} \mathbf{E}\left\{\left(\xi^{(\varepsilon)}(y)+y\right)^2;\ \xi^{(\varepsilon)}(x)+y > 0\right\}\pi^{(\varepsilon)}(dy) \le \sup_{x,\,\varepsilon} b^{(\varepsilon)}(x)\,\pi^{(\varepsilon)}([-L, 0]). \tag{7.22}$$

В силу (7.11), (7.12) существуют $c_1 < \infty$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что при $x > 0$ и $\varepsilon \le \varepsilon_0$

$$2\,x\,m_*^{(\varepsilon)}(x) + b_*^{(\varepsilon)}(x) \;\le\; -\,\psi_+(\varepsilon)\,x + c_1\,. \tag{7.23}$$

Подставляя (7.22) и (7.23) в (7.21), заключаем, что при $\varepsilon \le \varepsilon_0$

$$\psi_+(\varepsilon)\,\mathbf{E}\,\left\{X^{(\varepsilon)}\,;\; X^{(\varepsilon)} > 0\right\} \;\le\; c_2\,\pi^{(\varepsilon)}([-L,0]) + c_1\,\mathbf{P}\left\{X^{(\varepsilon)} > 0\right\} \;\le$$
$$\le\; \max(c_1, c_2)\,\mathbf{P}\left\{X^{(\varepsilon)} \ge -\,L\right\} \;\le\; c_3\,\mathbf{P}\left\{X^{(\varepsilon)} \ge 0\right\}, \quad c_3 < \infty\,. \tag{7.24}$$

Следуя далее доказательству леммы 7 и используя при этом предположение (7.6), лемму 5 и неравенство (7.24), завершаем доказательство леммы 24.

Доказательство условной сходимости (7.7) проведем методом моментов. Именно, покажем, что для любого натурального $m \ge 1$ при $\varepsilon\downarrow 0$ имеет место сходимость моментов

$$\mathbf{E}\left\{\left(2\,\psi_+(\varepsilon)\,X^{(\varepsilon)}\right)^m;\, X^{(\varepsilon)} \ge 0\right\} /\mathbf{P}^{\,m}\left\{X^{(\varepsilon)} \ge 0\right\} \to \Gamma\,(\lambda + m)\;/\alpha^m\,\Gamma\,(\lambda) = \mathbf{E}\,\xi^m\,, \tag{7.25}$$

где случайная величина ξ имеет $\Gamma_{\alpha,\lambda}$-распределение с параметрами $\alpha = 1/b_+$ и $\lambda = 1 + 2\,\mu_+\,/b_+$.

Используя лемму 3, можно проверить, что при условии (7.6) для любого натурального $k \ge 2$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$

$$0 \;=\; \int\limits_0^\infty \mathbf{E}\,\left\{\left(x + \xi_*^{(\varepsilon)}(x)\right)^k - x^{\,k}\right\}\pi_*^{(\varepsilon)}(dx)\,. \tag{7.26}$$

В силу условия ограниченности скачков (см. (7.6)) имеем равномерное по ε разложение при $x \to \infty$

$$\mathbf{E}\left\{x+\xi_*^{(\varepsilon)}(x)\right\}^k - x^{\,k} \;=\; k\,m_*^{(\varepsilon)}(x)\,x^{\,k-1} + k\,(k-1)\,b_*^{(\varepsilon)}(x)\,x^{\,k-2}\,/2 + O\left(x^{\,k-3}\right).$$

Далее, подставляя соотношения (7.11), (7.12) и асимптотические представления (7.1), приходим к равенствам

$$\mathbf{E}\left\{\,x + \xi_*^{(\varepsilon)}(x)\,\right\}^k - x^{\,k} \;=\; k\,x^{\,k-2}\left(\,x\,m^{(\varepsilon)}(x) + (k-1)\,b^{(\varepsilon)}(x)\;/2 + o\,(1)\,\right) \;=$$
$$=\; k\,x^{\,k-2}\left(-\,x\,\psi_+(\varepsilon)\,(1 + o\,(1)) + \mu_+ + (k-1)\,b_+\,/2 + o\,(1)\right)$$

при $x \to \infty, \varepsilon\downarrow 0$. Учитывая это равенство в (7.26), в силу леммы 24, получаем при $\varepsilon\downarrow 0$

$$2\,\psi_+(\varepsilon)\,(1 + o\,(1))\,\mathbf{E}\,\left\{\left(X^{(\varepsilon)}\right)^{k-1}\,;\; X^{(\varepsilon)} \ge 0\right\} \;=$$
$$= (2\,\mu_+ + (k-1)\,b_+ + o\,(1))\,\mathbf{E}\,\left\{\left(X^{(\varepsilon)}\right)^{k-2};\; X^{(\varepsilon)} \ge 0\right\} + o\,\left(\mathbf{P}\,\left\{X^{(\varepsilon)} \ge 0\right\}\right).$$

Домножим последнее равенство на $(2\,\psi_+(\varepsilon))^{\,k-2}$. Тогда

$$\mathbf{E}\,\left\{\left(2\,\psi_+(\varepsilon)\,X^{(\varepsilon)}\right)^{k-1};\; X^{(\varepsilon)} \ge 0\right\} \;=$$
$$= (2\,\mu_+ + (k-1)\,b_+ + o\,(1))\,\mathbf{E}\,\left\{\left(2\,\psi_+(\varepsilon)\,X^{(\varepsilon)}\right)^{k-2};\; X^{(\varepsilon)} \ge 0\right\} +$$

$$+ o\left(\psi_+^{k-2}(\varepsilon)\,\mathbf{P}\left\{X^{(\varepsilon)} \geq 0\right\}\right) \quad \text{при } \varepsilon \downarrow 0\,.$$

В частности, при $k = 2$

$$\mathbf{E}\left\{2\,\psi_+(\varepsilon)\,X^{(\varepsilon)}\,;\; X^{(\varepsilon)} \geq 0\right\} = (2\mu_+ + b_+ + o\,(1))\,\mathbf{P}\left\{X^{(\varepsilon)} \geq 0\right\} \quad \text{при } \varepsilon \downarrow 0\,,$$

что эквивалентно сходимости (7.25) при $m = 1$. Действуя по индукции, завершаем доказательство (7.25) при любом $m \geq 1$. Условная сходимость (7.7) доказана.

Перейдем к доказательству оценки (7.9). В силу формулы Тейлора, условия (7.6) и соотношений (7.11)—(7.13) при любом $\gamma \in \mathbf{R}$ имеем при $x \to \infty$

$$v_\gamma^{(\varepsilon)}(x) \equiv \mathbf{E}\left\{\left(x + \xi_*^{(\varepsilon)}(x)\right)^\gamma - x^\gamma\right\} \equiv \gamma\left(x^{\gamma-1}m^{(\varepsilon)}(x) + (\gamma-1)\,x^{\gamma-2}b^{(\varepsilon)}(x)/2 + o\left(x^{\gamma-2}\right)\right) \tag{7.27}$$

равномерно по ε. Из асимптотических представлений (7.1) вытекает, что при любом γ существуют числа $x_* = x_*(\gamma) \geq 1+L$ и $\varepsilon_* = \varepsilon_*(\gamma) > 0$ такие, что при $x \geq x_*$ и $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$ имеют место следующие утверждения:

а) если $\gamma > 0$ и $\mu_+ + (\gamma - 1)\,b_+/2 > 0$, то

$$v_\gamma^{(\varepsilon)}(x) \geq \gamma\left(-\,2\,\psi_+(\varepsilon)\,x^{\gamma-1} + (\mu_+ + (\gamma-1)\,b_+/2)\,x^{\gamma-2}/2\right); \tag{7.28}$$

б) если $\gamma > 0$ и $\mu_+ + (\gamma - 1)\,b_+/2 < 0$, то

$$v_\gamma^{(\varepsilon)}(x) \leq -\left|\gamma\,(\mu_+ + (\gamma-1)\,b_+/2)\,x^{\gamma-2}/2\right|; \tag{7.29}$$

в) если $\gamma < 0$ и $\mu_+ + (\gamma - 1)\,b_+/2 > 0$, то

$$v_\gamma^{(\varepsilon)}(x) \leq \gamma\left(-\,2\,\psi_+(\varepsilon)\,x^{\gamma-1} + (\mu_+ + (\gamma-1)\,b_+/2)\,x^{\gamma-2}/2\right); \tag{7.30}$$

г) если $\gamma < 0$ и $\mu_+ + (\gamma - 1)\,b_+/2 < 0$, то

$$v_\gamma^{(\varepsilon)}(x) \geq \left|\gamma\,(\mu_+ + (\gamma-1)\,b_+/2)\,x^{\gamma-2}/2\right|. \tag{7.31}$$

Лемма 25. *Для всякого компакта K и любого $\delta > 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$ справедлива оценка*

$$\pi^{(\varepsilon)}(K) = O\left(\psi_+^{1 + 2\mu_+/b_+ - \delta}(\varepsilon)\right).$$

Доказательство. В силу леммы 3 при любом γ, $0 \leq \gamma \leq 2$, и достаточно малом ε справедливы равенство

$$0 = \int_0^\infty v_\gamma^{(\varepsilon)}(x)\,\pi_*^{(\varepsilon)}(dx) \tag{7.32}$$

и неравенство

$$0 \geq \int_{x_*}^\infty v_\gamma^{(\varepsilon)}(x)\,\pi_*^{(\varepsilon)}(dx)\,. \tag{7.33}$$

Так как при $\gamma < 0$ функция $V_\gamma(x) \equiv \max\,(0, 1 - x^\gamma) \geq 0$ возрастает, согласно лемме 1 выполняется неравенство

$$0 \ge \int_{x_*}^{\infty} \mathbf{E}\left\{ V_\gamma(x + \xi_*^{(\varepsilon)}(x)) - V_\gamma(x) \right\} \pi_*^{(\varepsilon)}(dx) .$$

Поскольку $x_* \ge 1 + L$, имеем

$$\int_{x_*}^{\infty} \mathbf{E}\left\{ V_\gamma(x + \xi_*^{(\varepsilon)}(x)) - V_\gamma(x) \right\} \pi_*^{(\varepsilon)}(dx) =$$

$$= \int_{x_*}^{\infty} \mathbf{E}\left\{ V_\gamma(x+\xi^{(\varepsilon)}(x)) - V_\gamma(x)\right\} \pi^{(\varepsilon)}(dx) = \int_{x_*}^{\infty} \mathbf{E}\left\{ x^\gamma - (x + \xi^{(\varepsilon)}(x))^\gamma\right\} \pi^{(\varepsilon)}(dx) .$$

Таким образом, при $\gamma < 0$

$$0 \le \int_{x_*}^{\infty} v_\gamma^{(\varepsilon)}(x)\, \pi_*^{(\varepsilon)}(dx) . \tag{7.34}$$

Подставляя (7.28) в (7.33) и (7.30) в (7.34), получаем при любом $\gamma \in (1 - 2\mu_+ / b_+, 2]$ неравенство

$$2\,\psi_+(\varepsilon)\, \mathbf{E}\left\{ \left(X^{(\varepsilon)}\right)^{\gamma - 1} ;\ X^{(\varepsilon)} > x_* \right\} \ge$$

$$\ge (\mu_+ + (\gamma - 1)\, b_+/2)\, \mathbf{E}\left\{ \left(X^{(\varepsilon)}\right)^{\gamma - 2} ;\ X^{(\varepsilon)} > x_* \right\} /2 . \tag{7.35}$$

Если $\gamma < 1$, то $0 < (\gamma - 1)/(\gamma - 2) < 1$ и, следовательно,

$$\mathbf{E}\left\{\left(X^{(\varepsilon)}\right)^{\gamma - 1} ;\ X^{(\varepsilon)} > x_* \right\} \le \mathbf{E}\left\{\left(X^{(\varepsilon)}\right)^{\gamma - 2} ;\ X^{(\varepsilon)} > x_* \right\}^{(\gamma - 1)/(\gamma - 2)} . \tag{7.36}$$

Если $1 < \gamma < 2$, то $0 < \gamma - 1 < 1$ и в силу (7.24)

$$\mathbf{E}\left\{\left(X^{(\varepsilon)}\right)^{\gamma - 1} ;\ X^{(\varepsilon)} > x_* \right\} \le \left(\mathbf{E}\left\{ X^{(\varepsilon)} ;\ X^{(\varepsilon)} > x_* \right\}\right)^{\gamma - 1} \le c_4^{\gamma - 1}\, \psi_+^{1 - \gamma}(\varepsilon) . \tag{7.37}$$

В силу неравенств (7.36) и (7.37) из (7.35) следует, что при любом $\gamma \in (1 - 2\mu_+ / b_+, 2]$

$$\mathbf{E}\left\{ \left(X^{(\varepsilon)}\right)^{\gamma - 2} ;\ X^{(\varepsilon)} > x_* \right\} \le c_5(\gamma)\, \psi_+^{2 - \gamma}(\varepsilon), \quad c_5(\gamma) < \infty . \tag{7.38}$$

Положим $\gamma = \gamma(\delta) = 1 - 2\mu_+ / b_+ + \delta$, $\delta > 0$. Тогда

$$\mathbf{E}\left\{ \left(X^{(\varepsilon)}\right)^{\gamma(\delta) - 2} ;\ X^{(\varepsilon)} > x_* \right\} \le c_5(\gamma(\delta))\, \psi_+^{1 + 2\mu_+ / b_+ - \delta}(\varepsilon) . \tag{7.39}$$

Из этой оценки и следствия 2 леммы 6 вытекает утверждение леммы 25.

Поскольку

$$\left| v_\gamma^{(\varepsilon)}(x_*)\, \pi_*^{(\varepsilon)}(\{x_*\}) \right| = \left| \int_{-L}^{0} \mathbf{E}\left\{ (x + \xi^{(\varepsilon)}(x))^\gamma ;\ x + \xi^{(\varepsilon)}(x) > x_* \right\} \pi^{(\varepsilon)}(dx) \right| \le$$

$$\le c_6\, \pi^{(\varepsilon)}([-L, 0]), \quad c_6 < \infty , \tag{7.40}$$

$$\sup_{0 \le x \le x_*} |\, v_\gamma^{(\varepsilon)}(x) \,| \le c_7 < \infty , \tag{7.41}$$

ввиду (7.32) для любого $0 \le \gamma \le 2$ справедливы неравенства

$$0 = \pi_*^{(\varepsilon)}(\{0\})\, v_\gamma^{(\varepsilon)}(0) + \int_{+0}^{x_*} v_\gamma^{(\varepsilon)}(x)\, \pi^{(\varepsilon)}(dx) + \int_{x_*+0}^{\infty} v_\gamma^{(\varepsilon)}(x)\, \pi^{(\varepsilon)}(dx) \le$$

$$\le c_8\, \pi^{(\varepsilon)}([-L, x_*]) + \int_{x_*}^{\infty} v_\gamma^{(\varepsilon)}(x)\, \pi^{(\varepsilon)}(dx), \quad c_8 < \infty . \tag{7.42}$$

Так как при $\gamma < 0$ функция $0 \le V_\gamma(x) = \max(0, 1 - x^\gamma) \le 1$ ограничена, имеет место равенство

$$0 = \int_0^\infty \mathbf{E} \left\{ V_\gamma(x + \xi_*^{(\varepsilon)}(x)) - V_\gamma(x) \right\} \pi_*^{(\varepsilon)}(dx) , \tag{7.43}$$

из которого аналогично предыдущему можно вывести неравенство

$$0 \ge - c_9\, \pi^{(\varepsilon)}([-L, x_*]) + \int_{x_*}^{\infty} v_\gamma^{(\varepsilon)}(x)\, \pi^{(\varepsilon)}(dx), \quad c_9 < \infty, \ \gamma < 0 . \tag{7.44}$$

Подставим оценку (7.29) в (7.42) и оценку (7.31) в (7.44). Тогда при любом $\gamma \in (-\infty, 1 - 2\mu_+/b_+)$

$$\mathbf{E}\left\{ (X^{(\varepsilon)})^{\gamma - 2}; X^{(\varepsilon)} \ge x_* \right\} \le c_{10}\, \pi^{(\varepsilon)}([-L, x_*]), \quad c_{10} = c_{10}(\gamma) < \infty . \tag{7.45}$$

В силу условной сходимости (7.7) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\mathbf{E}\left\{ (X^{(\varepsilon)})^{\gamma - 2}; \ X^{(\varepsilon)} \ge x_* \right\} \ge c_{11}\, \mathbf{P}\left\{ X^{(\varepsilon)} > 0 \right\} \psi_+^{2-\gamma}(\varepsilon), \quad c_{11} > 0 , \tag{7.46}$$

подставив которое в (7.45), получаем

$$\mathbf{P}\left\{ X^{(\varepsilon)} > 0 \right\} \le c_{12}\, \psi_+^{\gamma - 2}(\varepsilon)\, \pi^{(\varepsilon)}([-L, x_*]) , \quad c_{12} < \infty . \tag{7.47}$$

Заменив цепь $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$ на цепь $\{- X_n^{(\varepsilon)}\}$, приходим к аналогичному неравенству

$$\mathbf{P}\left\{ X^{(\varepsilon)} < 0 \right\} \le c_{12}\, \psi_-^{\gamma - 2}(\varepsilon)\, \pi^{(\varepsilon)}(K) , \tag{7.48}$$

где K — некоторый компакт и $\gamma \in (-\infty, 1 - 2\mu_-/b_-)$. Положим $\gamma = \gamma(\delta) = 1 - 2\mu_-/b_- - \delta$, $\delta > 0$. Из неравенства (7.48) в силу леммы 25 имеем при $\varepsilon \downarrow 0$

$$\mathbf{P}\left\{ X^{(\varepsilon)} < 0 \right\} = O\left(\psi_-^{-1-2\mu_-/b_- - \delta}(\varepsilon)\, \psi_+^{1+2\mu_+/b_+ - \delta}(\varepsilon) \right) . \tag{7.49}$$

По определению $c_{\inf}$ и $c_{\sup}$ ввиду условия $c_{\sup} < \infty$ имеем $\psi_+(\varepsilon) = O(\psi_-(\varepsilon))$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Поэтому при $\varepsilon \downarrow 0$ справедлива оценка

$$\mathbf{P}\left\{ X^{(\varepsilon)} < 0 \right\} = O\left(\psi_-^{2\mu_+/b_+ - 2\mu_-/b_- - 2\delta}(\varepsilon) \right)$$

для любого $\delta > 0$. Оценка (7.9) доказана.

Обратимся к случаю $2\mu_- / b_- = 2\mu_+ / b_+$. Построим последовательность цепей Маркова $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$, обладающую следующим свойством: для любого $p \in [0, 1]$ найдется подпоследовательность индексов $\varepsilon_k \downarrow 0$ такая, что

$$\lim_{\varepsilon_k \downarrow 0} \mathbf{P}\left\{ X^{(\varepsilon_k)} \le 0 \right\} = p . \tag{7.50}$$

Пусть последовательность $a(\varepsilon)$ такая, что $a(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$ и множество предельных при $\varepsilon \downarrow 0$ точек последовательности $a(\varepsilon)\ln(1/\varepsilon)$ совпадает с $\mathbf{R}$. Рассмотрим цепь Маркова со счетным числом состояний $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ и с переходными вероятностями

$$p_{i,\,i+1}^{(\varepsilon)} = 1 - p_{i,\,i-1}^{(\varepsilon)} = \frac{1-\varepsilon}{2} + \frac{a(\varepsilon)}{4\,i}, \quad i \ge 1 ,$$

$$p_{i,\,i+1}^{(\varepsilon)} = 1 - p_{i,\,i-1}^{(\varepsilon)} = \frac{1+\varepsilon}{2}, \quad i \le 0 .$$

Тогда
$m^{(\varepsilon)}(i) = -\varepsilon + a(\varepsilon)/(2\,i) = -\varepsilon + o\left(1/i\right)$, $b^{(\varepsilon)}(i) \equiv 1 \equiv b_+$, $\psi_+(\varepsilon) = \varepsilon$, $\mu_+ = 0$ при $i \ge 1$, $i \to \infty, \varepsilon \downarrow 0$ и $m^{(\varepsilon)}(i) = \varepsilon$, $\psi_-(\varepsilon) = \varepsilon$, $\mu_- = 0$, $b^{(\varepsilon)}(i) \equiv 1 \equiv b_-$ при $i \le 0$. Предельная цепь $\{X_n\}$ есть симметричное случайное блуждание со скачками $\pm\ 1$. Выпишем стационарные вероятности $\pi^{(\varepsilon)}(i) = \mathbf{P}\{X^{(\varepsilon)} = i\}$ для цепи $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$:

$$\pi^{(\varepsilon)}(i) = \pi^{(\varepsilon)}(0) \prod_{k=1}^{i} \frac{p_{k-1,\,k}^{(\varepsilon)}}{p_{k,\,k-1}^{(\varepsilon)}}, \quad i \ge 1 ,$$

$$\pi^{(\varepsilon)}(i) = \pi^{(\varepsilon)}(0) \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{i}, \quad i \le 0 .$$

Просуммировав по i, $-\infty < i \le 0$, получим равенство

$$\mathbf{P}\left\{ X^{(\varepsilon)} \le 0 \right\} = \pi^{(\varepsilon)}(0)\,\frac{1+\varepsilon}{2\,\varepsilon} . \tag{7.51}$$

Вычислим $\pi^{(\varepsilon)}(i)$ при $i \ge 1$:

$$\ln \pi^{(\varepsilon)}(i) = \ln \pi^{(\varepsilon)}(0) + \ln \frac{p_{0,1}^{(\varepsilon)}}{p_{i,i-1}^{(\varepsilon)}} + \sum_{k=1}^{i-1} \left(\ln p_{k,k+1}^{(\varepsilon)} - \ln p_{k,k-1}^{(\varepsilon)}\right) =$$

$$= \ln \pi^{(\varepsilon)}(0) + o\,(1) + \sum_{k=1}^{i-1} \left(-\,2\,\varepsilon + \frac{a(\varepsilon)}{k} + O\left(\varepsilon^2 + \varepsilon\, a(\varepsilon)\,/k + a^2(\varepsilon)\,/k^2\right)\right) =$$

$$= \ln \pi^{(\varepsilon)}(0) - 2\,\varepsilon\, i + a(\varepsilon)\ln i + O\,(i\,\varepsilon^2) + o\,(\varepsilon \ln i\,) + o\,(1) \quad \text{при } \varepsilon \downarrow 0$$

равномерно по i. Следовательно,

$$\pi^{(\varepsilon)}(i) = \pi^{(\varepsilon)}(0)\, e^{-2\,\varepsilon\, i + O\,(i\,\varepsilon^2) + o\,(1)}\, i^{a(\varepsilon) + o\,(\varepsilon)} \quad \text{при } \varepsilon \downarrow 0$$

равномерно по i. Просуммировав по i, $0 < i < \infty$, приходим к равенству

$$\mathbf{P}\left\{ X^{(\varepsilon)} > 0 \right\} =$$

$$= (1+o(1))\, \pi^{(\varepsilon)}(0) \int_1^\infty e^{-2\varepsilon x + O(x\varepsilon^2) + o(1)}\, x^{a(\varepsilon) + o(\varepsilon)}\, dx =$$

$$= \frac{\pi^{(\varepsilon)}(0)}{2\varepsilon} (2\varepsilon)^{-a(\varepsilon) + o(\varepsilon)} (1 + o(1)) \int_{2\varepsilon}^\infty e^{-y + O(\varepsilon y)}\, y^{a(\varepsilon) + o(\varepsilon)}\, dy =$$

$$= \pi^{(\varepsilon)}(0)\, (2\varepsilon)^{-1-a(\varepsilon)} (1 + o(1)) \quad \text{при } \varepsilon \downarrow 0. \tag{7.52}$$

Из равенств (7.51) и (7.52) следует асимптотика

$$\pi^{(\varepsilon)}(0) \sim 2\varepsilon \left(1 + \exp\{ a(\varepsilon) \ln (1/\varepsilon)\}\right)^{-1},$$

и в силу (7.51) имеем

$$\mathbf{P}\left\{ X^{(\varepsilon)} \le 0 \right\} \sim \left(1 + \exp\{a(\varepsilon) \ln (1/\varepsilon)\}\right)^{-1} \quad \text{при } \varepsilon \downarrow 0.$$

Множество предельных при $\varepsilon \downarrow 0$ точек последовательности $a(\varepsilon) \ln (1/\varepsilon)$ совпадает с $\mathbf{R}$, а функция $(1 + e^x)^{-1}$ отображает прямую $(-\infty, \infty)$ на отрезок $(0, 1)$, вследствие чего для цепи $\{X_n^{(\varepsilon)}\}$ выполнено (7.50). Теорема 9 доказана.

Автор благодарит А. А. Боровкова за постановку задачи, помощь и внимание к работе. Автор признателен С. Г. Фоссу за ряд полезных замечаний, в том числе за предложенный им вариант доказательства леммы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tweedie R. L. Criteria for classifying general Markov chains // Adv. Appl. Probab.—1976.—V. 8.—P. 736–771.
2. Athereya K. B., Ney P. The limit theory of recurent Markov chains // Trans. Amer. Math. Soc.—1978.—V. 245.—P. 493–501.
3. Боровков А. А. Эргодичность и устойчивость многомерных цепей Маркова // Теория вероятностей и ее применения.—1990.—Т. 35, № 3.—С. 543–547.
4. Kingman J. F. C. The single server queue in heavy traffic // Proc. Cambridge Phil. Soc.—1961.—V. 57.—P. 902–904.
5. Kingman J. F. C. On queues in heavy traffic // J. Roy. Statist. Soc. Ser. B.—1962.—V. 24.—P. 383–392.
6. Прохоров Ю. В. Переходные явления в процессах массового обслуживания // Лит. мат. сб.—1963.—Т. 3, № 1.—С. 199–206.
7. Боровков А. А. Некоторые предельные теоремы теории массового обслуживания I // Теория вероятностей и ее применения.—1964.—Т. 9, № 4.—С. 608–625.
8. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания.—М.: Наука, 1972.
9. Harrison J. M. The heavy traffic approximation for single server queues in series // J. Appl. Probab.—1973.—V. 10, N 3.—P. 613–629.

10. **Borovkov A. A., Fayolle G., Korshunov D. A.** Transient phenomena for Markov chains and their applications // Rapports de Recherche, INRIA, France.—1990.—25 p.
11. **Borovkov A. A., Fayolle G., Korshunov D. A.** Transient phenomena for Markov chains and applications // Adv. Appl. Prob.—1992.—V. 24.—N 2.—P. 322–342.
12. **Korshunov D. A.** Transient phenomena for Markov chains // 5 Междунар. Вильнюсская конференция по теории вероятн. и матем. стастистике, Вильнюс.—1989.—Т. 1.—С. 272–273.
13. **Коршунов Д. А.** Переходные явления для вещественнозначных цепей Маркова // Теория вероятностей и ее применения.—1993.— Т. 38, № 1.—С. 184–187.
14. **Tweedie R. L.** The existence of moments for stationary Markov chains // J. Appl. Probab.—1983.—V. 20.—P. 191–196.
15. **Назаров Л. В., Смирнов С. Н.** Оценивание моментов стационарного распределения цепей Маркова методом пробных функций // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика.—№ 4.— С. 43–48.
16. **Sennott L., Humblet P., Tweedie R.** Mean drifts and the non-ergodicity of Markov chains // Oper. Res.—1983.—V. 31, N 4.—P. 783–789.
17. **Sennott L.** Conditions for the non-ergodicity of Markov chains with applications to a communication system // J. Appl. Probab.—1987.—V. 24.—P. 339–346.
18. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2.—М.: Мир, 1984.