АСИМПТОТИКА ПЛОТНОСТЕЙ СТАРШИХ МОМЕНТОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

М. С. Сгибнев

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\{X_n\}$ — обычный процесс восстановления, т. е. $\{X_n\}$ — последовательность независимых положительных одинаково распределенных случайных величин, и пусть $\{S_n\}$ — последовательность их частичных сумм: $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \geq 1$, $S_0 = 0$. Величина $N(t) = \sup\{n \geq 1 : S_n \leq t\}$ называется *числом восстановлений* на отрезке $(0, t]$, а функция $H(t) = = \mathrm{E}\, N(t) + 1 = \sum_{k=0}^{\infty} F^{k*}(t)$ —*функцией восстановления*; здесь F^{k*} — k-кратная свертка распределения F случайной величины X_1 с F, $F^{0*} = E$ — распределение, сосредоточенное в нуле, $F^{1*} = F$.

В настоящей работе речь пойдет о старших моментах восстановления $\mathrm{E}\,(N(t))^n$, $n > 1$. Как отмечено в [1], старшие моменты, не ограничивая общности, удобнее изучать в виде так называемых Ф-моментов восстановления: $\Phi_n(t) = \mathrm{E}\left\{(N(t)+1)\,(N(t)+2)\ldots(N(t)+n)\right\}$, где $n > 0$ целое, ибо в этом случае преобразование Лапласа — Стилтьеса неубывающей функции $\Phi_n(t)$ имеет весьма простой вид:

$$\widehat{\Phi}_n(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{sx}\, d\,\Phi_n(x) = n\,!\,(1 - \widehat{F}(s))^{-n}, \quad \mathrm{Re}\, s < 0,$$

где $\widehat{F}(s) = \mathrm{E}\exp(sX_1)$ — преобразование Лапласа распределения F. Неубывающая функция $\Phi_n(t)$ порождает меру, определенную на σ-алгебре борелевских множеств $\mathfrak{B}$, которую мы также будем обозначать символом Φ_n. Справедливо представление

$$\Phi_n(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n\,(n+k-1)!}{k!} F^{k*}(A), \quad A \in \mathfrak{B}. \tag{1}$$

Если распределение F абсолютно непрерывно с плотностью $f(t)$, то *плотностью Ф-момента порядка n* назовем функцию

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n\,(n+k-1)!}{k!} f^{k*}(t), \tag{2}$$

где $f^{k*}(t)$ — k-кратная свертка плотности $f(t)$.

Настоящая работа посвящена изучению асимптотики функции $\varphi_n(t)$ при $t \to \infty$. При этом мы не будем предполагать, что распределение F

© *М. С. Сгибнев*, 1993

сосредоточено на $[0,\infty)$, подобно тому, как в расширенной теории восстановления не предполагается, что мера восстановления H порождается распределением F, сосредоточенным на $[0,\infty)$. Разумеется, такое расширение объекта исследований возможно только в том случае, когда правые части равенств (1) и (2) имеют смысл. В этом отношении справедливо следующее утверждение (см. [2]): если $\mathrm{E}X_1>0$, то мера Φ_n σ-конечна тогда и только тогда, когда $\mathrm{E}\left(X_1^-\right)^n<\infty$, здесь $x^-=\max(0,-x)$. В этом случае функция $\varphi_n(t)$ почти всюду конечна.

Итак, в дальнейшем $X, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с общим абсолютно непрерывным распределением F в $\mathbf{R}$ и с конечным положительным средним $\mu=\mathrm{E}X$, через $f(t)$, $t\in\mathbf{R}$, будем обозначать плотность распределения F.

В доказательствах формулируемых здесь теорем существенным образом используется метод банаховых алгебр, основы которого применительно к асимптотическим задачам теории вероятностей были заложены в работах [3—6]. Отметим также работы [7—9], в которых этот метод был применен к исследованию асимптотики плотности восстановления $\varphi_1(t)$.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $\psi(x)$, $x\in\mathbf{R}$,— полумультипликативная функция, т. е. $\psi(x)$ — конечная положительная измеримая по Борелю функция такая, что

$$\psi(0)=1\,,\quad \psi(x+y)\le\psi(x)\,\psi(y)\,,\quad x,y\in\mathbf{R}\,.$$

Для нее выполняются соотношения [10, с. 258, 261]

$$-\infty<r_-(\psi)=\lim_{x\to-\infty}\ln\psi(x)/x\le\lim_{x\to\infty}\ln\psi(x)/x=r_+(\psi)<+\infty\,,$$

$$M(h)=\sup\{\psi(x):\,x\in[-h,h]\}<\infty \tag{3}$$

для любого $h>0$. Будем отождествлять произвольную комплекснозначную абсолютно непрерывную меру на прямой $\mathbf{R}$ с классом эквивалентных функций, каждая из которых может рассматриваться как производная Радона — Никодима этой меры относительно меры Лебега. Обозначим через $\widetilde{S}_\psi$ совокупность всех σ-конечных комплекснозначных абсолютно непрерывных мер f, таких что $\|f\|_\psi\equiv\int|f(x)|\psi(x)\,dx<\infty$; отсутствие пределов интегрирования при знаке интеграла означает, что интегрирование ведется по всей прямой $\mathbf{R}$. Совокупность $\widetilde{S}_\psi$ замкнута относительно операций суммы и свертки двух элементов и умножения элемента на комплексное число.

Пусть $\tau(x)$, $x\in\mathbf{R}$, — ограниченная измеримая по Борелю положительная функция такая, что

$$\lim_{|x|\to\infty}(\tau(x))^{1/x}=1\,, \tag{4}$$

$$\sup\{\tau(x)/\tau(x-y):\,x\in\mathbf{R},\ |y|\le1\}=C_0<\infty\,. \tag{5}$$

Для $f\in\widetilde{S}_\psi$ положим

$$P_\tau(f) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|\psi(x)/\tau(x).$$

Обозначим

$$\widetilde{S}_\psi(\tau) = \{f\in \widetilde{S}_\psi :\ P_\tau(f) < \infty\}, \qquad \widetilde{S}^0_\psi(\tau) = \{f\in \widetilde{S}_\psi(\tau):\ \lim_{|x|\to\infty} f(x)\,\psi(x)/\tau(x) = 0\};$$

здесь и в дальнейшем соотношения с участием плотностей элементов из $\widetilde{S}_\psi$ понимаются в том смысле, что найдутся представители из классов эквивалентных функций, для которых выполняются указанные соотношения. Допустим, что $\tau(x)$ такова, что для любых $f, g\in \widetilde{S}_\psi(\tau)$

$$P_\tau(f*g) \le C\left(\|f\|_\psi P_\tau(g) + \|g\|_\psi P_\tau(f) + P_\tau(f)\,P_\tau(g)\right), \tag{6}$$

где константа $C \ge 1$ не зависит от f, g. Функции $\tau(x)$, удовлетворяющие условиям (4)—(6), будем называть *нормирующими*. Положим

$$\|f\|_{\psi,\tau} = C\left(\|f\|_\psi + P_\tau(f)\right).$$

Если в качестве операции умножения элементов из $\widetilde{S}_\psi(\tau)$ взять их свертку, а в качестве нормы — функционал $\|f\|_{\psi,\tau}$, то совокупности $\widetilde{S}_\psi(\tau)$ и $\widetilde{S}^0_\psi(\tau)$ удовлетворяют всем требованиям определения банаховой алгебры, кроме существования единичного элемента [11]. Через S_ψ $(S_\psi(\tau), S^0_\psi(\tau))$ обозначим банаховы алгебры, полученные присоединением единицы E к $\widetilde{S}_\psi$ $(\widetilde{S}_\psi(\tau), \widetilde{S}^0_\psi(\tau))$, E — мера единичной массы, сосредоточенная в нуле. Положим $\|f\|_{\psi,\tau} = |a| + \|\widetilde{f}\|_{\psi,\tau}$, где $f = aE + \widetilde{f}$ — произвольный элемент алгебры $S_\psi(\tau)$; здесь $a\in\mathbf{C}$, $\widetilde{f}\in\widetilde{S}_\psi(\tau)$. Аналогично определяется норма в алгебре S_ψ.

Пусть f — произвольный элемент из S_ψ. Условимся обозначать через $f(x)$ плотность абсолютно непрерывной составляющей меры f. Преобразование Лапласа $\widehat{f}(s)$ меры $f = aE + f(x)\in S_\psi$ определим равенством $\widehat{f}(s) = a + \int f(x)\,e^{sx}dx$; интеграл сходится абсолютно в полосе $\Pi(\psi) = \{s\in\mathbf{C}: r_-(\psi) \le \operatorname{Re} s \le r_+(\psi)\}$. Конкретные условия на функцию $\tau(x)$, обеспечивающие выполнение соотношения (6) при любой полумультипликативной функции $\psi(x)$, приведены в [11, условия (A1)—(A4)]. Этим условиям удовлетворяют как надстепенные функции [12]:

$$\sup_{x\ge 0}\ \sup_{t\ge x/2} \tau(t)/\tau(x) < \infty \tag{7}$$

(плюс аналогичное неравенство на отрицательной полуоси), так и функции из работы [6], для которых справедливо неравенство

$$\sup\{\tau*\tau(t)/\tau(t):\ t\in\mathbf{R}\} < \infty.$$

Замечание 1. В определении нормы $\|f\|_{\psi,\tau}$ вместо $P_\tau(f)$ можно взять функционал

$$P'_\tau(f) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\ge 0} |f(x)|\,\psi(x)/\tau(x),\quad f\in S_\psi.$$

В этом случае от нормирующей функции $\tau(x)$, $x \ge 0$, достаточно потребовать, чтобы она удовлетворяла условиям (4)—(6) с соответствующими изменениями. Положим

$$\mathscr{S}_\psi(\tau) = \{f \in S_\psi : P'_\tau(f) < \infty\}, \quad \mathscr{S}^0_\psi(\tau) = \{f \in \mathscr{S}_\psi(\tau) : \lim_{x\to\infty} f(x)\,\psi(x)/\tau(x) = 0\}.$$

Рассмотрим совокупность $Sl(\psi,\tau) = \{f \in S_\psi(\tau) :$ существует и конечен $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\,\psi(x)/\tau(x) = l(f)\}$ и, аналогично, $\mathscr{S}l(\psi,\tau) = \{f \in \mathscr{S}_\psi(\tau) : \ldots\}$. Будем всегда предполагать, что введенные совокупности — банаховы подалгебры алгебр $S_\psi(\tau)$ и $\mathscr{S}_\psi(\tau)$ соответственно и что выполняется соотношение

$$l(f * g) = l(f)\,\hat{g}(r_+(\psi)) + l(g)\,\hat{f}(r_+(\psi)) \tag{8}$$

для любых $f, g \in Sl(\psi,\tau)$ ($\mathscr{S}l(\psi,\tau)$). Достаточные для этого условия на функции $\tau(x)$ и $\psi(x)$ приведены в [11, п. 3]. В качестве примера отметим один частный случай: $\tau(x)$, $x \ge 0$,— ограниченная правильно меняющаяся на бесконечности функция и $\psi(x)/\psi(x-y) \to \exp(r_+(\psi)y)$ при $x \to \infty$.

В дальнейшем, когда речь пойдет о применении банаховых алгебр $S_\psi(\tau)$ и $Sl(\psi,\tau)$, мы будем предполагать, что нормирующая функция обеспечивает выполнение следующего условия: для любого $f \in S_\psi(\tau)$

$$\lim_{n\to\infty} P_\tau(f_n^c * f_n^c) = 0, \tag{9}$$

где $f_n^c(x) = f(x)\,\mathbf{1}_{\mathbf{R}\setminus[-n,n]}(x)$; аналогично, для любого $f \in \mathscr{S}_\psi(\tau)$ ($\mathscr{S}l(\psi,\tau)$) мы предполагаем выполненным равенство

$$\lim_{n\to\infty} P'_\tau((f\,\mathbf{1}_{[n,\infty)})^{2*}) = 0; \tag{10}$$

здесь $\mathbf{1}_A(x)$ — индикаторная функция множества A. Информация об условиях на функцию $\tau(x)$, гарантирующих выполнение равенств (9) и (10), содержится в работе [11]. Здесь отметим только, что условие (9) будет выполнено, если $\tau(x)$ — надстепенная функция (см. условие (7)). Заметим также, что правильно меняющаяся функция $\tau(x) = x^{-\alpha}L(x)$, $x \ge 0$, где $\alpha > 0$, а $L(x)$ медленно меняется на бесконечности, удовлетворяет условию (7) (после изменения ее, в случае необходимости, на некотором конечном отрезке) и гарантирует тем самым выполнение условия (10).

Пусть $\Lambda(z)$ — аналитическая функция в области $\mathscr{D}$, содержащей спектр элемента $f = aE + f(x) \in S_\psi$, т. е. $\mathscr{D} \supset \{\hat{f}(s) : s \in \Pi(\psi)\} \cup \{a\}$. Значение аналитической функции $\Lambda(z)$ на элементе $f \in S_\psi$ определяется как элемент $\Lambda(f)$ такой, что

$$\widehat{(\Lambda(f))}(s) = \Lambda(\hat{f}(s)), \qquad s \in \Pi(\psi) \cup \{a\}.$$

Такой элемент $\Lambda(f)$ всегда существует [13].

В дальнейшем нам потребуется следующий результат об асимптотическом поведении значений аналитических функций на элементах введенных банаховых алгебр.

Теорема A [11]. *Пусть* $\Lambda(z)$ — *аналитическая функция в области* $\mathscr{D}$, *содержащей спектр элемента* $f \in S_\psi$. *Если*

$$f \in S^0_\psi(\tau) \quad (\mathscr{S}^0_\psi(\tau)\,,\ S_\psi(\tau)\,,\ \mathscr{S}_\psi(\tau))\,,$$

то $\Lambda(f) \in S^0_\psi(\tau) \quad (\mathscr{S}^0_\psi(\tau)\,,\ S_\psi(\tau)\,,\ \mathscr{S}_\psi(\tau))$. *Если*

$$f \in Sl(\psi,\tau) \quad (\mathscr{S}l(\psi,\tau))\,,$$

то $\Lambda(f) \in Sl(\psi,\tau)$ $(\mathscr{S}l(\psi,\tau))$; *при этом* $l(\Lambda(f)) = \Lambda'(\widehat{f}(r_+(\psi)))\, l(f)$.

§ 2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть ν — конечная комплекснозначная мера. Обозначим $\nu(x) = \nu((-\infty, x])$. Пусть $|\nu|(A)$ — полная вариация меры ν на множестве $A \in \mathfrak{B}$. Определим σ-конечную меру $J(\nu)$ по формуле [6]

$$J(\nu)\,(A) = \int_A (\nu(\mathbf{R})\, E(x) - \nu(x))\, dx\,, \quad A \in \mathfrak{B}\,.$$

Если $\int |x|\; |\nu|(dx) < \infty$, то преобразование Лапласа этой меры равно $(\widehat{\nu}(s) - \nu(\mathbf{R}))/s$, $\operatorname{Re} s = 0$. Меру $J^m(\nu)$, полученную после m-кратного применения оператора J к мере ν, обозначим через $\nu_{(m)}$. Пусть F — распределение вероятностей в $\mathbf{R}$ (или просто мера) с плотностью $f(x)$. Через $f_{(m)}(x)$ будем обозначать плотность меры $F_{(m)}$: $f_{(m)}(x) \equiv F_{(m-1)}(\mathbf{R})\, E(x) - F_{(m-1)}(x)$. По определению $f_{(0)}(x) = f(x)$. Предположим, что распределение F имеет конечный момент μ_n порядка n. Определим коэффициенты γ_k, $k = 1, \ldots, n$, из асимптотического равенства

$$n!\,(1-\widehat{F}(s))^{-n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\gamma_k}{s^k} + o(s)\,, \qquad s \to 0\,. \tag{11}$$

Обозначим через $l(x) = 1_{[0,\infty)}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, плотность меры Лебега, сосредоточенной на $[0, \infty)$.

Теорема 1. *Пусть* F — *абсолютно непрерывное распределение вероятностей случайной величины* X *с плотностью* $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, *и конечным положительным средним* $\mu = \mathbf{E}X$, *и пусть* $\varphi_n(t)$ — *плотность* Φ-*момента восстановления порядка* n, $n > 1$, *определяемая по формуле* (2). *Пусть* $\psi(x)$ — *полумультипликативная функция такая, что* $r_-(\psi) \le 0 \le r_+(\psi)$, *и пусть* $\tau(x)$ — *нормирующая функция. Предположим, что* f *и* $f_{(n)} \in S^0_\psi(\tau)$ *и что в полосе* $\Pi(\psi)$ *нет отличных от нуля корней характеристического уравнения* $1 - \widehat{f}(z) = 0$. *Тогда справедливо следующее представление:*

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k\, l^{k*}(t) + (-1)^{n-1} n!\, n \mu^{-n-1} f_{(n+1)}(t) + d_n(t)\,, \tag{12}$$

где $d_n(t) = o(\tau(t)/\psi(t))$, $|t| \to \infty$.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что $f_{(k)} \in S_{\psi}^{0}(\tau)$, $k = n, n-1, \ldots, 1$. Действительно, справедливы оценки

$$f_{(n)}(t-2) \geq \int_{t-2}^{t-1} F_{(n-1)}((x, \infty))\, dx \geq F_{(n-1)}((t-1, \infty)) \geq \int_{t-1}^{t} f_{(n-1)}(x)\, dx \geq f_{(n-1)}(t). \tag{13}$$

Из соотношений (3) и (5) вытекает, что фиксированный сдвиг аргумента произвольного элемента банаховой алгебры $S_{\psi}^{0}(\tau)$ не выводит этот элемент за пределы $S_{\psi}^{0}(\tau)$. Поэтому из неравенств (13) и принадлежности $f_{(n)} \in S_{\psi}^{0}(\tau)$ вытекает, что $f_{(n-1)} \in S_{\psi}^{0}(\tau)$. Функция

$$\widehat{V}(s) = \{(s - r_{+}(\psi) - 1)\,(1 - \widehat{f}(s))/s\}^{n}, \qquad s \in \Pi(\psi),$$

является преобразованием Лапласа некоторого элемента $V \in S_{\psi}^{0}(\tau)$, так как $\widehat{V}(s) = = (v_0(s))^n$, где $v_0(s) = 1 - \widehat{f}(s) + (r_{+}(\psi) + 1)\,\widehat{f}_{(1)}(s)$. Покажем, что элемент V обладает обратным $W = V^{-1} \in S_{\psi}^{0}(\tau)$. Поскольку распределение F абсолютно непрерывно, имеем $\widehat{f}(s) \to 0$ при $s \to \infty$, $s \in \Pi(\psi)$. Поэтому $\inf\{|\widehat{V}(s)| : s \in \Pi(\psi)\} > 0$. По теореме 4.18.6 в [10] с учетом замечания, сделанного в конце п. 4.16 [10] элемент V обладает обратным $W = V^{-1}$ в S_{ψ}. Положим $\Lambda(z) = z^{-1}$. По теореме А $W \in S_{\psi}^{0}(\tau)$. Имеем

$$h(s) = n!(1 - \widehat{f}(s))^{-n} = ((s - r_{+}(\psi) - 1)/s)^{n} n!\, \widehat{W}(s) = n! \left(\widehat{W}(s) + \sum_{k=1}^{n} B_k \widehat{W}(s)/s^k \right). \tag{14}$$

Преобразуя отдельное слагаемое в правой части, получаем

$$\frac{\widehat{W}(s)}{s^k} = \frac{w_1(s)}{s^{k-1}} + \frac{w_0(0)}{s^k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{w_{k-j}(0)}{s^j} + w_k(s), \tag{15}$$

где $w_0(s) = \widehat{W}(s)$ и $w_j(s) = (w_{j-1}(s) - w_{j-1}(0))/s$, $j = 1, \ldots, k$. Аналогично образуются функции $v_k(s)$ и $f_k(s)$ при $v_0(s)$ и $f_0(s) = \widehat{f}(s)$ соответственно. Покажем, что $w_k(s)$, $k = 1, \ldots, n-1$,— преобразования Лапласа элементов $S_{\psi}^{0}(\tau)$. Эти элементы с необходимостью будут равны соответственно $W_{(k)}$, $k = 1, \ldots, n-1$. Имеем $(\varepsilon = r_{+}(\psi) + 1)$

$$w_1(s) = w_0(0)\, w_0(s)\, \{f_1(s) - \varepsilon f_2(s)\} \sum_{k=1}^{n-1} v_0(s)^k\, v_0(0)^{n-k-1} = f_2(s)\, r_1(s) + q_1(s), \tag{16}$$

где $r_1(s)$ — линейная комбинация произведений, сомножителями которых являются $w_0(s)$ и степени $v_0(s)$, а $q_1(s)$ — линейная комбинация произведений, состоящих из сомножителей $w_0(s)$, $f_1(s)$ и степеней $v_0(s)$. Следовательно, $w_1(s)$ — преобразование Лапласа элемента из $S_{\psi}^{0}(\tau)$. Далее, $w_2(s) = f_3(s)\, r_1(0) + q_2(s)$, где $q_2(s)$ — линейная комбинация произведений.

сомножителями которых являются $w_i(s)$, $v_i(s)$, $i=0,1$, и $f_2(s)$. Значит, $W_{(2)} \in S^0_\psi(\tau)$. Продолжая этот процесс, через n шагов придем к равенству

$$w_n(s) = f_{n+1}(s)\, r_1(0) + q_n(s)\,, \tag{17}$$

где $q_n(s)$ — линейная комбинация произведений, состоящих из сомножителей $v_j(s)$, $f_j(s)$, $w_j(s)$, $j=0,\dots,n-1$, и $f_n(s)$. Поэтому $q_n(s)$ — преобразование Лапласа элемента, принадлежащего $S^0_\psi(\tau)$. Подставляя (15) в (14) и приводя подобные члены, получим (в силу единственности разложения (11))

$$h(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \gamma_k}{s^k} + (-1)^{n-1}\, n!\, n\mu^{-n-1} f_{n+1}(s) + \left\{ n! \sum_{k=0}^{n-1} B_k w_k(s) + n!\, B_n q_n(s) \right\}, \tag{18}$$

где выражение в фигурных скобках является преобразованием Лапласа элемента из $S^0_\psi(\tau)$, его абсолютно непрерывную составляющую обозначим через $d_n(t)$.

Если распределение F сосредоточено на положительной полуоси, то равенство (18), $\operatorname{Re} s < 0$, есть не что иное, как представление (12), выраженное в терминах преобразований Лапласа входящих в него слагаемых. В общем же случае, для того чтобы перейти от равенства (18) к представлению (12), необходимы дополнительные рассуждения, которые содержатся, например, в [14, доказательство теоремы 1].

Замечание 2. Утверждение теоремы 1 остается в силе если в ее формулировке символы $S^0_\psi(\tau)$ и «*o* малое» заменить всюду на $S_\psi(\tau)$ и «*O*-большое» соответственно; при этом ее доказательство нисколько не меняется, следует только иметь в виду, что в этом случае нормирующая функция $\tau(x)$ должна удовлетворять дополнительному условию (9).

Замечание 3. Аналогичные замечания можно сделать и в связи с банаховыми алгебрами $\mathscr{S}^0_\psi(\tau)$ и $\mathscr{S}_\psi(\tau)$.

Теорема 2. *Пусть F — распределение вещественнозначной случайной величины X с плотностью $f(x)$, $\mu = \mathrm{E}X > 0$, $\mu_2 = \mathrm{E}X^2$ и $\mathrm{E}(X^-)^n < \infty$, и пусть $\varphi_n(t)$ — плотность Ф-момента восстановления порядка $n \ge 2$, определяемая по формуле (2). Предположим, что $r_-(\psi) = r_+(\psi) = 0$ и что $f_{(n)} \in Sl(\psi,\tau)$, где функции $\psi(x)$ и $\tau(x)$ удовлетворяют соотношениям*

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t+h)/\psi(t) = \lim_{t\to\infty} \tau(t+h)/\tau(t) = 1 \tag{19}$$

при любом $h \in \mathbf{R}$. Предположим также, что $f \in Sl(\psi,\tau)$ и $l(f) = 0$. Тогда справедливо представление (12), в котором остаток d_n принадлежит $Sl(\psi,\tau)$ и $l(d_n) = c\, l(f_{(n)})$, где константа c выражается следующим образом:

$$c = (-1)^{n-1}\, n!\, n\mu^{-n-2} \{(n+1)\mu_2/2 - (n+2)\mu\}\,; \tag{20}$$

иными словами, $d_n(t) \sim c\, l(f_{(n)})\, \tau(t)/\psi(t)$, $t \to \infty$.

Доказательство. Сделаем следующую оговорку: мы сохраняем почти все обозначения из доказательства теоремы 1 с единственным отличием: здесь $r_k(s) = (r_{k-1}(s) - r_{k-1}(0))/s$, $k = 2, 3, \ldots$; аналогичный смысл будут иметь и другие буквы с индексами, превосходящими единицу.

Покажем, что из $f_{(n)} \in Sl(\psi, \tau)$, $n \geq 2$, вытекает $f_{(k)} \in Sl(\psi, \tau)$, причем $l(f_{(k)}) = 0$, $k = n-1, \ldots, 1$. Действительно, это утверждение — следствие неравенства $f_{(n-1)}(t) \leq f_{(n)}(t-1) - f_{(n)}(t)$ и соотношений (19):

$$f_{(n-1)}(t)\,\psi(t)/\tau(t) \leq$$

$$\leq f_{(n)}(t-1)\,\frac{\psi(t-1)}{\tau(t-1)}\,\frac{\psi(t)}{\psi(t-1)}\,\frac{\tau(t-1)}{\tau(t)} - f_{(n)}(t)\,\frac{\psi(t)}{\tau(t)} \to l(f_{(n)})\cdot 1\cdot 1 - l(f_{(n)}) = 0$$

при $t \to \infty$. Отсюда и из условий теоремы вытекает также, что $V \in Sl(\psi, \tau)$ и $l(V) = 0$. А по теореме А имеем $W \in Sl(\psi, \tau)$ и $l(W) = 0$. Поэтому основной вклад в асимптотику остатка $d_n(t)$ будет вноситься плотностями, чьи преобразования Лапласа равны $n! B_{n-1} w_{n-1}(s)$ и $n!\, B_n \times \times (w_n(s) - r_1(0)\, f_{n+1}(s))$, ибо, допуская вольность записи, $l(w_k(s)) = 0$ при $k = 0, \ldots, n-2$.

Рассмотрим отдельно случай $n=2$, поскольку формально он не вполне укладывается в схему рассуждений для произвольного $n>2$. Перепишем равенство (16) ($\varepsilon = 1$):

$$w_1(s) = f_2(s)\, r_1(s) - f_1(s)\, r_1(s)\,. \tag{21}$$

Тогда

$$w_2(s) = r_1(0) f_3(s) + f_2(s) r_2(s) - f_2(s) r_1(0) - f_1(s) r_2(s) = r_1(0) f_3(s) + I_1(s) - J_1(s) - K_1(s). \tag{22}$$

Определим сначала $l(r_2(s))$, подразумевая под этим значение функционала l от плотности меры, чье преобразование Лапласа равно $r_2(s)$. Поскольку $r_1(s) = -\sum_{k=0}^{n-1} \nu_0(0)^{-k-1} \nu_0(s)^{k-n}$, имеем

$$r_2(s) = \frac{r_1(s) - r_1(0)}{s} = \sum_{k=0}^{n-1} \nu_0(0)^{-k-1}\, \frac{\nu_0(0)^{k-n} - \nu_0(s)^{k-n}}{s} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \nu_0(0)^{-n-1}\, \nu_0(s)^{k-n}\, [\,f_1(s) - f_2(s)\,] \sum_{j=0}^{n-k-1} \nu_0(s)^{n-k-j-1}\, \nu_0(0)^j =$$

$$= f_2(s) p_1(s) - f_1(s) p_1(s) = f_2(s) p_1(0) + f_2(s)(p_1(s) - p_1(0)) - f_1(s) p_1(s)\,. \tag{23}$$

Применяя формулу (8) к равенству (23) и учитывая, что $l(f_{(1)}) = l(V) = l(W) = 0$, заключаем, что

$$l(r_2(s)) = p_1(0)\, l(f_{(2)}) = -n\,(n+1)\,\mu^{-n-2}\, l(f_{(2)})/2\,. \tag{24}$$

Далее,

$$r_2(0) = (f_2(0) - f_1(0))\, p_1(0) = -\,n\,(n+1)\,\mu^{-n-2}\,(\mu_2 - 2\,\mu)/4\,. \tag{25}$$

Применяя формулу (8) к соотношениям (21) и (22) и учитывая равенства (24) и (25), окончательно имеем

$$l(d_2) = 2!\,\{l\,[w_2(s) - r_1(0) f_3(s)] - 2\,l\,(w_1(s))\} =$$

$$= 2\,\{l\,[I_1(s) - J_1(s) - K_1(s)] - 2\,r_1(0)\,l\,(f_2(s))\} = -\,(6\mu_2 - 16\mu)\,\mu^{-4}\,l\,(f_{(2)})\,.$$

Пусть теперь $n > 2$ произвольно. Обратимся к процессу перехода от $w_2(s)$ к $w_n(s)$, описанному при доказательстве теоремы 1. Имеем

$$w_n(s) = r_1(0) f_{n+1}(s) + I_{n-1}(s) - J_{n-1}(s) - K_{n-1}(s)\,. \tag{26}$$

Очевидно, что

$$l\,(J_{n-1}(s)) = r_1(0)\,l\,(f_n(s))\,. \tag{27}$$

Представим $K_1(s)$ в виде $f_1(0)\,r_2(s) + r_2(s)\,(f_1(s) - f_1(0))$. Мы утверждаем, что

$$l\,(K_{n-1}(s)) = f_1(0)\,l\,(r_n(s))\,. \tag{28}$$

Действительно,

$$K_2(s) = f_1(0)\,r_3(s) + r_2(s)\,f_2(s)\,, \tag{29}$$

и второе слагаемое — линейная комбинация произведений, сомножителями которых являются $f_1(s)$, $f_2(s)$, $v_0(s)$ и $w_0(s)$. Поэтому при переходе к $K_{n-1}(s)$ второе слагаемое в (29) перейдет в линейную комбинацию произведений, сомножителями которых являются $f_1(s)$, ..., $f_{n-1}(s)$, $v_0(s)$, $w_0(s)$ или их целые неотрицательные степени. Таким образом, второе слагаемое в (29) при переходе к $K_{n-1}(s)$ превращается в преобразование Лапласа некоторой меры, для которой значение функционала l равно нулю. Равенство (28) доказано. Вычислим значение $l\,(r_n(s))$, фигурирующее в (28). Из представления (23) с помощью только что приведенных рассуждений убеждаемся в том, что

$$l\,(r_n(s)) = p_1(0)\,l\,(f_n(s)) = -\,n\,(n+1)\,\mu^{-n-2}\,l\,(f_{(n)})/2\,. \tag{30}$$

Определим теперь $l\,(I_{n-1}(s))$. Имеем (см. (22))

$$I_1(s) = f_2(0)\,r_2(s) + r_2(s)\,(f_2(s) - f_2(0))\,,$$

$$I_2(s) = f_2(0)\,r_3(s) + r_2(s)\,f_3(s)\,. \tag{31}$$

Если $n = 3$, то из (8) и (31) вытекает, что

$$l\,(I_2(s)) = f_2(0)\,l\,(r_3(s)) + r_2(0)\,l\,(f_3(s))\,,$$

поскольку $l\,(r_2(s)) = 0$ в силу (23) и $l\,(f_2(s)) = l\,(v_0(s)) = l\,(w_0(s)) = 0$. Если $n > 3$, то представим $I_2(s)$ в виде

$$I_2(s) = f_2(0)\,r_3(s) + r_2(0)\,f_3(s) + f_3(s)\,[r_2(s) - r_2(0)]\,. \tag{32}$$

Очевидно, что при переходе к $I_{n-1}(s)$ первое слагаемое в (32) превратится в $f_2(0)\,r_n(s)$, второе — в $r_2(0)\,f_n(s)$; третье же слагаемое перейдет в преобразование Лапласа некоторой абсолютно непрерывной меры, для которой значение функционала l равно нулю (см. соответствующие рассуждения, использовавшиеся при определении значения $l(K_{n-1}(s))$). Следовательно,

$$l(I_{n-1}(s)) = f_2(0)\, l(r_n(s)) + r_2(0)\, l(f_n(s)). \tag{33}$$

Подведем итоги. Из соотношений (25)—(28), (30), (33) и (17) вытекает

$$l(d_n) = n!\, l\{B_n[w_n(s) - r_1(0) f_{n+1}(s)] + B_{n-1} w_{n-1}(s)\} =$$

$$= n!\, B_n\, l\,[I_{n-1}(s) - J_{n-1}(s) - K_{n-1}(s)] + n!\, B_{n-1}\, l(r_1(0) f_n(s)) =$$

$$= (-1)^{n-1} n!\, n \mu^{-n-2} \{(n+1)\mu_2/2 - (n+2)\mu\}\, l(f_{(n)}).$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 4. Справедливость теоремы 2 не нарушится, если в ее формулировке банахову алгебру $Sl(\psi, \tau)$ заменить всюду на банахову алгебру $\mathcal{S}l(\psi, \tau)$.

Замечание 5. Можно определить точную асимптотику остатка $d_n(t)$ и при $t \to -\infty$, аналогичную той, что получена в теореме 2 при $t \to \infty$. С этой целью необходимо использовать банаховы алгебры $Sl_-(\psi, \tau)$ или $\mathcal{S}l_-(\psi, \tau)$, которые определяются следующим образом. Для произвольной меры ν положим $\tilde{\nu}(A) = \nu(-A)$, $A \in \mathfrak{B}$. По определению мера $\nu \in Sl_-(\psi, \tau)$ или $\mathcal{S}l_-(\psi, \tau)$ тогда и только тогда, когда мера $\tilde{\nu}$ принадлежит $Sl(\psi, \tau)$ или $\mathcal{S}l(\psi, \tau)$ соответственно. Заменяя всюду в формулировке теоремы 2 банахову алгебру $Sl(\psi, \tau)$ на банахову алгебру $Sl_-(\psi, \tau)$ или на $\mathcal{S}l_-(\psi, \tau)$ и повторяя практически дословно рассуждения из доказательства теоремы 2, мы получим точную асимптотику остатка $d_n(t)$ в представлении (12) при $t \to -\infty$.

В качестве следствия теоремы 2 и замечаний 4 и 5 приведем соответствующий результат в случае правильного изменения функции $1-F(x)$.

Теорема 3. *Пусть F — распределение вещественнозначной случайной величины X с плотностью $f(x)$, $\mu = \mathrm{E}X > 0$ и $\mathrm{E}|X|^n < \infty$, и пусть $\varphi_n(t)$ — плотность Φ-момента восстановления порядка n $(n \geq 2)$, определяемая по формуле (2). Предположим, что $1-F(x) = x^{-\alpha}L(x)$, где $\alpha > n$, а $L(x)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция, и пусть $f(x) = o(x^{-\alpha+n-1}L(x))$, $x \to \infty$. Тогда справедливо представление (12), в котором*

$$d_n(x) \sim c\, x^{-\alpha+n-1} L(x) \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha - j}, \qquad x \to \infty; \tag{34}$$

константа c дается равенством (20).

Если $F(x) = |x|^{-\alpha} L(-x)$, $x \leq -1$, и $f(x) = o(|x|^{-\alpha+n-1} L(-x))$ при $x \to -\infty$, то справедливо представление

$$\varphi_n(x) = (-1)^{n-1} n!\, n \mu^{-n-1} f_{(n+1)}(x) + d_n(x),$$

в котором остаток $d_n(x)$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$d_n(x) \sim c\,|x|^{-\alpha+n-1} L(-x) \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\alpha - j}, \quad x \to -\infty. \tag{35}$$

Доказательство. В силу известных свойств правильно меняющихся функций справедливо соотношение ($k > 1$)

$$f_{(k)}(x) \sim x^{-\alpha+k-1} L(x) \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\alpha - j}, \quad x \to \infty.$$

Положим $\psi(x) \equiv 1$ и $\tau(x) = f_{(n)}(x)$, $x \geq 0$. Теперь, чтобы доказать соотношение (34), осталось воспользоваться вариантом теоремы 2, в котором фигурирует банахова алгебра $\mathcal{S}l(\psi, \tau)$ (см. замечание 4). Соотношение (35) доказывается аналогично с учетом замечания 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smith W. L. On the cumulants of renewal processes // Biometrika.—1959.—V. 46, Pts 1, 2.—P. 1–29.
2. Сгибнев М. С. Асимптотика старших моментов восстановления // Теория вероятностей и ее применения.—1991.—Т. 36, № 3.—С. 494–504.
3. Рогозин Б. А. Асимптотика коэффициентов в теоремах Леви — Винера об абсолютно сходящихся тригонометрических рядах // Сиб. мат. журн.—1973.—Т. 14, № 6.—С. 1304–1312.
4. Рогозин Б. А. Оценка остаточного члена в предельных теоремах теории восстановления // Теория вероятностей и ее применения.—1973.—Т. 18, № 4.—С. 703–717.
5. Chover J., Ney P., Wainger S. Functions of probability measures // J. Anal. Math.—1973.—V. 26.—P. 255–302.
6. Essén M. Banach algebra methods in renewal theory// J. Anal. Math.—1973.—V. 26.—P. 303–336.
7. Рогозин Б. А., Сгибнев М. С. Банаховы алгебры абсолютно непрерывных мер на прямой // Сиб. мат. журн.—1979.—Т. 20, № 1.—С. 120–128.
8. Сгибнев М. С. Асимптотика плотности функции восстановления // Сиб. мат. журн.—1979.—Т. 20, № 1.—С. 141–151.
9. Grübel R. Über das asymptotische Verhalten von Erneuerungsdichten // Math. Nachr. 1982.—B. 108.—S. 39–48.
10. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы.—М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
11. Сгибнев М. С. Банаховы алгебры функций, обладающих одинаковым асимптотическим поведением на бесконечности // Сиб. мат. журн.—1981.—Т. 22, № 3.—С. 179–187.
12. Рогозин Б. А. Банаховы алгебры мер на прямой, связанные с асимптотическим поведением на бесконечности // Сиб. мат. журн.—1976.—Т. 17, № 4.—С. 898–906.
13. Наймарк М. А. Нормированные кольца.—М.: Наука, 1968.
14. Сгибнев М. С. Экспоненциальные оценки скорости сходимости для старших моментов восстановления // Сиб. мат. журн.—1991.—Т. 32, № 4.—С. 143–152.