АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ ФЛУКТУАЦИЙ ПРИ УСРЕДНЕНИИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

*А. В. Пожидаев**

ВВЕДЕНИЕ

В работе изучается предельное поведение решений некоторых краевых задач со случайными слабо нелинейными возмущениями.

При исследовании эллиптических и параболических линейных дифференциальных операторов со случайными коэффициентами рассматривался, в основном, вопрос об усреднении. В этом круге задач случайные возмущения коэффициентов моделируют мелкомасштабные неоднородности физических сред. Доказывалось существование так называемого *усредненного* линейного оператора. В ситуациях, когда наблюдается явление усреднения, решения краевых задач для случайно возмущенного оператора приближаются решениями соответствующих задач для усредненного оператора при малых значениях характерного масштаба пространственной или временной неоднородности возмущений. Усредненный оператор более доступен исследованию с помощью численных методов, так как его коэффициенты неслучайны и более регулярны, чем коэффициенты исходного. Ограничения, при которых установлено существование усредненного оператора, сводятся, по существу, к условию эллиптичности (или параболичности) исходного оператора и предположениям об эргодичности и однородности случайного поля, задающего его коэффициенты. Значительная часть результатов такого рода отражена в [1—6] (см. там же обзор литературы).

Менее исследована точность приближения решения краевой задачи со случайными возмущениями решением соответствующей усредненной задачи.

В ситуации, когда случайно возмущены только коэффициенты при младших производных оператора, достаточно полные результаты получены в [7—9]. В этих работах для ряда краевых задач удалось показать и неулучшаемость порядка оценки скорости сходимости по малому «масштабному» параметру.

В общем случае, когда и коэффициенты при старших производных случайны, исследования скорости сходимости менее систематичны. Некоторые оценки были установлены в работах [10—14], посвященных усреднению эллиптических операторов второго порядка с быстро осциллирующими случайными коэффициентами. Предположения работ [10—12], где речь идет о скалярных эллиптических операторах второго порядка, включают ограничение $n \geq 3$ на размерность и приводят к степенным по малому параметру оценкам скорости сходимости. В них существенно

*По настоянию автора публикуемый текст воспроизводит авторский оригинал без изменений. — *Прим. редакторов Издательства.*

используется представление решения краевой задачи в виде континуального интеграла по распределению диффузионного процесса, порожденного рассматриваемым оператором. Метод работ [13, 14] применим и к системам линейных уравнений. Он состоит в исследовании последовательных приближений варианта универсального итерационного процесса [15]. Основное техническое средство исследования — специфические оценки для возникающих при этом сингулярных интегралов. В [13, 14] ограничения на размерность более слабые ($n \geq 2$), но оценки погрешности усреднения убывают медленнее степени малого «масштаба неоднородности» случайных возмущений.

Мало исследован и вопрос об асимптотическом поведении распределений флуктуаций решения.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений со случайной правой частью в [16] установлена асимптотическая нормальность решения. Позже результаты такого рода усиливались в разных направлениях в [17—19] и других работах.

Для линейных краевых задач со случайными возмущениями младших коэффициентов вопрос об асимптотической нормальности флуктуаций решения исследован в [7, 8, 20] при произвольной размерности пространства n. В этих работах возмущения задаются быстро осциллирующими случайными функциями пространственных переменных. Для ситуации, в которой размерность $n \leq 3$ и в уравнении случаен только коэффициент при решении, подобные теоремы доказаны также в [21, 22]. Аналогичный результат для одномерного волнового уравнения установлен в [23].

В [24] рассматривалось одномерное уравнения параболического типа с быстро осциллирующим по «времени» случайным возмущением коэффициента диффузии. Асимптотическая нормальность флуктуаций решения была установлена для задачи Коши. Асимптотическая нормальность решений линейных параболических краевых задач со случайными быстро осциллирующими по «времени» коэффициентами доказана в [25, 26]; впоследствии подобный результат был получен и в [27]. Отметим, что в [28] для таких задач дана неулучшаемая по характеру зависимости от малого параметра оценка скорости сходимости.

Асимптотическая нормальность решений линейных краевых задач со слабо возмущенными главными коэффициентами установлена в [28—35] при различных предположениях о строении этих коэффициентов. Там же получен аналогичный результат и для решений линейных краевых задач с дополнительным большим параметром — множителем при случайных возмущениях младших членов.

Цель данной работы — изучить вопрос об асимптотической нормальности решений некоторых типов многомерных краевых задач со случайными нелинейными возмущениями. Часть результатов анонсирована в [36].

В § 1 содержится сводка обозначений и необходимые сведения из теории дифференциальных уравнений. Ограничения на случайные функции и формулировки основных результатов приведены в § 2. В § 3—6 эти результаты доказываются.

§ 1. СВОДКА ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И ТЕРМИНОВ

Приведенные ниже сведения из теории дифференциальных уравнений взяты из [37, 38]. По возможности сохранены и обозначения, принятые в этих книгах.

1.1. В работе V — ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ с замыканием $\overline{V}$; ее граница S есть бесконечно дифференцируемое многообразие размерности $n-1$; V расположена локально по одну сторону от S (иными словами, мы рассматриваем $\overline{V}$ как многообразие с краем S класса C^∞).

При рассмотрении начально-краевых задач $V_t = V \times (0, t)$. Граница этого цилиндра — $S^0 \cup S_t$, где $S^0 = V \times \{0\}$, а $S_t = S \times [0, t]$ — его боковая поверхность.

1.2. Для записи производных по пространственным переменным применяются символы $D_i u(x, t) = (\partial/\partial x_i)\, u(x, t)$ и, для производных высших порядков, $D_i^m u(x, t) = (\partial^m/\partial x_i^m)\, u(x, t)$ $(m \geq 1)$; как обычно, $D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} u$ при любом целочисленном мультииндексе $\alpha \equiv (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Используются также обозначения $u_{\cdot i} = D_i u$, $u_{\cdot ij} = D_i D_j u$ и т. п.; для единообразия иногда будет удобно писать $u_{\cdot 0} = u$. Производные по «временной» переменной обозначаются $\partial_t u(x, t) = (\partial/\partial t)\, u(x, t)$ и, при $m \geq 1$, $\partial_t^m u(x, t) = (\partial^m/\partial t^m)\, u(x, t)$.

Как и в [37], символ $\mathrm{D}_x^m u$ может в некоторых случаях обозначать любую производную порядка m функции u по пространственным переменным; для градиента принято обозначение $u_x = (u_{\cdot 1}, \ldots, u_{\cdot n})$. Кроме того,

$$u_{x+} = (u(x, t), u_{\cdot 1}(x, t), \ldots, u_{\cdot n}(x, t)) \in \mathbf{R}^{n+1}.$$

Для функций $K(x, t, y, s)$ с «двойным» набором аргументов приняты сокращенные обозначения производных по первой пространственной переменной: $K_{\cdot i} = D_i K$, $K_{\cdot ij} = D_i D_j K$.

Ниже рассматриваются также функции $a(x, t, t', p)$, где $x \in \mathbf{R}^n$, $t, t' \in \mathbf{R}$, $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$. Их производные по x, как и выше, обозначаются $D_i a, a_{\cdot i}$. Для производных по переменным p_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ принята запись

$$D_{p_i}^{\alpha_i} a(x, t, t', p) = (\partial^{\alpha_i}/\partial p_i^{\alpha_i})\, a(x, t, t', p), \quad D_{p_i} a = D_{p_i}^1 a.$$

Кроме того, нам будут удобны обозначения

$$\nabla_p = (\partial/\partial p_0, \partial/\partial p_1, \ldots, \partial/\partial p_n), \qquad q \cdot \nabla_p u(\ldots p, \ldots) \equiv \sum_{j=0}^{n} q_j D_{p_j} u(\ldots p, \ldots)$$

и соответствующие обозначения высших производных по направлению в пространстве переменных p.

1.3. Норма в пространстве $L_m(Q)$, $Q \in \mathbf{R}^d$, обозначается, как обычно,

$$\|u\|_{m,\,Q} = \left(\int_Q |u|^m \, dx\right)^{1/m}, \quad m \geq 1\,.$$

Пространство $\overset{0}{W}{}_2^k(V)$ (где k — нецелое положительное число) есть замыкание множества бесконечно дифференцируемых финитных в V функций $C_0^\infty(V)$ по норме

$$\|u\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^k(V)} = \int\limits_V \sum_{|\alpha|<k} |D^\alpha u|^2 \, dx + \sum_{|\alpha|=[k]} \int\limits_{V^2} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2(k-[k])}} \, dx\, dy,$$

где $[k]$ — целая часть числа k.

Ниже $W_2^{-k}(V)$ — пространство сопряженное к $\overset{0}{W}{}_2^k(V)$, а угловые скобки $<\cdot,\cdot>_k$ означают двойственность между $\overset{0}{W}{}_2^k(V)$ и $W_2^{-k}(V)$. Для обозначения нормы в $W_2^s(V)$ при любом вещественном s используется обозначение

$$\|u\|_s \equiv \|u\|_{W_2^s(V)}\ ;$$

при этом $W_2^0(V) = L_2(V)$.

Напомним, что запись с «двойным» нижним индексом закрепляется за обозначением нормы в $L_m(Q)$, $Q \in \mathbf{R}^d$, т. е. $\|u\|_{p,Q} = \|u\|_{L_p(Q)}$, но $\|u\|_m = \|u\|_{W_2^m(V)}$; при этом $\|u\|_{2,V} = \|u\|_0$.

Через $C^m(V)$ мы обозначаем пространство всех m раз непрерывно дифференцируемых действительных функций на V. $C_0^m(V)$ — множество функций из $C^m(V)$ с компактным носителем в V.

Для нецелого положительного числа l пространство $H^{l,\,l/2}(\overline{V_T})$ — это банахово пространство функций $u(x,t)$, непрерывных в $\overline{V_T}$ вместе со всеми производными $\partial_t^r D_x^s u$ при $2r + s < l$ и имеющих конечную норму, описанную в [37, с. 16]. Мы не приводим громоздкое определение нормы в этом пространстве, так как оно в дальнейшем не используется.

Для дальнейшего существенно, что оператор вложения пространства $W_2^k(V)$ в $W_2^{k'}(V)$ при наложенных в п. 1.1 ограничениях на область V и ее границу S вполне непрерывен при любых значениях $k > k'$ (см., например, [39, с.123]). Это предположение о регулярности S в дальнейшем всегда предполагается выполненным и специально не оговаривается.

1.4. Ниже будет использоваться дифференциальный оператор

$$\Lambda\, w(x,t) \equiv -a_{ij}(x,t)\, w._{ij}(x,t) - b_i(x,t)\, w._i(x,t) - c(x,t)\, w(x,t)\,.$$

Здесь и далее повторение индексов подразумевает суммирование. Коэффициенты оператора Λ удовлетворяют условию

$$\forall\, \gamma \in \mathbf{R}^n,\ (x,t) \in V_T \qquad \nu_0\, |\gamma|^2 \leq a_{ij}(x,t)\, \gamma_i \gamma_j$$

с некоторой положительной постоянной ν_0. Коэффициенты при старших производных симметричны, $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$, и достаточно гладки, как и функции $b_i(x, t)$, $c(x, t)$. Их гладкость предполагается достаточной для того, чтобы начально-краевая задача

$$(\partial_t + \Lambda)\, u(x, t) = q(x, t), \qquad (x, t) \in V_T, \qquad u\Big|_{t=0} = 0, \quad u\Big|_{x \in S} = 0,$$

при регулярной правой части имела классическое решение. Функция Грина этой задачи обозначается $\Gamma(x, t, \xi, \tau)$. Известно, что

$$|\Gamma(x, t, \xi, \tau)| \le C\, |t - \tau|^{-n/2} \exp\{-C\, [x - \xi\,|^2 (t - \tau)^{-1}\}, \quad t \ge \tau,$$

где C — некоторая положительная постоянная. Из приведенного неравенства при любом $\beta \in (0, 1)$ могут быть получены используемые ниже оценки функции Грина [40, с. 170] и ее производных:

$$|\Gamma(x, t, \xi, \tau)| \le C(t - \tau)^{\beta/2 - 1}\, |x - \xi|^{2 - \beta - n}, \tag{1.1}$$

$$|\Gamma_{\cdot i}(x, t, \xi, \tau)| \le C(t - \tau)^{-(1+\beta)/2}\, |x - \xi|^{\beta - n}; \tag{1.2}$$

выше $C = C(\beta)$.

Нам будет удобно обозначать одним и тем же символом функцию «двойного» набора переменных $S(x, t, \xi, \tau)$ и интегральный оператор

$$S f(x, t) \equiv \int_{V_t} S(x, t, \xi, \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau,$$

ядром которому служит эта функция. В частности,

$$\Gamma f(x, t) \equiv \int_{V_t} \Gamma(x, t, \xi, \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \qquad \Gamma_{\cdot i} f(x, t) \equiv \int_{V_t} \Gamma_{\cdot i}(x, t, \xi, \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau$$

и т. д.

Оператор умножения на функцию обозначается тем же символом, что и она сама: например, $q\, \Gamma f(x, t) \equiv q(x, t)\, \Gamma f(x, t)$.

1.5. В работе рассматривается также оператор, который действует на гладкие функции пространственной переменной x по формуле

$$L^e w(x) \equiv -D_i(a_{ij}(x)\, D_j w(x)) + c(x)\, w(x).$$

Его старшие коэффициенты симметричны ($a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$) и удовлетворяют условию равномерной эллиптичности: существует положительная постоянная ν такая, что

$$\forall\, \gamma \in \mathbf{R}^n, \; x \in V \qquad \nu\, |\gamma|^2 \le a_{ij}(x)\, \gamma_i \gamma_j. \tag{1.3}$$

Кроме того, для всех x

$$0 < c_0 \le c(x), \qquad c_0 = \mathrm{const}. \tag{1.4}$$

Гладкость коэффициентов предполагается достаточной для того, чтобы при регулярной правой части краевая задача

$$L^e z(x) = f(x), \quad x \in V, \tag{1.5}$$

$$z\Big|_S = 0, \tag{1.6}$$

имела классическое решение. Ее функция Грина обозначается $G(x, y)$. Известно [41, с. 24], что

$$|G(x,y)| \le C\,|x-y|^{2-n}, \tag{1.7}$$

$$|G._i(x,y)| \le C\,|x-y|^{1-n}. \tag{1.8}$$

Как и в параболическом случае, нам будут удобны специальные обозначения для оператора Грина описанной выше задачи Дирихле с однородными граничными условиями:

$$Gf(x) \equiv \int_V G(x,y)f(y)\,dx\,, \qquad G._if(x) \equiv \int_V G._i(x,y)f(y)\,dx$$

и т. д. Как и прежде, оператор умножения на функцию пространственной переменной обозначается так же, как сама эта функция.

§ 2. ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

2.1. В данной работе мы рассматриваем в области V_T при некотором фиксированном $T < \infty$ квазилинейные краевые задачи параболического типа:

$$(\partial_t + \Lambda)\,v_\varepsilon = \Phi\big(x, t, t/\varepsilon, v_{\varepsilon x+}(x,t), \omega\big) \tag{2.1}$$

при $(x,t) \in V_T$,

$$v_\varepsilon\,\Big|_{t=0} = \Psi\,\Big|_{t=0}, \qquad v_\varepsilon\,\Big|_{S_T} = 0\,. \tag{2.2}$$

Здесь область и дифференциальный оператор Λ, описанный в п. 1.4, неслучайны, а Ψ есть значение на границе V_T некоторой достаточно гладкой неслучайной функции $\Psi(x,t)$, определенной в $\overline{V_T}$ (ограничения на эту функцию будут уточнены ниже).

Напомним (см. п. 1.1), что область V предполагается достаточно регулярной. В частности, гладкость ее границы обеспечивает справедливость теорем вложения, упомянутых в конце п. 1.3, и классическую разрешимость однородных линейных граничных задач § 1 при достаточной регулярности правой части.

Правая часть уравнения (2.1) — случайное поле на некотором вероятностном пространстве $(\Omega = \{\omega\}, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. Под случайным полем ниже понимается функция «состояния среды» ω и пространственных, временных и иных переменных, измеримая по совокупности переменных. Ниже неизменно аналитические свойства реализаций случайного поля, отвечающих фиксированным значениям ω, таковы, что задача (2.1)—(2.2) имеет для каждой реализации классическое решение. Можно показать, что полученные таким образом для отдельных значений ω решения могут рассматриваться как реализации нового случайного поля. Это последнее и подразумевается ниже термином «случайное решение». Как обычно, в обозначениях случайных полей опускается «состояние среды» ω, если это не влечет путаницы. Для математических ожиданий принято стандартное обозначение $\mathbf{E}\cdots \equiv \int_\Omega \cdots \mathbf{P}(d\omega)$.

Случайная правая часть уравнения (2.1) подчинена ниже следующим ограничениям. Функция $\Phi(x,t,t',p,\omega)$ обладает частными производными до второго порядка включительно по переменным $p_0, \dots, p_n$, причем

$$|D_{p_i}\Phi(x,t,t',p,\omega)| + |D_{p_i}D_{p_j}\Phi(x,t,t',p,\omega)| < C\,, \tag{2.3}$$

где постоянная C не зависит от $i, j, x, t, t', \varepsilon$ или ω. Кроме того, как функция «пространственных» переменных x, $\Phi(x, t, t', p, \omega)$ принадлежит пространству $C_0^1(V')$ и имеет компактный в V носитель: можно указать такую внутреннюю подобласть $V' \subset V$, что при любых значениях остальных аргументов $\Phi(x, t, t', p, \omega) = 0$, если $x \notin V'$.

Случайные и неслучайные данные в (2.1)—(2.2) таковы, что для этой задачи с вероятностью 1 выполнены все условия теоремы 6.1 [37, с. 513]. В частности, начальные данные задает достаточно регулярная функция, $\Psi \in H^{2+\beta, 1+\beta/2}(\overline{V_T})$, и при $t = 0$ выполнено условие согласования

$$(\partial_t + \Lambda)\, \Psi = \Phi(x, 0, 0, \Psi_{x+}).$$

Дополнительно предполагается, что случайное поле Φ удовлетворяет специальному условию слабой зависимости. Ниже оно имеет конечный радиус зависимости r по «времени»: при $|t' - \tau'| \ge r$ значения поля $\Phi(x, t, t', p, \omega)$, $\Phi(x', \tau, \tau', p', \omega)$ — независимые случайные величины. Не уменьшая общности, можно подчинить выбор масштаба условию $r = 1$. Это ограничение предполагается выполненным, чтобы не загромождать выкладки. Поля с радиусом зависимости r называются ниже *r-зависимыми* по соответствующей переменной.

Мы предполагаем, что

$$\mathrm{E}\, |\Phi(x, t, t', 0)|^{2n+2} < C. \tag{2.4}$$

Предполагается также, что математическое ожидание правой части не зависит от «быстрого времени»:

$$\mathrm{E}\, \Phi(x, t, t', p, \omega) = \overline{\Phi}(x, t, p). \tag{2.5}$$

Мы будем рассматривать также «усредненную» краевую задачу:

$$(\partial_t + \Lambda)\, \mathrm{Y}(x, t) = \overline{\Phi}(x, t, \mathrm{Y}_{x+}(x, t)), \quad (x, t) \in V_T; \tag{2.6}$$

$$\mathrm{Y}\,\big|_{t=0} = \Psi\,\big|_{t=0}, \qquad \mathrm{Y}\,\big|_{S_T} = 0. \tag{2.7}$$

Решения исходной задачи (2.1), (2.2) и усредненной задачи (2.6), (2.7) рассматриваются ниже при фиксированных значениях $t > 0$.

Теорема 2.1. *Пусть $v_\varepsilon(x, t)$ и $\mathrm{Y}(x, t)$ решения задач* (2.1), (2.2) *и* (2.6), (2.7). *Тогда при любом фиксированном $t \in (0, T]$*

$$\mathrm{E}\, \|v_\varepsilon(\cdot, t) - \mathrm{Y}(\cdot, t)\|^2_{W_2^1(V)} < C\varepsilon,$$

где постоянная C не зависит от ε и t.

В формулировке теоремы 2.2 участвует еще линейный оператор Q, заданный формулой

$$\mathrm{Q}\, u(x, t) = u(x, t) - \Gamma\, [u_{x+} \cdot \nabla_p \overline{\Phi}]\,(x, t). \tag{2.8}$$

Здесь используются обозначения п. 1.2 и введенные выше. Оператор Грина применяется ко всему выражению в квадратных скобках, где сокращенно $\overline{\Phi} = \overline{\Phi}(x, t, \mathrm{Y}_{x+}(x, t))$.

При доказательстве теоремы 2.2 используется дополнительное

Условие 2.1. Для любой неслучайной функции $h(x) \in L_2(V)$ при любом фиксированном $t > 0$ существует предел

$$\sigma_t^2(h) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E} \left(\int_V h(x)\, \Gamma \varphi_\varepsilon(x, t)\, dx \right)^2, \tag{2.9}$$

где $\varphi_\varepsilon(x, t, \omega) = \Phi(x, t, t/\varepsilon, \mathrm{Y}_{x+}(x, t), \omega) - \overline{\Phi}(x, t, \mathrm{Y}_{x+}(x, t))$.

Условие 2.1 обеспечивает [42] асимптотическую нормальность случайных величин

$$\nu_\varepsilon(h, t) = \varepsilon^{-1/2} \int_V h(x)\, \Gamma \varphi_\varepsilon(x, t)\, dx;$$

предельное распределение имеет нулевое среднее и дисперсию $\sigma_t^2(h)$ (возникающее при $\sigma_t^2(h) = 0$ вырожденное предельное распределение мы также рассматриваем как нормальное). Условие 2.1 выполнено, в частности, если

$$\Phi(x, t, \tau, p, \omega) = \chi(t)\, \Phi_0(x, \tau, p, \omega),$$

где $\chi(t)$ — гладкая неслучайная функция, $\chi(0) = 0$, а $\Phi_0(x, \tau, p, \omega)$ при фиксированных значениях x и p — однородный относительно целочисленных сдвигов по переменной τ случайный процесс, причем при фиксированных ω, τ это гладкая функция остальных переменных. В этом случае

$$\sigma_t^2(h) =$$

$$= \int_0^t \chi^2(\tau) \int_V \int_V H(t, x, \tau)\, H(t, y, \tau) \int_{-1}^{1} B_0(x, y, s, \mathrm{Y}_{x+}(x, \tau), \mathrm{Y}_{x+}(y, \tau))\, ds\, dx\, dy\, d\tau,$$

где

$$H(t, x, \tau) = \int_V h(y)\, \Gamma(y, t, x, \tau)\, dy,$$

$$B_0(x, y, s, p, q) = \mathrm{Cov}\,(\Phi_0(x, 0, p), \Phi_0(y, s, q)).$$

В теореме 2.2 мы рассматриваем отвечающие фиксированным значениям «временного» аргумента случайные поля $(x, \omega) \mapsto v_\varepsilon(x, t, \omega)$ как случайные элементы пространств обобщенных функций на V.

Теорема 2.2. *При $\varepsilon \to 0$ распределение, порожденное в пространстве $L_2(V)$ случайным полем*

$$\varepsilon^{-1/2}\, \mathrm{Q}\, (v_\varepsilon(x, t) - \mathrm{Y}(x, t)),$$

для любых фиксированных $T > 0$ и $t \in [0, T]$ слабо сходится к центрированному гауссовскому распределению с характеристическим функционалом $\zeta(h) = \exp\{ -\tfrac{1}{2} \sigma_t^2(h) \}$, где $\sigma_t^2(h)$ определена в (2.9).

2.2. Мы рассматриваем ниже также краевую задачу эллиптического типа со слабо нелинейной случайной правой частью, которая зависит от «быстрой» пространственной переменной. Рассматриваемая краевая задача имеет вид

$$L^{\varepsilon} u_{\varepsilon}(x) = F(x/\varepsilon, u_{\varepsilon x+}(x), \omega), \qquad x \in V; \tag{2.10}$$

$$u_{\varepsilon} \Big|_S = h \Big|_S, \tag{2.11}$$

где L^{ε} — дифференциальный оператор п. 1.5, а правая часть — случайное поле с регулярными реализациями, как и в п. 2.1.

Неслучайные коэффициенты уравнения и граничное значение достаточно гладки: например,

$$a_{ij}(x),\ c(x) \in C^2(\overline{V}), \qquad h(x) \in C^{2+\alpha}(S).$$

Предполагается, что реализации случайной функции $F(x, p, \omega)$ имеют ограниченные абсолютными постоянными всевозможные частные производные порядков $l = 1, 2, \dots, n+1$ по переменным $p_0, p_1, \dots, p_n$, т. е. для любых целых неотрицательных $l_0, \dots, l_n$ таких, что $l_0 + \dots + l_n = l$

$$| D_{p_0}^{l_0} \cdot \dots \cdot D_{p_n}^{l_n} F(x, p, \omega) | < K(l),$$

где неслучайная постоянная $K(l)$ зависит только от l. Константы K(1), c_0 и ν связывает неравенство

$$\mathrm{K}(1)\, d(n) < 1, \tag{2.12}$$

где

$$d(k) = c_0^{-1} + (c_0 \nu)^{-1/2} k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \tag{2.13}$$

Условие (2.12) гарантирует (при фиксированном «состоянии среды» ω) теорему единственности для задачи (2.10), (2.11) (ср. (9.34) в [38, с. 366]).

Мы предполагаем также, что случайные и неслучайные данные задачи (2.10), (2.11) таковы, что для почти всех реализаций правой части выполнены все условия теоремы 10.3 [38, с. 376]. В этом случае с вероятностью 1 для данной задачи существует единственное решение из класса $C^{2+\alpha}(\overline{V})$.

Решение «случайной» задачи (2.10), (2.11) понимается в том же смысле, что в п. 2.1 — ее решением является случайное поле, у которого почти все реализации принадлежат указанному классу и удовлетворяют соотношениям (2.10), (2.11).

Случайная правая часть удовлетворяет в дальнейшем условию

$$\mathrm{E}\, |F(x, 0)|^{8n+2} < C. \tag{2.14}$$

Ниже предполагается, что по пространственным переменным x случайное поле $F(x, p, \omega)$ m-зависимо (см. п. 2.1), причем его среднее не зависит от пространственной переменной:

$$\mathrm{E}\, F(x, p) = \overline{F}(p).$$

Не ограничивая общности, мы полагаем радиус зависимости единичным ($m = 1$).

Ограничения на гладкость и требование конечности моментов высоких порядков во многих случаях можно значительно ослабить. Например, если $F = F(x/\varepsilon, u_{\varepsilon}(x))$ и $n = 3$, то достаточно потребовать ограниченности частных производных до второго порядка по p_0, а условие (2.14) заменить условием

$$\mathbf{E}\,|F(x,0)|^2 < C. \tag{2.14'}$$

В дальнейшем $U(x)$ — решение неслучайной краевой задачи

$$L^e\,U(x) = \overline{F}(U_{x+}(x)),\ x \in V, \tag{2.15}$$

$$U\Big|_S = h\Big|_S. \tag{2.16}$$

Теорема 2.3. *Пусть* $u_\varepsilon(x)$ *и* $U(x)$ — *решения исходной краевой задачи* (2.10), (2.11) *и усредненной задачи* (2.15), (2.16). *Тогда при любом* $p \in (0, n+2]$

$$\mathbf{E}\,\|u_\varepsilon - U\|^{2p}_{W_2^1(V)} < C(p)\,\varepsilon^{2p}, \tag{2.17}$$

где постоянная $C(p)$ *не зависит от* ε. *Кроме того, для любого* $x \in V$, $j = 1, \ldots, n$ *и* $p \in (0, n+2]$

$$\mathbf{E}\,|D_j u_\varepsilon(x) - D_j U(x)|^{2p} < C'(p)\,\varepsilon^p, \tag{2.18}$$

где константа $C'(p)$ *не зависит от* x, ε, j.

При доказательстве теоремы 2.4 используется дополнительное

Условие 2.2. Для любой неслучайной непрерывной функции $g(x)$ существует предел

$$\sigma^2(g) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-n}\,\mathbf{E}\left(\int_V g(x)\,\mu_\varepsilon(x)\,dx\right)^2, \tag{2.19}$$

где $\mu_\varepsilon(x) = F(x/\varepsilon, U_{x+}(x), \omega) - \overline{F}(U_{x+}(x))$.

Условие 2.2 обеспечивает [42] асимптотическую нормальность случайных величин

$$\nu_\varepsilon(g) = \varepsilon^{-n/2}\int_V g(y)\,\mu_\varepsilon(y)\,dy;$$

предельное распределение имеет нулевое среднее и дисперсию $\sigma^2(g)$ (вырожденное предельное распределение, возникающее при $\sigma^2(g) = 0$, мы также рассматриваем как нормальное). Условие 2.2 выполнено, в частности, если $F(x,p,\omega)$ при фиксированных значениях p — однородное случайное поле, причем

$$\mathrm{Cov}(F(0,p), F(x,q)) = B_1(x,p,q).$$

В этом случае

$$\sigma^2(g) = \int_V g^2(x)\int_{|y|\le 1} B_1(y, \Upsilon_{x+}(x), \Upsilon_{x+}(x))\,dy\,dx.$$

В формулировке теоремы об асимптотической нормальности рассматриваемой краевой задачи участвует неслучайная функция $W(x,\varepsilon)$, которая играет роль центрирующей поправки. Довольно громоздкое описание этой функции приведено в §6. Если не оговорено противное, здесь и ниже

$r = 2 - n/2 - \delta$, где δ — произвольное фиксированное положительное число.

Теорема 2.4. *При $\varepsilon \to 0$ распределение, порожденное в пространстве $W_2^r(V)$ случайным полем $\varepsilon^{-n/2}(u_\varepsilon(x) - U(x) - W(x, \varepsilon))$, слабо сходится к центрированному гауссовскому распределению с характеристическим функционалом*

$$\tilde{\zeta}(\tilde{h}) = \exp\{-\sigma^2(g)/2\},$$

где $g(x) = \int_V \tilde{h}(y)\, G(x, y)\, dy$, а $\sigma^2(g)$ определена в (2.19).

Замечание 2.2. Если $n \le 3$ и правая часть уравнения не зависит от переменных p_j, $j = 1, \dots, n$, т. е. $F = F(x/\varepsilon, u_\varepsilon(x))$, в поправках к усредненному решению нет нужды: $W(x, \varepsilon) = 0$. Аналогичный эффект для линейного уравнения отмечен в [7, 21, 22].

§ 3. ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С «БЫСТРЫМ ВРЕМЕНЕМ»

Пусть S — интегральный оператор над функциями на области V_T (ср. п. 1.4). Предполагается, что его ядро $S(x, t, \xi, \tau)$ допускает оценку

$$|S(x, t, \xi, \tau)| \le C\, |t - \tau|^{-n/2} \exp\{-[x - \xi|^2 (t - \tau)^{-1}\}, \quad t \ge \tau,$$

т. е. имеет особенности того же порядка, что $\Gamma(x, t, \xi, \tau)$.

В дальнейшем обозначение C и аналогичные ему подразумевают положительные постоянные, значения которых определяют неслучайные постоянные в ограничениях на коэффициенты, размерность, выбор T и области V. Если это не приводит к путанице, одно и то же обозначение может подразумевать в разных местах различные константы этого типа, так что возможны «равенства» типа $C + C = C$, $C\,C = C$ и им подобные.

Лемма 3.1. *Пусть φ_ε — случайное поле из условия 2.1, а S — определенный выше интегральный оператор. При $0 < p \le n+1$ и произвольном значении $(x, t) \in V_T$ справедливо неравенство*

$$H_1 \equiv \mathrm{E}\,(S\varphi_\varepsilon(x, t))^{2p} < C(p)\, \varepsilon^p.$$

Доказательство. С помощью неравенства Гёльдера оценка при любом p выводится из соответствующего результата для $p = n+1$. В этом случае имеем

$$H_1 = \mathrm{E} \int_0^t \dots \int_0^t \prod_{i=1}^{2n+2} r(x, t, \tau_i)\, d\tau_i = \int_0^t \dots \int_0^t \mathrm{E} \prod_{i=1}^{2n+2} r(x, t, \tau_i)\, d\tau_i, \tag{3.1}$$

где ε-зависимые по переменной τ случайные поля r задаются равенством

$$r(x, t, \tau, \omega) = \int_V S(x, t, \xi, \tau)\, \varphi_\varepsilon(\xi, \tau)\, d\xi.$$

Эти поля центрированы: $\mathrm{E}\, r(x, t, \tau) = 0$.

В силу (2.3), (2.4) и известной оценки [37, с. 406] неравенство

$$\mathrm{E}\left|\prod_{i=1}^{2n+2} r(x,t,\tau_i)\right| < C$$

выполняется равномерно по всем аргументам.

Благодаря условию ε-зависимости и равенству средних нулю выражение под знаком интеграла в правой части (3.1) обращается в нуль на большей части области интегрирования. Оно равно нулю, в частности, в точках $\{\tau_1, \dots, \tau_{2n+2}\}$, для которых выполнено условие

$$\exists\, k : \forall j \neq k \quad |\tau_k - \tau_j| \geq \varepsilon .$$

В каждой точке области интегрирования $[0,t]^{2n+2}$, где подынтегральное выражение не равно нулю, можно указать $\overline{m}$ пар «номеров» координат $(j(m), k(m))$ ($\overline{m} \geq n+1$) таких, что

$$0 < |\tau_{j(m)} - \tau_{k(m)}| \leq \varepsilon, \quad m = 1, \dots, \overline{m} .$$

Легко видеть, что каждый такой набор пар выделяет в области интегрирования множество лебеговой меры не более $C(n)\,\varepsilon^{n+1}$. Число различных наборов пар ограничено некоторой константой, зависящей лишь от размерности. Тем самым, с некоторой другой константой $C'(n)$, также не зависящей от малого параметра, выполнено неравенство $H_1 \leq C'(n)\,\varepsilon^{n+1}$. Лемма 3.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Разность (или «невязка»)

$$w_\varepsilon(x,t) \equiv v_\varepsilon(x,t) - \Upsilon(x,t)$$

по (2.1), (2.2), (2.6), (2.7) удовлетворяет уравнению

$$(\partial_t + \Lambda)\, w_\varepsilon(x,t) = \varphi_\varepsilon(x,t) + \left[\Phi(x,t,t/\varepsilon, v_{\varepsilon x+}(x,t)) - \Phi(x,t,t/\varepsilon, \Upsilon_{x+}(x,t))\right], \quad (3.2)$$

где оба слагаемых в правой части — случайные поля, причем поле φ_ε описано в условии 2.1. Применим к полученному равенству оператор Грина. Пользуясь ограничениями с неслучайными константами на производные $\nabla_p.\Phi$ и неравенством треугольника, получаем оценку

$$|w_{\varepsilon\cdot s}(x,t)| \leq C\,|\Gamma_{\cdot s}\varphi_\varepsilon(x,t)| + C\sum_{i=0}^{n} |\Gamma_{\cdot s}|\;|w_{\varepsilon\cdot i}|(x,t) . \quad (3.3)$$

Во втором слагаемом правой части (3.3) $|\Gamma.|$ обозначает интегральный оператор с ядром, равным модулю функции в скобках $|\cdot|$ (см. п. 1.4).

Мы опускаем индекс ε в обозначениях w_ε и φ_ε до конца доказательства. Положим

$$p = 2n+2, \quad q = (2n+2)/(2n+1) . \quad (3.4)$$

Тогда $1/q + 1/p = 1$, $(n - 1/2)\,q < n$, $3q/4 < 1$. При этих значениях p, q из (1.1), (1.2) и неравенства Гёльдера получаем оценки

$$\int_V |\Gamma_{\cdot s}(x,t,\xi,\tau)|\;|w_{\cdot i}(\xi,\tau)|\,d\xi \leq$$

$$\leq (t-\tau)^{-3/4}\int_V |x-\xi|^{1/2-n}\,|w_{\cdot i}(\xi,\tau)|\,d\xi \leq C(t-\tau)^{-3/4}\,\|w_{\cdot i}(\cdot,\tau)\|_{p,V} ,$$

где последний множитель — норма в пространстве суммируемых функций L_p, а

$$C = C_q \equiv \int\limits_{|x| \le 2\,\mathrm{diam}\,V} \frac{dx}{|x|^{q(n-1/2)}}. \tag{3.5}$$

Следовательно, при фиксированном t

$$|\Gamma_{\cdot s}|\ |w_{\cdot i}|(x,t) \le C(p) \int\limits_0^t \frac{\|w_{\cdot i}(\cdot,\tau)\|_{p,V}}{(t-\tau)^{3/4}}\, d\tau \le$$

$$\le C(p)\ \left\|(t-\cdot)^{-3/4}\right\|_{q,\,[0,t]} \le \|w_{\cdot i}\|_{p,\,V_t} \le C(p)\ \|w_{\cdot i}\|_{p,V_t}\,. \tag{3.6}$$

Из (3.3), (3.6) получаем оценку производной невязки в точке (x, t):

$$|w_{\cdot s}(x,t)|^p \le C(p) \left(\sum_{i=0}^{n} \|w_{\cdot i}\|_{p,V_t} + |\Gamma_{\cdot s}\varphi(x,t)| \right)^p.$$

Пусть

$$b_s(t,p) \equiv \mathrm{E} \int\limits_V |w_{\cdot s}(x,t)|^p\, dx\,, \qquad s = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Тогда из последнего неравенства вытекает оценка

$$b_s(t,p) \le C(p) \left(\sum_{i=0}^{n} \int\limits_0^t b_i(\tau,p)\, d\tau + \mathrm{E}\,(\Gamma_{\cdot s}\varphi(x,t))^p \right). \tag{3.7}$$

Для дальнейшего важно, что функции $U_{\cdot ij}(x, t)$ ограничены. (Это следует из теоремы 6.1 [37, с. 513]). Поле $\varphi(x, t)$ имеет, как функция пространственных переменных, компактный в V носитель. Используя это обстоятельство, мы можем применить представления производных фундаментального решения, приведенные в [26, п. 5], и формулу интегрирования по частям. В результате мы убеждаемся, что последнее слагаемое в правой части (3.7) оценивается аналогично величине H_1 в доказательстве леммы 3.1.

Применяя неравенство Гронволла — Белмана, получаем отсюда соотношение

$$b_s(t,p) \le C(p)\, \varepsilon^{p/2}\,, \qquad s = 0, 1, \ldots, n\,. \tag{3.8}$$

При $0 < r < p$ оценка

$$b_s(t,r) < C\, b_s(t,p)^{r/p} < C\,\varepsilon^{r/2}$$

с константой, зависящей от формы области V, получается применением неравенства Гёльдера. В частности,

$$\mathrm{E} \int\limits_V |w_{\cdot s}(x,t)|^2\, dx \le C\,\varepsilon\,.$$

Теорема 2.1 доказана.

§ 4. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ С «БЫСТРЫМ ВРЕМЕНЕМ»

Функция $w_\varepsilon(x, t) = v_\varepsilon(x, t) - \Upsilon(x, t)$ удовлетворяет уравнению (3.2), из которого применением оператора Грина получается равенство

$$w(x, t) = \Gamma\,[w_{\varepsilon x+} \cdot \nabla_p \Phi]\,(x, t) + \sum_{i,j=0}^{n} \alpha^{(ij)}(x, t) + \Gamma\varphi(x, t)\,, \tag{4.1}$$

где в записи первого слагаемого $\Phi = \Phi\,(x, t, t/\varepsilon, \Upsilon_{x+}(x, t))$. Случайные функции $\alpha^{(ij)}(x, t)$ допускают оценку

$$|\alpha^{(ij)}_{\cdot s}(x, t)| \le C\,A_s(x, t)\,,$$

где (ср. (3.3)) $A_s(x, t) = [\,|\Gamma_{\cdot s}|(|w_{\varepsilon \cdot i}|\;|w_{\varepsilon \cdot j}|)]\,(x, t)$.

Цель последующих вычислений — убедиться в том, что основной вклад в случайную составляющую $w_\varepsilon(x, t)$ дает последнее слагаемое в правой части (4.1). В записи $w = w_\varepsilon$ мы опускаем обозначение малого параметра.

Лемма 4.1. *Для любой фиксированной пары индексов (i, j) имеет место оценка*

$$\mathbf{E}\;\|A_s\|_0^2 \le C\,\varepsilon^2\,, \quad s = 0, 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Пусть числа p, q заданы (3.4). Тогда ввиду (1.1), (1.2) и неравенства Гёльдера

$$|A_s(x, t)| \le C \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/4}} \int_V \frac{|w_{\cdot i}(\xi, \tau)|\;|w_{\cdot j}(\xi, \tau)|}{|x - \xi|^{n-1/2}}\,d\xi \le$$

$$\le C \int_0^t C_q\,\|w^2_{\cdot i}(\cdot, \tau)\|_{p,V} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/4}} \le C(p)\,C_q\,C'(t)\,\|w^2_{\cdot i}\|_{p,V_t}\,,$$

где постоянная C_q определена равенством (3.5), а величина

$$C'(t) = \left(\int_0^t \frac{dt}{(t-\tau)^{3q/4}}\right)^{1/q}$$

ограничена равномерно по t. Из последней оценки и (3.8) получаем неравенство

$$\mathbf{E}\;\|A_s\|_0^2 \le C\,\varepsilon^2\,.$$

Лемма 4.1 доказана.

Лемма 4.2. *Справедливо неравенство*

$$H_2 \equiv \mathbf{E}\;\|\Gamma\,[(w_{x+} - \hat{w}_{x+})\,\nabla_p \Phi\,](\cdot, t)\|^2_{1-\gamma} \le C\,\varepsilon^2\,,$$

где $\hat{w}(x, t) = w(x, t - 5\varepsilon)$, а $\gamma \in (0, 1)$.

Доказательство. Согласно [37, с. 406], (2.3) и (2.4)

$$\mathrm{E}\,|w(\xi,\tau)-w(\xi,\tau-5\varepsilon)|^2 \le C\left(\int\limits_{\tau-5\varepsilon}^{\tau}\int\limits_{V}|\Gamma(\xi,\tau,y,s)|\,dy\,ds\right)^2 \le C\varepsilon^2, \quad (4.2)$$

где C — неслучайная постоянная, не зависящая от ξ, ε, τ.

Полагая в лемме 3.1 [28, с. 186] $m=0$, $j=1$, $\beta=\gamma/2$, $1-\gamma<\eta<1-\gamma/2$, имеем при $\rho=1-\gamma/2-\eta-n$ неравенство

$$|\Gamma_{.i}(x,t,\xi,\tau)-\Gamma_{.i}(y,t,\xi,\tau)| \le C\frac{|x-y|^{\eta}}{(t-\tau)^{1-\gamma/4}}\left(|x-\xi|^{\rho}+|y-\xi|^{\rho}\right). \quad (4.3)$$

Воспользуемся определением нормы в $W_2^{1-\gamma}(V)$, формулой интегрирования по частям и ограниченностью $U_{.ij}(x,t)$, чтобы из неравенств (4.2), (4.3) получить оценку

$$H_2 \le C\varepsilon^2\int\limits_V\int\limits_V\left|\int\limits_0^t\int\limits_V(t-\tau)^{\gamma/4-1}(|x-\xi|^{\rho}+|y-\xi|^{\rho}d\xi\,d\tau\right|^2|x-y|^{2\eta-2(1-\gamma)-n}dx\,dy. \quad (4.4)$$

Так как $\gamma>0$, $1-\gamma<\eta<1-\gamma/2$, имеем

$$\int\limits_0^t(t-\tau)^{\gamma/4-1}\,d\tau<C\,,\qquad \int\limits_V|x-\xi|^{\rho}\,d\xi<C\,,\qquad \int\limits_V|x-y|^{2\eta-2(1-\gamma)-n}\,dy<C\,.$$

Из этих неравенств и (4.4) выводим окончательную оценку для H_2: $H_2\le C\varepsilon^2$. Лемма 4.2 доказана.

Лемма 4.3. *Имеет место оценка*

$$H_3 \equiv \mathrm{E}\;\|\Gamma\,[\hat{w}_{x+}\cdot\nabla_p\varphi]\,(\cdot,t)\|_1^2 \;\le C\varepsilon^{5/4}.$$

(Обозначения производных см. в п. 1.2; оценка равномерна по $t\in(0,T]$.)

Доказательство. Пусть

$$\hat{\varphi}_{\varepsilon i}(x,t/\varepsilon,t)=D_{p_i}\big(\Phi(x,t,t/\varepsilon,\Upsilon_{x+}(x,t))-\overline{\Phi}(x,t,\Upsilon_{x+}(x,t))\big).$$

Тогда H_3 оценивается конечной суммой интегралов вида

$$I=\mathrm{E}\int\limits_V\{\Gamma_{.k}(\hat{\varphi}_{\varepsilon i}\,\hat{w}_{.i})\,(x,t)\}^2\,dx.$$

Подынтегральное выражение в правой части формулы есть двойной интеграл

$$\{\Gamma_{.k}(\hat{\varphi}_{\varepsilon i}\,\hat{w}_{.i})\,(x,t)\}^2=\int\limits_{V_t}\int\limits_{V_t}\Gamma_{.k}(x,t,\xi',\tau')\,\Gamma_{.k}(x,t,\xi'',\tau'')\times$$

$$\times\,[\hat{\varphi}_{\varepsilon i}\,\hat{w}_{.i}]\,(\xi',\tau')\,[\hat{\varphi}_{\varepsilon i}\,\hat{w}_{.i}]\,(\xi'',\tau'')\,d\xi'd\xi''d\tau'd\tau''.$$

Значение $w(\xi,\tau)$ определяется начальными данными и значениями коэффициентов уравнения в слое $V_\tau=V\times[0,\tau]$. По этой причине при $\xi\in V$ для любого τ независимы случайные величины

$$\hat{w}_{.i}(\xi,\tau)=w_{.i}(\xi,\tau-5\varepsilon)\,,\qquad \hat{\varphi}_i(\xi,\tau/\varepsilon,\tau)\,.$$

Отсюда, используя ε-зависимость поля $\varphi_i(\xi,\tau/\varepsilon,\tau)$, получаем равенство

$$I\{\tau'-\tau''>2\varepsilon\}=I\{\tau''-\tau'>2\varepsilon\}=0,$$

где запись $I\{Z\}$ означает, что при вычислении «внутреннего» интеграла в I область изменения «временных» аргументов сужена до Z.

Пусть числа p, q те же, что и в (3.4). Тогда из неравенства Гёльдера и оценок (1.1), (1.2), (3.8) следует, что

$$I\le C\,\mathrm{E}\int\limits_V \iint\limits_{|\tau-\sigma|\le 2\varepsilon} C_q \quad \|\hat{w}_{\cdot,i}\|^2_{p,V}\frac{d\tau\,d\sigma}{(t-\tau)^{3/4}(t-\sigma)^{3/4}}\le C\varepsilon\,\varepsilon^{1/4}.$$

Лемма 4.3 доказана.

Лемма 4.4. *Справедливо неравенство*

$$\mathrm{E}\,\|\Gamma\varphi(\cdot,t)\|_1^2\le C\varepsilon. \tag{3.8}$$

Лемма 4.4 доказана в § 3 (см. вывод неравенства (3.8) при $p=2$).

Доказательство теоремы 2.2. Ниже мы фиксируем «время» t и рассматриваем случайное поле $w_\varepsilon(x,t)$, $x\in V$, как случайный элемент пространства $W_2^{1-\gamma}(V)$, $0<\gamma<1$.

Оператор вложения $W_2^{1-\gamma}(V)$ в $L_2(V)$ вполне непрерывен, так как $\gamma<1$ (см. п. 1.3). Поэтому шар в пространстве $W_2^{1-\gamma}(V)$ является компактом в $L_2(V)$.

Из неравенства Чебышева и оценок лемм 4.1—4.4 следует, что

$$\limsup_{\tau\to\infty}\mathrm{P}\left(\|\varepsilon^{-1/2}\mathrm{Q}\,w(\cdot,t)\|_{1-\gamma}>\tau\right)\le$$

$$\le\limsup_{\tau\to\infty}\tau^{-2}\,\mathrm{E}\,\|\varepsilon^{-1/2}\mathrm{Q}\,w(\cdot,t)\|^2_{1-\gamma}\le\lim_{\tau\to\infty}C\tau^{-2}=0,$$

где оператор Q определен равенством (2.8). Таким образом, семейство распределений, порожденных в пространстве $L_2(V)$ случайными полями

$$\varepsilon^{-1/2}\mathrm{Q}\,w(x,t),\quad \varepsilon>0,$$

слабо компактно (см. [43, с. 516]). Кроме того, в силу лемм 4.1—4.4 и условия 2.1 при произвольном выборе функции $h\in L_2(V)$ случайная величина $\langle h,\varepsilon^{-1/2}\mathrm{Q}\,w\rangle_0$ асимптотически нормальна при $\varepsilon\to0$ с параметрами $(0,\sigma_t^2(h))$, где $\sigma_t^2(h)$ определена в (2.9). Теорема 2.2 доказана.

§ 5. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ

Ниже величины ν и c_0 взяты из условий (1.3) и (1.4), а интегральные операторы $\mathrm{T}^{(k)}$ определены по функции $\mathrm{T}(x,y)$ равенствами

$$\mathrm{T}^{(1)}f(x)=Tf(x)=\int\limits_V T(x,y)f(y)\,dy,$$

$$\mathrm{T}^{(k)}f=\mathrm{T}(\mathrm{T}^{(k-1)}f),\quad k>1.$$

Лемма 5.1. *Пусть* $g(x) \in L_2(V)$, *а* $G(x,y)$ — *функция Грина краевой задачи* (1.5), (1.6). *Тогда*

$$\|Gg\|_0 \le c_0^{-1}\,\|g\|_0\,, \qquad \|G_{\cdot k}g\|_0 \le (c_0\nu)^{-1/2}\,\|g\|_0\,, \quad k = 1,\ldots,n\,. \tag{5.1}$$

Доказательство. Умножим (1.5) на $z(x)$ и проинтегрируем по частям. Получаем равенство

$$\int_V a_{ij}(x)\, z_{\cdot i}(x)\, z_{\cdot j}(x)\,dx + \int_V c(x)\, z^2(x)\,dx = \int_V g(x)\, z(x)\,dx\,.$$

Вместе с (1.4), условием эллиптичности (1.3) и неравенством Коши — Буняковского последнее соотношение приводит к оценке

$$\nu\, \|\,|z_x|\,\|_0^2 + c_0\,\|z\|_0^2 \le \|g\|_0\,\|z\|_0\,.$$

Следовательно,

$$\|z\|_0 \le c_0^{-1}\,\|g\|_0\,, \qquad \|z_{\cdot k}\|_0 \le (c_0\nu)^{-1/2}\,\|g\|_0\,, \quad k = 1,\ldots,n\,.$$

Из последних неравенств следует (5.1), так как $z(x) = G\,g(x)$. Лемма 5.1 доказана.

Пусть $w_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - U(x)$, где $u_\varepsilon(x)$ и $U(x)$ — решения краевых задач (2.10), (2.11) и (2.15), (2.16). Тогда невязка $w_\varepsilon(x)$ удовлетворяет уравнению

$$L^e w_\varepsilon = F\big(x/\varepsilon, (w_\varepsilon + U)_{x+}\big) - F\big(x/\varepsilon, U_{x+}\big) + \mu_\varepsilon\,, \tag{5.2}$$

где случайное поле $\mu = \mu_\varepsilon(x)$ введено в условии 2.2.

Применив к полученному равенству оператор Грина (см. п. 1.5), из оценок (5.1) выводим, что

$$\sum_{s=0}^{n} \|w_{\cdot s}\|_0 \le \mathrm{K}(1)\, d(n) \sum_{i=0}^{n} \|w_{\cdot i}\|_0 + \sum_{s=0}^{n} \|G_{\cdot s}\mu\|_0\,.$$

По условию (2.12) константа в правой части удовлетворяет неравенству $\mathrm{K}(1)\,d(n) < 1$, поэтому при $m = 0, 1, \ldots, n$

$$\|w_{\cdot m}\|_0 \le C \sum_{s=0}^{n} \|G_{\cdot s}\mu\|_0\,. \tag{5.3}$$

В дальнейшем удобно воспользоваться обозначениями [7]. Пусть $A(s)$ — произвольное разбиение множеста $S = \{1,\ldots,s\}$ на непересекающиеся классы $K_1,\ldots,K_r$, каждый из которых содержит не менее двух элементов. Запись $i \sim j$ означает, что i и j принадлежат одному классу; в противном случае используется обозначение $i)(j$.

С разбиением $A(s)$ ниже связывается множество $V(A(s))$ «s-мерных» точек $\{y_1,\ldots,y_s\} \in V^s$ таких, что $|y_i - y_j| > \varepsilon$ при $i)(j$, а в случае $i \sim j$ найдется последовательность номеров $i = i_0 \sim i_1 \sim \ldots \sim i_p = j$, для которых $|y_{i_{k-1}} - y_{i_k}| \le \varepsilon$.

Порядок особенности одинаков у всех производных функции Грина $G_{\cdot s}(x,y)$, $s = 1, 2, \ldots, n$. При свертке ядро сглаживается:

$$\left| \int\limits_V G_{\cdot s}(x, y)\, G_{\cdot s}(x, z)\, dx \right| \le C\, |y - z|^{2-n}.$$

Поэтому, используя центрированность и ε-зависимость поля $\mu(y)$, из (5.3) получаем оценки

$$\mathrm{E}\, \|w_{\cdot m}\|_0^{2p} \le C \sum_{s=0}^{n} \mathrm{E}\, \|G_{\cdot s}\mu\|_0^{2p} \le$$

$$\le C \sum_{A(2p)} \int\limits_{V(A(2p))} \frac{dy_1 \cdot \ldots \cdot dy_{2p}}{|y_1 - y_2|^{n-2} \cdot \ldots \cdot |y_{2p-1} - y_{2p}|^{n-2}},$$

где $0 < p \le n+2$. Здесь сумма $\sum\limits_{A(2p)}$ берется по всевозможным разбиениям множества $A(2p)$. Число таких разбиений ограничено константой, зависящей только от p. Используя лемму 3.1 [7, с. 145], получаем из последнего неравенства оценку

$$\mathrm{E}\, \|w_{\cdot m}\|_0^{2p} \le C(p)\varepsilon^{2p}. \tag{5.4}$$

При $p = 1$ из (5.4), в частности, следует, что $\mathrm{E}\, \|w_{\cdot m}\|_0^2 \le C\,\varepsilon^2$. Неравенство (2.17) доказано.

Перейдем к доказательству (2.18). Используя уравнение (5.2), легко проверить, что

$$|w_{\cdot s}(x)| \le C \sum_{i=0}^{n} |G_{\cdot s}|\; |w_{\cdot i}|(x) + |G_{\cdot s}\mu(x)|. \tag{5.5}$$

Из (5.5) следует, что величина $|w_{\cdot s}(x)|$ оценивается конечной суммой слагаемых вида $G_{\cdot k}^{(n+1)}|w_{\cdot i}|$, $|G_{\cdot k}\mu|$ и $G_{\cdot k}^{(r)}\,|G_{\cdot k}\mu|$, где $1 \le r \le n$. Используя неравенство Гёльдера и оценку (1.8), убеждаемся, что

$$|G_{\cdot k}^{(r)}\,|G_{\cdot k}\mu|\,| \le C\, \|G_{\cdot k}\mu\|_{2n+4,\,V}\,.$$

Кроме того, согласно [44, с. 283]

$$|G_{\cdot k}^{(n+1)}|w_{\cdot i}|\,| \le C\, \|w_{\cdot i}\|_0\,.$$

Поэтому при $p \le n+2$ среднее $\mathrm{E}\, |w_{\cdot s}(x)|^{2p}$ оценивается конечной суммой слагаемых вида

$$\mathrm{E}\, \|w_{\cdot i}\|_0^{2p}, \quad \mathrm{E}\, |G_{\cdot k}\mu|^{2p}, \quad \mathrm{E}\, \|G_{\cdot k}\mu\|_{2n+4,\,V}^{2p}\,.$$

При любом натуральном $p \le n+2$

$$\mathrm{E}\, (\mathrm{G}_{\cdot \mathrm{k}}\mu(x))^{2p} \le C \sum_{A(2p)} \int\limits_{V(A(2p))} \prod_{i=1}^{2p} \frac{dy_i}{|x - y_i|^{n-1}} \le C\,\varepsilon^p, \tag{5.6}$$

где C не зависит от x и ε. Из (5.6), (5.4) следует (2.18). Теорема 2.3 доказана.

§ 6. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ В СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МИКРОНЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Функция $w_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - U(x)$ удовлетворяет уравнению (5.2),

$$L^e w_\varepsilon = F\big(x/\varepsilon, (w_\varepsilon + U)_{x+}\big) - F\big(x/\varepsilon, U_{x+}\big) + \mu_\varepsilon,$$

где, как и ранее, $\mu_\varepsilon(x) = F(x/\varepsilon, U_{x+}(x)) - \overline{F}(U_{x+}(x))$. С помощью формулы Тейлора правая часть этого уравнения приводится к виду

$$L^e w_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(w_{\varepsilon\, x+} \cdot \nabla_p)^k F\big(x/\varepsilon, U_{x+}(x)\big) + \mu_\varepsilon(x) + \kappa_\varepsilon(x)\,,$$

где согласно (2.18) E $|\kappa_\varepsilon(y)|^2 \le C\,\varepsilon^{n+1}$.Применив к последнему равенству оператор Грина (см. п. 1.5), получаем тождество

$$\begin{aligned} w_\varepsilon = {} & G[(w_{\varepsilon x+} \cdot \nabla_p)\,\overline{F}\,] + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} G\,[(w_{\varepsilon x+} \cdot \nabla_p)^k\, \overline{F}\,] + \\ & + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} G\,[(w_{\varepsilon x+} \cdot \nabla_p)^k \mu_\varepsilon] + G\mu_\varepsilon + G\kappa_\varepsilon\,, \end{aligned} \tag{6.1}$$

где $\overline{F}(x) = \overline{F}(U_{x+}(x))$.

Определим оператор $T : W_2^1(V) \to L_2(V)$ формулой

$$Tg = g - G\,[(g_{x+} \cdot \nabla_p)\,\overline{F}\,]\,.$$

Ниже (см. лемму 6.1) показано, что оператор T имеет ограниченный обратный, а ядро $R(x, y)$ оператора $R = T^{-1} G$ допускает оценки

$$|R(x, y)| < C\,|x - y|^{2-n}, \quad |R_{.i}(x, y)| < C\,|x - y|^{1-n}.$$

Это обстоятельство позволяет записать соотношение (6.1) в виде

$$w_\varepsilon = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} R\,[(w_{\varepsilon x+} \cdot \nabla_p)^k\, \overline{F}\,] + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} R\,[(w_{\varepsilon x+} \cdot \nabla_p)^k \mu_\varepsilon\,] + R\,\mu_\varepsilon + R\,\kappa_\varepsilon\,. \tag{6.2}$$

В формулировке леммы 6.1 участвуют функции $r_i(x)$ и операторы $R^{\{i\}}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Они определяются равенствами

$$r_i(x) = D_{p_i}\overline{F}(U_{x+}(x))\,, \qquad R^{\{0\}} f = \sum_{k=1}^{\infty} G(r_0\, G)^{(k-1)} f\,,$$

$$R^{\{i\}} f = \sum_{k=1}^{\infty} R^{\{i-1\}} (r_i\, R^{\{i-1\}}_{.i})^{(k-1)} f, \qquad i = 1, \dots, n\,.$$

Лемма 6.1. *При* $i = 0, 1, \dots, n$ *и* $k = 1, 2, \dots, n$

$$\|R^{\{i\}}\| \equiv \|R^{\{i\}}\|_{L_2(V)\to L_2(V)} \le c_0^{-1}/z(i)\,, \qquad \|R^{\{i\}}_{\cdot k}\| \le (c_0\nu)^{-1/2}/z(i)\,, \quad (6.3)$$

где $z(i) = 1 - \mathrm{K}(1)\, d(i)$, *а постоянная* $d(i)$ *определена равенством* (2.13). *Кроме того, ядра* $R^{\{i\}}(x, y)$ *операторов* $R^{\{i\}}$ ($R^{\{n\}} = R$) *допускают оценки*

$$|R^{\{i\}}(x,y)| < C\,|x-y|^{2-n}\,, \qquad |R^{\{i\}}_{\cdot k}(x,y)| < C\,|x-y|^{1-n}\,. \qquad (6.4)$$

Доказательство. При $i = 0$ и любом k неравенства (6.3) очевидны в силу оценок леммы 5.1. Пусть оценки (6.3) справедливы при $i = m-1$ и любом k. Тогда из (2.12) следует, что

$$\|R^{\{m\}}\| \le \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{c_0\, z(m-1)} \left(\frac{(c_0\nu)^{-1/2} K(1)}{z(m-1)}\right)^s \le \frac{1}{c_0\, z(m-1)}\, \frac{z(m-1)}{z(m)} = \frac{1}{c_0\, z(m)}\,.$$

Аналогично

$$\|R^{\{m\}}_{\cdot k}\| \le \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(c_0\nu)^{-1/2}}{z(m-1)} \left(\frac{(c_0\nu)^{-1/2} K(1)}{z(m-1)}\right)^s \le (c_0\nu)^{-1/2}/z(m)\,.$$

Оценки (6.3) доказаны.

Из (6.3), (1.7), (1.8) при $i = 0, 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, n$ для ядер $R^{\{i\}}(x, y)$ вытекают неравенства (6.4). Лемма 6.1 доказана.

Как было отмечено выше, из оценок леммы 6.1 вытекает справедливость представления (6.2). Цель последующих вычислений — убедиться в том, что основной вклад в случайную составляющую w_ε дает слагаемое $R\mu_\varepsilon$. Удобно выделить этапы этих вычислений в виде лемм.

Как и в § 5, мы будем опускать в обозначениях случайных полей w_ε и μ_ε индекс ε. Кроме того, если не оговорено противное, $s = 2 - n/2 - \gamma'$, $\gamma' < \delta$, где δ — произвольное фиксированное положительное число (см. формулировку теоремы 2.4). Напомним, что обозначения функции и оператора умножения на нее одинаковы.

Лемма 6.2. *При* $s = 2 - n/2 - \gamma'$ *и* $\gamma' < \delta$

$$\mathrm{E}\,\|R\mu\|_s^2 \le C\varepsilon^n\,.$$

Доказательство. Поле $\mu(y)$ ε-зависимо и центрировано. Поэтому из (2.14) и лемм 4.5—4.7 [8] вытекает, что

$$\mathrm{E}\,\|R\mu\|_s^2 \le C \int\!\!\int_{|y_1-y_2|\le\varepsilon} dy_1\, dy_2 \le C\varepsilon^n\,.$$

Лемма 6.2 доказана.

Лемма 6.3. *Справедливо неравенство*

$$H_4 \equiv \mathrm{E}\,\|R\mu(R_{\cdot i}\mu)^{(2n)} w_{\cdot i}\|_0^2 \;\le C\varepsilon^{n+1}\,.$$

Доказательство. Применяя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$H_4 \le \mathrm{E}\left(\|w_{\cdot i}\|_0^2 \int_{V^2} \widetilde{R}^{\,2}(x,y)\, dx\, dy\right),$$

где $\widetilde{R}(x, y)$ — ядро оператора $R\mu(R_{\cdot j}\mu)^{(2n-1)}R_{\cdot j}$. Из этого неравенства, леммы 2 [44, с. 281], (5.4) и леммы 2.3 из [8] следует, что $H_4 \le C\varepsilon\varepsilon^n$. Лемма 6.3 доказана.

Ниже в формулировках лемм 6.4, 6.5

$$\nu(y) = \mu(y) + 1, \tag{6.5}$$

$$\mu_k(x) = R_{\cdot k}\mu(x), \tag{6.6}$$

а оператор $\hat{R}$ определен равенством

$$\hat{R}f = R\mu_{i_1}^{k_1}\nu R_{\cdot i_2}\mu_{i_2}^{k_2}\nu \dots R_{\cdot i_m}\mu_{i_m}^{k_m}f, \tag{6.7}$$

где k_j, $j = 1, \dots, m$ — неотрицательные целые числа.

Лемма 6.4. *Пусть* $m > n+1$, $p = k_1 + \dots + k_m > n+1$, $m+p \le 4n+1$. *Тогда* $\hat{R}(x, y)$ *— ядро оператора* $\hat{R}$ *— допускает оценку*

$$\mathrm{E}\,|\hat{R}(x, y)|^2 \le C\varepsilon^{n+1},$$

где C не зависит от ε, x, y.

Доказательство. Заметим, что

$$\int\limits_{|y-z|\le\varepsilon} \frac{dz}{|x-z|^{n-1}} \le C\varepsilon.$$

Поэтому можно использовать ε-зависимость и центрированность поля $\mu(y)$, чтобы получить оценку

$$\mathrm{E}\,|\hat{R}(x, y_m)|^2 \le C\prod_{i=1}^{p}\int\limits_{|z_i-y_j|\le\varepsilon}\frac{dz_i}{|x-z_i|^{n-1}} \le C\varepsilon^{n+1}.$$

Лемма 6.4 доказана.

Лемма 6.5. *Пусть натуральные числа m, p удовлетворяют условиям* $m \ge 1$, $p \ge 2$, $m+p \le 4n+1$, *а неотрицательные целые числа* k_j, $j = 1, \dots, m$, *выбраны так, что* $p = k_1 + \dots + k_m$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\mathrm{E}\,\|\hat{R}1 - \mathrm{E}\hat{R}1\|_s^2 \le C\varepsilon^{n+1},$$

где оператор $\hat{R}$ определен равенством (6.7), 1 *— функция, тождественно равная единице,* $s = 2 - n/2 - \gamma'$, $\gamma' < \delta$, *а неслучайная постоянная C не зависит от* ε.

Доказательство. Положим

$$q = (z_1, \dots, z_p, y_1, \dots, y_m) \in V^{p+m}, \quad q' = (z_1', \dots, z_p', y_1', \dots, y_m') \in V^{p+m}.$$

Для области $K \subset (V^{p+m})^2$ обозначим

$$J(K) = \int\limits_K \Psi(q)\,\Psi(q')\,dq\,dq',$$

где $dq = dz_1 \dots dz_p\,dy_1 \dots dy_m$, $dq' = dz_1' \dots dz_p'\,dy_1' \dots dy_m'$, а подынтегральное выражение задается равенством

$$\Psi(q)=\left(\prod_{j=1}^{m-1}|y_j-y_{j+1}|^{1-n}\right)\left(\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=L_{j-1}}^{L_j}|y_j-z_i|^{1-n}\right),$$

в котором $L_0=1$, $L_{j+1}=L_j+k_j$, $j=0,1,\dots,m$.

Введем области

$$A_1\equiv\{(q,q')\in V^{2(p+m)}:(\exists\, i,j,a,b)\;|h_i-h_j'|\le\varepsilon,\;|h_a-h_b|\le\varepsilon\},\tag{6.8}$$

$$A_2\equiv\{(q,q')\in V^{2(p+m)}:\;(\exists\, i,j,a,b)\;|h_i-h_j'|\le\varepsilon,\;|h_a-h_b'|\le\varepsilon\},\tag{6.9}$$

где $h_i=z_i$ при $i\le p$, $h_{p+r}=y_r$. Аналогичный смысл имеет h_i'. В (6.8) a или b могут совпадать с i; в (6.9) a может совпадать с i, но в этом случае $j\ne b$.

Из лемм 4.5—4.7 работы [8], неравенства (6.5), ε-зависимости, центрированности поля $\mu(y)$ и условия (2.14) следует, что для оценки $\mathrm{E}\,\|\hat{R}1-\mathrm{E}\hat{R}1\|_s^2$ достаточно оценить $J(A_1)$ и $J(A_2)$. Известно [45, § 8.7], что интегралы типа потенциала допускают оценки

$$\int_{V^{r-1}}\prod_{j=1}^{r-1}\frac{dy_j}{|y_j-y_{j+1}|^{n-1}}\le C,$$

$$\int_{V^{j-i-1}}\prod_{k=i}^{j-1}|y_k-y_{k+1}|^{1-n}\,dy_{i+1}\dots dy_{j-1}\;\le C\,|y_i-y_j|^{1-n},$$

$$\int_{|z_j-h_r|\le\varepsilon}|y_i-z_j|^{1-n}\,dz_j\le C\,\varepsilon\,.$$

Поэтому после интегрирования по всем переменным кроме h_i, h_j' для интегралов $J(A_1)$ и $J(A_2)$ получается неравенство

$$J(A_1)+J(A_2)\le C\,\varepsilon\iint_{|h_i-h_j'|\le\varepsilon}dh_i\,dh_j'\;.$$

Отсюда следует оценка $J(A_1)+J(A_2)\le C\,\varepsilon^{n+1}$. Лемма 6.5 доказана.

Лемма 6.6. *Пусть*

$$\vec{w}_j=R_{\cdot l}\left(\prod_{k=0}^{n}|w_{\cdot k}|^{i(k+j)}\right),$$

где $i(0)+i(1)+\ldots+i(p(n+1)+n)>n+2$. *Тогда величина*

$$H_5\equiv\mathrm{E}\left|\prod_{k=0}^{p}\vec{w}_{k(n+1)}\right|$$

допускает оценку

$$H_5\le\;C\,\varepsilon^{n/2+1}\,.$$

Доказательство. Пусть числа $\lambda(i)\ge1$, $i=0,1,\dots,p(n+1)+n$ удовлетворяют условию

$$\sum_{i=0}^{p(n+1)+n} \frac{1}{\lambda(i)} = 1 \quad .$$

Тогда из неравенства Гёльдера и (2.18) получаем оценки

$$H_4 \leq \check{C} \left(\mathrm{E}\, |w_{\cdot 0}|^{i(0)\lambda(0)}\right)^{1/\lambda(0)} \times$$

$$\times \left(\mathrm{E}\, |w_{\cdot 1}|^{i(1)\lambda(1)}\right)^{1/\lambda(1)} \cdot \ldots \cdot \left(\mathrm{E}\, |w_{\cdot n}|^{i(p(n+1)+n)\lambda(p(n+1)+n)}\right)^{1/\lambda(p(n+1)+n)} \leq$$

$$\leq C \prod_{j=0}^{p(n+1)+n} \varepsilon^{1/2i(j)} \leq C\, \varepsilon^{n/2+1} .$$

Лемма 6.6 доказана.

Замечание 6.1. Утверждение леммы 6.6 остается справедливым, если для функции $w_{\cdot s}(x)$ вместо (2.18) имеет место более слабое неравенство $\mathrm{E}\, \| w_{\cdot s}{}^{p} \|_0^2 \leq C\, \varepsilon^{p}$.

Представление (6.2) можно записать в виде

$$w_\varepsilon = R\mu_\varepsilon + R\kappa_\varepsilon + \sum q_k + \sum q_k' + \sum \tilde{q}_k + \sum \hat{q}_k, \tag{6.8}$$

где число слагаемых в каждой сумме конечно. При этом каждый член в первой сумме оценивается как $R\mu(R_{\cdot j}\mu)^{(2n)} w_{\cdot i}$ в лемме 6.3, а

$$\sum \mathrm{E}\, |q_k'(x)| \leq C\, \mathrm{E} \int_V |\hat{R}(x, y)|\, dy < C\, \varepsilon^{n+1},$$

где ядро $\hat{R}(x, y)$ оператора $\hat{R}$ (см. (6.7)) удовлетворяет условиям леммы 6.4.

Члены третьей суммы в (6.8) оцениваются подобно величине H_5 в лемме 6.6. Особенностью слагаемых последнего вида является то, что они не содержат случайной невязки w_ε. Каждое случайное поле $\hat{q}_k$ оценивается как $\hat{R}1$ в лемме 6.5. Через эти поля определяется неслучайная центрирующая поправка $W(x, \varepsilon)$ (см. формулировку теоремы 2.4):

$$W(x, \varepsilon) = \sum \mathrm{E}\, \hat{q}_k .$$

Доказательство теоремы 2.4. Оператор вложения пространства $W_2^s(V)$ в $W_2^r(V)$ вполне непрерывен, так как $s > r$. Поэтому шар в пространстве $W_2^s(V)$ является компактом в $W_2^r(V)$. Из неравенства Чебышева и оценок лемм 6.2—6.6 следует, что

$$\limsup_{t\to\infty} \mathrm{P}(\|\varepsilon^{-n/2}(w(\cdot, \omega) - W(\cdot, \varepsilon))\|_s > t) \leq$$

$$\leq \limsup_{t\to\infty} \mathrm{E}\, \|\varepsilon^{-n/2}(w(\cdot, \omega) - W(\cdot, \varepsilon))\|_s^2 / t^2 \leq \lim_{t\to\infty} C\, t^{-2} = 0 .$$

Отсюда и из [43, с. 516] следует, что семейство распределений, порожденных в пространстве $W_2^r(V)$ случайным полем $\varepsilon^{-n/2}(w(x, \omega) - W(x, \varepsilon))$, слабо компактно. Кроме того, из лемм 6.2—6.6 и условия 2.2 следует, что при $\varepsilon \to 0$ для всякой непрерывной функции $\tilde{h}$ асимптотически нормальна случайная величина $< \tilde{h}, \varepsilon^{-n/2}(w - W) >_{-r}$, где

$$g(x) = \int_V \tilde{h}(y)\, G(x, y)\, dy,$$

а дисперсия $\sigma^2(g)$ центрированного предельного гауссовского распределения определена в (2.19). Теорема 2.4 доказана.

Убедимся в справедливости замечания 2.2. Пусть $n = 3$ и $F = F(x/\varepsilon, w(x))$. В этом случае

$$\int_V G(x, y)\, G(x, z) dx \le C\,,$$

и при выводе оценок теоремы 2.3 из неравенств (1.7), (1.8) используется только соотношение (1.7). Это позволяет получить следующие оценки:

$$\mathrm{E}\, \|w\|_0^2 \le C\varepsilon^3\,, \qquad \mathrm{E}\, |w(x)|^2 \le C\varepsilon^2\,.$$

Поэтому представление (6.8) принимает вид

$$w = R\mu_0 R\mu_0 u \; + R\mu_0 R\mu + R\mu + R\kappa\,,$$

где $\mu_0 = D_{p_0} F(x/\varepsilon, U) - \mathrm{E}\, D_{p_0} F(x/\varepsilon, U)$ — ограниченная случайная величина; в рассматриваемом случае $\mu = F(x/\varepsilon, U) - \mathrm{E}\, F(x/\varepsilon, U)$. Внося необходимые упрощения в доказательства лемм 6.2—6.6 и используя вместо (2.14) условие (2.14'), получаем оценки

$$\mathrm{E}\, (\, \|R\mu_0 R\mu_0 w\|_{1/2-\gamma'} + \|R\mu_0 R\mu\|_{1/2-\gamma'} + \|R\kappa\|_{1/2-\gamma'}) \le C\varepsilon^2\,,$$

$$\mathrm{E}\, \|R\mu\|_{1/2-\gamma'}^2 \le C\varepsilon^3\,.$$

Из них и условия 2.2 следует, что утверждение замечания 2.2 верно при $n = 3$. При $n = 2$ рассуждения аналогичны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан. Усреднение и G-сходимость // Успехи мат. наук.—1978.—Т. 34, вып. 5.—С. 65–133.
2. Юринский В. В. Об усреднении недивергентных уравнений второго порядка со случайными коэффициентам // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 2.—С. 176–188.
3. Жиков В. В., Сиражудинов М. М. Усреднение недивергентных эллиптических и параболических операторов второго порядка и стабилизация решения задачи Коши // Мат. сб.—1981.—Т. 116, № 2.—С. 166–186.
4. Юринский В. В. Об усреднении эллиптической краевой задачи со случайными коэффициентами // Сиб. мат. журн.—1980.—Т. 21, № 3.—С. 209–223.
5. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. О G-сходимости параболических операторов // Успехи мат. наук.—1981—Т. 36, № 1.—С. 11–58.

6. **Papanicolaou G., Varadhan S. R. S.** Boundary value problems with rapidly oscillating random coefficients // Colloquia mathematica societatis Janos Bolyai, Random fields.—1981.—V. 2, N 27.—P. 835–873.
7. **Пожидаев А. В.** Об асимптотической нормальности решений краевых задач со случайными коэффициентами // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 4.—С. 142–153.
8. **Пожидаев А. В.** Предельное поведение решений краевых задач со случайными коэффициентами // Предельные теоремы теории вероятностей.—Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1985.—С. 86–96.—(Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 5).
9. **Пожидаев А. В.** Скорость сходимости в принципе усреднения для эллиптических уравнений со случайными коэффициентами // Теория случайных процессов.—Киев, 1984.—Вып. 12.—С. 59–63.
10. **Юринский В. В.** Об усреднении симметричной диффузии в случайной среде // Сиб. мат. журн.—1986.—Т.27, № 4.—С. 167–180.
11. **Юринский В. В.** Об усреднении диффузии в случайно среде // Предельные теоремы теории вероятностей.—Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1985.—С. 76–85.—(Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 5).
12. **Yurinskii V. V.** On the homogenization error boundary problems with highly oscillating random coefficients // 1st World Congress Bernoulli Society.—Tashkent, 1986.—V. 2.—P. 651.
13. **Пожидаев А. В., Юринский В. В.** Оценка погрешности усреднения для симметричных эллиптических систем со случайными коэффициентами // Успехи мат. наук.—1988.—Т. 43, вып. 4.—С. 168–169.
14. **Пожидаев А. В., Юринский В. В.** О погрешности усреднения симметричных эллиптических систем // Известия АН СССР. Сер. мат.—1989.—Т. 53, № 4.—С. 851–867.
15. **Кошелев А. И.** Регулярность решений эллиптических уравнений и систем.—М.: Наука, 1986.
16. **Хасьминский Р. З.** О случайных процессах, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром // Теория вероятностей и ее применения.—1966.—Т. 11, № 2.—С. 240–259.
17. **Бородин А. Н.** Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью // Теория вероятностей и ее применения.—1972.—Т. 23, № 3.—С. 498–512.
18. **Papanicolaou G. C., Kohler W.** Asymptotic theory of mixing stochastic ordinary differential equations // Communs pure and appl. math.—1979.—V. 27, N 5.—P. 641–668.
19. **Бродский Я. С., Лукачер Б. Я.** Флуктуации в схеме усреднения для дифференциальных уравнений со случайной правой частью // Теория случайных процессов.—Киев, 1984.—Вып. 12.—С. 8–17.
20. **Пожидаев А. В.** Флуктуации в схеме усреднения для эллиптических краевых задач // Теория вероятностей и ее применения—1984.—Т. 29, № 1.—С. 187–188.
21. **Жауров Ю. В.** Флуктуации в схеме усреднения и суммирование независимых случайных величин // Теория случайных процессов.—Киев, 1984.—Вып. 12.—С. 21–27.
22. **Figari R., Orlandi E., Papanicolaou G.** Mean field and gaussian approximation for partial differential equations with random coefficients // SIAM J. appl. math.—1982.—V. 42, N 5.—P. 1069–1077.

23. Юринский В. В. О распространении волн в одномерной случайной среде.—Новосибирск, 1982.—26 с.—(Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 9).
24. Аканбаев Н. Об оценке остаточного члена в теореме осреднения для случайных параболических уравнений // Известия АН Каз.ССР. Сер. физ.-мат.—1985.—№ 5.—С. 11–15.
25. Pozhidaev A. V., Yurinskii V. V. On homogenezation of partial differential equations with random coefficients // USSR–Japan symp. on probab. th. and math. stat. Abstracts of Commun.—Tbilisi, 1982.—V. 2.—P. 161–163.
26. Пожидаев А. В. Асимптотическая нормальность решений параболических уравнений со случайными коэффициентами // Предельные теоремы теории вероятностей.—Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1985.—С. 170–181.—(Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 5).
27. Watanabe H. Averaging and fluctuations for parabolic equations with rapidly oscillating random coefficients // Probab. Th. Rel. Fields.—1988.—V. 77, N 5.—P. 359–378.
28. Пожидаев А. В. Асимптотическая нормальность погрешности усреднения параболических краевых задач // Асимптотический анализ распределений случайных процессов.—Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1989.—С. 181–193.—(Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 13).
29. Пожидаев А. В. Предельные теоремы для решений дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами // IV Межд. Вильнюсская конференция по теории вероятностей и матема- тической статистике: Тезисы.—Вильнюс, 1985.—Т. 3.—С. 43–44.
30. Pozhidaev A. V. Asymptotic normality of homogenization error // 1st World Congress Bernoulli Society.—Tashkent, 1986.—V. 2.—P. 648.
31. Pozhidaev A. V. Asymptotic normality of solutions of differential equations with random coefficients // Vth intern. Vilnius conf. on probab. th. and math. stat.: Abstracts of Comm.—Vilnius, 1989.—V. 2.—P. 98.
32. Pozhidaev A. V. Differential equations with random coefficients // 14th LFIP conf. on system modelling and optimization.—Leipzig, 1989.—V. 5.—P. 64.
33. Pozhidaev A. V. Random fields and differential equations // 2-nd Bernoulli Society World Congress, Uppsala, 1990: Abstracts.—Montpelier: Capital City Press.—P. 52.
34. Pozhidaev A. V. Asymptotic normality of solutions of random equations // The 19th conf. on stochastic processes and their applications: Abstracts.—Eisenach, 1990.—P. 80.
35. Пожидаев А. В. Асимптотическая нормальность погрешности усреднения эллиптических краевых задач // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32, № 4.—С. 104–115.
36. Pozhidaev A. V. Asymptotic normality of the solutions of nonlinear random equations//VI USSR–Japan symp. on probab. th. and math. stat.: Abstracts of Comm.—Kiev, 1991.—P. 115.
37. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнений параболического типа.—М.: Наука, 1967.

38. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.—М.: Наука, 1973.
39. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения.—М.: Мир, 1971.
40. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа.—М.: Мир, 196