О РАЗЛОЖЕНИИ ЭДЖВОРТА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. В. Нагаев, В. И. Чеботарёв

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена асимптотическим разложениям по степеням $n^{-1/2}$ распределения нормы суммы n независимых одинаково распределенных случайных величин. Эти разложения являются обобщением классического разложения Чебышева — Эджворта. Как и в одномерном случае, в этой проблеме можно выделить два аспекта.

Первый: поиски алгоритмов вычисления коэффициентов при $n^{-\nu/2}$. Новым по сравнению с конечномерным случаем является то, что различные алгоритмы приводят к разным представлениям коэффициентов (см., например, работы Гёце [1] и Бенткуса [2, 3]). В данной статье предлагается новый алгоритм вычисления коэффициентов в разложении Чебышева — Эджворта, основанный на дополнительном усреднении по вспомогательному гауссовскому распределению. Предлагаемый алгоритм приводит соответственно к новому представлению коэффициентов. Так как разложение Эджворта единственно, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n, мы получаем функциональные тождества, которые априори не очевидны. В связи с этим возникает проблема прямого доказательства полученных тождеств, которая также решается в настоящей работе.

Второй: оценка остаточного члена. Предшествующие исследования были, в основном, направлены на получение оценки остатка при минимальных предположениях относительно моментов исходного распределения. Однако в бесконечномерном случае очень важна форма зависимости остатка от ковариационного оператора слагаемых случайных величин. Наша цель заключается в том, чтобы найти явный вид этой зависимости, сводя при этом к минимуму число собственных значений ковариационного оператора, участвующих в оценке. Как и в одномерном случае, для получения приемлемой оценки остатка, кроме моментных ограничений, приходится накладывать дополнительное ограничение на характеристический функционал. Использованное нами условие является обобщением известного условия Крамера. Оно близко к условию (1.1) в [3].

§ 1. ОБОЗНАЧЕНИЯ. ОСНОВНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

1.1. Введем обозначения и определения, используемые на протяжении всей статьи:

H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство с нормой $|\cdot|$ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$;

© *С. В. Нагаев, В. И. Чеботарёв*, 1993

$Y, X, X_1, X_2, \ldots$ — независимые случайные величины со значениями в H, причем $X, X_1, X_2, \ldots$ одинаково распределены с некоторым распределением F, Y — гауссовская величина с распределением Φ, а X и Y имеют нулевое среднее и общий ковариационный оператор T;

$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$ — собственные числа оператора T, $\sigma_j^2 \geq \sigma_{j+1}^2$, $j = 1, 2, \ldots$;

$\{e_j\}_1^\infty$ — последовательность соответствующих собственных векторов, составляющих ортонормированный базис в H;

$\mathrm{E}_{u_{j_1}, \ldots, u_{j_m}} \psi(u_1, \ldots, u_\nu)$ — условное математическое ожидание при условии, что все величины, кроме $u_{j_1}, \ldots, u_{j_m}$, фиксированы; здесь ψ — измеримая функция ν переменных, $\{j_1, \ldots, j_m\} \subset \{1, \ldots, \nu\}$ и $u_1, \ldots, u_\nu$ — случайные величины;

$D_{\lambda_1, \ldots, \lambda_m}^{j_1, \ldots, j_m} \equiv \partial^M / \partial\lambda_1^{j_1} \ldots \partial\lambda_m^{j_m}$ — частные производные функции переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$;

ξ — обозначение случайной величины X, когда последняя вещественна;

η — вещественная нормальная случайная величина;

$\mathrm{I}_A(x)$ — индикаторная функция множества A;

I — тождественный оператор;

$[m/n]$ — целая часть дроби m/n;

$c(\cdot, \cdot)$ — величина, зависящая только от параметров, указанных в скобках;

$\{m_q\}_i^\nu = \{m_q\}_{q=i}^\nu$, $\{\mu_q\}_i^\nu$, $\{t_q\}_i^\nu$, $\{l_q\}_i^\nu$ — наборы неотрицательных целых чисел, например $\{m_q\}_i^\nu = \{m_i, m_{i+1}, \ldots, m_\nu\}$;

$\{m_{pq}\}$, $\{\mu_{pq}\}$, $\{s_{pq}\}$, $\{t_{pq}\}$ $(p, q = 1, \ldots, \nu)$ — матрицы, элементы которых суть целые неотрицательные числа;

$\sum\limits_{\{q\mu_q\}_1^\nu}$ — суммирование по $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$ таким, что $\sum\limits_{q=1}^{\nu} q\mu_q = \nu$;

$\sum\limits_{\{\mu_{pq}\}}^{\{j_q\}}$ — суммирование по $\{\mu_{pq}\}$ $(p,q=1,\ldots,m)$ таким, что

$$\sum_{p=1}^{m} (\mu_{pq} + \mu_{qp}) = j_q, \quad q = 1, \ldots, m;$$

$\sum\limits_{\{m_q\}_1^\nu}^{p}$ — суммирование по $\{m_q\}_1^\nu$ таким, что $\sum\limits_{q=1}^{\nu} m_q = p$;

$\sum\limits_{a \leq p \leq b}$ — суммирование по всем целым $p \in [a, b]$;

$\sum\limits_{(\nu, p, \mu)}^{2m} = \sum\limits_{\nu=1}^{2m} \sum\limits_{\nu/2 \leq p \leq m} \sum\limits_{\mu_{\nu,2p} \leq \mu \leq \nu}$, где $\mu_{\nu,2p} = \max\{1, (3\nu - 2p)/2\}$;

$\sum\limits_{\{m_q\geq 3\}_i^\nu}^{j}$ — суммирование по всем таким $\{m_q\}_i^\nu$, что $\sum\limits_{q=i}^{\nu} m_q = j$ и $m_q\geq 3$, $q = i, \ldots, \nu$;

$\sum\limits_{\{m_{pq}\}}^{m}$ — суммирование по всем таким $\{m_{pq}\}$, что $\sum\limits_{p,\, q=1}^{\nu} m_{pq} = m$;

$S_m(\{\mu_q\}) \equiv m! \prod\limits_q 1/\mu_q!$ — полиномиальные коэффициенты, где $m = \sum\limits_q \mu_q$.

Приняты также следующие обозначения:

$$g(t) = \mathrm{E}\exp\{it\,|\,Y|^2\}\,, \qquad S_n = n^{-1/2} \sum_1^n X_j\,.$$

1.2. Для функционала $f: H \to \mathbf{C}$ *формальным разложением Эджворта* $\mathrm{E} f(S_n)$ назовем формальное разложение в ряд по степеням $n^{-1/2}$:

$$\mathrm{E} f(S_n) = \mathrm{E} f(Y) + \sum_{\nu=1}^{\infty} n^{-\nu/2} Q_\nu(f;X)\,. \tag{1.1}$$

В работе исследуются способы определения $Q_\nu(f;X)$ и оценка остаточного члена в разложении (1.1) при $f(x) = \exp\{it\,|x|^2\}$ и $f(x) = \mathrm{I}_{\{|x|^2<r\}}(x)$. Известно, что если $H = \mathbf{R}$, $f(x) = \exp\{sx\}$ ($s \in \mathbf{C}$), то

$$Q_\nu(f;\xi) = \exp\{s^2\sigma^2/2\}\, p_\nu(s;\xi)\,, \tag{1.2}$$

где $\sigma^2 = \mathrm{E}\,\xi^2$,

$$p_\nu(s;\xi) = \sum_{\{q\mu_q\}_1^\nu} \prod_{q=1}^{\nu} \left[s^{q+2}\kappa_{q+2}(\xi)\,/(q+2)!\right]^{\mu_q}/\mu_q! \tag{1.3}$$

(см. например, [4, с. 168, 173]), здесь через $\kappa_{q+2}(\xi)$ обозначен семиинвариант ξ порядка $q+2$.

1.3. Опишем алгоритм, введенный Гёце [1] для вычисления $Q_\nu(f;X)$ в случае гладких функционалов f (см. [5]). С этой целью выразим семиинварианты $\kappa_{q+2}(\xi)$ через моменты ξ и представим $p_\nu(s;\xi)$ в виде суммы

$$p_\nu(s;\xi) = \sum\nolimits^{\#} a_\nu(j_1, \ldots, j_m)\, s^M \prod_{q=1}^{m} \mathrm{E}\,\xi_q^{j_q}\,, \tag{1.4}$$

где $M = \sum\limits_{q=1}^{m} j_q$, и $\sum^{\#}$ означает суммирование по всем целым неотрицательным $j_1, \ldots, j_m$ таким, что $M \leq \nu+2m$, $m \leq \nu$, $2 \leq j_q \leq \nu+2$ (см. также [2, с. 29, 30]). В [5] вводится следующий алгоритм вычисления:

$$Q_\nu(f;X) = p_\nu(D)\,\mathbf{E} f\left(Y + \sum_{q=1}^{\nu} \lambda_q X_q\right)\Bigg|_{\lambda_1 = \dots = \lambda_\nu = 0}. \tag{1.5}$$

При этом предполагается, что f имеет достаточно высокого порядка ограниченную производную Фреше.

Бенткус дает [2] близкое к (1.5) представление

$$Q_\nu(f;X) = \mathbf{E}\, p_\nu(d_{X_1}, \dots, d_{X_\nu})\, f(Y)\,, \tag{1.6}$$

где $p_\nu(d_{x_1}, \dots, d_{x_\nu})$ — дифференциальный оператор, полученный заменой мономов в (1.4) при $s = 1$ смешанными производными Фреше $\prod_{q=1}^{m} d_{x_q}^{j_q}$. Здесь $d_{x_q}^{j_q} f(Y)$ обозначает q-кратную производную функции f в точке Y по направлению x.

Для $f(x) = \mathrm{I}_A(x)$, где A принадлежит некоторому классу множеств (содержащему, в частности, все эллипсоиды), Бенткус приводит [3, 6] алгоритм вычисления $Q_\nu(f;X)$ следующего вида:

$$Q_\nu(f;X) = \mathbf{E}\, p_\nu(d_{X_1}, \dots, d_{X_\nu})\, \Phi(A)\,. \tag{1.6$'$}$$

Здесь оператор $p_\nu(d_{x_1}, \dots, d_{x_\nu})$ определяется по аналогии с (1.6) путем замены в (1.4) мономов на производные распределения Φ на множестве A по направлению x:

$$d\Phi(A) = \lim_{t\to 0}\, [\Phi(A - tx) - \Phi(A)]/t\,.$$

1.4. В этом пункте мы опишем наш алгоритм вычисления $Q_\nu(f;x)$ для $f(x) = \exp\{it|x|^2\}$. Предварительно введем некоторые понятия и обозначения. Обозначим через $H_{\mathbf{C}}$ комплексное расширение пространства H, понимаемое как комплексное векторное пространство, которое состоит из элементов вида $x = x_1 + ix_2$ ($x_1, x_2 \in H$) (см., например, [7, с. 18]). Умножение x на комплексное число $\delta = \delta_1 + i\delta_2$ ($\delta_1, \delta_2 \in \mathbf{R}$) определяется равенством $\delta x = \delta_1 x_1 - \delta_2 x_2 + i(\delta_1 x_2 + \delta_2 x_1)$. Введем в $H_{\mathbf{C}}$ скалярное произведение

$$(x,y)_1 \equiv (x_1 + ix_2, y_1 + iy_2)_1 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) + i[(x_2, y_1) - (x_1, y_2)]\,.$$

Очевидно, если $(x,y) \in H$, то $(x,y)_1 = (x,y)$. Легко также видеть, что

$$(x,y)_1 = \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j)_1\, \overline{(y, e_j)_1}\,, \qquad x, y \in H_{\mathbf{C}}\,.$$

Определим билинейный функционал на $H_{\mathbf{C}}$, сохраняя для него обозначения скалярного произведения в H:

$$(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j)_1\, (y, e_j)_1 \qquad x, y \in H_{\mathbf{C}}\,.$$

Мы будем использовать обозначение $\|x\|^2 = (x,x)$, $x \in H_{\mathbf{C}}$. Ясно, что при $x \in H$ имеем $\|x\|^2 = |x|^2$. Определим оператор $A_t : H_{\mathbf{C}} \to H_{\mathbf{C}}$ по формуле

$$A_t x = \sum_1^\infty (1 - 2it\sigma_j^2)^{-1/2} (x, e_j)\, e_j \quad \forall\ x \in H_{\mathbf{C}}.$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ — последовательность независимых вещественных нормальных стандартных случайных величин. Для $x \in H_{\mathbf{C}}$ обозначим $(x, \alpha) = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j(x, e_j)$. В дальнейшем α называем *обобщенной гауссовской стандартной величиной*. По существу, все наши последующие рассмотрения базируются на формуле перехода

$$\mathbf{E} \exp\{(2s)^{1/2} (x, \alpha)\} = \exp\{s\|x\|^2\} \qquad x \in H_{\mathbf{C}}, \quad s \in \mathbf{C}. \tag{1.7}$$

Эта формула вытекает из равенства

$$(2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{(2s)^{1/2} y\lambda - y^2/2\}\, dy = \exp\{s\lambda^2\}.$$

Заметим, что формула перехода (1.7) существенно используется в работе авторов [8] (см. также [9]).

Теперь перейдем к описанию нашего алгоритма вычисления $Q_\nu(f; X)$ для $f(x) = \exp\{it|x|^2\}$. Прежде всего заметим, что вследствие (1.7)

$$\mathbf{E} \exp\{it|S_n|^2\} = \mathbf{E}_{S_n} \mathbf{E}_\alpha \exp\{(2it)^{1/2} (S_n, \alpha)\}.$$

Не нарушая общности, можно считать, что случайные величины X_j ограничены. Это позволяет поменять местами $\mathbf{E}_{S_n}$ и $\mathbf{E}_\alpha$ в правой части последнего равенства:

$$\mathbf{E} \exp\{it|S_n|^2\} = \mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}_{S_n} \exp\{(2it)^{1/2} (S_n, \alpha)\}.$$

Используя (1.2) с $s = (2it)^{1/2}$, напишем формальное разложение

$$\mathbf{E}_{S_n} \exp\{(2it)^{1/2} (S_n, \alpha)\} = \exp\{it(T\alpha, \alpha)\} \sum_{\nu=0}^\infty n^{-\nu/2} p_\nu((2it)^{1/2}; (X, \alpha)),$$

где $(T\alpha, \alpha) = \sum_1^\infty \sigma_j^2 \alpha_j^2 \equiv \mathbf{E}_Y (Y, \alpha)^2$ и обобщенная гауссовская стандартная величина α фиксирована. В силу (1.3) и (1.4) коэффициенты полинома $p_\nu(s; (X, \alpha))$ представимы в виде линейных комбинаций произведений типа $\prod_{q=1}^m \mathbf{E}_{X_q} (X_q, \alpha)^{j_q}$.

Рассматривая математическое ожидание

$$E(j_1, \ldots, j_m) \equiv \mathbf{E}_\alpha \exp\{it(T\alpha, \alpha)\} \prod_{q=1}^m \mathbf{E}_{X_q}(X_q, \alpha)^{j_q} \tag{1.8}$$

как

$$\lim_{N\to\infty} (2\pi)^{-N/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty}}_{N} \exp\left\{ \sum_{j=1}^N y_j^2 (it\sigma_j^2 - 1/2) \right\} \left[\prod_{q=1}^m \mathbf{E}_{X_q} \left(\sum_{k=1}^N y_k (X_q, e_k) \right)^{j_q} \right] \prod_{j=1}^N dy_j$$

и используя замену переменной $y_j\,(1-2it\sigma_j^2)^{1/2} = u_j$, заключаем, что

$$E\,(j_1, \ldots, j_m) = g(t)\ \mathrm{E}_\alpha \prod_{q=1}^{m} \mathrm{E}_{X_q}(A_t X_q, \alpha)^{j_q}. \tag{1.9}$$

В результате приходим к формальному разложению Эджворта

$$\mathrm{E}\exp\{it\,|S_n|^2\} = g(t) \sum_{\nu=0}^{\infty} n^{-\nu/2}\, \mathrm{E}\, p_\nu((2it)^{1/2}\,;\,(A_t X, \alpha)). \tag{1.10}$$

Таким образом, для $Q_\nu(f;X)$ мы получили новое представление в случае $f(x) = \exp\{it\,|x|^2\}$, именно:

$$Q_\nu(f;X) = g(t)\,\mathrm{E}\, p_\nu((2it)^{1/2}\,;\,(A_t X, \alpha)) \equiv g(t)\, P_\nu(t). \tag{1.11}$$

Осуществляя усреднение по α в (1.9), с помощью леммы 3.6 (см. ниже) мы получим для математического ожидания (1.8) следующее представление:

$$E\,(j_1, \ldots, j_m) = g(t)\,\mathrm{E}\,\eta^M (M!)^{-1} \left(\prod_{q=1}^{m} j_q!\right) \sum_{\{\mu_{pq}\}}^{\{j_q\}} (M/2)!\ \mathrm{E} \prod_{p,\,q=1}^{m} \frac{(A_t X_p, A_t X_q)^{\mu_{pq}}}{\mu_{pq}!} =$$

$$= \left|\cos\left(\frac{\pi M}{2}\right)\right|\, g(t) \left(\prod_{q=1}^{m} j_q!\right) 2^{-M/2} \sum_{\{\mu_{pq}\}}^{\{j_q\}} \mathrm{E} \prod_{p,\,q=1}^{m} \frac{(A_t X_p, A_t X_q)^{\mu_{pq}}}{\mu_{pq}!}. \tag{1.12}$$

Формула (1.12) ведет к алгоритму, предложенному авторами в [10, 11]: для того, чтобы найти $Q_\nu(f;X)$ $(f(x) = \exp\{it\,|x|^2\})$, нужно в (1.4) с $s = it$ произвести замену

$$(it)^M \prod_{q=1}^{m} \mathrm{E}\,\xi_q^{j_q} \quad \text{на} \quad \left(\prod_{q=1}^{m} j_q!\right) (it)^{M/2} \sum_{\{\mu_{pq}\}}^{\{j_q\}} \mathrm{E} \prod_{p,\,q=1}^{m} \frac{(A_t X_q, A_t X_q)^{\mu_{pq}}}{\mu_{pq}!},$$

а полученное выражение умножить на $g(t)$. Отметим, что (1.12) влечет равенство нулю всех коэффициентов $Q_\nu(f;X)$ с нечетными номерами ν.

Под *обобщенным* χ^2*-распределением* мы понимаем распределение случайной величины $\sum_1^\infty b_j^2 \alpha_j^2$, где $\sum_1^\infty b_j^2 < \infty$. Используя равенство

$$(A_t X_p, A_t X_q) = \sum_{j=1}^{\infty} (1 - 2it\sigma_j^2)^{-1}\,(X_p, e_j)\,(X_q, e_j)$$

и записывая в координатной форме правую часть соотношения (1.12), мы придем к следующему выводу: функции $g(t)\,P_\nu(t)$ можно понимать как полиномы относительно it с коэффициентами, являющимися характеристическими функциями смесей обобщенных χ^2-квадрат распределений.

1.5. Заметим, что представление (1.1) нетрудно распространить на функционалы более общего вида, например $f(x) = \exp\{it\,(B(x+a), x+a)\}$, где $a \in H$, а B — положительно определенный самосопряженный оператор в H.

1.6. Математическое ожидание (1.8) можно вычислить различными способами, например, так:

$$\mathbf{E}_\alpha \exp\{it(T\alpha, \alpha)\} \prod_{q=1}^{m} (X_q, \alpha)^{j_q} =$$

$$= \frac{1}{s^M} D^{j_1, \ldots, j_m}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_m} \mathbf{E}_\alpha \exp\left\{ it(T\alpha, \alpha) + s\sum_{q=1}^{m} \lambda_q(X_q, \alpha) \right\} \Bigg|_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0}.$$

Напомним, что $M = \sum_{q=1}^{m} j_q$. Поэтому при $s = (2it)^{1/2}$

$$\mathbf{E} \exp\{it(T\alpha,\alpha)\}\, p_\nu(s; (X, \alpha)) =$$

$$= p_\nu(D)\, \mathbf{E} \exp\left\{ s\left[(Y, \alpha) + \sum_{q=1}^{m} \lambda_q(X_q, \alpha)\right]\right\}\Bigg|_{\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0}.$$

Замечая, что в силу (1.7) верно равенство

$$\mathbf{E}\,\mathbf{E}_\alpha \exp\left\{ s\left[(Y, \alpha) + \sum_{q=1}^{m} \lambda_q(X_q, \alpha)\right]\right\} = \mathbf{E} \exp\left\{ it \left| Y + \sum_{q=1}^{m} \lambda_q X_q \right|^2 \right\},$$

мы получаем представление (1.5) для $f(x) = \exp\{it|x|^2\}$. Таким образом, различные способы вычисления $E(j_1, \ldots, j_m)$ приводят к различным выражениям для $Q_\nu(f; X)$.

1.7. В работе Гёце [1] предлагается процедура вычисления членов разложения Эджворта для характеристической функции двумерного функционала Мизеса. Применительно к разложению $\mathbf{E}\exp\{it|S_n|^2\}$ эта процедура выглядит следующим образом: нужно каждый моном $\prod_{q=1}^{m} \mathbf{E}\, \xi_q^{j_q}$ в (1.4) при $s = 1$ заменить на выражение

$$\gamma_{j_1, \ldots, j_m} = \left(\prod_{q=1}^{m} j_q! \right) \sum_{\{\mu_{pq}\}}^{\{j_q\}} \mathbf{E} \prod_{p,q=1}^{\nu} \frac{[R(t; X_p, X_q)/2]^{\mu_{pq}}}{\mu_{pq}!},$$

где $R(t; x, y) = 2it\{(x, y) + 2it\,\mathbf{E}(x, X)((I - 2itT)^{-1}X, y)\}$, а затем полученное выражение умножить на $g(t)$. Из равенств

$$\mathbf{E}(x, X)((I - 2itT)^{-1} X, y) = (T(I - 2itT)^{-1} x, y),$$

$$I + 2itT(I - 2itT)^{-1} = (I - 2itT)^{-1} \equiv A_t^2$$

вытекает, что $R(t; X_p, X_q) = 2it(A_t X_p, A_t X_q)$. Таким образом, в рассматриваемом частном случае алгоритмы, предложенные в [10, 11] и в [1], по существу совпадают. Используя любое из приведенных выше представлений, можно показать, что

$$Q_2(f; X) = g(t)\Big\{((it)^2/2)\,[\mathbf{E}\,\|A_t X_1\|^4 - (\mathbf{E}\,\|A_t X_1\|^2)^2 - 2\,\mathbf{E}(A_t X_1, A_t X_2)^2] +$$

$$+ ((it)^3/3)\ [2\,(A_t X_1, A_t X_2)^3 + 3\,\mathrm{E}\,\|A_t X_1\|^2\,\|A_t X_2\|^2\,(A_t X_1, A_t X_2)]\}$$

(см. также [10, 11]).

1.8. Прежде чем сформулировать основные результаты, введем следующие обозначения:

$$\beta_\mu = \mathrm{E}\,|X|^\mu, \qquad L = \sigma\,([n/4]+1)^{1/2}, \ \overline{\beta_\mu} = \mathrm{E}\,(|X|^\mu\,;\,|X| \le L),$$

$$\beta_\mu(n) = \beta_\mu - \overline{\beta_\mu}, \quad \Lambda_l = \prod_{j=1}^{l} \sigma_j^2, \qquad \Gamma_{\mu,\,l} = \beta_\mu\,\sigma^\mu\,\Lambda_l^{-\mu/l}, \quad \mu \ge 2,$$

$$\Gamma_{k+1}(n) = (\overline{\beta_{k+1}} + \beta_k(n)\,\sigma\,n^{1/2})/\sigma^{k+1}.$$

Обозначим через $\overline{X_j}$, $j = 1, 2, \ldots$, независимые случайные величины с одним и тем же распределением $\overline{F}$, определяемым равенством $\overline{F}(A) \equiv \equiv \mathrm{P}\,(\overline{X_j} \in A) = \mathrm{P}\,(X_j \in A \mid |X_j| \le L)$ для каждого борелевского множества $A \in H$. Пусть

$$\overline{g_n}(t) = \mathrm{E}\exp\left\{\frac{it}{n}\left|\sum_{j=1}^{n}\overline{X_j}\right|^2\right\}.$$

Теорема 1.1. *Пусть $P_\nu(t)$ — функции, определенные в* (1.11), *k и l — целые числа,* $0 < \gamma < l/2$, $p > 1$, $k \ge 4$, $\beta_k < \infty$. *Тогда*

$$\overline{g}_n(t) = g(t)\left[1 + \sum_{1 \le m \le (k-2)/2} n^{-m}\,P_{2m}(t)\right] + R,$$

где

$$|R| \le n^{-(k-1)/2}\,\Gamma_{k+1}(n)\,c(k)\,|g(t/2)|\,[(|t|\,\sigma^2)^{3k-5} + |t|\,\sigma^2\,] +$$

$$+ c(k, l, \gamma, p)(\beta_3\,\sigma^{-3}\,n^{1/2})^{k-1}\,N\,(t;\,k, l, \gamma, p), \tag{1.13}$$

$$N(t;\,k, l, \gamma, p) = \{(\Lambda_l^{1/2p}\,|t|^{l/2p} + 1)^{-1} + (\Gamma_{4,\,l}/n)^{l/4p} +$$

$$+ (\Lambda_l^{1/l}\,|t|\,\Gamma_{4,\,l}^{1/2}/n^{1/2})^{\gamma/p} + (3/5)^{n/4}\}\ [(|t|\,\sigma^2)^{3(k-1)} + (|t|\,\sigma^2)^{[k/2]}].$$

Покажем теперь, что $g(t)\,P_\nu(t)$ из (1.11) является преобразованием Фурье некоторого обобщенного распределения. С этой целью запишем одномерный полином $p_\nu(s;\,\xi)$ в виде (ср. (1.4))

$$p_\nu(s\,;\,\xi) = \mathrm{E}\,p_\nu(s;\,\xi_1, \ldots, \xi_\nu) \equiv \mathrm{E}\sum\nolimits^{\#} a_\nu(j_1, \ldots, j_m)\,s^M\,\xi_1^{j_1}\ldots\xi_m^{j_m}, \tag{1.14}$$

где знак $\sum^{\#}$ означает то же, что в (1.4). Отметим, что $p_\nu(s;\,\xi_1, \ldots, \xi_\nu)$ совпадает с полиномом от формальных переменных, рассмотренным, например, в [2, 5]. Заметим, что $(A_t X, \alpha)$ при фиксированных X и α есть преобразование Фурье некоторого обобщенного распределения, которое обозначим $B\,(X, \alpha, \cdot)$. Нетрудно видеть, что

$$B(X, \alpha, r) = \sum_{j=1}^{\infty} G_j(r)\,\alpha_j(X, e_j),$$

где $G_j(r) = \mathrm{P}((Y, e_j)^2 < r)$. В соответствии с (1.11), чтобы найти прообраз Фурье $g(t)\,P_\nu(t)$, нужно в (1.14) ξ_q заменить на $B(X_q, \alpha, \cdot)$, а операцию умножения — сверткой. Учитывая, что умножению характеристической функции на $-it$ соответствует дифференцирование функции распределения, получаем

$$Q_\nu(f; X) = \mathrm{E}_\alpha\, \mathrm{E}_{X_1, \ldots, X_\nu}\, p_\nu((-2D_r)^{1/2}; B(X_1, \alpha, r), \ldots, B(X_\nu, \alpha, r)) * G(r) \equiv$$

$$\equiv \mathrm{E}_\alpha\, \mathrm{E}_{X_1, \ldots, X_\nu} \sum{}^{\#} a_\nu(j_1, \ldots, j_m)\,(-2D_r)^{M/2} \left[G(r) * \mathop{*}_{q=1}^{m} (B(X_q, \alpha, r))^{*j_q} \right]; \qquad (1.15)$$

здесь $\sum^{\#}$ означает суммирование по $j_1, \ldots, j_m$ таким, что сумма $M = \sum_{q=1}^{m} j_q$ четная; $f(x) = \mathrm{I}_{\{|x|^2 < r\}}(x)$, $G(r) = \mathrm{P}(|Y|^2 < r)$. Обозначим

$$v_l = \sup\left\{ |v(x)| : \sum_{j=1}^{l} (x, e_j)^2 \ge \varepsilon_l \right\},$$

где $v(x) = \mathrm{E}\exp\{it(x, x)\}$, $\varepsilon_l = (\sigma_1^2\, \Gamma_{4,l})^{-1}$.

Теорема 1.2. *Пусть* $Q_\nu(r) = Q_\nu(f; X)$ *— функции из* (1.15), $\beta_k < \infty$ *для некоторого целого* $k \ge 4$. *Тогда для любого целого* l, $l > 6(k-1)$,

$$\Delta_{k,n} \equiv \sup_r \left| \mathrm{P}(|S_n|^2 < r) - G(r) - \sum_{1 \le m \le (k-2)/2} n^{-m} Q_{2m}(r) \right| \le$$

$$\le c(k, l)\, n^{-(k-1)/2} \{ \Gamma_{k+1}(n)\, \sigma^{6k-10}\, \Lambda_l^{-(3k-5)/l} +$$

$$+ \Gamma_{3,l}^{k-1} + n^{(k-1)/2}\, v_l^{n/4} \ln(n\,\Gamma_{4,l}^{-1} + 1) \} \equiv R_0 .$$

Следствие 1.1. *В условиях теоремы* 1.2 *имеет место неравенство*

$$\Delta_{k,n} \le c(k, l)\, n^{-(k-1)/2} \{ \Gamma_{k+1}(n) \sigma^{6(k-1)} \Lambda_l^{-3(k-1)/l} + n^{(k-1)/2} v_l^{n/4} \ln(n\,\Gamma_{4,l}^{-1} + 1) \} .$$

Доказательство теорем 1.1 и 1.2 вытекает непосредственно из теорем 2.2 и 2.3 (см. § 2, ниже). Действительно, так как разложение $\mathrm{E} f(S_n)$ (см. (1.1)) по степеням $n^{1/2}$ единственно, а остаточные члены в теоремах 2.2 и 2.3 имеют вид $o\left(n^{-(k-2)/2}\right)$, получаем, что при $\nu = 2m$ функция $P_\nu(t)$ из (2.3) совпадает с $P_\nu(t)$ из (1.11), а выражение (2.4) совпадает с (1.15).

1.9. Сравнивая полученное представление (1.15) с представлением Бенткуса (1.6′), отметим, что различие состоит в том, что в нашем алгоритме используется только одномерное дифференцирование (от которого, впрочем, можно избавиться с помощью формулы (2.5)) и свертки распределений вместо многомерного дифференцирования в (1.6′), а также дополнительное усреднение по α.

Оценка остаточного члена, приведенная в следствии 1.1, была анонсирована в [11], а несколько более грубая — в [10]. Сформулированные выше теоремы и следствие дают наиболее точную (среди известных нам результатов) зависимость остаточного члена от оператора T. Так, наименьшее число собственных значений T, участвующих в неравенствах теоремы 1.2 и следствия 1.1 равно $l_k = 6k-5$. Для сравнения укажем, что $l_k = 7k-6$ в оценке, анонсированной в [12].

Отметим, что разложение Эджворта в бесконечномерных пространствах изучалось также в работах [13—18]. За исключением [17], подход к представлению членов разложения в [13—18] такой же, как в [2, 3, 5]. Зависимость остаточного члена от ковариационного оператора не исследуется. В то же время, в [13—18] рассматриваются функционалы более общего вида, чем в данной статье, а также изучается случай неодинаково распределенных слагаемых.

Характеристика ν_l, которая фигурирует в теореме 1.2, была введена в [19] (см. также [20]). Оценка теоремы 1.2 нетривиальна только при условии $\nu_l < 1$, которое является обобщением условия Крамера в конечномерных пространствах: $\lim\limits_{r\to\infty} \sup\limits_{|x|\ge r} |\nu(x)| < 1$. Аналогичное условие ввел Бенткус [3, формула (1.1)]: существуют неотрицательный оператор $K: H \to H$ и число $r_0 > 0$ такие, что

$$\rho \equiv \sup\left\{ |\nu(x)| : (Kx, x) \ge r_0^2 \left(\mathrm{E}\, |X|^q;\ |X| \le \sqrt{n}\right)^{2/(q-2)} \right)\right\} < 1\,,$$

где $q > 2$ — некоторое фиксированное число. Заметим, что у Бенткуса в оценке остатка участвует не сама величина ρ, а другая связанная с ней характеристика.

К сожалению, нам не удалось оценить величину ν_l для ω^2-статистики Мизеса, что дало бы возможность применить к этой статистике теорему 1.2. Однако для этой статистики справедлива оценка (см. [21])

$$\left| \mathrm{E} \exp\{it\,\omega_n^2\} \right| < c(A)/(1+|t|^A)\,,$$

которая позволяет получить асимптотическое разложение.

Всюду ниже будем предполагать, что

$$n \ge 2(k-2)\,, \tag{1.16}$$

$$\beta_3(n)\,\sigma^{-3}\, n^{1/2} \le 1/4\,, \tag{1.17}$$

$$\beta_k(n)\,\sigma^{-3}\, n^{-(k-2)/2} \le 1\,. \tag{1.18}$$

§ 2. ПЕРЕХОД ОТ РАЗЛОЖЕНИЯ БЕРГСТРЕМА К РАЗЛОЖЕНИЮ ЭДЖВОРТА

2.1. При выводе разложения Эджворта мы будем опираться на асимптотические разложения типа Бергстрема, полученные в [8]. Для удобства чтения приведем эти разложения. Обозначим

$$\overline{Q}_{\nu,n}(r) = \binom{n}{\nu} \int\limits_{|x|^2<nr} \Phi^{*(n-\nu)} * (\overline{F} - \Phi)^{*\nu}\,(dx)\,, \qquad \overline{P}\,(\nu, n, t) = \int\limits_0^\infty e^{itr}\, d\,\overline{Q}_{\nu,\,n}(r)\,.$$

Теорема А [7, лемма 1.7]. *Пусть* k *и* l *— целые числа,* $0 < \gamma < l/2$, $p > 1$, $k \ge 3$. *Тогда*

$$\left| \bar{g}_n(t) - g(t) - \sum_{\nu=1}^{k-2} \bar{P}(\nu, n, t) \right| \le c(k, l, \gamma, p) \, (\beta_3 \sigma^{-3} n^{1/2})^{k-1} N(t; k, l, \gamma, p)$$

(обозначение $N(t; k, l, \gamma, p)$ см. в (1.13)).

Теорема В [7, Теорема]. *Пусть k и l — целые числа, $k \ge 3$, $l > 6(k-1)$, $\varepsilon > 0$. Тогда*

$$\bar{\Delta}_{k,n} = \sup_r \left| \mathbf{P}(|S_n|^2 < r) - G(r) - \sum_{\nu=1}^{k-2} \bar{Q}_{\nu,n}(r) \right| \le$$

$$\le c(k, l, \varepsilon) \left[\left(\frac{\Gamma_{3,l}^2}{n} \right)^{\frac{k-1}{2}} + \left(\frac{\Gamma_{4,l}}{n} \right)^{\frac{l}{12} - \varepsilon} + n \, \mathbf{P}(|X| > \sigma \sqrt{m_n}) + v_l^{n/4} \ln (n \Gamma_{4,l}^{-1} + 1) \right],$$

где $m_n = [n/4] + 1$.

2.2. Наша задача состоит в выводе разложения по степеням n^{-1} обобщенных распределений $\bar{Q}_{\nu,n}(r)$, $\nu = 1, \dots, k-2$. Оценка остаточного члена в асимптотических разложениях такого типа значительно облегчается за счет гладкости распределения $\bar{Q}_{\nu,n}(r)$.

Рассмотрим независимые обобщенные случайные величины $W_1, \dots, W_\nu$ с одним и тем же обобщенным распределением $F - \Phi$; для любой борелевской функции ψ определим математическое ожидание

$$\mathbf{E}\, \psi(W_1, \dots, W_\nu) = \underbrace{\int \dots \int}_{\nu} \psi(x_1, \dots, x_\nu) \prod_{q=1}^{\nu} (F - \Phi)(dx_q);$$

здесь и далее $\int \equiv \int_H$. Заменяя F на $\bar{F}$, получим обобщенные случайные величины $\overline{W_1}, \dots, \overline{W_\nu}$. Обозначив $\overline{V_\nu} = \sum_{q=1}^{\nu} \overline{W_q}$, можем записать

$$\bar{P}(\nu, n, t) = \binom{n}{\nu} \mathbf{E} \exp\left\{ it \left| ((n-\nu)/n)^{1/2} Y + n^{1/2} \overline{V_\nu} \right|^2 \right\}.$$

Пусть $1 \le \nu \le k-2$, $\bar{d}_\nu(\alpha) = (\bar{d}_{\nu,0}(\alpha); \bar{d}_{\nu,1}; \dots)$ — последовательность, элементы которой определяются следующим образом: $\bar{d}_{\nu,j}(\alpha) = \mathbf{E}\,(\overline{W_1}, \alpha)^j / j!$ при $j = 3, \dots, k+1-\nu$, $\bar{d}_{\nu,j}(\alpha) = 0$ при $j = 0, 1, 2$ и $j \ge k+2-\nu$. Обозначим через $(\bar{d}_\nu^{*\nu}(\alpha))_p$ p-й элемент ν-кратной свертки последовательности $\bar{d}_\nu(\alpha)$, т. е.

$$(\bar{d}_\nu^{*\nu}(\alpha))_p = \sum_{\{m_q\}_1^\nu} \prod_{q=1}^{\nu} \bar{d}_{\nu, m_q}(\alpha). \tag{2.1}$$

Заменяя $\overline{W_1}$ на W_1, получим $d_\nu(\alpha)$ и $(d_\nu^{*\nu}(\alpha))_p$.

Будем обозначать через $\bar{d}_\nu(A_\tau \alpha)$ последовательность, полученную из $\bar{d}_\nu(\alpha)$ заменой $(\bar{w}_1, \alpha)$ на $(A_\tau \bar{w}_1, \alpha)$. Аналогично определяется $d_\nu(A_\tau \alpha)$. Обозначим $\tau = (1 - \nu/n)t$. Центральную роль при переходе от разложения Бергстрема к разложению Эджворта играет

Лемма 2.1. *Для любых целых k, l $(k \geq 3,\ 1 \leq \nu \leq k-2)$*

$$\mathbf{E}\exp\left\{ it \left| ((n-\nu)/n)^{1/2} Y + n^{-1/2}\,\overline{V}_\nu \right|^2 \right\} =$$

$$= g(\tau) \sum_{j=0}^{k-2-\nu}{}' \mathbf{E}\left(\overline{d}_\nu^{*\nu} (A_\tau \alpha)\right)_{j+3\nu} (2it/n)^{(j+3\nu)/2} + R(\nu)\,,$$

где суммирование ведется по таким j, что $j+3\nu$ четно, и

$$|R(\nu)| \leq c(k,\nu)\, |g(\tau)|\, n^{-\nu} \left[n^{-(k-1)/2}\,\overline{\beta}_{k+1}/\sigma^{k+1} + \beta_2(n)/\sigma^2 \right] \left\{ (|t|\,\sigma^2)^{k-1+2\nu} + \right.$$

$$\left. + (|t|\,\sigma^2)^{k_\nu/2} \right\}, \quad k_\nu = \max\{2,\nu\}\,. \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. *В условиях теоремы* A *справедливо неравенство*

$$\left| \overline{g}_n(t) - g(t) - \sum_{\nu=1}^{k-2} \binom{n}{\nu} g(\tau) \sum_{j=0}^{k-2-\nu} (2it/n)^{(j+3\nu)/2}\, \mathbf{E}\left(\overline{d}_\nu^{*\nu} (A_\tau \alpha)\right)_{j+3\nu} \right| \leq$$

$$\leq c(k)\, |g(t/2)| \left\{ n^{-(k-1)/2}\,\overline{\beta}_{k+1}/\sigma^{k+1} + \beta_2(n)/\sigma^2 \right\} \left[(|t|\sigma^2)^{3k-5} + |t|\sigma^2 \right] +$$

$$+ c(k,l,\gamma,p)\,(\beta_3\,\sigma^{-3}\,n^{1/2})^{k+1}\, N(t;k,l,\gamma,p)\,.$$

Заметим, что в [2, теорема 1.7] получено разложение, близкое по форме к разложению, остаточный член которого оценивается в теореме 2.1. Эти разложения можно рассматривать как промежуточные между разложениями Бергстрема и Эджворта.

2.3. Обозначим

$$P_{2m}(t) = \sum_{(\nu,p,\mu)} (2it)^{m+\mu}\, \mathbf{E}\left[\|A_t T^{1/2} \alpha\|^{2(m-p)} \left(d_\nu^{*\nu} (A_t \alpha)\right)_{2\mu+2p} \right] c_0(\nu, m-p, \mu)\,, \tag{2.3}$$

где

$$\|A_t T^{1/2} \alpha\|^2 = \sum_1^\infty (1-2it\sigma_j^2)^{-1} \sigma_j^2 \alpha_j^2\,, \qquad c_0(\nu,q,\mu) = (-\nu/2)^q\, s(\nu,\mu)\,(q!\nu!)^{-1}\,.$$

Теорема 2.2. *Пусть $P_{2m}(t)$ — функции, определенные в* (2.3), *k и l — целые числа, $0 < \gamma < l/2$, $p > 1$, $k \geq 4$, $\beta_k < \infty$. Тогда*

$$\overline{g}_n(t) = g(t) \left[1 + \sum_{1 \leq m \leq (k-2)/2} n^{-m} P_{2m}(t) \right] + R\,,$$

где $|R|$ удовлетворяет неравенству (1.13).

Случай $k=3$, который не охватывается теоремой 2.2, рассмотрен в [19, лемма 2.5] (см. также [20]), где была получена оценка

$$|\overline{g}_n(t) - g(t)| \leq$$

$$\leq n^{-1}\left\{ c\,|g(t/2)|\left[(t\sigma^2)^2 + |t|\,\sigma^2 \right] \beta_4 \sigma^{-4} + c(l,\gamma,p)\,\beta_3^2\,\sigma^{-6} N(t;3,l,\gamma,p) \right\}.$$

2.4. Найдем теперь прообраз Фурье $Q_{2m}(r)$ для $g(t)\,P_{2m}(t)$. Достаточно найти прообраз Фурье выражения

$$K \equiv (it)^a \, \|A_t T^{1/2}\alpha\|^{2b} \prod_{q=1}^{\nu} (A_t W_q, \alpha)^{m_q}$$

при фиксированных α и W_q, $q = 1, \ldots, \nu$, где $a, b \in \mathbf{N}$. Нетрудно видеть, что $\|A_t T^{1/2} \alpha\|^2$ является преобразованием Фурье обобщенного распределения $B_1(\alpha, r) \equiv \sum_1^\infty G_j^{*\,2}(r)\, \sigma_j^2 \alpha_j^2$. Рассуждения, аналогичные проведенным перед формулой (1.15), показывают, что прообразом K является обобщенное распределение

$$(-D_r)^a \, (B_1(\alpha, r))^{*b} * \mathop{*}_{q=1}^{\nu} \left(B(W_q, \alpha, r)\right)^{*\, m_q}.$$

Отсюда

$$Q_{2m}(r) = \sum_{(\nu, p, \mu)}^{2m} \mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}_{W_1, \ldots, W_{2m}} (-2D_r)^{m+\mu} \times$$

$$\times \left[G(r) * (B_1(\alpha, r))^{*\,(m-p)} * \sum_{\{m_q\}_1^\nu}^{2\mu+2p} \left[\mathop{*}_{q=1}^{\nu} (B(W_q, \alpha, r))^{*\, m_q} \right] \prod_{q=1}^{\nu} \frac{1}{m_q!} \right] c_0(\nu, m-p, \mu). \tag{2.4}$$

Теорема 2.3. *Пусть $Q_{2m}(r)$ — функции, определяемые равенством* (2.4), *$\beta_k < \infty$ для некоторого целого $k \ge 4$. Тогда для любого целого l $(l > 6(k-1))$*

$$\Delta'_{k,n} \equiv \sup_r \left| \mathbf{P}\left(|S_n|^2 < r\right) - G(r) - \sum_{1 \le m \le (k-2)/2} n^{-m} Q_{2m}(r) \right| \le R_0$$

(обозначение R_0 см. в формулировке теоремы 1.2).

2.5. Замечание. В [19] (см. также [20]) показано, что

$$\Delta'_{3,n} = \sup_r \left| \mathbf{P}(|S_n|^2 < r) - G(r) \right| \le$$

$$\le c(l, \delta) \left[\Gamma_{3,l}^2/n + (\Gamma_{4,l}/n)^{l/(16+\delta)}\right] + c(l) \left[\Gamma_{4,l}/n + \nu_l^{n/4} \ln (n \Gamma_{4,l}^{-1} + 1)\right]$$

для любых вещественного $\delta > 0$ и целого $l \ge 13$. Там же получена оценка $\Delta'_{3,n}$, при выводе которой не используется условие $\nu_l < 1$. Именно, для любых вещественного $\delta > 0$ и целого $l \ge 7$

$$\Delta'_{3,n} \le c(l, \delta) \left[(\Gamma_{4,l}/n)^{l/(l+4+\delta)} + (\Gamma_{3,l}^2/n)^{l/13}\right], \quad 7 \le l \le 12,$$

$$\Delta'_{3,n} \le c(l, \delta) \left[(\Gamma_{4,l}/n)^{l/(l+4+\delta)} + \Gamma_{3,l}^2/n\right], \quad l \ge 13.$$

В [22, 23] получен следующий результат: если $\sigma = 1$, $Ta = 0$, $l \ge 13$ и $\delta > 0$, то

$$\left|\mathbf{P}(|S_n - a| < r) - \mathbf{P}(|Y - a| < r)\right| \le c(l, \delta) \left(1 + \big||a| - r\big|\right)^{-4} \times$$

$$\times \left[\Lambda_{13}^{-6/13} \beta_4 n^{-1} + \left(\Lambda_l^{-2/(l+2)} + \Lambda_5^{-2/5}\right) \left(\beta_3^2 \sigma_l^{-4} n^{-1}\right)^{l/(l+2+\delta)} \right].$$

Преимущество этой оценки перед нашей состоит в найденной зависимости от $1 + | \, |a| - r|$. Кроме того, здесь несколько точнее указана зависимость от n. Однако это улучшение сопровождается ухудшением зависимости от ковариационного оператора: нетрудно показать, что

$$\Lambda_l^{-2/(l+2)} \sigma_l^{-4l/(l+2+\delta)} \geq \Lambda_l^{-4l/(l+4+\delta)}$$

при $\sigma = 1$. Другие варианты коротких разложений приведены в [3, 6, 18].

2.6. Рассмотрим теперь случай $H = \mathbf{R}$. Сформулируем теорему о разложении характеристической функции $\mathrm{E}\exp\{itS_n\}$ в терминах псевдомоментов, которая доказана в [17, теорема 3]. Обозначим

$$K_j(t) = \sum_{\nu=1}^{j} \sum_{\nu \leq p \leq j}^{p \equiv j (\mathrm{mod}\, 2)} \sum_{\mu_{\nu,p} \leq \mu \leq \nu} (it)^{j+2\mu} \sigma^{j-p} (d_\nu^{*\nu})_{p+2\mu} c_0(\nu, (j-p)/2, \mu),$$

где $\sum\limits_{\nu \leq p \leq j}^{p \equiv j (\mathrm{mod}\, 2)}$ — сумма по всем таким целым p, что $j-p$ четно, $\nu \leq p \leq j$, $(d_\nu^{*\nu})_l$ — l-й элемент ν-кратной свертки последовательности $d_\nu = = (d_{\nu,0}; d_{\nu,1}; \ldots)$:

$$d_{\nu,j} = \mathrm{E}\, W_1^j / j! \ \text{ для } \ 0 \leq j \leq k+1-\nu,$$

$$d_{\nu,j} = 0 \ \text{ для } \ j \geq k+ \ +2-\nu.$$

Теорема С [17, теорема 3]. *Если $\beta_{k+1} < \infty$ для некоторого целого $k \geq 3$, то при $|t| \leq (2n)^{1/2} \sigma^2/\beta_3$*

$$\left| \mathrm{E}\exp\{itS_n\} - \exp\{-t^2\sigma^2/2\} \left[1 + \sum_{j=1}^{k-2} n^{-j/2} K_j(t)\right] \right| \leq$$

$$\leq c(k) \exp\{-t^2\sigma^2/8\}\, n^{-(k-1)/2} \beta_{k+1} \sigma^{-k-1} \left[(|t|\,\sigma)^{3(k-1)} + (|t|\,\sigma)^{k+1}\right].$$

Сравнение теоремы С и теоремы 2.2 с учетом (1.10) и (1.11) приводит к следующему алгоритму вычисления. Чтобы получить $g(t)\, P_{2m}(t)$ из $\exp\{-t^2\sigma^2/2\}\, K_{2m}(t)$, нужно произвести следующие замены:

$$\exp\{-t^2\sigma^2/2\} \quad \text{— на} \quad g(t),$$

$$it \quad \text{— на} \quad (2it)^{1/2},$$

$$\sigma^{2M} \prod_{q=1}^{\nu} \mathrm{E}\,(X^{j_q} - Y^{j_q}) \quad \text{— на} \quad \mathrm{E}\left[\|A_t T^{1/2} \alpha\|^{2M} \prod_{q=1}^{\nu} \mathrm{E}_{W_q}(A_t W_q, \alpha)^{j_q}\right].$$

Отметим, что в [17, с. 29] допущена ошибка: при доказательстве основной леммы (в настоящей работе — лемма 2.1) возникает оператор A_τ, а не A_t. Но это не отражается на цитируемой теореме 3 [17].

Продолжим рассмотрение случая $H = \mathbf{R}$. Предположим, что ξ имеет абсолютно непрерывное распределение. Обозначим через $f_n(x)$ и $\psi_n(x)$ плотности распределений случайных величин $n^{-1/2}\sum_1^n \xi_j$ и $(n^{-1/2}\sum_1^n \xi_j)^2$ соответственно. Сравним разложения $\psi_n(x)$ и $f_n(x)$ по степеням $n^{1/2}$. Оказывается, что при определении членов разложения $\psi_n(x)$ полиномы

Лагерра $L_{l,\lambda}(x) = x^{-\lambda} e^x D_x^l (x^{l+\lambda} e^{-x})$ с параметром $\lambda = -1/2$ играют ту же роль, что полиномы Чебышева — Эрмита в определении членов разложения $f_n(x)$. Действительно, пусть $q(x)$ —плотность распределения $(\sigma\eta)^2$. Тогда, учитывая [4, формула (1.14), с. 173], путем непосредственных вычислений получим, что коэффициент при n^{-m} в разложении $\psi_n(x)$ равен

$$q(x) \sum_{\{j\, k_j\}_1^{2m}} \left[\prod_{j=1}^{2m} \frac{1}{k_j!} \left(\frac{\kappa_{j+2}(\xi)}{\sigma^{j+2}\,(j+2)!} \right)^{k_j} \right] H_{2m+2\mu}(\sqrt{x}/\sigma), \quad x > 0, \ \mu = \sum_{j=1}^{2m} k_j .$$

Ввиду тождества $H_{2l}(\sqrt{y}) = (-2)^l L_{l,-1/2}(y/2)$ мы приходим к асимптотическому разложению плотности $\psi_n(x)$ в терминах полиномов Лагерра. Покажем, что коэффициенты (1.15) также могут быть описаны в терминах полиномов Лагерра. Обозначим

$$f_k(x, \sigma) = 2^{-k/2} \sigma^{-k} (\Gamma(k/2))^{-1} x^{k/2-1} \exp\{-x(2\sigma^2)^{-1}\}, \quad x>0,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — функция Эйлера. Соотношение

$$D_x^p f_{2l+1}(x, \sigma) = D_y^p \left[y^{l-1/2} e^{-y}\right]\Big|_{y=x/2\sigma^2} (2\sigma^2)^{-p-1} (\Gamma(l+1/2))^{-1} =$$

$$= \left[L_{p,\lambda}(y)\, y^\lambda e^{-y}\right]\Big|_{y=x/2\sigma^2} (2\sigma^2)^{-p-1} (\Gamma(l+1/2))^{-1} \equiv g(x; \sigma, p, l), \qquad (2.5)$$

где $p \le l$, $\lambda = l-p-1/2$, позволяет избавиться от операции дифференцирования в (1.15). Действительно, производная D_r^l выражения

$$\mathop{*}_{q=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{\infty} G_k(r)\, (X_q, e_k)\, \alpha_k \right]^{*j_q}$$

является смесью плотностей вида

$$\mathop{*}_{k=1}^{\infty} (G'_k(r))^{*\mu_k} * (G_k(r))^{*\lambda_k},$$

где $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = l$, $\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k + \lambda_k) = M$, которые, в свою очередь, совпадают с

$$\mathop{*}_{k=1}^{\infty} f_{\lambda_k}(r, \sigma_k)\, g(r; \sigma_k, \mu_k, (\mu_k - 1)/2)) .$$

Поэтому применение формулы (2.5) приводит к замене в (1.15) выражения

$$D_r^{M/2} \left[G(r) * \mathop{*}_{k=1}^{\infty} (B(X_q, \alpha, r))^{*j_q} \right]$$

на свертку функций вида $g(r; \sigma_k, p, l)$.

§ 3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 3.1. *Для любых целых* $l \ge 0$, $\nu \ge 2$ *и последовательности чисел* $a = (a_0, a_1, \ldots, a_l, 0, 0, \ldots)$ *справедливо равенство*

$$\left(\sum_{j=0}^{l} a_j s^j\right)^{\nu} = \sum_{j=0}^{l-1} (a^{*\nu})_j s^j + R_l(\nu), \tag{3.1}$$

где $(a^{*\nu})_j$ — j*-й элемент* ν*-кратной свертки последовательности* a, $R_l(\nu) = \sum_{j=l}^{\nu l} (a^{*\nu})_j s^j$, *причем для* $R_l(\nu)$ *выполнены соотношения*

$$R_l(\nu) = \sum_{m=0}^{l-1} (a^{*(\nu-1)})_m s^m R_{l-m} + R_0 R_l(\nu-1) =$$

$$= \sum_{m=0}^{l-1} s^m R_{l-m} \sum_{j=1}^{\nu-1} (a^{*j})_m R_0^{\nu-1-j} + R_l R_0^{\nu-1}, \tag{3.2}$$

где $R_q \equiv R_q(1) = \sum_{i=q}^{l} a_j s^j$, $q = 0, 1, \ldots, l$.

Доказательство. Имеем

$$\left(\sum_{j=0}^{l} a_j s^j\right)^{\nu} = \sum_{j=0}^{\nu l} (a^{*\nu})_j s^j = R_l(\nu) + \sum_{j=0}^{l-1} (a^{*\nu})_j s^j. \tag{3.3}$$

Согласно определению свертки $(a^{*\nu})_j = \sum_{m=0}^{j} (a^{*(\nu-1)})_m a_{j-m}$. Отсюда $R_l(\nu) = \sum_{j=l}^{\nu l} s^j \sum_{m=0}^{j} (a^{*(\nu-1)})_m a_{j-m}$. Меняя порядок суммирования, приходим к равенству

$$R_l(\nu) = R_1 + R_2, \tag{3.4}$$

где $R_1 = \sum_{m=0}^{l-1} (a^{*(\nu-1)})_m \sum_{j=l}^{\nu l} s^j a_{j-m}$, $\quad R_2 = \sum_{m=l}^{\nu l} (a^{*(\nu-1)})_m \sum_{j=m}^{\nu l} s^j a_{j-m}$. Делая замену $k = j-m$, находим

$$R_1 = \sum_{m=0}^{l-1} (a^{*(\nu-1)})_m s^m \sum_{k=l-m}^{\nu l-m} s^k a_k, \qquad R_2 = \sum_{m=l}^{\nu l} (a^{*(\nu-1)})_m s^m \sum_{k=0}^{\nu l-m} s^k a^k .$$

Так как $a_k = 0$ при $k > l$ и $(a^{*(\nu-1)})_m = 0$ при $m > (\nu-1)l$, получаем

$$R_1 = \sum_{m=0}^{l-1} (a^{*(\nu-1)})_m s^m \sum_{k=l-m}^{l} s^k a_k, \qquad R_2 = \sum_{m=l}^{(\nu-1)l} (a^{*(\nu-1)})_m s^m R_0. \tag{3.5}$$

Из (3.3)—(3.5) следует (3.1) и первое равенство в (3.2).

Далее рассуждаем по индукции. При $\nu = 2$ второе равенство в (3.2) очевидно. Применяя уже доказанное равенство

$$R_l(\nu-1) = R_l(\nu-2)\, R_0 + \sum_{m=0}^{l-1} (a^{*(\nu-2)})_m\, s^m\, R_{l-m}$$

и индуктивное предположение

$$R_l(\nu-1) = \sum_{m=0}^{l-1} s^m\, R_{l-m} \sum_{j=1}^{\nu-2} (a^{*j})_m\, R_0^{\nu-2-j} + R_l\, R_0^{\nu-2}\,,$$

получаем второе равенство в (3.2):

$$R_l(\nu) = R_l(\nu-1)\, R_0 + \sum_{m=0}^{l-1} (a^{*(\nu-1)})_m\, s^m\, R_{l-m} =$$

$$= R_0 \left[\sum_{m=0}^{l-1} s^m R_{l-m} \sum_{j=1}^{\nu-2} (a^{*j})_m\, R_0^{\nu-2-j} + R_l\, R_0^{\nu-2} \right] + \sum_{m=0}^{l-1} (a^{*(\nu-1)})_m\, s^m\, R_{l-m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{l-1} s^m\, R_{l-m} \sum_{j=1}^{\nu-1} (a^{*j})_m\, R_0^{\nu-1-j} + R_l\, R_0^{\nu-1}\,.$$

Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. *Пусть Z — гауссовская случайная величина со значениями в H, $\mathbf{E}\, Z=0$, $b_1^2,\ b_2^2, \ldots$ — собственные числа ее ковариационного оператора, $f_1,\ f_2, \ldots$ — соответствующие собственные векторы, составляющие ортонормированный базис. Тогда для каждого $x \in H$*

$$\mathbf{E} \exp\{it\,|Z+x|^2\} = \prod_{j=1}^{\infty} (1-2it\,b_j^2)^{-1/2} \exp\{it\,(1-2it\,b_j^2)^{-1}\,(x, f_j)^2\}\,.$$

Доказательство. Утверждение вытекает из равенства

$$\mathbf{E} \exp\{it\,(\eta\, b_j + x_j)^2\} = (1-2it\,b_j^2)^{-1/2} \exp\{it\,x_j^2\,(1-2it\,b_j^2)^{-1}\}\,,$$

где x_j, b_j — любые числа (см. также [24, с. 82; 20, (2.10)]). Определим меру

$$Q(\nu, dy) = (\overline{F} - F)\,(dy) \equiv$$

$$\equiv [\mathbf{P}\,(|X| > L) - \mathbf{I}_{\{|y| > L\}}(y)]\, F(dy)/\mathbf{P}\,(|X| \le L) \quad \text{при } \nu = 1, 2\,;$$

$$Q(\nu, dy) = (\overline{F} - \Phi)\,(dy) \quad \text{при } \nu \ge 3.$$

Лемма 3.3. *Пусть x и z — некоторые фиксированные элементы из $H_{\mathbf{C}}$, а $\psi(y)$, $y \in H$, обозначает любую из следующих функций:*

$$(A_t\, y, x), \qquad \|A_t\, y\|^2, \qquad (A_t\, y, x)^2, \qquad (A_t\, y, x)\,(A_t\, y, z)\,.$$

Тогда

$$\int \psi(y)\, (\overline{F} - \Phi)\,(dy) = \int \psi(y)\, Q(1, dy)\,,$$

причем

$$\int (\overline{F} - \Phi)\,(dy) = 0\,.$$

Доказательство. Утверждение следует из равенства $\mathrm{E}\,X = \mathrm{E}\,Y$ и совпадения ковариационных операторов X и Y (см. также [20, (2.13)]).

Замечание. Лемма 3.3 останется справедливой, если $A_t y$ заменить на $y \in H$.

Лемма 3.4. *Пусть* $\mu \ge 1$, $\nu \in \mathbf{N}$. *Справедливы неравенства*

$$\beta_{\mu,\nu} \equiv \int |y|^{\mu}\, |Q(\nu, dy)| \le c(\mu) \begin{cases} \beta_\mu(n), & \nu \le 2, \\ \overline{\beta_\mu}, & \nu \ge 3,\ \mu \ge 2. \end{cases}$$

Доказательство. Из определения $Q(\nu, dy)$ следует, что

$$\beta_{\mu,\nu} \le \begin{cases} \beta_\mu(n) + \overline{\beta_\mu}\, \mathbf{P}\,(|X| < L)/\mathbf{P}\,(|X| \ge L), & \nu \le 2, \\ \overline{\beta_\mu} + \sigma^{\mu}, & \nu \ge 3. \end{cases}$$

Заметим, что вследствие (1.16) и (1.17) верно неравенство $\mathbf{P}\,(|X| > L) \le \le 1/2$. Применяя неравенство Чебышева и условие (1.17), получаем

$$\sigma^2 = \overline{\beta_2} + \beta_2(n) \le \overline{\beta_2} + 2\,\beta_3(n)/\sigma\sqrt{n} \le \overline{\beta_2} + \sigma^2/2\,.$$

Отсюда вытекает, что $\sigma^2 \le 2\overline{\beta_2}$. С другой стороны, в силу неравенства Гёльдера $\overline{\beta}_2^{\,\mu/2} \le \overline{\beta_\mu}$ при $\mu \ge 2$. Следовательно, $\sigma^{\mu} \le c(\mu)\,\overline{\beta_\mu}$, $\mu \ge 2$. Далее, при $\mu \ge 2$

$$\beta_\mu\, \mathbf{P}\,(|X| > L) \le c(\mu)\,\sigma^{\mu}\,(\sqrt{n})^{\mu-2}\, \mathbf{P}\,(|X| > L) \le c_1(\mu)\,\beta_\mu(n)/n\,.$$

Лемма 3.4 доказана при $\mu \ge 2$. В случае $1 \le \mu < 2$ доказательство упрощается. Нужно лишь заметить, что при $\mu < 2$ имеем $\overline{\beta_\mu} < \sigma^{\mu}$ и $\overline{\beta_\mu}\mathbf{P}\,(|X| > L) \le \le 2\beta_\mu(n)/n^{\mu/2}$.

Лемма 3.5. *Положим* $\sum_{q=1}^{\nu} \mu_q = M$.

1. *Если* $1 \le \mu_q \le 2$ *при* $1 \le q \le p \le \nu$, $\mu_q \ge 3$ *при* $p+1 \le q \le \nu$, *то*

$$\left[\prod_{q=1}^{p} \beta_{\mu_q}(n)\right] \prod_{q=p+1}^{\nu} \overline{\beta_{\mu_q}} \le c(\{\mu_q\})\,\beta_2(n)\,\sigma^{M-2}\, n^{(M-2\nu)/2}\,. \tag{3.6}$$

2. *Если* $M = j+3\nu$, $\mu_q \ge 3$, $q = 1, \ldots, \nu$, *то*

$$\prod_{q=1}^{\nu} \overline{\beta}_{\mu_q} \le c(\{\mu_q\})\,\overline{\beta}_{j+\nu+2}\,\sigma^{2\nu-2}\,. \tag{3.7}$$

3. *Если* $M = j+3\nu \le k-2+2\nu$, $\mu_q \ge 3$, $q = 1, \ldots, \nu$, *то*

$$\beta_{\mu_1}(n) \prod_{q=2}^{\nu} \beta_{\mu_q} \le c(\{\mu_q\})\,\beta_{j+3}(n)\,\sigma^{3\nu-3}\,(\sqrt{n})^{\nu-1} \le$$

$$\le c(k,\{\mu_q\})\,\beta_k(n)\,\sigma^{j+3\nu-k}\,(\sqrt{n})^{-k+2+j+\nu}\,. \tag{3.8}$$

Доказательство. 1. Применяя неравенство Чебышева, получим

$$\prod_{q=1}^{p} \beta_{\mu_q}(n) \le c(\{\mu_q\})\,\beta_2(n))^{p}\,(\sigma\sqrt{n})^{\,m_p-2p}\,,$$

где $m_p = \sum_{q=1}^{p} \mu_q$. Отсюда

$$\prod_{q=1}^{p} \beta_{\mu_q}(n) \le c(\{\mu_q\})\, \beta_2(n)\, \sigma^{m_p-2} (\sqrt{n})^{m_p-2p} . \tag{3.9}$$

Далее, из неравенства $\overline{\beta}_{\mu_q} \le c(\{\mu_q\})\, \sigma^{\mu_q}(\sqrt{n})^{\mu_q-2}$ следует, что

$$\prod_{q=p+1}^{\nu} \overline{\beta}_{\mu_q} \le c(\{\mu_q\})\, \sigma^{M-m_p} (\sqrt{n})^{M-m_p-2(\nu-p)} . \tag{3.10}$$

Из (3.9) и (3.10) вытекает оценка (3.6).

2. Применяя неравенство Ляпунова (см. например, [4, с. 30]), получаем, что для любого $N \ge \mu_q$

$$\overline{\beta}_{\mu_q} \le (\overline{\beta}_N^{\mu_q-2}\, \overline{\beta}_2^{N-\mu_q})^{1/(N-2)} . \tag{3.11}$$

Полагая в (3.11) $N = j+\nu+2$, приходим к оценке

$$\prod_{q=1}^{\nu} \overline{\beta}_{\mu_q} \le \overline{\beta}_{j+\nu+2}\, \overline{\beta}_2^{\nu-1} .$$

Поскольку $\overline{\beta_2} \le \sigma^2$, неравенство (3.7) доказано.

3. Заметим, что неравенство (3.11) остается верным после замены «урезанных» абсолютных моментов на обычные абсолютные моменты. Полагая $N = j+\nu-\mu_1+4$, приходим к оценке

$$\prod_{q=2}^{\nu} \beta_{\mu_q} \le \beta_N\, \sigma^{2\nu-4} . \tag{3.12}$$

Далее, $\beta_N = \overline{\beta_N} + \beta_N(n)$. С одной стороны, $\overline{\beta_N} \le c(n)\, \sigma^N (\sqrt{n})^{N-2}$. С другой стороны, применяя оценку типа Чебышева и условие (1.18), получаем

$$\beta_N(n)/\sigma^N(\sqrt{n})^{N-2} \le c(k)\, \beta_k(n)/\sigma^k (\sqrt{n})^{k-2} \le c(k) ,$$

поскольку $N \le k-1$. Следовательно,

$$\beta_N \le c(k)\, \sigma^N (\sqrt{n})^{N-2} . \tag{3.13}$$

Так как $\mu_1 \le j+3$, имеем

$$\beta_{\mu_1}(n) \le c(\mu_1)\, \beta_{j+3}(n)\, (\sigma\sqrt{n})^{\mu_1-j-3} . \tag{3.14}$$

Оценки (3.11)—(3.14) влекут первое неравенство в (3.8). Чтобы получить второе, достаточно применить неравенство Чебышева.

Лемма 3.6. *Пусть* $y_q \in H_{\mathbf{C}}$, $q = 1, \dots, \nu$, $\sum_{q=1}^{\nu} m_q = M$. *Тогда*

$$E_0 \doteq \mathbf{E} \prod_{q=1}^{\nu} (y_q, \alpha)^{m_q} = \mathbf{E}\, \eta^M (S_M(\{m_q\}))^{-1} \sum_{\{m_{pq}\}}^{\{m_q\}} S_{M/2}(\{m_{pq}\}) \prod_{p,q=1}^{\nu} (y_p, y_q)^{m_{pq}} .$$

Доказательство. Обозначим $\xi_q = (y_q, \alpha)$. Легко видеть, что E_0 является коэффициентом при $S_M(\{m_q\})\prod_{q=1}^{\nu}\lambda_q^{m_q}$ в $E_1 = \mathrm{E}\,(\sum_{q=1}^{\nu}\lambda_q\,\xi_q)^M$. Имеем

$$E_1 = \mathrm{E}\left(\sum_{q=1}^{\nu}\lambda_q\,y_q,\,\alpha\right)^M = \mathrm{E}\,\eta^M \left\|\sum_{q=1}^{\nu}\lambda_q\,y_q\right\|^M .$$

Поэтому далее можно считать, что M четно. Так как

$$\left\|\sum_{q=1}^{\nu}\lambda_q\,y_q\right\|^M = \sum_{\{m_{pq}\}}^{M/2} S_{M/2}\,(\{m_{pq}\})\prod_{p,q=1}^{\nu}(\lambda_p\,y_p,\lambda_q\,y_q)^{m_{pq}},$$

лемма 3.6 доказана.

Лемма 3.7. *Пусть* $s\in\mathrm{C}$, $y_q\in H_{\mathrm{C}}$, $0\le\lambda_q\le 1$, $q=1,\dots,\nu$, $\sum_{q=1}^{\nu}m_q = M$. *Тогда*

$$A(\{m_q\}) \equiv \mathrm{E}\exp\left\{s\sum_{q=1}^{\nu}\lambda_q(y_q,\alpha)\right\}\prod_{q=1}^{\nu}(y_q,\alpha)^{m_q} =$$

$$= C(m,\{m_q\},\{t_{pq}\},\{s_{pq}\})\exp\left\{\frac{s^2}{2}\left\|\sum_{q=1}^{\nu}\lambda_q\,y_q\right\|^2\right\}\sum{}' s^{M-m}\prod_{q=1}^{\nu}\left[\lambda_q^{s_{0q}}\prod_{p=1}^{\nu}(y_p,y_q)^{t_{pq}+s_{pq}}\right],$$

где $C(m,\{m_q\},\{t_{pq}\},\{s_{pq}\}) = \binom{M}{m}\,\mathrm{E}\,\eta^m\,S_{m/2}(\{t_{pq}\})\,S_{M-m}(\{s_{pq}\})$, $\sum'$ *означает суммирование по всем таким целым* m, *матрицам* $\{t_{pq}\}$ *и* $\{s_{pq}\}$ *размеров* $\nu\times\nu$, *что*

$$0\le m\le M,\qquad \sum_{p,q=1}^{\nu}t_{pq} = m/2,\qquad \sum_{p,q=1}^{\nu}s_{pq} = M-m,$$

$$\sum_{p=1}^{\nu}(t_{pq}+t_{qp}+s_{qp}) = m_q\qquad (q=1,\dots,\nu),$$

причем $s_{0q}\equiv\sum_{p=1}^{\nu}s_{pq} = 0$, *если* $\lambda_q = 0$, $0^0\equiv 1$.

Доказательство см. в [8, лемма 1.4], а также в [17, лемма 1.8].

Лемма 3.8. *Пусть* $\{\mu_{pq}\}$ — *матрица размеров* $\nu\times\nu$,

$$\mu_q = \sum_{p=1}^{\nu}(\mu_{pq}+\mu_{qp}),\qquad 0\le\lambda_q\le 1,\quad q=1,\dots,\nu,\qquad s=(2it/n)^{1/2},\qquad b>0.$$

1. *Если* $\mu_q\ge 3$, $q=1,\dots,\nu$, *то*

$$A(\{\mu_{pq}\}) \equiv \left|\mathrm{E}\exp\left\{\frac{s^2}{2}\left\|\sum_{q=1}^{\nu}\lambda_q\,A_b\overline{W}_q\right\|^2\right\}\prod_{p,q=1}^{\nu}(A_b\overline{W}_p,A_b\overline{W}_q)^{\mu_{pq}}\right| \le c(\{\mu_q\})\prod_{q=1}^{\nu}\overline{\beta}_{\mu_q}. \tag{3.15}$$

2. *Пусть* $1 \le \nu_1 \le \nu$. *Если* $\lambda_q = 0$ *и* $\mu_q = 1$ *или* $\mu_q = 2$ *при* $1 \le q \le \nu_1$, $\mu_q \ge 3$ *при* $\nu_1+1 \le q \le \nu$, *то*

$$A(\{\mu_{pq}\}) \le c(\{\mu_q\}) \left[\prod_{q=1}^{\nu_1} \beta_{\mu_q}(n) \right] \prod_{q=\nu_1+1}^{\nu} \overline{\beta}_{\mu_q} . \tag{3.16}$$

Доказательство. 1. Очевидно, что при любых $y_1, \ldots, y_\nu$ из H

$$\left| \exp\left\{ \frac{s^2}{2} \left\| \sum_{q=1}^{\nu} \lambda_q A_b y_q \right\|^2 \right\} \right| \le 1 . \tag{3.17}$$

Отсюда

$$A(\{\mu_{pq}\}) \le \underbrace{\int \ldots \int}_{\nu} \left| \prod_{p,q=1}^{\nu} (A_b y_p, A_b y_q)^{\mu_{pq}} \right| \prod_{q=1}^{\nu} |(\overline{F} - \Phi)(dy_q)| \le$$

$$\le \prod_{q=1}^{\nu} \int |y_q|^{\mu_q} |(\overline{F} - \Phi)(dy_q)| .$$

Применяя лемму 3.4, приходим к неравенству (3.15).

2. Из леммы 3.3 получаем, что

$$A(\{\mu_{pq}\}) = \left| \underbrace{\int \ldots \int}_{\nu} \exp\left\{ \frac{s^2}{2} \left\| \sum_{q=\nu_1+1}^{\nu} \lambda_q A_b y_q \right\|^2 \right\} \left[\prod_{p,q=1}^{\nu} (A_b y_p, A_b y_q)^{\mu_{pq}} \right] \prod_{q=1}^{\nu} Q(\mu_q, dy_q) \right| .$$

Воспользовавшись (3.17) и внося модуль под знак интеграла, приходим к оценке

$$A(\{\mu_{pq}\}) \le \prod_{q=1}^{\nu} \int |y_q|^{\mu_q} |Q(\mu_q, dy_q)| . \tag{3.18}$$

Из (3.18) и леммы 3.4 следует неравенство (3.16).

Лемма 3.9. *Пусть* $0 \le \lambda_q \le 1$, $m_q \ge 0$ *целое*, $\xi_q = (A_b \overline{W_q}, \alpha)$, $q = 1, \ldots, \nu$, $M = \sum_{q=1}^{\nu} m_q$ *и* $s = (2it/n)^{1/2}$.

1. *Пусть* $1 \le \nu_1 \le \nu$. *Если* $\lambda_q = 0$ *и* $m_q = 1$ *или* $m_q = 2$ *при* $1 \le q \le \nu_1 \le \nu$, $m_q \ge 3$ *при* $\nu_1 + 1 \le q \le \nu$, *то*

$$A(\{m_q\}) \equiv \left| \mathrm{E}\, \mathrm{E}_\alpha \prod_{q=1}^{\nu} (s\xi_q)^{m_q} \exp\{s \lambda_q \xi_q\} \right| \le$$

$$\le c(\{m_q\})\, n^{-\nu} \beta_2(n)\, \sigma^{-2} \left\{ (|t|\, \sigma^2)^M + (|t|\, \sigma^2)^{M/2} \right\} . \tag{3.19}$$

2. *Если* $m_q \ge 3$, $q = 1, \ldots, \nu$, $M = k-1+2\nu$, *то*

$$A(\{m_q\}) \le c(\{m_q\}) \left(n^{-M} \overline{\beta}_{k+1} / \sigma^{k+1} \right) \left\{ (|t|\, \sigma^2)^M + (|t|\, \sigma^2)^{M/2} \right\} . \tag{3.20}$$

Доказательство. 1. В силу леммы 3.7

$$\mathbf{E}\,\mathbf{E}_\alpha \prod_{q=1}^{\nu} (s\xi_q)^{m_q} \exp\{s\lambda_q \xi_q\} = \sum{}' c(m, \{m_q\}, \{t_{pq}\}, \{s_{pq}\}) \left(\prod_{q=1}^{\nu} \lambda_q^{s_{0q}}\right) s^{2M-m} \times$$

$$\times\, \mathbf{E} \exp\left\{ \frac{s^2}{2} \left\| \sum_{q=1}^{\nu} \lambda_q A_b \overline{W_q} \right\|^2 \right\} \prod_{p,q=1}^{\nu} (A_b \overline{W_p}, A_b \overline{W_q})^{\mu_{pq}}, \qquad (3.21)$$

где $\mu_{pq}= s_{pq}+ t_{pq}$. Заметим, что $\sum_{p,q=1}^{\nu} \mu_{pq} = M-m/2$. Применяя теперь (3.16) и учитывая условия $\mu_q = m_q + s_{0q}$; $s_{0q} = 0$, если $\lambda_q = 0$ (см. лемму 3.7), мы приходим к оценке

$$A(\{m_q\}) \le \sum{}' c(m, \{m_q\}, \{t_{pq}\}, \{s_{pq}\})\, (|t|/n)^{M-m/2} \left(\prod_{q=1}^{\nu_1} \beta_{\mu_q}(n)\right) \prod_{q=\nu_1+1}^{\nu} \overline{\beta}_{\mu_q}, \qquad (3.22)$$

где $\mu_q = \sum_{p=1}^{\nu}(\mu_{pq} + \mu_{qp})$. Из (3.22) и (3.6) следует, что

$$A(\{m_q\}) \le \sum{}' c(m,\{m_q\},\{t_{pq}\},\{s_{pq}\})\, (|t|/n)^{M-m/2} \beta_2(n)\, \sigma^{2M-m-2} n^{(2M-m-2\nu)/2}. \qquad (3.23)$$

Учитывая неравенство $M/2 \le M-m/2 \le M$, получим, что

$$(|t|\,\sigma^2)^{M-m/2} \le (|t|\,\sigma^2)^M + (|t|\,\sigma^2)^{M/2} \qquad (3.24)$$

Поэтому из (3.23) вытекает неравенство (3.19).

2. В силу (3.21) и (3.15)

$$A(\{m_q\}) \le \sum{}' c(\{m_q\}, \{t_{pq}\}, \{s_{pq}\})\, (|t|/n)^{M-m/2} \prod_{q=1}^{\nu} \overline{\beta}_{m_q},$$

где $M = k-1+2\nu$. Применяя теперь неравенство (3.7) с $j = k-1-\nu$, приходим к (3.20).

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

4.1. Доказательство леммы 2.1. В силу леммы 3.2 и формулы (1.7)

$$\mathbf{E} \exp\{it \left|((n-\nu)/n)^{1/2} Y + n^{-1/2}\, \overline{V_\nu}\right|^2\} =$$

$$= g(\tau)\, \mathbf{E} \exp\left\{ \frac{it}{n} \|A_\tau \overline{V}_\nu\|^2 \right\} = g(\tau)\, \mathbf{E}\, \mathbf{E}_\alpha \exp\left\{ s\sum_{q=1}^{\nu} \xi_q \right\}, \qquad (4.1)$$

где $s = (2it/n)^{1/2}$, $\xi_q = (A_\tau \overline{W}_q, \alpha)$. Поменяем порядок интегрирования. Обозначим $f(s, \alpha) = \mathbf{E}_{\overline{W}_1} \exp\{s\,\xi_1\}$. Тогда

$$\mathbf{E}_{\overline{W}_1, \dots, \overline{W}_\nu} \exp\left\{ s\sum_{q=1}^{\nu} \xi_q \right\} = f^{\nu}(s, \alpha). \qquad (4.2)$$

По формуле Тейлора $f(s,\alpha)=\sum_{j=0}^{l}\hat{d}_j(A_\tau\alpha)\,s^j$, где

$$\hat{d}_j\,(A_\tau\alpha)=\mathrm{E}_{\overline{W}_1}\xi_1^j/j!,\qquad j=0,1,\dots,l-1\,,$$

$$\hat{d}_l\,(A_\tau\alpha)=\int\limits_0^1\frac{(1-\lambda)^{l-1}}{(l-1)\,!}\,\mathrm{E}_{\overline{W}_1}\exp\{s\lambda\,\xi_1\}\,\xi_1^l\,d\lambda\,;$$

число l будет определено ниже. Отсюда

$$f^\nu(s,\alpha)=\psi^\nu(s,\alpha)+r_1(\alpha)\,, \tag{4.3}$$

где

$$\psi(s,\alpha)=\sum_{j=3}^{l}\hat{d}_j\,(A_\tau\alpha)\,s^j\,,$$

$$r_1(\alpha)=\sum_{\mu=1}^{\nu}\binom{\mu}{\nu}\,[\hat{d}_1\,(A_\tau\alpha)\,s+\hat{d}_2\,(A_\tau\alpha)\,s^2\,]^\mu\left(\sum_{j=3}^{l}\hat{d}_j(A_\tau\alpha)\,s^j\right)^{\nu-\mu}.$$

Легко видеть, что $\psi(s,\alpha)=s^3\sum\limits_{j=0}^{l-3}a_j\,s^j$ с $a_j=\hat{d}_{j+3}(A_\tau\alpha)$. Рассмотрим случай $\nu\ge 2$. В силу леммы 3.1

$$\psi^\nu(s,\alpha)=s^{3\nu}\left(\sum_{j=0}^{l-4}a_j^{*\nu}\,s^j+R_{l-3}(\nu,\alpha)\right), \tag{4.4}$$

где

$$R_{l-3}(\nu,\alpha)=\sum_{i=0}^{l-4}s^i\,R_{l-3-i}\sum_{j=1}^{\nu-1}(a^{*j})_i\,R_0^{\nu-1-j}+R_{l-3}\,R_0^{\nu-1}\,,$$

$$R_q=\sum_{j=q}^{l-3}a_j\,s^j=\left(\sum_{j=q+3}^{l}\hat{d}_j\,(A_\tau\alpha)\,s^j\right)\frac{1}{s^3}=$$

$$=s^q\int\limits_0^1\frac{(1-\lambda)^{q+2}}{(q+2)\,!}\,\mathrm{E}_{\overline{W}_1}\exp\{s\lambda\,\xi_1\}\,\xi_1^{q+3}\,d\lambda\,,\ q=0,1,\dots,l-3\,. \tag{4.5}$$

Оценим величину $s^{3\nu+i}\,\mathrm{E}\,R_{l-3-i}\,(a^{*j})_i\,R_0^{\nu-1-j}$, $i=0,1,\dots,l-3$, $j=1,\dots,\nu-1$. Для этого достаточно оценить

$$B_{i,j}\equiv s^{\,l+3(\nu-1)}\,\mathrm{E}\,\mathrm{E}_{\overline{W}}\,\xi_1^{l-i}\exp\{s\lambda_1\,\xi_1\}\left(\prod_{q=2}^{j+1}\mathrm{E}_{\overline{W}_q}\,\xi_q^{t_q+3}\right)\prod_{q=j+2}^{\nu}\mathrm{E}_{\overline{W}_q}\exp\{s\lambda_q\,\xi_q\}\,\xi_q^3\,,$$

где $0\le\lambda_q\le 1$, $t_q\ge 0$ целые, $q=1,\dots,\nu$, $\sum\limits_{q=2}^{j+1}t_q=i$. Меняя порядок интегрирования, имеем

$$B_{i,j} = s^{l+3(\nu-1)}\,\mathrm{E}\,\mathrm{E}_\alpha \prod_{q=1}^{\nu} \xi_q^{m_q} \exp\{s\,\lambda_q\,\xi_q\}\,,$$

где $m_1 = l-i$, $m_q = t_q+3$ при $q = 2,\dots,j+1$, $m_q = 3$ при $q \ge j+2$, $\lambda_q = 0$ при $q = 2,\dots,j+1$. Положим $l+3(\nu-1) = k-1+2\nu$. Отсюда имеем $l = k+2-\nu$, $\sum_{q=1}^{\nu} m_q = k-1+2\nu$ и $t_q+3 \le l-1 \le k+2-\nu$ для любого $q = 2,\dots,j+1$. Применяя неравенство (3.20), получим, что $|B_{i,j}|$ оценивается сверху величиной

$$c(k,\nu)\,n^{-(k-1+2\nu)/2}\,\overline{\beta}_{k+1}\,\sigma^{-k-1}\left\{(|t|\,\sigma^2)^{k-1+2\nu} + (|t|\,\sigma^2)^{(k-1+2\nu)/2}\right\}. \quad (4.6)$$

Аналогично доказывается, что $|s^{3\nu}\,\mathrm{E}\,R_{l-3}\,R_0^{\nu-1}|$ также оценивается сверху величиной (4.6), если $l = k+2-\nu$. Следовательно, при $l = k+2-\nu$

$$|s^{3\nu}\,\mathrm{E}\,R_{l-3}(\nu,\alpha)| \le$$

$$\le c(k,\nu)\,n^{-(k-1+2\nu)/2}\,\frac{\overline{\beta}_{k+1}}{\sigma^{k+1}}\left\{(|t|\,\sigma^2)^{k-1+2\nu} + (|t|\,\sigma^2)^{(k-1+2\nu)/2}\right\}. \quad (4.7)$$

Оценим $\mathrm{E}\,r_1(\alpha)$. В силу (4.5) достаточно оценить

$$E_0 \equiv \mathrm{E}\,(\hat{d}_1\,(A_\tau\,\alpha)s)^{n_1}\,(\hat{d}_2\,(A_\tau\,\alpha)\,s^2)^{n_2}\left(s^3\,\mathrm{E}_{\overline{W}_1}\,\xi_1^3 \exp\{s\,\lambda\,\xi_1\}\right)^{\nu-\mu},$$

где $n_1 + n_2 = \mu$, $1 \le \mu \le \nu$. Меняя порядок интегрирования и применяя неравенство (3.19) с $m_q = 1$ при $q = 1,\dots,n_1$, $m_q = 2$ при $q = n_1+1,\dots,\mu$, $m_q = 3$ при $q = \mu+1,\dots,\nu$, получим

$$|E_0| \le c(M)\,n^{-\nu}\,\beta_2(n)\,\sigma^{-2}\left\{(|t|\,\sigma^2)^M + (|t|\,\sigma^2)^{M/2}\right\},$$

где $M = \sum_{q=1}^{\nu} m_q$. Так как $\nu \le M \le 3\nu-1$, мы приходим к оценке

$$|\,\mathrm{E}\,r_1(\alpha)\,| \le c(\nu)\,n^{-\nu}\,\beta_2(n)\,\sigma^{-2}\left\{(|t|\,\sigma^2)^{3\nu-1} + (|t|\,\sigma^2)^{\nu/2}\right\}. \quad (4.8)$$

Из (4.1)—(4.4), (4.7) и (4.8) вытекает, что

$$\mathrm{E}\exp\left\{it\left|((n-\nu)/n)^{1/2}Y + n^{-1/2}\,\overline{V}_\nu\right|^2\right\} = g(\tau)\sum_{j=0}^{k-2-\nu}\mathrm{E}\,(a^{*\nu})_j\,s^{j+3\nu} + R(\nu)\,, \quad (4.9)$$

где $|R(\nu)|$ удовлетворяет неравенству (2.2). Далее,

$$(a^{*\nu})_j = \sum_{\{m_q\}_1^{\nu}}^{j}\;\prod_{q=1}^{\nu}\hat{d}_{m_q+3}\,(A_\tau\,\alpha)\,. \quad (4.10)$$

Поскольку $m_q+3 \le j+3 \le k+1-\nu$, в (4.10) $\hat{d}_{m_q+3}\,(A_\tau\,\alpha)$ можно заменить на $\overline{d}_{\nu,m_q+3}\,(A_\tau\,\alpha)$. Так как $\overline{d}_{\nu,\mu}\,(A_\tau\,\alpha) = 0$ при $\mu = 0, 1, 2$ и $\mu \ge k+2-\nu$, получаем

$$\sum_{\{m_q\}_1^{\nu}}^{j}\;\prod_{q=1}^{\nu}\overline{d}_{\nu,m_q+3}\,(A_\tau\alpha) = \sum_{\{m_q\}_1^{\nu}}^{j+3\nu}\;\prod_{q=1}^{\nu}\overline{d}_{\nu,m_q}\,(A_\tau\,\alpha) = \left(\overline{d}_\nu^{*\nu}\,(A_\tau\,\alpha)\right)_{j+3\nu}. \quad (4.11)$$

Утверждение леммы при $\nu \ge 2$ следует из соотношений (4.9)—(4.11).

В равенстве (4.3) положим $\nu = 1$, $l = k+1$. Необходимо оценить $\mathrm{E}\, \hat{d}_{k+1}(A_\tau \alpha)\, s^{k+1}$ и $\mathrm{E}\, r_1(\alpha)$. Обращаясь к неравенству (3.20), придем к оценке

$$|\mathrm{E}\, \hat{d}_{k+1}(A_\tau \alpha)\, s^{k+1}| \le c(k)\, n^{-(k+1)/2} \frac{\overline{\beta}_{k+1}}{\sigma^{k+1}} \left\{ (|t|\, \sigma^2)^{k+1} + (|t|\, \sigma^2)^{(k+1)/2} \right\}. \tag{4.12}$$

Легко видеть, что

$$\mathrm{E}\, \hat{d}_1(A_\tau \alpha) = 0\,, \tag{4.13}$$

$$|\mathrm{E}\, \hat{d}_2(A_\tau \alpha)\, s^2| \le \frac{|t|}{n} |\mathrm{E}\, \mathrm{E}_\alpha (A_\tau \overline{W}_1, \alpha)^2| \le \frac{|t|}{n} \int |y|^2 |Q(2, dy)| \le c|t| \beta_2(n)/n\,. \tag{4.14}$$

Из (4.1)—(4.3), (4.12)—(4.14) вытекает утверждение леммы 2.1 при $\nu = 1$.

Замечание. В силу леммы 3.6 $\mathrm{E}\,(\overline{d}_\nu^{*\nu}(A_\tau \alpha))_p = 0$ для нечетных p. Поэтому в разложении из леммы 2.1 можно считать, что $j+3\nu$ — четные числа.

4.2. Доказательство теоремы 2.2. Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 4.1. *Справедлива оценка*

$$\left|\mathrm{E}\,(\overline{d}_\nu^{*\nu}(A_\tau \alpha))_{j+3\nu}\right| \le c(j+3\nu)\, \overline{\beta}_{j+\nu+2}\, \sigma^{2\nu-2}\,.$$

Доказательство. По определению последовательности $\overline{d}_\nu(A_\tau \alpha)$

$$(\overline{d}_\nu^{*\nu}(A_\tau \alpha))_{j+3\nu} = \sum_{\{m_q \ge 3\}_1^\nu}^{j+3\nu} \prod_{q=1}^{\nu} \mathrm{E}_{\overline{W}_g} (A_\tau \overline{W_q}, \alpha)^{m_q}/m_q!\,. \tag{4.15}$$

Рассмотрим величину $B = \mathrm{E} \prod_{q=1}^{\nu} \mathrm{E}_{\overline{W_q}} (A_\tau \overline{W_q}, \alpha)^{m_q}$. Меняя порядок интегрирования и используя лемму 3.6, мы приходим к равенству

$$B = \sum_{\{m_{pq}\}}^{\{m_q\}} c(\{m_{pq}\})\, \mathrm{E} \prod_{p,q=1}^{\nu} (A_\tau \overline{W_p}, A_\tau \overline{W_q})^{m_{pq}}\,. \tag{4.16}$$

Применяя теперь неравенство (3.15), получим оценку

$$|B| \le c(\{m_q\}) \prod_{q=1}^{\nu} \overline{\beta}_{m_q}\,. \tag{4.17}$$

Из (4.15)—(4.17) и (3.7) вытекает утверждение предложения 4.1.

Предложение 4.2. *Пусть* $2 \le p \le N$. *Если* $\overline{\beta_2} \ge \sigma^2/2$, *то*

$$\overline{\beta_p} \le c(N-p)\, \overline{\beta_N}\, \sigma^{p-N}\,.$$

Доказательство. В силу неравенства Ляпунова имеем $\overline{\beta_p} \le (\overline{\beta}_N^{p-2}\, \overline{\beta}_2^{N-p})^{1/(N-2)}$. Применяя неравенство Гёльдера, получаем оценку

$(\overline{\beta_2}/\overline{\beta_N})^{(N-p)/(N-2)} \le \overline{\beta}_2^{(p-N)/2}$. Из этих неравенств и представления $p-2 = N-2-(N-p)$ вытекает, что $\overline{\beta_p} \le \overline{\beta_N}\,\overline{\beta_2}^{(p-N)/2}$. Воспользовавшись теперь условием $\overline{\beta_2} \ge \sigma^2/2$, придем к утверждению предложения 4.2.

Предложение 4.3. *Пусть* $\nu = 1,\dots,k-2$, $k \ge 3$. *Тогда*

$$\overline{P}\,(\nu, n, t) = \binom{n}{\nu}\,\mathrm{E}\exp\Big\{\,it\,\Big|((n-\nu)/n)^{1/2}Y + n^{-1/2}\,\overline{V_\nu}\Big|^2\Big\} =$$

$$= g(\tau)\sum_{\nu/2\le p\le(k-2)/2} n^{-p} \sum_{\mu_{\nu,2p}\le\mu\le\nu} (2it)^{\mu+p}\,\mathrm{E}\,(\overline{d}_\nu^{*\nu}(A_\tau\alpha))_{2\mu+2p}\,\frac{s(\nu,\mu)}{\nu\,!} + R_1(\nu)\,,$$

где

$$|R_1(\nu)| \le c(k,\nu)\,|g(\tau)|\,\big[n^{-(k-1)/2}\,\overline{\beta_{k+1}}/\sigma^{k+1} + \beta_2(n)/\sigma^2\big] \times$$

$$\times\Big\{(|t|\,\sigma^2)^{k-1+2\nu} + (|t|\,\sigma^2)^{k_\nu/2}\Big\} = R(t,\nu,k,n)\,, \quad k_\nu = \max\{2,\nu\}\,.$$

Доказательство. Из представления $\binom{n}{\nu} = \sum_{\mu=1}^{\nu} s(\nu,\mu)\,n^\mu/\nu!$, неравенства $\binom{n}{\nu} \le n^\nu/\nu!$ и леммы 2.1 следует, что

$$\overline{P}(\nu, n, t) = g(\tau)\sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{s(\nu,\mu)}{\nu!}\sum_{j=0}^{k-2-\nu}\mathrm{E}\,(\overline{d}_\nu^{*\nu}(A_\tau\alpha))_{j+3\nu}\,(2it/n)^{(j+3\nu)/2}\,n^{\mu} + R_0(\nu)\,, \tag{4.18}$$

причем $|R_0(\nu)| \le R(t,\nu,k,n)$. В силу предложения 4.1

$$B(\mu,\nu,n,j) \equiv \Big|\mathrm{E}\,(\overline{d}_\nu^{*\nu}(A_\tau\alpha))_{j+3\nu}\,(2it/n)^{(j+3\nu)/2}\,n^{\mu}\Big| \le$$

$$\le c(j,\nu)\,\overline{\beta}_{j+\nu+2}\,\sigma^{2\nu-2}\,|t|^{(j+3\nu)/2}\,n^{(2\mu-j-3\nu)/2}\,.$$

Отсюда

$$B(\mu,\nu,n,j) \le c(j,\nu)\,\overline{\beta}_{j+\nu+2}\,\sigma^{2\nu-2}\,|t|^{(j+3\nu)/2}\,n^{-(k-1)/2}\,, \tag{4.19}$$

если

$$2\mu - j - 3\nu \le -k + 1\,. \tag{4.20}$$

Из условия (1.17) следует, что $\overline{\beta_2} \ge \sigma^2/2$. Поэтому соотношения (4.19), (4.20) и предложение 4.2 приводят к неравенству

$$B(\mu,\nu,n,j) \le c(n)\,\overline{\beta_N}\,\sigma^{j+3\nu-N}\,|t|^{(j+3\nu)/2}\,n^{-(k-1)/2}\,, \tag{4.21}$$

справедливому при любом $N \ge j+\nu+2$. Далее, при условии (4.20) выполнено неравенство $k+1 \le j+3\nu$. С другой стороны, $j+3\nu \le k-2+2\nu$. Отсюда

$$(|t|\,\sigma^2)^{(j+3\nu)/2} \le \max\Big\{(|t|\,\sigma^2)^{(k-2+2\nu)/2}, (|t|\,\sigma^2)^{(k+1)/2}\Big\} \le$$

$$\le \max\Big\{(|t|\,\sigma^2)^{k-1+2\nu}, (|t|\,\sigma^2)^{k_\nu/2}\Big\}\,.$$

Последнее неравенство очевидно и приведено лишь для сравнения с оценкой остатка леммы 2.1. Таким образом, из разложения (4.18) и оценки (4.21) при $N = k+1$ вытекает, что

$$\overline{P}(\nu, n, t) =$$

$$= g(\tau) \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{j=0}^{k-2-3\nu+2\mu} n^{-j+3\nu-2\mu/2} (2it)^{j+3\nu/2} \mathrm{E} \left(\overline{d}_\nu^{*\nu} (A_\tau \alpha)\right)_{j+3\nu} \frac{s(\nu, \mu)}{\nu!} + R_1(\nu), \tag{4.22}$$

где $|R_1(\nu)| \le R(t, \nu, k, n)$.

Сделаем в (4.22) замену переменной $j+3\nu-2\mu = 2p$. Тогда

$$\sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{j=0}^{k-2-3\nu+2\mu} \dots = \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{3\nu/2-\mu \le p \le (k-2)/2} \dots .$$

Меняя порядок суммирования, придем к утверждению предложения 4.3.

Предложение 4.4. *В условиях предложения 4.3 справедливо разложение*

$$\sum_{\nu=1}^{k-2} \overline{P}(\nu, n, t) = g(\tau) \sum_{1 \le p \le (k-2)/2} n^{-p} \sum_{\nu=1}^{2p} \sum_{\mu_{\nu,2p} \le \mu \le \nu} (2it)^{\mu+p} \mathrm{E} \left(\overline{d}_\nu^{*\nu}(A_\tau \alpha)\right)_{2\mu+2p} \frac{s(\nu, \mu)}{\nu!} + R, \tag{4.23}$$

где $|R| \le c(k) \, |g(t/2)| \, [(|t| \, \sigma^2)^{3k-5} + |t| \, \sigma^2] \, \{\overline{\beta}_{k+1}/\sigma^{k+1} n^{(k-1)/2} + \beta_2(n)/\sigma^2\} = R(t, k, n)$.

Доказательство. В силу предложения 4.3

$$\sum_{\nu=1}^{k-2} \overline{P}(\nu, n, t) =$$

$$= g(\tau) \sum_{\nu=1}^{k-2} \sum_{\nu/2 \le p \le (k-2)/2} n^{-p} \sum_{\mu_{\nu,2p} \le \mu \le \nu} (2it)^{\mu+p} \mathrm{E} \left(\overline{d}_\nu^{*\nu} (A_\tau \alpha)\right)_{2\mu+2p} \frac{s(\nu, \mu)}{\nu!} + R,$$

где $|R| \le (k-2) \max\limits_{1 \le \nu \le k-2} R(t, \nu, k, n)$. Так как при условии (1.16)

$$\sum_{\nu=1}^{k-2} \sum_{\nu/2 \le p \le (k-2)/2} \dots = \sum_{1 \le p \le (k-2)/2} \sum_{\nu=1}^{2p} \dots ,$$

$$\max_{1 \le \nu \le k-2} |g(\tau)| \, \{(|t| \, \sigma^2)^{k-1+2\nu} + (|t| \sigma^2)^{k_\nu/2}\} \le 2 \, |g(t/2)| \, [(|t| \, \sigma^2)^{3k-5} + |t| \sigma^2],$$

предложение 4.4 доказано.

Предложение 4.5. *Для любых* $x_1, \dots, x_\nu \in H_{\mathrm{C}}$ *и* $N, m_1, \dots, m_\nu \in \mathrm{N}$

$$\mathrm{E} \exp \{(2it)^{1/2} (Y, \alpha)\} \, (T\alpha, \alpha)^N \prod_{q=1}^{\nu} (x_q, \alpha)^{m_q} =$$

$$= \mathrm{E} \exp \{it (T\alpha, \alpha)\} \, (T\alpha, \alpha)^N \prod_{q=1}^{\nu} (x_q, \alpha)^{m_q} = g(t) \, \mathrm{E} \, \|A_t T^{1/2} \alpha\|^{2N} \prod_{q=1}^{\nu} (A_t x_q, \alpha)^{m_q} . \tag{4.24}$$

Доказательство. Первое равенство в (4.24) вытекает из формулы $\mathbf{E}_Y \exp\{(2it)^{1/2}(Y,\alpha)\} = \exp\{it(T\alpha,\alpha)\}$. Для доказательства второго достаточно применить представление

$$\mathbf{E}\exp\{it(T\alpha,\alpha)\}\,(T\alpha,\alpha)^N \prod_{q=1}^{\nu}(x_q,\alpha)^{m_q} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^{k/2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}}_{k}\left(\sum_{j=1}^{k}\sigma_j^2 u_j^2\right)^N\left[\prod_{q=1}^{\nu}\left(\sum_{j=1}^{k}(x_q,e_j)\,u_j\right)^{m_q}\right]\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{k}\exp\{it\sigma_j^2 u_j^2 - u_j^2/2\}\,du_j\,,$$

а затем использовать замену $y_j(1-2it\sigma_j^2)^{1/2} = u_j$ точно так же, как это было сделано при выводе (1.9). Предложение 4.5 доказано.

Предложение 4.6. *Пусть $Q_1,\dots,Q_\nu$ — заряды, определенные на σ-алгебре борелевских множеств пространства H. Для любых неотрицательных $\lambda_1,\dots,\lambda_\nu$ и $N\in\mathbf{N}$*

$$\left|\underbrace{\int\dots\int}_{\nu}\mathbf{E}\;\|A_t T^{1/2}\alpha\|^{2N}\prod_{q=1}^{\nu}(A_t y_q,\alpha)^{\lambda_q}Q_q(dy_q)\right| \le$$

$$\le c(N,\nu,\{\lambda_q\})\,\sigma^{2N}\prod_{q=1}^{\nu}\int|y_q|^{\lambda_q}\,|Q_q(dy_q)|\,.$$

Доказательство. В силу неравенства Шварца

$$\left|\mathbf{E}\;\|A_t T^{1/2}\alpha\|^{2N}\prod_{q=1}^{\nu}(A_t y_q,\alpha)^{\lambda_q}\right| \le \mathbf{E}^{1/2}\|A_t T^{1/2}\alpha\|^{4N}\,\mathbf{E}^{1/2}\prod_{q=1}^{\nu}|(A_t y_q,\alpha)|^{2\lambda_q}.$$

Как нетрудно проверить,

$$\mathbf{E}\;\|A_t T^{1/2}\alpha\|^{4N} \le c(N)\,\sigma^{4N}\,,\qquad \mathbf{E}\;|(A_t y,\alpha)|^{\lambda} \le c(\lambda)\;|y|^{\lambda}$$

для любых $\lambda > 0$ и $y\in H$. С другой стороны, по обобщенному неравенству Гёльдера

$$\mathbf{E}\prod_{q=1}^{\nu}|(A_t y_q,\alpha)|^{2\lambda_q} \le \left(\prod_{q=1}^{\nu}\mathbf{E}\;|(A_t y_q,\alpha)|^{2\nu\lambda_q}\right)^{1/\nu}.$$

Поэтому

$$\underbrace{\int\dots\int}_{\nu}\mathbf{E}^{1/2}\prod_{q=1}^{\nu}|(A_t y_q,\alpha)|^{2\lambda_q}\,|Q_q(dy_q)| \le c(\nu,\{\lambda_q\})\prod_{q=1}^{\nu}\int|y_q|^{\lambda_q}\,|Q_q(dy_q)|\,.$$

Предложение 4.6 доказано.

Предложение 4.7. *В условиях предложения 4.3 справедливо разложение*

$$\sum_{\nu=1}^{k-2}\overline{P}(\nu, n, t) = \sum_{1\le m\le (k-2)/2} n^{-m} g(t)\,\overline{P}_{2m}(t) + R_2 ,$$

где $|R_2| \le R(t, k, n)$ (см. предложение 4.4), *а* $\overline{P}_{2m}(t)$ *определены так же, как функции* $P_{2m}(t)$ *в* (2.3), *с одним отличием*: $(d_\nu^{*\nu}(A_t\alpha))_{2l}$ *заменены на* $(\overline{d}_\nu^{*\nu}(A_t\alpha))_{2l}$.

Доказательство. Меняя порядок интегрирования и используя (4.24), находим, что

$$g(\tau)\,\mathbf{E}\,(\overline{d}_\nu^{*\nu}(A_\tau\alpha))_{2l} = \mathbf{E}\exp\{i\tau\,(T\alpha, \alpha)\}\,(\overline{d}_\nu^{*\nu}(\alpha))_{2l}.$$

Подставляя это выражение в правую часть равенства (4.23) и раскладывая $\exp\{-i\nu t\,(T\alpha, \alpha)/n\}$ по формуле Тейлора, получаем

$$\sum_{\nu=1}^{k-2}\overline{P}(\nu, n, t) = \sum_{1\le p\le (k-2)/2}\;\sum_{\nu=1}^{2p}\;\sum_{\mu_{\nu,2p}\le\mu\le\nu}\;\sum_{j=0}^{N}\frac{n^{-j-p}}{j!}(2it)^{j+\mu+p}\left(-\frac{\nu}{2}\right)^{j}\frac{s(\nu,\mu)}{\nu!}\times$$

$$\times\,\mathbf{E}\exp\{it\,(T\alpha, \alpha)\}\,(T\alpha, \alpha)^{j}(\overline{d}_\nu^{*\nu}(\alpha))_{2\mu+2p} + R_1 + R, \qquad (4.25)$$

где $N = [k/2]-p-1$,

$$R_1 = \sum_{1\le p\le (k-2)/2}\;\sum_{\nu=1}^{2p}\;\sum_{\mu_{\nu,2p}\le\mu\le\nu} n^{-p}(2it)^{\mu+p}\frac{s(\nu,\mu)}{\nu!}\left(-\frac{i\nu t}{n}\right)^{N+1}\times$$

$$\times\int_0^1\frac{(1-\lambda)^N}{N!}\,\mathbf{E}\exp\{i\,s(T\alpha, \alpha)\}\,(T\alpha, \alpha)^{N+1}\,(\overline{d}_\nu^{*\nu}(\alpha))_{2\mu+2p}\,d\lambda,$$

где $s = t\,(1-\lambda\nu/n)$. В силу предложения 4.5

$$\mathbf{E}\exp\{is\,(T\alpha, \alpha)\}\,(T\alpha, \alpha)^{N+1}\,(\overline{d}_\nu^{*\nu}(\alpha))_{2\mu+2p} = g(s)\,B,$$

где $B = \mathbf{E}\,\|A_s T^{1/2}\alpha\|^{2(N+1)}\,(\overline{d}_\nu^{*\nu}(A_s\alpha))_{2\mu+2p}$. Пользуясь предложением 4.6 и леммой 3.4, а также неравенством (3.7), получаем, что

$$|B| \le c(N+1, 2\mu+2p)\,\overline{\beta}_{2(\mu+p-\nu+1)}\,\sigma^{2\nu+2N}.$$

Отсюда, учитывая неравенства $2\,(\mu+p-\nu+1) \le k < k+1$ и применяя предложение 4.4, имеем

$$|B| \le c(N+1, 2\mu+2p, \nu, k)\,\overline{\beta}_{k+1}\,\sigma^{2(\mu+p+N)+1-k}.$$

С другой стороны, в силу (1.16) $|g(s)| \le |g(\tau)| \le |g(t/2)|$. В результате мы получаем оценку

$$|R_1| \le c(k)\,\overline{\beta}_{k+1}\,\sigma^{-k-1}\,n^{-[k/2]}\left\{(|t|\,\sigma^2)^{k-2+[k/2]} + (|t|\,\sigma^2)^{1+[k/2]}\right\}.$$

Следовательно, $|R_1 + R| \le R(t, k, n)$. Делая в (4.25) подстановку $j+p = m$, используя предложение 4.5 и меняя порядок суммирования, получаем утверждение предложения 4.7.

Предложение 4.8. *Пусть* $P_\nu(t)$ — *функции, определенные в* (2.3), $\beta_k < \infty$ *для некоторого целого* $k \ge 4$. *Тогда справедливо разложение*

$$\sum_{\nu=1}^{k-2} \overline{P}\,(\nu, n, t) = \sum_{1\le m\le (k-2)/2} n^{-m}\, g(t)\, P_{2m}(t) + R_3\,,$$

где

$$|R_3| \le c(k)\, |g(t/2)|\, n^{-(k-1)/2}\, \Gamma_{k+1}(n)\, [(|t|\, \sigma^2)^{3k-5} + |t|\, \sigma^2]\,. \qquad (4.26)$$

Доказательство. Оценим $n^{-m}\, |g(t)\, [\,\overline{P}_{2m}(t) - P_{2m}(t)\,]|$. Заметим, что в силу предложения 4.5 мы можем заменить в (4.25)

$$\mathrm{E}\, \exp\{it\,(T\alpha, \alpha)\}\, (T\alpha, \alpha)^j\, (\overline{d_\nu^{*\nu}}(\alpha))_{2\mu+2p}$$

на

$$g(t)\, \mathrm{E}\, \|A_t\, T^{1/2}\, \alpha\|^{2j}\, (\overline{d_\nu^{*\nu}}\,(A_t\,\alpha))_{2\mu+2p}\,.$$

Сравнивая теперь (4.25) и сумму $g(t) \sum_{1\le m\le (k-2)/2} n^{-m}\, P_{2m}(t)$, в которой вместо $P_{2m}(t)$ подставлены их явные выражения (2.3), мы видим, что достаточно оценить величину

$$B(\{m_q\}) \equiv \mathrm{E}\, \|A_t\, T^{1/2}\, \alpha\|^{2j} \left[\prod_{q=1}^{\nu} \mathrm{E}_{\overline{W}_q}\, (A_t\, \overline{W}_q, \alpha)^{m_q} - \prod_{q=1}^{\nu} \mathrm{E}_{W_q}\, (A_t\, W_q, \alpha)^{m_q}\right],$$

где $3 < m_q \le k$, $\sum_{q=1}^{\nu} m_q = 2\mu+2p$. Пользуясь тождеством

$$\prod_{q=1}^{\nu} (\overline{F} - \Phi)\,(dy_q) - \prod_{q=1}^{\nu} (F - \Phi)\,(dy_q) =$$

$$= \sum_{q=1}^{\nu} (\overline{F} - F) \prod_{l=1}^{q-1} (F - \Phi)\,(dy_l) \prod_{l=1}^{\nu} (\overline{F} - \Phi)\,(dy_l)\,,$$

запишем $B(\{m_q\})$ в виде

$$B(\{m_q\} = \underbrace{\int \ldots \int}_{\leftarrow\nu\rightarrow} \mathrm{E}\left[\|A_t\, T^{1/2}\, \alpha\|^{2j} \prod_{q=1}^{\nu} (A_t\, y_q, \alpha)^{m_q}\right] \times$$

$$\times \sum_{q=1}^{\nu} (\overline{F} - F)\,(dy_q) \left[\prod_{l=1}^{q-1} (F - \Phi)(dy_j)\right] \prod_{l=q+1}^{\nu} (\overline{F} - \Phi)\,(dy_l)\,.$$

Оценим, например,

$$B_\nu \equiv \underbrace{\int \ldots \int}_{\leftarrow\nu\rightarrow} \mathrm{E}\left[\|A_t\, T^{1/2}\, \alpha\|^{2j} \prod_{q=1}^{\nu} (A_t\, y_q, \alpha)^{m_q}\right] (\overline{F} - F)(dy_\nu) \prod_{q=1}^{\nu-1} (\overline{F} - \Phi)\,(dy_q)\,.$$

В силу предложения 4.6

$$|B_\nu| \le c(j, \nu, \{m_q\})\, \sigma^{2j} \int |y_\nu|^{m_\nu}\, |(\overline{F} - F)\,(dy_\nu)| \prod_{q=1}^{\nu-1} \int |y_q|^{m_q}\, (F + \Phi)\,(dy_q)\,.$$

Так как $(\overline{F} - F)(dy) \equiv Q(1, dy)$, по лемме 3.4

$$\int |y|^{m_\nu} \, |(\overline{F} - F)(dy)| \le c(m_\nu)\, \beta_{m_\nu}(n) .$$

Поэтому, используя неравенства $\sigma^{m_q} \le \beta_{m_q}$, $2\mu+2p \le k-2+2\nu$ и (3.8), получаем оценку

$$|B_\nu| \le c(j, \nu, \{m_q\})\, \beta_k(n)\, \sigma^{2\mu+2(p+j)-k}\, n^{\mu+p-\nu-(k-2)/2} ,$$

которая, справедлива также при замене $|B_\nu|$ на $|B(\{m_q\})|$. Отсюда при $p+j = m$ следует, что

$$n^{-m} \, |g(t) \, [\, \overline{P}_{2m}(t) - P_{2m}(t) \,]| \le$$

$$\le c(m, k)\, |g(t)|\, n^{-(k-2)/2} \beta_k(n)\, \sigma^{-k} \, [(|t|\, \sigma^2)^{3(k-2)/2} + (|t|\, \sigma^2)^2] \, . \quad (4.27)$$

Неравенство (4.24) вытекает из (4.27) и предложения 4.7.

4.3. Доказательство теоремы 2.2. Утверждение теоремы следует из предложения 4.8 и теоремы A.

4.4. Доказательство теоремы 2.3. Очевидно,

$$\Delta'_{k,n} \le \overline{\Delta}_{k,n} + \widehat{\Delta}_{k,n} , \quad (4.28)$$

где $\widehat{\Delta}_{k,n} = \sup\limits_r \left| \sum\limits_{\nu=1}^{k-2} \overline{Q}_{\nu,\,n}(r) - \sum\limits_{1 \le m \le (k-2)/2} n^{-m}\, Q_{2m}(r) \right|$. Напомним, что функции $\overline{Q}_{\nu,\,n}$ определены в начале §2, а $Q_{2m}(r)$ — в равенстве (2.4). В силу формулы обращения и предложения 4.8

$$\widehat{\Delta}_{k,n} \le c(k)\, \Gamma_{k+1}(n)\, n^{-(k-1)/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{g(t/2)}{t} \right| \{(|t|\, \sigma^2)^{3k-5} + |t|\, \sigma^2\}\, dt . \quad (4.29)$$

Нетрудно показать, что при $l > 2\mu$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^{\mu-1}\, |g(t)|\, dt \le c(\mu, l)\, \Lambda_l^{-\mu/l} .$$

Отсюда следует, что при $l > 6k-10$

$$\widehat{\Delta}_{k,n} \le c(k, l)\, \Gamma_{k+1}(n)\, n^{-(k-1)/2}\, \Lambda_l^{-(3k-5)/l}\, \sigma^{2(3k-5)} . \quad (4.30)$$

Теперь применим теорему B. Положим $\varepsilon \le 1/12$. Так как $l \ge 6(k-1)+1$, то $l/12 - \varepsilon \ge (k-1)/2$. Нетрудно видеть, что

$$\beta_4^{(k-1)/2} \le c(k)\, [\overline{\beta}_4^{(k-1)/2} + (\beta_4(n))^{(k-1)/2}] \quad (4.31)$$

при $k \ge 4$. Вследствие (3.11)

$$\overline{\beta}_4^{(k-1)/2} \le \overline{\beta}_{k+1}\, \sigma^{k-3} . \quad (4.32)$$

При оценке $(\beta_4(n))^{(k-1)/2}$ мы будем опираться на неравенство

$$\beta_\mu(n) \le ((\beta_N(n))^{\mu-2}\, (\beta_2(n))^{N-\mu})^{1/(N-2)}, \quad \mu \le N , \quad (4.33)$$

которое выводится точно так же, как (3.11). Полагая в (4.33) $\mu=4$, $N=k$, имеем

$$\beta_4(n) \le \left((\beta_k(n))^2 \beta_2(n)^{k-4}\right)^{1/(k-2)} .$$

Отсюда

$$(\beta_4(n))^{(k-1)/2} \le (\beta_k(n))^{1+1/(k-2)} \sigma^{(k-4)(k-1)/(k-2)} .$$

В силу (1.18)

$$(\beta_k(n))^{1/(k-2)} \le \sigma^{k/(k-2)} \sqrt{n} . \tag{4.34}$$

Следовательно,

$$\beta_4^{(k-1)/2}(n) \le \beta_k(n)\, \sigma^{k-2} \sqrt{n} . \tag{4.35}$$

Комбинируя оценки (4.31)—(4.35), имеем $\beta_4^{(k-1)/2} \le c(k)\, \Gamma_{k+1}(n)\, \sigma^{2(k-1)}$. Из неравенства

$$(\Gamma_{4,l}/n)^{(k-1)/2} \le c(k)\, \Gamma_{k+1}(n)\, \sigma^{4(k-1)}\, \Lambda_l^{-2(k-1)/l}\, n^{-(k-1)/2} .$$

и теоремы B вытекает утверждение теоремы 2.3.

Доказательство следствия 1.1. Мы начнем с неравенства

$$\beta_3^{k-1} \le c(k)\, [\overline{\beta}_3^{k-1} + (\beta_3(n))^{k-1}] . \tag{4.36}$$

В силу (3.11)

$$\overline{\beta}_3^{k-1} \le \overline{\beta}_{k+1}\, \sigma^{2(k-2)} . \tag{4.37}$$

Полагая в (4.33) $\mu = 3$, $N = k$, имеем $\beta_{3n} \le \left(\beta_k(n)\, (\beta_2(n))^{k-3}\right)^{1/(k-2)}$; отсюда

$$(\beta_3(n))^{k-1} \le \beta_k(n)^{1+1/(k-2)}\, \sigma^{2(k-1)(k-3)/(k-2)} .$$

Из этой оценки и неравенства (4.34) следует

$$(\beta_3(n))^{k-1} \le \beta_k(n)\, \sigma^{2k-3} \sqrt{n} . \tag{4.38}$$

Комбинируя оценки (4.36)—(4.38), находим $\beta_3^{k-1} \le c(k)\, \Gamma_{k+1}(n)\, \sigma^{3(k-1)}$. Следовательно,

$$(\Gamma_{3,l}/n)^{(k-1)/2} \le c(k)\, \Gamma_{k+1}(n)\, \sigma^{6(k-1)}\, \Lambda_l^{-3(k-1)/l}\, n^{-(k-1)/2} .$$

Осталось воспользоваться теоремой 1.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Götze F. Asymptotic expansions for bivariate von Mises functionals // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.—1979.—Bd 50, N 3.—P. 333–355.
2. Бенткус В. Ю. Асимптотические разложения в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве // Лит. мат. сб.—1984.—Т. 24, № 3.—С. 29–49.

3. **Бенткус В. Ю.** Асимптотические разложения для сумм независимых случайных элементов пространства Гильберта // Лит. мат. сб.—1984.—Т. 24, № 4.—С. 29–48.
4. **Петров В. В.** Суммы независимых случайных величин.—М.: Наука, 1972.
5. **Götze F.** On Edgeworth expansions in Banach spaces // Ann. Probab.—1981.—V. 9, N 5.—P. 852–859.
6. **Бенткус В. Ю.** Асимптотические разложения для сумм независимых случайных элементов пространства Гильберта // Докл. АН СССР.—1984.—Т. 278, № 5.—С. 1033–1036.
7. **Барут А., Рончка Р.** Теория представлений групп и ее приложения. Т. 1.—М.: Мир, 1980.
8. **Нагаев С. В., Чеботарёв В. И.** Об асимптотическом разложении типа Бергстрема в гильбертовом пространстве // Асимптотический анализ распределений случайных процессов.—Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние.—1989.—С. 66–77.—(Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 13).
9. **Nagaev S. V.** On a new approach to the study of the distribution of a norm of a random elements in Hilbert space // Proc. 5th Intern. Vilnius Conf. Probab. Th. and Math. Stat., Vilnius, 1989.—Vilnius: Mokslas; Utrecht: VSP, 1990.—V. 2.—P. 214–226.
10. **Nagaev S. V., Chebotarev V. I.** Asymptotic expansions for the distribution of the sum of i.i.d. Hilbert space valued random variables // Proc. 4th Intern. Vilnius Conf. Probab. Th. and Math. Stat., Vilnius, 1985.—Utrecht: VNU Science Press, 1987.—V. 2.—P. 357–363.
11. **Nagaev S. V., Chebotarev V. I.** On asymptotic expansion for the distribution of the sum of independent identically distributed random variables taking values in Hilbert space // Proc. 1st World congress Bernoulli Society, Tashkent, USSR, 1986.—Utrecht: VNU Science Press, 1987.—V. 1—P. 693–696.
12. **Sazonov V. V., Ulyanov V. V., Zalesskii V. A.** Asymptotic expansions refining the central limit theorem in Hilbert space // 1st World Congress Bernoulli Society, Tashkent, 1986: Abstracts of commun.—M.: Nauka, 1986.—V. 2.—P. 782–783.
13. **Боровских Ю. В.** О нормальной аппроксимации в бесконечномерных пространствах // Докл. АН СССР.—1984.—Т. 278, № 6.—С. 1291–1296.
14. **Бенткус В. Ю., Залесский Б. А.** Асимптотические разложения с неравномерными остатками в центральной предельной теореме в гильбертовом пространстве // Лит. мат. сб.—1985.—Т. 25, № 3.—С. 3–16.
15. **Götze F.** Asymptotic expansions in functional limit theorems// J. Malti-variate Analysis.—1985.—V. 16, N 1.—P. 1–20.
16. **Ульянов В. В.** Асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин в H // Теория вероятностей и ее применения.—1986.—Т. 31, № 1.—С. 31–46.
17. **Nagaev S. V., Chebotarev V. I.** On Edgeworth expansion in Hilbert space.—Vladivostok, 1989.—62 p.—(Preprint/Academy Sciences USSR. Far-Eastern Branch. Inst. Applied Mathematics).
18. **Bentkus V., Götze F., Paulauskas V., Rachkauskas A.** The accuracy of Gaussian approximation in Banach spaces.—Bielefeld, 1990.—90 p.—(Preprint 90—100/Universitat Bielefeld).

19. Нагаев С. В., Чеботарёв В. И. Уточнение оценки погрешности нормальной аппроксимации в гильбертовом пространстве.—Новосибирск, 1984.—47 с.—(Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 84).
20. Нагаев С. В., Чеботарёв В. И. Уточнение оценки погрешности нормальной аппроксимации в гильбертовом пространстве // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 3.—С. 154–173.
21. Бенткус В., Зитикис Р. Замечание о критерии Крамера — фон Мизеса — Смирнова // Лит. мат. сб.—1988.—Т. 28, № 1.—С. 14–22.
22. Залесский Б. А., Сазонов В. В., Ульянов В. В. Нормальная аппроксимация в гильбертовом пространстве. I // Теория вероятностей и ее применения.—1988.—Т. 33, № 2.—С. 225–245.
23. Залесский Б. А., Сазонов В. В., Ульянов В. В. Нормальная аппроксимация в гильбертовом пространстве. II // Теория вероятностей и ее применения.—1988.—Т. 33, № 3.—С. 508–521.
24. Sazonov V. V. Normal approximation — some recent advances.—Berlin etc.: Springer, 1981.—(Lecture Notes in Math., 879.)