ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

С. А. Утев

ВВЕДЕНИЕ

В работе вводятся и исследуются интегродифференциальные функционалы, ассоциированные с интегродифференциальными неравенствами типа

$$\mathbf{D}\, g(Y) \le \mathbf{E}\,(g'(Y))^2\,,$$

где случайная величина Y имеет стандартное нормальное распределение, а g — произвольная абсолютно непрерывная функция. Приводятся характеризации вырожденного, гауссовского и пуассоновского распределений. Даны новые доказательства: 1) характеризации нормального распределения через линейные статистики, 2) конечности экспоненциального момента для банаховозначного гауссовского случайного элемента, 3) закона больших чисел. Кроме того приводятся два новых доказательства центральной предельной теоремы. При этом существенно используется устойчивость полученных характеризаций, основанных на интегродифференциальных неравенствах.

В §1 рассматривается интегродифференциальный функционал для многомерного распределения и дана еще одна характеризация нормального распределения. В §2 описаны приложения к центральной предельной теореме и к характеризации нормального распределения через линейные статистики. В частности, дан утвердительный ответ на вопрос, поставленный Ченом и Лу [1, 2]. В §3 изучается интегродифференциальный функционал для распределений в банаховых пространствах. Показано, что распределение нормы гауссовского банаховозначного элемента имеет ненулевую абсолютно непрерывную компоненту и конечный экспоненциальный момент. Изложенные в §4 новые доказательства закона больших чисел и центральной предельной теоремы опираются на использование некоторого сглаженного интегродифференциального функционала. В §5 предложен ряд характеризационных неравенств. В §6 исследуется интегродифференциальный функционал, содержащий производные высшего порядка (здесь рассматриваются задачи, близкие к теоремам вложения). В §7 исследуются функционалы, содержашие конечные разности высшего порядка.

Тематика данной статьи восходит к работам [3—5], получившим дальнейшее развитие в [6—18].

---

§ 1. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Введем следующие обозначения: X — случайный вектор со значениями в конечномерном евклидовом пространстве $E = \mathbf{R}^k$; E^* — пространство, сопряженное к E; $|x|$ и $|h|$ — евклидовы нормы в E и E^* соответственно; $A : E^* \times E^* \to \mathbf{R}^+$ — непрерывный неотрицательный билинейный оператор с нормой $\|A\| = \sup\{A(h,h) : h \in E^*;\ |h| = 1\}$, $A_0(h,h) = |h|^2$; $C^k(E)$, $k=1,2,..$, — класс k раз непрерывно дифференцируемых функций на E. Положим

$$U_X = U_X(A) = \sup_g \frac{\mathbf{D}\, g(X)}{\mathbf{E}\, A(g'(X), g'(X))},$$

где супремум берется по функциям g из $C^1(E)$ таким, что $\mathbf{E}\, g^2(X) < \infty$, $0 < \mathbf{E}\, A(g'(X), g'(X)) < \infty$. Так же как и в одномерном случае, функционал не изменится при сужении его с класса $C^1(E)$ до класса $C^\infty(E)$. Через R_X обозначим одномерную версию функционала $U_X(A_0)$:

$$R_X = \sup_g \frac{\mathbf{D}\, g(X)}{\mathbf{E}\,(g'(X))^2}.$$

Теорема 1.1. *Функционал U_X обладает следующими свойствами:*

1) $U_{aX+b} = a^2 U_X$;

2) *если X и Y независимы, то $U_{X+Y} \le U_X + U_Y$;*

3) *если X_n сходятся по распределению к X, то $U_X \le \liminf U_{X_n}$;*

4) *если $\mathbf{D}\,(X, h) = A(h, h)$ для всех $h \in E^*$, то справедливо неравенство $U_X \ge 1$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда X имеет гауссовское распределение;*

5) *если $\mathbf{E}\, X_n = 0$, $\mathbf{D}\,(X_n, h) = A(h,h)$ для всех n, $h \in E^*$ и $U_{X_n} \to 1$, то X_n сходятся по распределению к гауссовскому распределению;*

6) $R_{|X|} \le U_X \|A\|$;

7) *если $X = (X_1, \dots, X_k)$, где $X_1, \dots, X_k$ — независимые случайные величины, то $U_X(A_0) = \max(R_{X_1}, \dots, R_{X_k})$;*

8) *если X и Y независимы, $|X| \le K$ п. н. и Y имеет гауссовское распределение с нулевым средним и единичным ковариационным оператором, то $U_{X+Y}(A_0) < \infty$.*

Теорема 1.2. (а) *Пусть случайные величины X и Y независимы и*

$$U_{X+Y} = U_X + U_Y,\quad \mathbf{D}\,(X,h) = \alpha A(h,h),\quad \mathbf{D}\,(Y,h) = \beta A(h,h).$$

Тогда X и Y имеют гауссовские распределения.

(б) *Пусть случайные величины X_n и Y_n независимы и*

$$U_{X_n+Y_n}/(U_{X_n} + U_{Y_n}) \to 1,\quad \mathbf{D}\,(X_n,h) = \alpha_n^2 A(h,h),\quad \mathbf{D}\,(Y_n,h) = \beta_n^2 A(h,h),$$

$$0 < \liminf \alpha_n/\beta_n \le \limsup \alpha_n/\beta_n < \infty.$$

Тогда $U_{X_n/\alpha_n} \to 1$, $U_{Y_n/\beta_n} \to 1$.

Доказательство теоремы 1.1. В случае одномерного пространства функционалы вида U_X были введены и исследованы в [5]. В конечномерном случае такие функционалы изучались в [14]; там же доказаны свойства 1, 5 и 7.

Установим свойство 6. Если норма $Q(u) = |u|$ достаточно гладкая, то для всякой непрерывно дифференцируемой функции Z, положив $g(u) = Z(Q(u))$, получаем

$$\mathrm{D}\,Z(|X|) = \mathrm{D}\,Z(Q(X)) \le U_X \mathrm{E}\,A(g'(X), g'(X)) =$$
$$= U_X \mathrm{E}\,A(Q'(X), Q'(X))(Z'(|X|))^2 \le U_X \|A\| \mathrm{E}\,(Z'(|X|))^2,$$

так как $\|Q'(a)\| \le 1$ для любого $a \ne 0$.

Пусть теперь норма $|x|$ недифференцируема. Построим последовательность дифференцируемых норм $|x|_S$ таких, что $|x|_S \to |x|$ равномерно на шарах. Для этого приблизим симметричное ядерное выпуклое множество, порожденное функционалом Минковского $|x|$, выпуклыми множествами с гладкими границами. Поскольку $R_{|X|_S} \le U_X \|A\|_S$ и $|X|_S \to |X|$ по распределению, верны неравенства

$$R_{|X|} \le \liminf R_{|X|_S} \le U_X \liminf \|A\|_S.$$

Покажем, что $\liminf \|A\|_S \le \|A\|$. Так как $|x|_S \to |x|$ равномерно на шарах в E, получаем, что $|h|_S \to |h|$ равномерно на шарах в E^*. Пусть h_S — последовательность линейных функционалов такая, что $|h_S|_S = 1$, $A(h_S, h_S) \ge \|A\|_S - \varepsilon_S$, $\varepsilon_S \to 0$. Тогда $\limsup |h_S|_S \le 1$. Значит

$$\liminf \|A\|_S \le \limsup \varepsilon_S + \limsup A(h_S, h_S) \le$$
$$\le \|A\|(\limsup |h_S|_S)^2 \le \|A\|.$$

Теперь докажем свойство 8. Имеем

$$\mathrm{E}\,g^2(X+Y) =$$
$$= \mathrm{E}\,\mathrm{E}\,\{g^2(X+Y) \mid X\} - \mathrm{E}\,\mathrm{E}^2\{g(X+Y) \mid X\} + \mathrm{E}\,\mathrm{E}^2\{g(X+Y) \mid X\} \le$$
$$\le \mathrm{E}\,(\nabla g(X+Y))^2 + 2\,\mathrm{E}\,\mathrm{E}^2\{g(X+Y)\mathrm{I}(|Y| \le Q) \mid X\} +$$
$$+ 2\,\mathrm{E}\,\mathrm{E}^2\{g(X+Y)\mathrm{I}(|Y| > Q) \mid X\} \equiv \mathrm{E}\,(\nabla g(X+Y))^2 + I + J;$$

здесь $A_0(g', g') = (\nabla g)^2$. По неравенству Йенсена

$$J \le 2\,\mathrm{E}\,\mathrm{E}\,\{g^2(X+Y) \mid X\}\,\mathrm{P}(|Y| > Q) \equiv 2\varepsilon_Q \mathrm{E}\,g^2(X+Y).$$

Положим $G(x) = \mathrm{E}\,(g(X+Y)\mathrm{I}(|Y| \le Q))$. Имеем

$$(\mathrm{E}G(X))^2 = (\mathrm{E}(g(X+Y)\mathrm{I}(|Y| > Q)))^2 <$$
$$< c\,\mathrm{E}\{g^2(X+Y)\}\,\mathrm{P}(|Y| > Q) \equiv \varepsilon_Q \mathrm{E}\,g^2(X+Y).$$

Следовательно, $1 = 2\,\mathbf{E}\,G^2(X) \le 2\,\mathbf{D}\,G(X) + 2\,\varepsilon_Q \mathbf{E}\,g^2(X+Y)$. Из неравенства Пуанкаре ввиду способа построения вытекает формула

$$\mathbf{D}\,G(X) \le \mathbf{E}\,(G(X) - G(0))^2 \le c(k) \int (\nabla G(u))^2\, \mathbf{I}\,(|u| \le K)\, d\,u \le$$

$$\le c_1(K, Q) \int (\nabla G(u))^2\, \mathbf{I}\,(|u| \le K + Q)\, d\,u \equiv W.$$

Плотность $f_{X+Y}(u)$ есть непрерывная строго положительная функция. Следовательно, $W \le c_2(K, Q)\,\mathbf{E}\,(\nabla g, (X+Y))^2$. Тем самым мы получили неравенство $\mathbf{E}\,g^2(X+Y) \le c_3(K, Q)\,\mathbf{E}\,(\nabla g, (X+Y))^2 + 4\,\varepsilon_Q \mathbf{E}\,g^2(X+Y)$, в котором $\varepsilon_Q \le \mathbf{E}\,|Y|^2 Q^{-2} = k\,Q^{-2}$. Осталось взять $Q = 2\,k$. Теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Пусть $\langle h \rangle^2 = A(h, h)$. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и финитную непрерывно дифференцируемую функцию g такую, что

$$\mathbf{E}\,\langle g'(X+Y) \rangle^2 = 1\,,\ \ \mathbf{E}\,g\,(X+Y) = 0\,,\ \ \mathbf{E}\,g\,(X+Y)^2 \ge (U_X + U_Y)\,(1-\varepsilon)\,.$$

Имеем

$$\mathbf{E}\,g^2(X+Y) = \mathbf{E}\,\mathbf{E}\,\{g^2(X+Y)\mid X\} - \mathbf{E}\,\mathbf{E}^2\{g\,(X+Y)|X\} + \mathbf{E}\,\mathbf{E}^2\{g\,(X+Y)|\,X\} \le$$

$$\le U_X \mathbf{E}\,\langle g'(X+Y) \rangle^2 + U_Y \mathbf{E}\,\langle \mathbf{E}\,\{g'(X+Y)\mid X\} \rangle^2.$$

Следовательно, $(U_X + U_Y)\,(1-\varepsilon) \le U_X + U_Y \mathbf{E}\,\langle \mathbf{E}\,\{g'(X+Y)\mid X\} \rangle^2$ или

$$I \equiv \mathbf{E}\,\langle g'(X+Y)\rangle^2 - \mathbf{E}\,\langle \mathbf{E}\,\{g'(X+Y)\mid X\}\rangle^2 \le \varepsilon_1 \equiv (1 + U_X/U_Y)\,\varepsilon\,.$$

Из неравенства Йенсена и формулы $\mathbf{E}\,(\mathbf{E}\,\{g'(X+Y)\mid X\}) = \mathbf{E}\,g'(X+Y)$ получаем

$$I = \mathbf{E}\,\langle g'(X+Y) - \mathbf{E}\,(g'(X+Y)\mid X)\rangle^2 \ge \mathbf{E}\,\langle \mathbf{E}\,(g'(X+Y)\mid Y) - \mathbf{E}\,g'(X+Y)\rangle^2.$$

Пусть $a = \mathbf{E}\,g'(X+Y)$, $\|\xi\|_A = (\mathbf{E}\,A(\xi, \xi))^{1/2}$. Мы доказали, что

$$\|a - \mathbf{E}\,(g'(X+Y)\mid X)\|_A \le \varepsilon_1^{1/2},\ \ \|g'(X+Y) - \mathbf{E}\,(g'(X+Y)\mid Y)\|_A \le \varepsilon_1^{1/2}.$$

Повторяя ту же процедуру, но начиная со случайной величины Y, получим

$$\|a - \mathbf{E}\,(g'(X+Y)\mid Y)\|_A \le \varepsilon_2^{1/2},\qquad \|g'(X+Y) - \mathbf{E}\,(g'(X+Y)\mid X)\|_A \le \varepsilon_2^{1/2},$$

где $\varepsilon_2 \equiv (1 + U_X/U_Y)\,\varepsilon$. Следовательно,

$$\|a - g'(X+Y)\|_A \le \varepsilon_1^{1/2} + \varepsilon_2^{1/2} = \varepsilon_3\,.$$

Так как $\|g'(X+Y)\|_A = 1$, имеем $(1-\varepsilon_3)^2 \le A(a, a) = \|a\|_A^2 \le (1+\varepsilon_3)^2$. По определению функционала U_X (для простоты считаем, что $\mathbf{E}\,X = \mathbf{E}\,Y = 0$)

$$\mathbf{E}\,(g(X+Y) - (a, X+Y))^2 \le (U_X + U_Y)\,\varepsilon_3^2.$$

Значит

$$\mathrm{E}\,(a, X+Y)^2 \geq \{(\mathrm{E}\,g^2\,(X+Y))^{1/2} - (\mathrm{E}\,(g(X+Y) - (a, X+Y)))^{1/2}\}^2 \geq$$
$$\geq (U_X + U_Y)\,((1-\varepsilon)^{1/2} - \varepsilon_3)^2 \equiv (U_X + U_Y)\,(1-\varepsilon_4)\,.$$

Поэтому $(U_X + U_Y)(1-\varepsilon_4) \leq \mathrm{E}\,(X, a)^2 + \mathrm{E}\,(Y, a)^2$. Собирая полученные оценки, приходим к неравенствам

$$U_X \leq \frac{\mathrm{E}\,(X, a)^2}{A(a, a)}(1+\varepsilon_5) + \frac{\mathrm{E}\,(Y, a)^2}{A(a, a)}\varepsilon_5\,,$$

$$U_Y \leq \frac{\mathrm{E}\,(Y, a)^2}{A(a, a)}(1+\varepsilon_5) + \frac{\mathrm{E}\,(X, a)^2}{A(a, a)}\varepsilon_5\,,$$

где $\varepsilon_5 = \{(1-\varepsilon_4)(1-\varepsilon_3)^2\}^{-1} - 1$. Устремляя ε к нулю, получим

$$U_X = \frac{\mathrm{E}\,(X, a)^2}{A(a, a)}\,,\quad U_Y = \frac{\mathrm{E}\,(Y, a)^2}{A(a, a)}\,,$$

так как $\mathrm{D}\,(X, h) = \alpha A(h, h)$, $\mathrm{D}\,(Y, h) = \beta A(h, h)$ для всех $h \in E^*$. Следовательно, случайные величины X и Y имеют гауссовские распределения. Тем самым утверждение (а) теоремы 1.2 доказано.

Доказательство утверждения (б) проводится аналогично, поэтому поясним лишь основное отличие. Мы приходим к оценкам

$$U_{X_n} \leq \frac{\mathrm{E}\,(X_n, a_n^2)}{A(a_n, a_n)}(1+\varepsilon_n) + \frac{\mathrm{E}\,(Y_n^2, a_n)}{A(a_n, a_n)}\varepsilon_n\,,$$

$$U_{Y_n} \leq \frac{\mathrm{E}\,(Y_n, a_n^2)}{A(a_n, a_n)}(1+\varepsilon_n) + \frac{\mathrm{E}\,(X_n^2, a_n)}{A(a_n, a_n)}\varepsilon_n\,,$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Учитывая соотношения $\mathrm{D}\,(X_n, h) = \alpha_n A(h, h)$, $\mathrm{D}\,(Y_n, h) = \beta_n A(h, h)$, $0 < \liminf \alpha_n/\beta_n \leq \limsup \alpha_n/\beta_n < \infty$, из свойства 5 (теорема 1.1) получим требуемый результат. Теорема 1.2 доказана.

Замечание. В одномерном случае характеризация нормального распределения, основанная на равенстве $U_{X+Y} = U_X + U_Y$, была предложена автором в [18]. Там же доказана устойчивость приведенной характеризации относительно сходимости по вариации и найдена оценка скорости сходимости в теореме устойчивости. Приведем пример, подтверждающий, что в отличие от одномерного случая вышеприведенное равенство не является характеризующим без дополнительных ограничений на ковариационные операторы слагаемых. Пусть

$$k = 2\,,\ X = (I, Z)\,,\ Y = (J, W)\,,\ A(h, h) = \|h\|\,,$$

где I, J, Z, W — независимые случайные величины, I и J имеют стандартные нормальные распределения, а Z и W имеют равномерные распределения на интервале $[0, \pi/2]$. Тогда (см. [14])

$$R_I = R_J = 1\,,\ R_Z = R_W = 1/4\,,\ R_{I+J} = 2\,, R_{Z+W} \leq 1/2\,,$$
$$U_X = \max(R_I, R_Z) = 1\,,\ U_Y = \max(R_J, R_W) = 1\,,$$
$$U_{X+Y} = \max(R_{I+J}, R_{Z+W}) = 2 = U_X + U_Y\,.$$

§ 2. ПРИЛОЖЕНИЯ

2.1. В этом пункте мы дадим новое доказательство центральной предельной теоремы. Сначала рассмотрим распределение $L(X)$ с конечным функционалом U_X. Отметим, что следующая теорема дает утвердительный ответ на вопрос, поставленный в [1, 2].

Теорема 2.1. *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин таких, что*

$$U_X(A) < \infty, \tag{2.1}$$

и $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{D}(X, h) = A(h, h)$ для всех $h \in E^*$. Тогда

$$n^{-1} U_{X_1+\ldots+X_n}(A) \to 1, \qquad n \to \infty.$$

В частности, для таких распределений справедлива центральная предельная теорема.

Доказательство. Положим $U_n = U_{X_1+\ldots+X_n}(A)$, $Z_n = U_n/n$. В силу свойства 2 (теорема 1.1) для всех натуральных k, m верны неравенства $U_{k+m} \le U_k + U_m \le (k+m)\, U_1 < \infty$. Поэтому U_n есть субаддитивная последовательность и существует предел $\lim Z_n \equiv \sigma$. Так что достаточно показать существование подпоследовательности n' такой, что $Z_{n'} \to 1$ при $n' \to \infty$. Положим

$$a_k = z_{2^k},\ S(a, b) = X_{a+1} + \ldots + X_b,\ T_k = 2^{-k/2} S(0, 2^k),$$
$$V_k = 2^{-k/2} S(2^k, 2^{k+1}).$$

С одной стороны, имеет место сходимость $a_k - a_{k+1} \to 0$ при $k \to \infty$. С другой стороны,

$$a_k - a_{k+1} = z_{2^k} - z_{2^{k+1}} = 2^{-k} U_{2^k} - 2^{-k-1} U_{2^{k+1}} = 2^{-k-1} \left(U_{T_k} + U_{V_k} - U_{T_k + V_k} \right).$$

В силу теоремы 1.2 $a_k \equiv Z_{2^k} \to 1$, что и требовалось показать. Теорема 2.1 доказана.

Теперь избавимся от ограничения (2.1). Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и единичным ковариационным оператором $A_0(h, h) = |h|^2 = \mathbf{D}(X, h)$, а Y, Y_1, $Y_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие в совокупности от исходной последовательности, причем Y имеет гауссовское распределение с нулевым средним и единичным ковариационным оператором. Положим

$$Z_i = X_i \mathbf{I}(|X_i| \le \varepsilon^{-1}) - \mathbf{E}(X_i \mathbf{I}(|X_i| \le \varepsilon^{-1})) + \varepsilon Y_i,$$

$$S_{n,\varepsilon} = n^{-1/2}(X_1 + \ldots + X_n),\ A_\varepsilon(h, h) = \mathbf{D}(Z_1; h).$$

Ввиду свойства 8 (теорема 1.1) $U_{Z_1}(A_0) < \infty$. Следовательно, последовательность $Y_1, Y_2, \ldots$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Поэтому при $n \to \infty$ последовательность $S_{n,\varepsilon}$ сходится по распределению к гауссовскому распределению с нулевым средним и ковариационным оператором A_ε. Осталось заметить, что

$$\mathrm{E}\left(n^{-1/2}\sum_1^n X_i - S_{n,\varepsilon}\right)^2 \le k\varepsilon^2 + \mathrm{E}\left(X_1^2 \mathrm{I}(|X_1| > 1/\varepsilon)\right) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

2.2. В этом пункте мы приведем новое доказательство характеризации нормального распределения через линейные статистики.

Теорема 2.2. *Пусть X, Y — независимые случайные величины с невырожденными распределениями, для которых существуют независимые случайные величины Z, W и строго положительные числа a, b такие, что $Z = aX + bY$, $W = -bX + aY$. Пусть $R_X + R_Y < \infty$. Тогда X и Y имеют гауссовские распределения.*

Доказательство. Имеем

$$R_Y = R_{bZ+aW} \le R_{bZ} + R_{aW} \le$$

$$\le R_{baX} + R_{bbY} + R_{abX} + R_{aaY} = 2(ab)^2 R_X + (a^4 + b^4) R_Y.$$

Аналогично

$$R_X = R_{aY-bZ} \le R_{aY} + R_{bZ} \le (a^4 + b^4) R_X + 2(ab)^2 R_Y.$$

Следовательно, во всех рассматриваемых неравенствах достигается равенство. В частности, $R_{bY} = R_{abX} + R_{bbY}$. Поэтому X и Y имеют гауссовские распределения.

Замечание. Близкие доказательства предложены в [19, 20].

§ 3. БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть E — сепарабельное банахово пространство, X — гауссовский элемент в E, A — его ковариационный оператор.

Теорема 3.1. *Для любого $a \in E$ справедливо неравенство*

$$R_{\|X+a\|} \le \|A\|.$$

Доказательство. Известно, что для X имеет место представление $X = X_1 t_1 + X_2 t_2 + \ldots$, где $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, X_1 имеет стандартное нормальное распределение. Зафиксируем натуральное k и положим

$$Y = Y_k = X_1 t_1 + \ldots + X_k t_k + a, \quad A^{(k)}(h,h) = \mathrm{D}(Y_k, h).$$

По ранее доказанному $R_{\|Y\|} \le \|A^{(k)}\|$. Нетрудно видеть, что верно неравенство $\|A^{(k)}\| \le \|A\|$. Следовательно,

$$R_{\|X+a\|} \le \liminf R_{\|Y_k\|} \le \limsup \|A^{(k)}\| \le \|A\|.$$

Теорема 3.1 доказана.

Следствие 3.2. *Пусть X — гауссовский элемент со значениями в сепарабельном банаховом пространстве. Тогда для любого $a \in E$ распределение $L(\|X+a\|)$ имеет ненулевую абсолютно непрерывную ком-*

поненту и справедливо неравенство $\mathrm{E}\exp(c\,\|X\|)<\infty$ *для некоторого* $c>0$.

Положим

$$U_Y(A)=\sup_g \frac{\mathrm{D}\,g(Y)}{\mathrm{E}\,A(g'(Y),g'(Y))},$$

где супремум берется по всем функциям g с ограниченными равномерно дифференцируемыми производными.

Теорема 3.3. *Пусть X — случайный элемент со значениями в сепарабельном банаховом пространстве E и* $\mathrm{E}\,\|X\|^2<\infty$ *для всех* $h\in E^*$. *Тогда справедливо неравенство* $U_X(A)\geq 1$, *причем равенство достигается тогда и только тогда, когда X имеет гауссовское распределение.*

Доказательство. Так как для линейных функций отношение $\mathrm{D}\,g(Y)/\mathrm{E}\,A(g'(Y),g'(Y))$ равно единице, $U_X(A)\geq 1$. Пусть X имеет гауссовское распределение с ковариационным оператором A. Достаточно показать, что $U_X(A)\leq 1$. Так же, как при доказательстве теоремы 3.1, для $a=0$ имеем

$$\mathrm{D}\,g(X)\leq \limsup \mathrm{D}\,g(Y_k)\leq \limsup \mathrm{E}\,A^{(k)}(g'(Y_k),g'(Y_k))\leq$$

$$\leq \limsup \mathrm{E}\,A(g'(Y_k),g'(Y_k))=\mathrm{E}\,A(g'(X),g'(X)),$$

где Y_K были введены при доказательстве теоремы 3.1. Следовательно, $U_X(A)\leq 1$.

Пусть теперь $U_X(A)=1$. Зафиксируем линейный функционал $h\in E^*$ и положим $Z=(X,h)$. Тогда

$$\mathrm{D}\,G(Z)\equiv \mathrm{D}\,G((X,h))\leq \mathrm{E}\left(A(h,h)\,(G'(Z))^2\right)=\mathrm{D}\,Z\,\mathrm{E}\,(G'(Z))^2.$$

Следовательно, (X,h) имеет одномерное гауссовское распределение. Ввиду произвольности h распределение $L(X)$ является гауссовским. Теорема 3.3 доказана.

Следствие 3.4. *Для всякого банаховозначного гауссовского элемента X с ковариационным оператором A справедливо равенство*

$$\mathrm{E}\,\{(X,h)\,g(X)\}=\mathrm{E}\,A(g'(X),g'(X)).$$

Доказательство следует из уравнения Эйлера для соответствующей вариационой задачи.

Пример. Пусть W — стандартный винеровский процесс и g — интегральный функционал:

$$g(u)=\int_0^1 G(u(t),t)\,dt.$$

Тогда для любого $s,\ 0\leq s\leq 1$, справедливо равенство

$$\mathrm{E}\left\{W(s)\int_0^1 G(W(t),t)\,dt\right\}=\int_0^1 \min(t,s)\,\mathrm{E}\frac{\partial\,G(W(t),t)}{\partial\,t}\,dt.$$

§ 4. СГЛАЖИВАНИЕ

4.1. Рассмотрим одномерный функционал. Положим

$$\|g\| = \max\{\sup_t |g(t)|, \sup_t |g'(t)|, \sup_t |g''(t)|\},\quad S_\varepsilon = \{g:\ \|g\| \le \varepsilon^{-1}\},$$

$$R_X(\varepsilon) = \sup_{g\in S_\varepsilon} \frac{\mathrm{D}\, g(X)}{\varepsilon + \mathrm{E}\,(g'(X))^2}$$

Теорема 4.1. *Функционал $R_X(\varepsilon)$ имеет следующие свойства:*

1) $R_X(\varepsilon) \to R_X$ *при* $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$;

2) $R_X(\varepsilon) \le \varepsilon^{-3}$;

3) *если X и Y независимы, то* $R_{X+Y}(\varepsilon) \le R_X(\varepsilon) + R_Y(\varepsilon)$;

4) *справедливо неравенство* $\lim R_X(\varepsilon) \ge \mathrm{D}\,X$, *причем равенство достигается тогда и только тогда, когда X имеет гауссовское распределение;*

5) $R_{aX+b}(\varepsilon) \le a^2 R_X(\varepsilon \min(1, a^{-2}))$;

6) $R_X(\varepsilon) \le 4\varepsilon^{-3}\,\mathrm{E}\min(1, |X|^2)$;

7) $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0}\ \limsup\limits_{n\to\infty}\ R_{X_n}(\varepsilon) = 0$ тогда и только тогда, когда существуют μ_n такие, что $X_n - \mu_n \to 0$ по вероятности;

8) $R_X(\varepsilon) \le (\mathrm{D}\,X + c_\varepsilon\,\mathrm{E}\min(|X|^3, |X|^2))$;

9) *если* $\mathrm{E}\,X_n = 0$, $\mathrm{D}\,X_n = 1$ *для любого n и X имеет стандартное нормальное распределение, то X_n сходится по распределению к X тогда и только тогда, когда $\{|X_n|^2\}$ есть равномерно интегрируемая последовательность и* $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0}\ \limsup\limits_{n\to\infty} R_{X_n}(\varepsilon) \le 1$.

Доказательство. Свойства 1, 2, 4, 5 очевидны. Докажем свойство 3. Пусть $g \in S_\varepsilon$. Тогда $G(u) \equiv g(u+a) \in S_\varepsilon$ для любого a. Следовательно,

$$\mathrm{E}\,g^2(X+a) \le \mathrm{E}^2 g(X+a) + R_X(\varepsilon)(\varepsilon + \mathrm{E}\,(g'(X+a))^2).$$

Усредняя по a, получим

$$\mathrm{D}\,g(X+Y) \le \mathrm{D}\,\mathrm{E}\,\{g(X+Y) \mid Y\} + R_X(\varepsilon)(\varepsilon + \mathrm{E}\,(g'(X+a))^2).$$

Так как $Z(u) \equiv g(X+u) \in S_\varepsilon$,

$$\mathrm{D}\,Z(Y) = \mathrm{D}\,\mathrm{E}\,\{g(X+Y) \mid Y\} \le$$

$$\le R_Y(\varepsilon)(\varepsilon + \mathrm{E}\,(Z'(Y))^2) \le R_Y(\varepsilon)(\varepsilon + \mathrm{E}\,(g'(X+Y))^2).$$

Таким образом, $\mathrm{D}\,g(X+Y) \le (R_X(\varepsilon) + R_Y(\varepsilon))(\varepsilon + \mathrm{E}\,(g'(X+Y))^2)$.

Докажем свойство 6. Пусть $g \in S_\varepsilon$. Тогда

$$\mathrm{D}g(X) \le \mathrm{E}\,(g(X)\,g(0))^2 \le \mathrm{E}\,\{\min(2\|g\|, |X|\ \|g\|)\}^2 \le 4\|g\|^2\,\mathrm{E}\min(1, |X|^2).$$

Следовательно, $R_X(\varepsilon) \le 4\varepsilon^{-3}\,\mathrm{E}\min(1, |X|^2)$.

Теперь докажем свойство 8. Для функции $g \in S_\varepsilon$ имеем

$$\mathrm{D}\, g(X) \le \mathrm{E} X^2 (g'(0))^2 + c_1 \|g\|^2 \ \mathrm{E}(\min(|X|^3, |X|^2)\,.$$

С другой стороны,

$$\mathrm{E}(g'(X))^2 \ge (g'(0))^2 - c_2 \|g\|^2 \ \mathrm{E}\min(|X|, 1)\,.$$

Учитывая свойство 5, получаем

$$R_X(\varepsilon) \le (\mathrm{D}\, X + c_\varepsilon \|g\|^2 \ \mathrm{E}(\min(|X|^3, |X|^2))\,,$$

что и требовалось доказать.

Докажем свойство 7. Пусть (X_n') есть копия (X_n). Возьмем $Q_n = X_n - X'_n$ и выберем функцию $g \in S_\varepsilon$ такую, чтобы выполнялись условия $g(-u) = -g(u)$, $g(u) = 1$ при $u \ge \varepsilon^{1/2}/10$. Тогда

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty} R_{X_n - X'_n}(\varepsilon) \le 2\limsup_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty} R_{X_n} = 0\,,$$

$$\mathrm{P}(|Q_n| \ge \varepsilon^{1/2}/10) \le \mathrm{D}\, g(Q_n) = R_{X_n - X_n'}(\varepsilon + \varepsilon^{-2}) \to 0\,.$$

Следовательно, $Q_n = X_n - X'_n \to 0$ по вероятности, а значит существуют μ_n такие, что $X_n - \mu_n \to 0$ по вероятности. С другой стороны, пусть $X_n - \mu_n \to 0$ по вероятности. Ввиду свойства 5 можно считать, что $\mu_n = 0$. Согласно свойству 6 имеем

$$R_{X_n}(\varepsilon) \le 4\varepsilon^{-3}\,\mathrm{E}\min(1, |X_n|^2) \le 4\varepsilon^{-3}\,\mathrm{P}(|X_n| \ge \varepsilon^3) + 4\varepsilon^3\,.$$

Поэтому $\limsup\limits_{n\to\infty} R_{X_n}(\varepsilon) \le 4\varepsilon^3$ для любого $\varepsilon > 0$.

Докажем свойство 9. Пусть X_n сходится по распределению к X. Тогда имеет место равномерная сходимость на шарах S_ε:

$$\sup_{Z\in C_1} |\,\mathrm{E}\, Z(X_n) - \mathrm{E}\, Z(X)\,| = \alpha_n \to 0\,, \qquad n\to\infty\,.$$

Если $g \in S_\varepsilon$, то $2^{-1}\varepsilon^2 g^2 \in S_\varepsilon$. Следовательно,

$$\mathrm{D}\, g(X_n) = \mathrm{E}\, g^2(X_n) - \mathrm{E}^2 g(X_n) \le \mathrm{D}\, g(X) + a_1(\varepsilon)\alpha_n \le$$

$$\le \mathrm{E}(g'(X))^2 + a_1(\varepsilon)\alpha_n \le \mathrm{E}(g(X_n))^2 + a_2(\varepsilon)\alpha_n\,.$$

Таким образом, $R_{X_n}(\varepsilon) \le 1 + a_3(\varepsilon)\alpha_n$ для любого $\varepsilon > 0$. Переходя к пределу, получаем $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0}\limsup\limits_{n\to\infty} R_{X_n}(\varepsilon) \le 1$.

С другой стороны, пусть выполнено последнее соотношение, и пусть $\{\,|X_n|^2\}$ — равномерно интегрируемая последовательность. Достаточно показать, что если для всякой последовательности (n') последовательность $X_{n'}$ сходится по распределению к X, то X имеет стандартное нормальное распределение. Для $g \in S_\varepsilon$ имеем

$$\mathbf{D}\, g(X) = \lim_{n' \to \infty} \mathbf{D}\, g(X_{n'}) \le \limsup_{n' \to \infty} \{R_{X_{n'}}(\varepsilon)\,(\varepsilon + \mathbf{E}\,(g'(X_{n'}))^2)\}\ .$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$, получим $\mathbf{D}\, g(X) \le \mathbf{E}\,(g'(X))^2$. Так как $\mathbf{E}\, X = 0$ и $\mathbf{D}\, X = 1$, случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Теорема 4.1 доказана.

4.2. В этом пункте рассматривается конечномерный функционал. Мы будем применять прежнее обозначение $\|g\|$, подразумевая, что $|g'(t)|$ и $|g''(t)|$ суть нормы линейного и билинейного функционалов соответственно. Фиксируем непрерывный билинейный неотрицательный функционал A и полагаем

$$U_X(\varepsilon) = U_X(A, \varepsilon) = \sup_{g \in S_\varepsilon} \frac{\mathbf{D}\, g(X)}{\varepsilon + \mathbf{E}\, A(g'(X), g'(X))}\,.$$

Теорема 4.2. *Функционал $U_X(A)$ обладает следующими свойствами:*

1) *если* $A \ge B$, *то* $U_X(A, \varepsilon) \le U_X(B, \varepsilon)$;

2) $U_X(\varepsilon) \to U_X$ *при* $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$;

3) $U_X(\varepsilon) \le \varepsilon^{-3}$;

4) *если X и Y независимы, то* $U_{X+Y}(\varepsilon) \le U_X(\varepsilon) + U_Y(\varepsilon)$;

5) *если* $\mathbf{D}\,(X, h) = A(h, h)$ *для всех линейных функционалов h, то верно неравенство* $\lim_{\varepsilon \to 0} U_X(\varepsilon) \ge 1$, *причем равенство достигается тогда и только тогда, когда X имеет гауссовское распределение*;

6) $U_{aX+b}(\varepsilon) \le a^2\, U_X(\varepsilon \min(1, a^{-2}))$;

7) $U_X(\varepsilon) \le 4\,\varepsilon^{-3}\, \mathbf{E} \min(1, |X|^2)$;

8) $\limsup_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} U_{X_n}(\varepsilon) = 0$ *тогда и только тогда, когда существуют μ_n такие, что $X_n - \mu_n \to 0$ по вероятности*;

9) *если* $\mathbf{D}\,(X, h) \equiv \alpha\, A(h, h)$, *то* $U_X(\varepsilon) \le (\alpha + c_\varepsilon\, \mathbf{E} \min(|X|^3, |X|^2))$;

10) *если* $\mathbf{E}\, X_n = 0$, $\mathbf{D}\,(X_n, h) \equiv A(h, h)$ *для любого n и X имеет нормальное распределение, то X_n сходится по распределению к X тогда и только тогда, когда* $\{|X_n|^2\}$ *есть равномерно интегрируемая последовательность и* $\limsup_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} U_{X_n}(\varepsilon) \le 1$.

Доказательство. Свойство 1 очевидно. Свойства 2—10 доказываются аналогично свойствам 1—9 из теоремы 4.1 (естественно, что вместо $\mathbf{E}\,(g'(X))^2$ следует писать $\mathbf{E}\, A(g'(X), g'(X))$). Продемонстрируем это на доказательстве свойства 9. Для функции $g \in S_\varepsilon$ имеем

$$\mathbf{D}\, g(X) \le \mathbf{E}\,(g(X) - g(0))^2 \le \mathbf{E}\,(g'(0), X)^2 + c_1\, \|g\|^2\ \mathbf{E}\,(\min(|X|^3, |X|^2) =$$

$$= \alpha\, \mathbf{E}\, A(g'(0), g'(0)) + c_1\, \|g\|^2\ \mathbf{E}\,(\min(|X|^3, |X|^2)\,.$$

С другой стороны, $\mathbf{E}\,(g'(X))^2 \ge A(g'(0), g'(0)) - c_2\, \|g\|^2\ \mathbf{E} \min(|X|, 1)$. Ввиду свойства 6

$$U_X(\varepsilon) \le (\alpha + c_\varepsilon\, \|g\|^2\ \mathbf{E}\,(\min(|X|^3, |X|^2))\,.$$

Теорема 4.2 доказана.

4.3. Отметим приложение полученных результатов к закону больших чисел.

Теорема 4.3. (а) *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов со значениями в конечномерном евклидовом пространстве, причем $L(X)$ есть симметричное распределение и*

$$n\,\mathbf{P}(|X| \geq \delta n) \to 0, \qquad n \to \infty, \tag{4.1}$$

для любого $\delta > 0$. Тогда $S_n \equiv n^{-1}(X_1 + \ldots + X_n) \to 0$ по вероятности.

(б) *Пусть $\{X_{1,n}, \ldots, X_{n,n} : n \geq 1\}$ есть схема серий независимых случайных векторов со значениями в конечномерном евклидовом пространстве и с симметричными распределениями. Предположим, что*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\min(1, |X_{i,n}|^2) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Тогда $S_n \equiv X_{1,n} + \ldots + X_{n,n} \to 0$ по вероятности.

Доказательство. Воспользуемся свойством 8 (теорема 4.2). Требуется показать, что $\limsup\limits_{n \to \infty} U_{S_n}(A_0, \varepsilon) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Применяя свойства 4 и 7 (теорема 4.2), получаем

$$U_{S_n}(A_0, \varepsilon) \leq n\, U_{X/n}(A_0, \varepsilon) \leq n\, 4\varepsilon^{-3}\mathbf{E}\min(1, |X/n|^2).$$

Нетрудно видеть, что в силу (4.1) $n\mathbf{E}\min(1, |X/n|^2) \to 0$. Следовательно, утверждение (а) доказано.

Рассуждая аналогично, придем к соотношению

$$U_{S_n}(A_0, \varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{n} U_{X_{i,n}}(A_0, \varepsilon) \leq 4\varepsilon^{-3}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\min(1, |X_{i,n}|^2) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Теорема 4.3 доказана.

4.4. В этом пункте дается новое доказательство центральной предельной теоремы.

Теорема 4.4. *Пусть $\{X_{1,n}, \ldots, X_{n,n} : n \geq 1\}$ есть схема серий независимых случайных векторов со значениями в конечномерном евклидовом пространстве, причем*

$$\mathbf{E}X_{i,n} = 0, \quad \mathbf{D}(X_{i,n}, h) \equiv \alpha_{i,n}A(h, h), \quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,n} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}(|X_{i,n}|^2\mathbf{I}(|X_{i,n}| \geq \delta)) \to 0, \qquad n \to 0,$$

для любого $\delta > 0$. Тогда справедлива центральная предельная теорема.

Доказательство. Пусть $S_n \equiv X_{1,n} + \ldots + X_{n,n}$. Применим свойство 10 (теорема 4.2). Известно, что последовательность $\{|S_n|^2 : n \geq 1\}$ равномерно интегрируема. Следовательно, достаточно показать, что

$\limsup_{n\to\infty} U_{S_n}(A,\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, $\varepsilon>0$. Из свойств 4 и 9 (теорема 4.2) вытекает соотношение

$$U_{S_n}(A,\varepsilon)\le \sum_{i=1}^{n} U_{X_{i,n}}(A,\varepsilon)\le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,n}+c\varepsilon^{-3}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\min(|X_{i,n}|^3,\,|X_{i,n}|^2)\equiv 1+\Delta_n .$$

Осталось заметить, что условие Линдеберга эквивалентно следующему условию: $\Delta_n\to 0$ при $n\to\infty$. Теорема 4.4 доказана.

4.5. Следует отметить, что свойство 9 (теорема 4.1) может не выполняться без условия равномерной интегрируемости. Это показывает следующий пример. Пусть X, Y, q_n — независимые случайные величины с распределениями

$$\mathrm{P}(X\ge t)=2e^{-2t},\ t\ge 0,\ \mathrm{P}(Y=\pm 1)=1/2,\ \mathrm{P}(q_n=1)=1-1/n,$$
$$\mathrm{P}(q_n=0)=1/n .$$

Положим $X_n=q_n(X-1/2)+(1-q_n)\,b_n Y$, $b_n=(3n/4+1/4)^{1/2}$. Тогда $\mathrm{E}X_n=0$, $\mathrm{D}X_n=1$, последовательность X_n сходится к $X-1/2$ по вероятности и верно неравенство $\limsup_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty} R_{X_n}(\varepsilon)\le 1$. Докажем последнее соотношение. Пусть $g\in S_\varepsilon$. Известно (см., например, [14] или §6), что верно неравенство $\mathrm{D}\,g(X-1/2)<\mathrm{E}(g'(X-1/2))^2$. С другой стороны, если $z\in S_\delta$, то

$$|\,\mathrm{E}Z(X_n)-\mathrm{E}Z(X-1/2)\,|=n^{-1}\,|\,\mathrm{E}Z(Yb_n)-\mathrm{E}Z(X-1/2)\,|\le 2n^{-1}\delta^{-1} .$$

Следовательно, при $n\to\infty$

$$\mathrm{D}\,g(X_n)\le \mathrm{D}\,g(X-1/2)+a(\varepsilon)\,n^{-1}\le$$

$$\le \mathrm{E}(g'(X-1/2))^2+a(\varepsilon)\,n^{-1}\to \mathrm{E}(g'(X-1/2))^2$$

для любого $\varepsilon>0$, что и требовалось доказать.

§ 5. ХАРАКТЕРИЗАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА

5.1. Положим

$$A_X(Y)=\sup_g\frac{\mathrm{D}\,g(X)}{\mathrm{E}(g'(X+Y))^2},$$

где X и Y — независимые случайные величины, $0<\mathrm{D}\,Y<\infty$; супремум берется по всем функциям g с ограниченной равномерно дифференцируемой производной.

Теорема 5.1. (а) *Пусть* $Y=0$ *п. н. Справедливо неравенство* $A_Y(X)\ge \mathrm{D}X$, *причем равенство достигается тогда и только тогда, когда* X *имеет нормальное распределение.*

(б) *Пусть Y имеет стандартное нормальное распределение. Справедливо неравенство $A_Y(X) \geq \mathrm{D}\,X$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда X имеет характеристическую функцию*

$$f_X(t) = \exp(i\mu t + \mathrm{D}\,X(e^{-t^2/2} - 1)).$$

(в) *Пусть Y имеет равномерное распределение на интервале $[0, 1]$. Справедливо неравенство $A_Y(X) \geq \mathrm{D}\,X$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $X - \mu$ для некоторого μ имеет распределение Пуассона с параметром $\mathrm{D}\,X$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что для линейной функции отношение $\dfrac{\mathrm{D}\,g(X)}{\mathrm{E}\,(g'(X+Y))^2}$ равно $\mathrm{D}\,X$. Следовательно,

$$A_X(Y) \geq \mathrm{D}\,X. \tag{5.1}$$

(а) Утверждение доказано в [5].

(б) Так как в (5.1) равенство достигается на линейных функциях, мы можем применить вариационный принцип, т. е. выписать уравнение Эйлера для соответствующей вариационной задачи, и вывести равенство

$$\mathrm{E}\,((X - \mathrm{E}\,X)\,h(X)) = \mathrm{D}\,X\,\mathrm{E}\,h'(X+Y),$$

верное для всех функций h с ограниченной равномерно дифференцируемой производной. Полагая $\mu = \mathrm{E}\,X$, $h(u) = e^{iut}$, получим для характеристической функции следующее дифференциальное уравнение:

$$f_X'(t) = (i\mu - \mathrm{D}\,X\,t\,e^{-t^2/2})\,f_X(t).$$

Поэтому $f_X(t) = \exp(i\mu t + \mathrm{D}\,X(e^{-t^2/2} - 1))$. С другой стороны, если выполнено предыдущее соотношение, то для X справедливо представление

$$X = \mu + \sum_{i=1}^{\nu} Y_i,$$

где Y, Y_1, Y_2 — независимые одинаково распределенные случайные величины, Y имеет стандартное нормальное распределение, а ν имеет распределение Пуассона с параметром $\mathrm{D}\,X$. Следовательно,

$$\mathrm{D}\,g\left(\mu + \sum_{i=1}^{\nu} Y_i\right) \leq \mathrm{E}\left(g\left(\mu + \sum_{i=1}^{\nu} Y_i\right) - g(\mu)\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(g\left(\mu + \sum_{i=1}^{k} Y_i\right) - g(\mu)\right)^2 \mathrm{P}(\nu = k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(g'\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i\right)\right)^2 k\,\mathrm{P}(\nu = k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(g'\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i\right)\right)^2 \mathrm{P}(\nu = k-1) = \mathrm{E}\,(g'(X+Y))^2.$$

(в) Пусть в (5.1) достигается равенство. Поступая так же, как при доказательстве утверждения (б), из вариационного принципа получим для характеристической функции искомого распределения следующее уравнение:

$$f_X'(t) = (i\mu + i t^{-1} \{ e^{it} - 1 \} \mathrm{D} X) \, f_X(t) .$$

Поэтому $f_X(t) = \exp(i\mu + \mathrm{D} X (e^{it} - 1))$. С другой стороны, если $X - \mu$ имеет распределение Пуассона с параметром λ, то

$$\mathrm{D}\, g(X) \le \lambda\, \mathrm{E}\, (g(X+1) - g(X))^2 = \lambda\, \mathrm{E}\, (\mathrm{E}\, (g'(X+Y) \mid X))^2 \le \lambda\, \mathrm{E}\, (g'(X+Y))^2 .$$

Теорема 5.1 доказана.

5.2. Положим

$$Q_X = \sup_g \frac{\mathrm{E}\, g^2(X)}{\mathrm{E}\, (g'(X))^2},$$

где $\mathrm{E} X^2 = 1$ и супремум берется по всем функциям g с ограниченной равномерно непрерывной производной таким, что $g(0) = 0$.

Теорема 5.2. *Справедливо неравенство* $Q_X \ge 1$, *причем равенство достигается тогда и только тогда, когда* X *имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью*

$$Z(u) = [a \mathrm{I}(u \ge 0) + b \mathrm{I}(u \le 0)]\, e^{-u^2/2}, \quad a, b \ge 0, \ a + b = (2/\pi)^{1/2} .$$

Доказательство. Здесь, как и ранее, для линейных функций отношение $\dfrac{\mathrm{E}\, g^2(X)}{\mathrm{E}\, (g'(X))^2}$ равнj единице. Следовательно,

$$Q_X \ge 1 . \tag{5.2}$$

Пусть распределение $L(X)$ имеет плотность указанного вида. Тогда

$$\mathrm{E}\, (g(X) - g(0))^2 = \mathrm{E} \left(\int_0^X g'(u)\, du \right)^2 \le \mathrm{E} \left(X \int_0^X (g'(u))^2\, du \right) = \mathrm{E}\, (g'(X))^2 .$$

Тем самым первая часть теоремы доказана. Аналогичное доказательство приведено в [21].

Теперь пусть в (5.2) достигается равенство. Применяя вариационный принцип, приходим к интегродифференциальному уравнению

$$\int_0^\infty u\, h(u)\, F_X(du) = \int_0^\infty h'(u)\, F_X(du) ,$$

где h — произвольная финитная бесконечно дифференцируемая функция, $h(0) = 0$. Следовательно, искомое распределение имеет гладкую (за исключением точки 0) плотность $Z_X(u)$, которая удовлетворяет уравнению

$$Z'_X(u) + u\, Z_X(u) = 0 , \quad u \ne 0 .$$

Таким образом, для некоторых a, b имеет место соотношение

$$Z_X(u) \equiv Z(u) = (a \mathrm{I}(u \ge 0) + b \mathrm{I}(u \le 0))\, e^{-u^2/2} .$$

Теорема 5.2 доказана.

5.3. Пусть X — случайный элемент со значениями в сепарабельном банаховом пространстве E, $0 \ne a \in E$. Положим

$$a_X = \sup_g \frac{\mathbf{D}\, g(X)}{\mathbf{E}\, g^2(X-a)},$$

где супремум берется по всем ограниченным измеримым функциям g. Здесь удобно считать, что $0/0 = 1$.

Теорема 5.3. *Справедливо неравенство $a_X \geq 1$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда X имеет вырожденное распределение.*

Доказательство проведем от противного. Пусть $a_X = 1$, и пусть существует множество B такое, что $0 < \mathbf{P}(X \in B) < 0$, $B \in [k_0 a, k_0 a + a)$. Положим

$$p_k = \mathbf{P}(X \in B + k\,a),\quad u_k = \sup_{r \geq k} p_r,\quad b_k = \sum_{r=k}^{\infty} p_r.$$

Нетрудно видеть, что найдется последовательность натуральных чисел (k') такая, что $u_{k'} \equiv p_{k'}$. Возьмем $g(u) = I_{B+ka}(u)$. Тогда

$$\mathbf{D}\, g(X) = \mathbf{P}(X \in B + k\,a)\,(1 - \mathbf{P}(X \in B + k\,a)) \leq$$

$$\leq a_X \mathbf{P}(X \in B + k\,a + a) \leq \mathbf{P}(X \in B + k\,a + a).$$

Следовательно, $p_k \leq p_{k+1} + p_k^2$ для любого $k \geq 1$, поэтому $0 < p_k < 1$ для всех k. Итерируя неравенство $p_k \leq p_{k+1} + p_k^2$, получим

$$p_k \leq p_{k+n} + \sum_{r=k}^{n+k} p_r^2 \leq \ldots \leq \sum_{r=k}^{\infty} p_r^2 \leq b_k u_k$$

для любого $k \geq 1$. Отсюда вытекает, что $0 < p_{k'} = u_{k'} \leq 2^{-1} u_{k'} \leq 1$ при $k \geq k_0$. Противоречие. Теорема 5.3 доказана.

Приведенная характеризация вырожденного распределения не устойчива относительно сходимости по распределению. Покажем это на примере абсолютно непрерывных распределений, заданных на вещественной прямой.

Теорема 5.4. *Функционал a_X обладает следующими свойствами:*

1) *если распределение F_X имеет плотность f относительно меры Лебега, то*

$$a_X = \operatorname{ess\,sup}\{f(t)/f(t+a) : t \in \mathbf{R}\}; \tag{5.3}$$

2) *для последовательности случайных величин $\{X_n : n \geq 1\}$ и соответствующей ей последовательности плотностей*

$$f_n(u) = \frac{n}{2}\left(n^{-2}\mathrm{I}(0 < u < n) + u^{-2}\mathrm{I}(u \geq n)\right),\quad n = 1, 2, \ldots,$$

справедливы соотношения $\mathbf{E}X_n = \infty$, $a_{X_n} \to 1$, причем последовательность $\{X_n : n \geq 1\}$ не является слабо компактной.

Доказательство. Нетрудно видеть, что свойство 2 вытекает непосредственно из определения и формулы (5.3). Установим свойство 1. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем множество $B = B_\varepsilon$ такое, что

$$\int \mathrm{I}(t \in B_\varepsilon) f(t)\, dt = \varepsilon .$$

Пусть $g(u) = I_{\Delta_\varepsilon}(u)$. Тогда

$$\mathrm{D}\, g(X) = F_X(B_\varepsilon)(1 - F_X(B_\varepsilon)) = (1-\varepsilon) \int \mathrm{I}(t \in B_\varepsilon) f(t)\, dt ,$$

$$\mathrm{E}\, g^2(X-a) = \int \mathrm{I}(t - a \in B_\varepsilon) f(t)\, dt = \int \mathrm{I}(t \in B_\varepsilon) f(t+a)\, dt .$$

Следовательно,

$$a_X \geq \operatorname{ess\,sup} \frac{d F_X}{d F_{X-a}} = \operatorname{ess\,sup} \frac{f(t)}{f(t+a)} .$$

С другой стороны,

$$\mathrm{D}\, g(X) \leq \mathrm{E}\, g^2(X) = \int g^2(t) f(t)\, dt \leq a_X \int g^2(t) f(t+a)\, dt \leq \mathrm{E}\, g^2(X-a) .$$

Теорема 5.4 доказана.

§ 6. ФУНКЦИОНАЛЫ, ВКЛЮЧАЮЩИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

6.1. Обозначим через P пространство полиномов, а через H_1 — пространство абсолютно непрерывных функций. Положим

$$Q^k\{X\} = \{ g : 0 < \mathrm{E}\,(g^{(k)}(X))^2 < \infty, \mathrm{E}\, g^{(i)}(X) = 0, i = 0, \ldots, k-1 \} ,$$

$$C^k\{X\} = C^k \cap Q^k\{X\}, \quad C_0^\infty\{X\} = C_0^\infty \cap Q^k\{X\}, \quad P\{X\} = P \cap Q^k\{X\},$$

$$R_{X,k} = \sup_{g \in C^k\{X\}} \frac{\mathrm{E}\, g^2(X)}{\mathrm{E}\,(g^{(k)}(X))^2}, \quad r_{X,k} = \sup_{g \in C_0^\infty\{X\}} \frac{\mathrm{E}\, g^2(X)}{\mathrm{E}\,(g^{(k)}(X))^2},$$

$$P R_{X,k} = \sup_{g \in P\{X\}} \frac{\mathrm{E}\, g^2(X)}{\mathrm{E}\,(g^{(k)}(X))^2}, \quad R_X = \sup_{g \in \mathrm{H}_1(X)} \frac{\mathrm{E}\, g^2(X)}{\mathrm{E}\,(g^{(1)}(X))^2}, \quad U_X = \frac{R_X}{\mathrm{D}_X}.$$

Теорема 6.1. *Функционал $R_{X,k}$ обладает следующими свойствами:*

1) $R_{X,k} = r_{X,k} = P R_{X,k}$;

2) *если N_0 — положительное число такое, что* $\mathrm{P}(|X| \geq N_0) \leq \varepsilon$, *где ε — достаточно малое положительное число, зависящее только от k (можно взять $\varepsilon = k^{-k}/10$), то для всех натуральных m*

$$\mathrm{E}\, |X|^m \leq c\, m^m \left(R_{X,k}^{m/(2k)} + N_0^m\right), \tag{6.1}$$

где c зависит только от k (следовательно, если $R_{X,k} < \infty$, то выполнено условие Крамера на убывание «хвостов» распределения X);

3) $R_{X,k+m} \leq R_{X,k} \times R_{X,m}$;

4) $R_{X,k} \leq R_X^k$;

5) *если X_n сходится к X по распределению, то* $R_{X,k} \leq \liminf_{n\to\infty} R_{X_n,k}$;

6) $R_{aX+b,k} = a^{2k} R_{X,k}$;

7) *если* $P_{k,X,g}(t)$ — *полином степени* $n \le k-1$ *такой, что имеет место равенство* $\mathrm{E}\,P^{(i)}_{k,X,g}(X) = \mathrm{E}\,g^{(i)}(X)$, $i = 0, \dots, k-1$, *то*

$$\mathrm{E}\,(g(X) - P_{k,X,g}(X))^2 \le R_{X,k}\,\mathrm{E}\,(g^{(k)}(X))^2\,;$$

8) *если* $\{g_n(u) : n \ge 1\}$ — *последовательность функций, для которых*

$$\mathrm{E}\,(g_n^{(k)}(X))^2 = 1\,,\ \max_{0 \le i \le k-1} |\,\mathrm{E}\,g_n^{(i)}(X)\,| \to 0\,, \qquad n \to \infty\,,$$

то $R_{X,k} \ge \limsup\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}\,g_n^2(X)$;

9) *если* X *имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией* σ, *то для всякой* k *раз непрерывно дифференцируемой функции* g *имеют место неравенства*

$$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!}\sigma^j (\mathrm{E}\,g^{(j)}(X))^2 \le \mathrm{D}\,g(X) \le \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!}\sigma^j\,\mathrm{E}\,(g^{(j)}(X))^2 + \frac{\sigma^k}{k!}\mathrm{E}\,(g^{(k)}(X))^2\,.$$

Теорема 6.2. (а) *Пусть* Z *имеет показательное распределение с параметром единица. Тогда* $R_{Z,k} = 4^k$.

(б) *Пусть* Y *имеет стандартное нормальное распределение. Тогда* $R_{Y,k} = 1/k!$.

(в) *Пусть* U *имеет равномерное распределение на интервале* $[0, 1]$. *Тогда* $R_U = 4$, $R_{U,2} = \nu^{-4}$, *где*

$$\nu = \min\{\omega > 0 : (e^{\omega\pi} - e^{-\omega\pi})\cos\omega\pi + (e^{\omega\pi} + e^{-\omega\pi})\sin\omega\pi \le 0\}\,.$$

Теорема 6.3 (**о характеризации нормального распределения**).

(а) (характеризация) *Пусть* X — *случайная величина такая, что* $\mathrm{E}\,X^i = \mathrm{E}\,Y^i$ *при* $i = 1, \dots, 2k$. *Тогда*

$$R_{X,k} \ge 1/k!\,, \tag{6.2}$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда X *имеет стандартное нормальное распределение.*

(б) (устойчивость характеризации) *Пусть* $\mathrm{E}\,X_n^i \to \mathrm{E}\,Y^i$ *для* $i=1, \dots, 2k$ *и* $R_{X_n,k} \to 1/k!$. *Тогда* X_n *сходится по распределению к стандартному нормальному распределению.*

Сформулируем отдельно результат для случая $k = 1$.

Теорема 6.4. (а) (характеризация) *Справедливо неравенство* $U_X \ge 1$, *причем равенство достигается тогда и только тогда, когда* X *имеет нормальное распределение.*

(б) (устойчивость характеризации) *Пусть* $U_{X_n} \to 1$. *Тогда случайные величины* $(X_n - \mathrm{E}\,X_n)/\mathrm{D}\,X_n^{1/2}$ *слабо сходятся к стандартному нормальному распределению.*

Теорема 6.4 доказана в [5]. Доказательства теорем 6.2 и 6.3 приводятся в п. 6.2, а доказательство теоремы 6.1 — в п. 6.3. Пример экспоненциального распределения показывает,что неравенства, указанные в свойствах 3 и 4, точные. Пусть величина ξ имеет равномерное распределение на интервале $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$. Тогда из утверждения (в) теоремы 6.2 следует, что $\mathbf{E}\xi=0$, $\mathbf{D}\xi=1$, $R_{\xi,2}<1/2=R_{Y,2}$, где Y имеет стандартное нормальное распределение. Введем следующее обозначение: $r_k=\inf\{R_{X,k}\colon \mathbf{E}X=0, \mathbf{D}X=1\}$. Согласно теореме 6.3 $r_1=1$, т. е. инфимум для r_2 не достигается на гауссовском распределении. Это означает, в частности, что в теореме 6.3 при $k=2$ дополнительное условие совпадения моментов третьего и четвертого порядков является необходимым. Автору не известно точное значение r_k при $k\geq 2$.

6.2. Доказательство теоремы 6.2. (а) Вычислим функционал $R_{Z,k}$ для показательного распределения с параметром единица. Положим $G_n(u)=e^{u/2}f(u,n)$, где $f(u,n)$ — гладкая функция такая, что $f(u,n)=1$ при $u\leq n-1$, $f(u,n)=0$ при $u\geq n$. Тогда

$$\mathbf{E}(G_n^{(k)}(X))^2=\mathbf{E}(2^{-k}e^{X/2}f(X,n)+O(1)\,\mathrm{I}(n-1\leq X\leq n)\,e^{X/2})^2=$$
$$=4^{-k}\mathbf{E}\,e^{X}f(X,n)+O(1)=4^{-k}\mathbf{E}\,G_n^2(X)+O(1).$$

С другой стороны, имеем $|\,\mathbf{E}\,G_n^{(i)}(X)\,|=O(1)\,\mathbf{E}\,e^{X/2}=O(1)$. Возьмем $g_n(u)=G_n(u)\,(\mathbf{E}(G_n^{(k)}(X))^2)^{-1}$ и воспользуемся свойством 8. Тогда выполнено соотношение $R_{X,k}\geq\limsup\limits_{n\to\infty}\mathbf{E}\,g_n^2(X)=4^k$, что и требовалось доказать.

(б) Вычислим функционал $R_{Y,k}$ для стандартного нормального распределения. Пусть $\{H_n(x)\colon n\geq 0\}$ — последовательность полиномов Эрмита, т. е. полиномов степени n таких, что $\mathbf{E}H_k(Y)H_m(Y)$ равно нулю, если $k\neq m$ и единице в ином случае. Известно, что

$$\frac{d\,H_n(x)}{d\,x}=n^{1/2}H_{n-1}(x).$$

Возьмем $g(x)=H_k(x)$. Тогда

$$\mathbf{E}\,g^{(i)}(Y)=(k!/(k-i)!)^{1/2}\,\mathbf{E}H_{k-i}(Y)=0\,,\quad i=0,\ldots,k-1\,,$$

$$\mathbf{E}\,g^2(Y)=1\,,\quad \mathbf{E}(g^{(k)}(Y))^2=k!\,.$$

Следовательно, $R_{Y,k}\geq 1/k!$. С другой стороны, рассмотрев произвольный полином $P(x)=\sum\limits_{i=0}^{m}a_iH_i(x)$, получим

$$P^{(j)}(x)=\sum_{i=j}^{m}a_iH_{i-j}(x)\left(\frac{i!}{(i-j)!}\right)^{1/2}.$$

Таким образом, если $\mathbf{E}P^{(j)}(Y)=0$ для $j=0,\ldots,k-1$, то $a_j=0$ для тех же значений $j=0,\ldots,k-1$ и

$$\mathbf{E}P^2(Y)=\sum_{i=k}^{m}a_i^2\leq\frac{1}{k!}\sum_{i=k}^{m}a_i^2\frac{i!}{(i-j)!}=\frac{1}{k!}\mathbf{E}(P^{(k)}(Y))^2.$$

Поэтому в силу свойства 1 (теорема 6.1) $R_{Y,k}\leq 1/k!$, что и требовалось доказать.

(в) Пусть U имеет равномерное распределение на интервале $[0, 1]$. Хорошо известно (см., например, [14]), что $R_U < \infty$. Сначала покажем, что для всякого натурального k существует функция G_k, удовлетворяющая условию

$$R_{U,k} = \mathrm{E}\, G_k^2(U)\,,\quad \mathrm{E}\,(G_k^{(k)}(U))^2 = 1\,,\quad \mathrm{E}\, G_k^{(i)}(U) = 0\,,\quad i = 0, \ldots, k-1\,,$$

и дифференциальному уравнению

$$G_k + (-1)^k \lambda\, G_k^{(2k)} = 0\,,\quad \lambda = R_{U,k}\,. \tag{6.3}$$

Зафиксируем k. Пусть $\{g_n : n \geq 1\}$ — последовательность бесконечно дифференцируемых функций таких, что

$$\mathrm{E}\,(g_n^{(k)}(U))^2 = 1\,,\quad \mathrm{E}\, g_n^{(i)}(U) = 0\,,\quad i = 0, \ldots, k-1\,,\quad \mathrm{E}\, g_n^2(U) \geq (1 - 1/n)\, R_{U,k}\,.$$

Если для непрерывной функции $Z(u)$ верно равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} Z(u)\, d u = 0\,,$$

то найдется точка b такая, что $Z(b) = 0$. Следовательно, существуют точки $u_{i,n}$ такие, что

$$g_n^{(i)}(u_{i,n}) = 0\,,\quad i = 0, \ldots, k-1\,,$$

$$\sup_{|u-v| \leq \delta} |g_n^{(k-1)}(u) - g_n^{(k-1)}(v)\,|^2 \leq c\,\mathrm{E}\,(g^{(k)}(U))^2\,\delta = c\,\delta\,.$$

Поэтому замыкание множества $\{g_n\}$ является компактом в пространстве $C^{(k-1)}([-\pi, \pi])$ и не ограничивая общности можно считать, что

$$g_n^{(i)}(x) \Rightarrow g^{(i)}(x)\,,\quad i = 0, \ldots, k-1\,,$$

равномерно по $u \in [-\pi, \pi]$. Применяя вариационный принцип, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_n(u)\, h(u)\, d u - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} g_n^{(k)}(u)\, h^{(k)}(u)\, d u \to 0\,,\qquad n \to \infty\,,$$

для всякой бесконечно дифференцируемой функции h, удовлетворяющей условию $h^{(i)}(-\pi) = h^{(i)}(\pi) = 0$ для всех $i \geq 0$. Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_n(u)\, h(u)\, d u + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} g_n^{(k-1)}(u)\, h^{(k+1)}(u)\, d u \to 0\,,\quad n \to \infty\,.$$

Таким образом, функция g есть обобщенное решение дифференциального уравнения

$$(-1)^k \lambda\, g^{(2k)} + g = 0\,,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\, h(u)\, d u + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} g^{(k-1)}(u)\, h^{(k+1)}(u)\, d u = 0\,,$$

откуда следует, что g — бесконечно дифференцируемая функция, удовлетворяющая уравнению (6.3). Кроме того

$$\mathrm{E}\, g^{(i)} = 0\,,\ i = 0, \ldots, k-1\,, \tag{6.4}$$

$$\mathrm{E}\, g^2(U) = \lambda\,,\quad \mathrm{E}\,(g^{(k)}(U))^2 \le \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}\,(g_n^{(k)}(U))^2 = 1\,. \tag{6.5}$$

Следовательно,

$$\mathrm{E}\,(g^{(k)}(U))^2 = 1\,, \tag{6.6}$$

и в неравенстве из (6.5) достигается равенство.

Продолжим вычисление функционала $R_{U,k}$ для равномерного распределения. Случай $k=1$ разобран в [14]. Оказывается, что верны соотношения $G_1(u) = \sin(u/2)$, $R_U = 4$. Разберем случай $k = 2$. Сначала выведем оценку $R_{U,2}$ снизу. Для тригонометрического полинома

$$T(u) = \sum a_m \cos(m\,u) + b_m \sin(m\,u)$$

имеем

$$\mathrm{E}\, T^{(i)}(U) = 0 \quad \forall\, i \ge 0\,,\ \mathrm{E}\,(T^{(k)}(U))^2 = \sum (a_m^2 + b_m^2)\, m^2\,,$$

$$\mathrm{E}\,(T(U))^2 = \sum (a_m^2 + b_m^2)\,,$$

т. е. $R_{U,2} \ge 1$. Ниже мы покажем, что в действительности неравенство строгое. Тем самым прямое использование рядов Фурье ведет в данном случае к грубой оценке.

Далее, мы ищем функцию g, которая удовлетворяет уравнению (6.3) и соотношениям (6.4) — (6.6) с наибольшим λ. Общее решение уравнения (6.3), удовлетворяющее соотношению (6.4), может быть записано в виде

$$g(t) = (a\sin(\omega\, t) + b\cos(\omega\, t)) - \{\, q\, a\,(e^{\omega\, t} - e^{-\,\omega\, t}) + q\, b\,(e^{\omega\, t} - e^{-\,\omega\, t})\,\}\,,$$
$$\lambda = \omega^{-\,4}\,,$$

где $q = \sin(\omega\,\pi)\,(e^{\omega\, t} - e^{-\,\omega\, t})^{-1}$. Из соотношений (6.5) и (6.6) вытекает равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} (a\sin(\omega\, t) + b\cos(\omega\, t))\,\big(q\, a\,(e^{\omega\, t} - e^{-\,\omega\, t}) + q\, b\,(e^{\omega\, t} - e^{-\,\omega\, t})\big)\, d\, t = 0\,.$$

Так как мы ищем наибольшее $\lambda \ge 1$ (а значит наименьшее ω, $0 < \omega \le 1$), для которого выполнены соотношения (6.4) — (6.6) и уравнение (6.3), следует взять

$$a = 0\,,\ \ \nu = \min\{\,\omega :\ 0 < \omega \le 1,\ \int_{-\pi}^{\pi} b\cos(\omega\, t)\, b\,(e^{\omega\, t} + e^{-\,\omega\, t})\, d\, t = 0\,\} =$$

$$= \min\{\,\omega > 0 :\ (e^{\omega\, t} - e^{-\,\omega\, t})\cos\omega\,\pi + (e^{\omega\, t} + e^{-\,\omega\, t})\sin\omega\,\pi \le 0\,\}\,.$$

Таким образом, $R_{U,2} = \nu^{-\,4}$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 6.3. (а) Возьмем $g(u) = H_k(u)$. Тогда

$$\mathrm{E}\, g^{(i)}(X) = \mathrm{E}\, g^{(i)}(Y) = (k!/(k-i)!)^{1/2}\, \mathrm{E}\, H_{k-i}(Y) = 0\,, \quad i = 0, \ldots, k-1\,,$$
$$\mathrm{E}\, g^2(X) = 1\,, \quad \mathrm{E}\,(g^{(k)}(X))^2 = k!\,.$$

Следовательно, $R_{X,k} \geq 1/k!$. Пусть в последнем неравенстве достигается равенство. В силу свойства 2 (теорема 6.1) распределение $L(X)$ удовлетворяет условию Крамера и для функции $g(u) = H_k(u)$ отношение под знаком sup в определении функционала $R_{X,k}$ равно $1/k!$. Следовательно, взяв $g(u) = H_k(u) + \lambda\, h(u)$ и используя вариационный принцип, мы приходим к равенству

$$\mathrm{E}\, H_k(X)\, h(X) = \frac{1}{k!}\, \mathrm{E}\, H_k^{(k)}(X)\, h^{(k)}(X)\,,$$

где h — k раз непрерывно дифференцируемая функция, для которой $\mathrm{E}\, h^{(i)}(X) = 0$, $i = 0, \ldots, k-1$. Возьмем $h(u) = H_m(u)$, $m > k$. Тогда

$$\mathrm{E}\, h^{(i)}(X) = \mathrm{E}\, H_m^{(i)}(X) = (m!/(m-i)!)^{1/2}\, \mathrm{E}\, H_{m-i}(X) = 0\,, \quad i < m \leq 2k\,.$$

Поэтому h удовлетворяет нужным требованиям и в силу вышеприведенных равенств $\mathrm{E}\, H_k(X)\, H_m(X) = 0$, $k < m \leq 2k$, т. е. $\mathrm{E}\, X^{k+m} = \mathrm{E}\, Y^{k+m}$, $k < m \leq 2k$. Повторяя эту процедуру, получим, что все моменты искомого распределения совпадают с моментами стандартного нормального распределения. Тем самым утверждение (а) доказано.

(б) Утверждение доказывается так же, как в [5].

Теорема 6.3 доказана.

6.3. Доказательство теоремы 6.1. Свойства 3—7 вытекают непосредственно из определения функционала $R_{X,k}$.

Докажем свойство 8. В силу свойства 7 выполняется неравенство $\mathrm{E}\,(g_n(X) - P_{k,X,g_n}(X))^2 \leq R_{X,k}$, где $P_{k,X,g_n}(u) = a_{0,n} + \ldots + a_{k,n}\, u^{k-1}$ есть соответствующий функции g_n полином, удовлетворяющий условию

$$\mathrm{E}\, g_n^{(i)}(X) = \mathrm{E}\, P_{k,X,g_n}^{(i)}(X)\,, \quad i = 0, \ldots, k-1\,.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} |a_{k-j,n}| &\leq c_1 \max_{0 \leq i \leq j} \left(|\, \mathrm{E}\, g_n^{(i+k-j-1)}(X)\,|\, \mathrm{E}\, |X|^i\right), \\ \max_{0 \leq i \leq k-1} |a_{i,n}| &\leq c_2 \max_{0 \leq i \leq k-1} |\, \mathrm{E}\, g_n^{(i)}(X)\,|\, \mathrm{E}\, |X|^k, \end{aligned} \tag{6.7}$$

где c_i — постоянные, зависящие только от k. Следовательно,

$$\mathrm{E}\, P_{k,X,g_n}^2(X) \leq c_3 \max_{0 \leq i \leq k-1} |a_{i,n}|^2\, (\mathrm{E}\, |X|^{2k})^2 \to 0\,.$$

Тем самым

$$R_{X,k} \geq \limsup_{n\to\infty} \mathrm{E}\,(g_n(X) - P_{k,X,g_n}(X))^2 = \limsup_{n\to\infty} \mathrm{E}\,(g_n(X))^2\,,$$

что и требовалось доказать.

Для доказательства свойств 1, 2 рассмотрим сначала ограниченные случайные величины. Пусть X — ограниченная случайная величина, т.е.

$|X| \le A < \infty$. Нетрудно видеть, что $R_{X,k} \ge r_{X,k} \ge PR_{X,k}$. Чтобы показать, что на самом деле имеют место равенства, достаточно доказать, что для всякой k раз непрерывно дифференцируемой функции g такой, что $\mathrm{E}\, g^{(i)}(X) = 0$, $i = 0, \ldots, k-1$, имеем $\mathrm{E}\, g^2(X) \le PR_{X,k}\mathrm{E}\,(g^{(k)}(X))^2$. Пусть $\{P_n : n \ge 1\}$ — последовательность полиномов таких, что

$$\sup_{u \in [-A, A]} |\, g^{(k)}(u) - P_n(u)\, | \le n^{-1}.$$

Построим последовательность полиномов $\{R_{n+k} : n \ge 1\}$ таких, что

$$R_{n+k}^{(k)}(u) \equiv P(u),\ R_{n+k}^{(i)}(u_0) = g^{(i)}(u_0),\ u_0 \in [-A, A],\ i = 0, \ldots, k-1.$$

Тогда

$$\sup_{u \in [-A, A]} |\, g^{(i)}(u) - R_{n+k}^{(i)}(u)| \le \sup_{u \in [-A, A]} |\, g^{(i+1)}(u) - R_{n+k}^{(i+1)}(u)\, |\, A \le \ldots$$

$$\ldots \le \sup_{u \in [-A, A]} |\, g^{(k)}(u) - P_n(u)|\, A^{k-i} = A^{k-i} n^{-1},\ i < k.$$

Следовательно,

$$\mathrm{E}\, g^2(X) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{E}\, R_{n+k}^2(X) \le \lim_{n \to \infty} P R_{X,k}\mathrm{E}\,(R_{n+k}^{(k)}(X))^2 = P R_{X,k}\mathrm{E}\,(g^{(k)}(X))^2$$

и свойство 1 для ограниченных случайных величин установлено.

Теперь докажем свойство 2 для ограниченных случайных величин. Не ограничивая общности, можно считать, что $N_0 = 1$. Применим индукцию по m. Пусть $g(u) = u^n$. Используя свойство 7, получим

$$\{\mathrm{E}\, X^{2n}\}^{1/2} \le \{R_{X,k}\mathrm{E}\,(g^{(k)}(X))^2\}^{1/2} + \{\mathrm{E}\, P_{X,k,g}(X)^2\}^{1/2}.$$

В силу оценки (6.7)

$$\mathrm{E}\, P_{X,k,g}^2(X) \le c_k \max_{0 \le j \le k-1} \left(\max_{0 \le i \le j} (|\,\mathrm{E}\, g_n^{(i+k-j-1)}(X)\,|\, \mathrm{E}\,|X|\, \mathrm{E}\,|X|^{k-j-1})^2 \right).$$

Сначала разберем случай $n = k$. Нетрудно видеть, что при $i \le k$

$$\mathrm{E}\,|X|^i \le 1 + \mathrm{E}\,|X|^i \mathrm{I}(|X| \ge 1) \le$$

$$\le 1 + \mathrm{E}\,|X|^k \mathrm{I}(|X| \ge 1) \le 1 + \varepsilon^{1/2}(\mathrm{E}\,|X|^{2k})^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{E}\,|X|^{2k} \le c_k(R_{X,k} + \{(\varepsilon^{1/2}(\mathrm{E}\,|X|^{2k})^{1/2})^2 + 1\}).$$

Таким образом,

$$\mathrm{E}\,|X|^{2k} \le c_0(R_{X,k} + 1),\ \mathrm{E}\,|X|^m \le c_0(R_{X,k}^{m/(2k)} + 1),\ m \le 2k,$$

где c_0 зависит от k. Повторяя эту процедуру, получим

$$\mathrm{E}\,|X|^m \le c_1(R_{X,k}^{m/(2k)} + 1),\ m \le A,$$

где A — достаточно большое положительное число (оно будет выбрано ниже) и c_1 — постоянная, зависящая от A и k. Пусть теперь $m = (r+1)$, $r \ge A$. При $i \le n$

$$\mathrm{E}\,|X|^i \le 1 + \mathrm{E}\,|X|^i \mathrm{I}(|X| \ge 1) \le 1 + \varepsilon^{1/2} (\mathrm{E}\,|X|^{2n})^{i/(2n)}.$$

Следовательно, при $n \le \min(r, k + r/2)$ в силу неравенства Ляпунова и предположения индукции получим

$$\mathrm{E}\,P^2_{X,k,g}(X) \le$$

$$\le c_k \max_{0 \le j \le k-1} \left(\max_{0 \le i \le j} \left(|\,\mathrm{E}\, g_n^{(i+k-j-1)}(X)\,|\, \mathrm{E}\,|X|^i)\, \mathrm{E}\,|X|^{k-j-1} \right)^2 \right) \le$$

$$\le c_k n^{2k} (\mathrm{E}\,|X|^n)^2 \le 2\, c_k (c\, n)^{2n} n^{2k} (1 + R^{n/k}_{X,k}).$$

Поэтому

$$\{\mathrm{E}\, X^{2n}\}^{1/2} \le \{R_{X,k}\, \mathrm{E}\,(g^{(k)}(X))^2\}^{1/2} + \{\mathrm{E}\, P_{X,k,g}(X)^2\}^{1/2} \le$$

$$\le \{R_{X,k} (c\, 2\, n)^{2(n-k)} n^{2k} (1 + R^{(n-k)/k}_{X,k})\}^{1/2} +$$

$$+ \{2\, c_k (c\, n)^{2n} n^{2k} (1 + R^{n/k}_{X,k})\}^{1/2}.$$

Переписывая, находим

$$\mathrm{E}\, X^{2n} \le (c\, 2\, n)^{2n} (R^{n/k}_{X,k} + 1) \{4\, c^{-2k} 2^{-2k} + 4\, c_k n^{2k} 2^{-2n}\}.$$

Выбирая A так, чтобы выполнялось неравенство $4\, c_k n^{2k} 2^{-2n} \le 1/2$ при $n \ge A/2 - 1$, и выбирая c так, чтобы выполнялись неравенства $c \ge c_1$ и $4\, c^{-2k} 2^{-2k} \le 1/2$, получим требуемый результат.

Теперь избавимся от условия ограниченности случайной величины X. Воспользуемся приемом, предложенным в [15]. Пусть $R_{X,k} < \infty$, и пусть $\{X_n \colon n \ge 1\}$ — последовательность случайных величин с распределениями $\mathrm{P}(X_n \in A) = \mathrm{P}(X \in A \mid X \in [-n, n])$. Тогда для всякого n

$$r_{X_n,k} \le r_{X,k} < \infty, \quad r_{X_n,k} = R_{X_n,k} = P\, R_{X_n,k}.$$

Следовательно, случайные величины X_n имеют свойства 1 и 2, т. е.

$$\mathrm{E}\,|X_n|^m \le c\, m^m (r^{m/(2k)}_{X,k} + N_0^m),$$

где $\mathrm{P}(|X_n| \ge N_0) \le \varepsilon/2$. В частности, для всякого m последовательность $\{|X_n|^m \colon n \ge 1\}$ равномерно интегрируема. При $n \to \infty$ получим

$$\mathrm{E}\,|X|^m \le c\, m^m (r^{m/(2k)}_{X,k} + N_0^m).$$

Поэтому распределение удовлетворяет условию Крамера на убывание «хвостов» распределения.

Пусть, далее, $g \in Q^k(X)$, т. е. функция g k раз непрерывно дифференцируема и $\mathrm{E}\, g^{(i)}(X) = 0$, $i = 0, \ldots, k-1$. Тогда

$$\mathrm{E}\,(g(X_n) - P_{k,X_n,g}(X_n))^2 \le r_{X,k}\, \mathrm{E}\,(g^{(k)}(X_n))^2,$$

где $P_{k,X_n,g}(X_n)$ — соответствующие полиномы, построенные по функции g для случайных величин X_n. По построению $\mathrm{E}\,Z(X_n) \to \mathrm{E}\,Z(X)$ для всякой измеримой функции Z такой, что $\mathrm{E}\,|Z(X)| < \infty$. В силу свойства 1

$$\mathrm{E}\,P^2_{k,X_n,g}(X_n) \le c_k \max_{0\le i\le k-1} |\,\mathrm{E}\,g^{(i)}(X_n)\,|^2\, c\,(\,r_{X,k} + N_0^{2k}\,) \to 0\,,$$

$$\mathrm{E}\,(g^{(k)}(X))^2 \to 0\,.$$

Таким образом,

$$\mathrm{E}\,g^2(X) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\,g^2(X_n) \le \lim_{n\to\infty} r_{X,k}\,\mathrm{E}\,(g^{(k)}(X_n))^2 = r_{X,k}\,\mathrm{E}\,(g^{(k)}(X))^2\,.$$

Далее, пусть g — финитная бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой лежит в $[-A, A]$. Зададим последовательность полиномов $\{P_n :\ n \ge 1\}$ таких, что

$$\sup_{u\in[-A,A]} |\,g^{(k)}(u) - P_n(u)\,| \to 0\,,\ \ \mathrm{E}\,(g^{(k)}(u) - P_n(u))^4 \to 0\,, \quad n\to\infty\,.$$

Построим последовательность полиномов $\{R_{n+k} :\ n \ge 1\}$ таких, что

$$R^{(k)}_{n+k}(u) \equiv P_n(u)\,,\ \ R^{(i)}_{n+k}(u_0) = g^i(u_0)\,,\ \ u_0 \in [-A, A]\,,\ \ i = 0,\dots,k-1\,.$$

Тогда

$$\sup_{u\in[-A,A]} |\,g^{(i)}(u) - R^{(i)}_{n+k}(u)\,| \to 0\,,\ \ \mathrm{E}\,(R^{(i)}_{n+k}(X))^2\,\mathrm{I}\,(|X| \ge A) \to 0\,,\ \ n\to\infty\,,$$

при $i \le k$. Следовательно,

$$\mathrm{E}\,g^2(X) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\,R^2_{n+k}(X) \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty} P\,R_{X,k}\,\mathrm{E}\,(R^{(k)}_{n+k}(X))^2 = P\,R_{X,k}\,\mathrm{E}\,(g^{(k)}(X))^2\,. \tag{6.8}$$

Свойство 1 доказано.

Докажем свойство 9. Достаточно рассмотреть ситуацию, когда случайные величины X и Y совпадают по распределению, т. е. X имеет стандартное нормальное распределение. В общем случае нужно изменить масштаб, т. е. перейти от функции $g(u)$ к функции $G(u) \equiv g(\sigma u)$. Рассмотрим произвольный полином

$$P(u) = \sum_{i=0}^{m} a_i H_i(u)\,.$$

Поскольку

$$P^{(j)}(u) = \sum_{i=j}^{m} a_i H_{i-j}(u) \left(\frac{i\,!}{(i-j)\,!}\right)^{1/2},$$

верны равенство $(\mathrm{E}\,P^{(j)}(Y))^2 = a_j^2\,j\,!$ и соотношение

$$\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j!}\mathbf{E}(P^{(j)}(Y))^2=\sum_{i=1}^{k-1}a_i^2\le \mathbf{D}P(Y)=\sum_{i=1}^{m}a_i^2\le\sum_{i=1}^{k-1}a_i^2+\frac{1}{k!}\sum_{i=k}^{m}a_i^2\,\frac{i!}{(i-j)!}=$$

$$=\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j!}\mathbf{E}(P^{(j)}(Y))^2+\frac{1}{k!}\mathbf{E}(P^{(k)}(Y))^2.$$

Следовательно, так же, как при доказательстве свойства 1, из аналога соотношения (6.8) выводим

$$\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j!}\mathbf{E}(g^{(j)}(Y))^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j!}\mathbf{E}(R_{n+k}^{(j)}(Y))^2\le \mathbf{D}g(Y)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}R_{n+k}^2(Y)\le\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j!}\mathbf{E}(R_{n+k}^{(j)}(Y))^2+\frac{1}{k!}\mathbf{E}(R_{n+k}^{(k)}(Y))^2\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j!}\mathbf{E}(g^{(j)}(Y))^2+\frac{1}{k!}\mathbf{E}(g^{(k)}(Y))^2.$$

Свойство 9, а вместе с ним и теорема 6.1, доказаны.

§ 7. ФУНКЦИОНАЛЫ, ВКЛЮЧАЮЩИЕ КОНЕЧНЫЕ РАЗНОСТИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

7.1. Заменим операцию дифференцирования на операцию «конечной разности», т. е. $\Delta g(u)=g(u+1)-g(u)$. В дополнение к обозначениям, введеным в §6, пространство произвольных функций будем обозначать через J, а пространство финитных функций — через J_0. Полагаем

$$Q^k\{X\}=\{g:\ 0<\mathbf{E}(\Delta^k g(X))^2<\infty,\ \mathbf{E}\Delta^i g(X)=0,\ i=0,\dots,k-1\},$$
$$C^k\{X\}=C^k\cap Q^k\{X\},\ C_0^\infty\{X\}=C_0^\infty\cap Q^k\{X\},\ P\{X\}=P\cap Q^k\{X\},$$

$$I\{X\}=I\cap Q^k\{X\},\ I_0\{X\}=I_0\cap Q^k\{X\},$$

$$\Delta_{X,k}=\sup_{g\in C^k\{X\}}\frac{\mathbf{E}g^2(X)}{\mathbf{E}(\Delta^k g(X))^2},\quad \delta_{X,k}=\sup_{g\in C_0^\infty\{X\}}\frac{\mathbf{E}g^2(X)}{\mathbf{E}(\Delta^k g(X))^2},$$

$$P\Delta_{X,k}=\sup_{g\in P\{X\}}\frac{\mathbf{E}g^2(X)}{\mathbf{E}(\Delta^k g(X))^2},\quad I\Delta_{X,k}=\sup_{g\in I\{X\}}\frac{\mathbf{E}g^2(X)}{\mathbf{E}(\Delta^k g(X))^2},$$

$$I_0\Delta_{X,k}=\sup_{g\in I_0\{X\}}\frac{\mathbf{E}g^2(X)}{\mathbf{E}(\Delta^k g(X))^2},\quad \Delta_{X,1}\equiv\Delta_X.$$

Теорема 7.1. *Функционал $\Delta_{X,k}$ обладает следующими свойствами:*

1) $\Delta_{X,k}=\delta_{X,k}=P\Delta_{X,k}=I\Delta_{X,k}=I_0\Delta_{X,k}$;

2) *если N_0 — положительное число такое, что* $\mathbf{P}(|X|\ge N_0)\le\varepsilon$, *где ε — достаточно малое положительное число, зависящее только от k (можно взять $\varepsilon=1/10\,k^{-k}$), то для все натуральных m*

$$\mathbf{E}\,|X|^m \le c\,m^m\,(\Delta_{X,k}^{m/(2k)} + N_0^m)\,,$$

где c зависит только от k (следовательно, если $\Delta_{X,k} < \infty$, то выполнено условие Крамера на убывание «хвостов» распределения X);

3) $\Delta_{X,k+m} \le \Delta_{X,k} \times \Delta_{X,m}$;

4) $\Delta_{X,k} \le \Delta_X^k$;

5) *если X_n сходятся по распределению к X, то* $\Delta_{X,k} \le \liminf\limits_{n\to\infty} \Delta_{X_n,k}$;

6) $\Delta_{X+a} = \Delta_X$;

7) *если $P_{k,X,g}(t)$ — полином степени $n \le k-1$ такой, что*

$$\mathbf{E}\,\Delta^i P_{k,X,g}(X) = \mathbf{E}\,\Delta^i g(X)\,,\ i = 0,\dots,k-1\,,$$

то $\mathbf{E}\,(g(X) - P_{k,X,g}(X))^2 \le \Delta_{X,k}\mathbf{E}\,(\Delta^k g(X))^2$;

8) *если $\{g_n(u) : n \ge 1\}$ — последовательность функций таких, что*

$$\mathbf{E}\,(\Delta^k g_n(X))^2 = 1\,,\ \max_{0\le i\le k-1} |\,\mathbf{E}\,\Delta^i g_n(X)| \to 0\,, \quad n\to\infty\,,$$

то $\Delta_{X,k} \ge \limsup\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}\,g_n^2(X)$;

9) *если T имеет распределение Пуассона с параметром λ, то для всякой функции g выполняются неравенства*

$$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!}\lambda^j (\mathbf{E}\,\Delta^j g(T))^2 \le \mathbf{D}\,g(T) \le \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!}\lambda^j\,\mathbf{E}\,(\Delta^j g(T))^2 + \frac{\lambda^k}{k!}\mathbf{E}\,(\Delta^k g(T))^2\,;$$

10) *если X и Y независимы, то* $\Delta_{X+Y} \le \Delta_X + \Delta_Y$;

11) *если $\Delta_{X,k} < \infty$, то найдется число a такое, что*

$$\mathbf{P}\,(X + a \in Z) = 1\,.$$

Теорема 7.2. (а) *Пусть M имеет геометрическое распределение* $\mathbf{P}\,(M = i) = 2^{-i-1}$, $i \ge 0$. *Тогда* $\Delta_{M,k} = (\sqrt{2} + 1)^{2k}$.

(б) *Пусть T имеет распределение Пуассона с параметром λ. Тогда* $\Delta_{T,k} = \lambda^k/k!$.

Теорема 7.3 (о характеризации пуассоновского распределения).

(а1) (характеризация) *Если X — случайная величина такая, что* $\mathbf{E}\,X^i = \mathbf{E}\,T^i$ *при* $i = 1,\dots,2k$, *то верно неравенство* $\Delta_{T,k} \ge \lambda^k/k!$, *причем равенство достигается тогда и только тогда, когда X имеет распределение Пуассона с параметром λ.*

(б1) (устойчивость характеризации) *Если* $\mathbf{E}\,X_n^i \to \mathbf{E}\,T^i$ *при* $n\to\infty$ *для* $i = 1,\dots,2k$ *и* $\Delta_{X_n,k} \to \lambda^k/k!$, *то X_n сходится по распределению к закону Пуассона с параметром λ.*

(а2) (характеризация) *Для независимых случайных величин X и Y верно неравенство* $\Delta_{X+Y} \le \Delta_X + \Delta_Y$, *причем равенство достигается тогда и только тогда, когда для некоторых a, d случайные величины $X - a$ и $Y - d$ имеют распределения Пуассона.*

(б2) (устойчивость характеризации) *Пусть X, Y суть независимые случайные величины и $\varepsilon = 1 - \Delta_{X+Y}(\Delta_X + \Delta_Y)^{-1}$. Существуют числа a, d, зависящие от X, Y, и абсолютная постоянная c такие, что*

$$\sup_A |\mathbf{P}(X - a \in A) - \mathbf{P}(T_\lambda \in A)| \le c\,(\Delta_X/\mathbf{D}\,Y + \Delta_Y/\mathbf{D}\,X)\,\varepsilon^{1/4},$$

$$\sup_A |\mathbf{P}(Y - b \in A) - \mathbf{P}(T_\beta \in A)| \le c\,(\Delta_X/\mathbf{D}\,Y + \Delta_Y/\mathbf{D}\,X)\,\varepsilon^{1/4},$$

где случайные величины T_λ и T_β имеют распределения Пуассона.

Доказательство теорем будет приведено в п.7.2. Пример геометрического распределения показывает, что неравенства, указанные в свойствах 3 и 4, точные. Положим $\delta_k = \inf\{\Delta_{X,k}\mathbf{D}\,X^{-k} : \mathbf{E}\,X = \mathbf{D}\,X > 0\}$. В силу теоремы 6.3 $\delta_1 = 1$ и инфимум достигается только на пуассоновском распределении. Пусть $\mathbf{P}(\nu = i/2 + 5/4) = 1/4$, $i = -3, -1, 1, 3$. Нетрудно видеть, что $\mathbf{E}\,\nu = \mathbf{D}\,\nu = 5/4$. Ниже мы покажем, что

$$\Delta_{\nu,2} = 5/8 < 1/2\,(5/4)^2. \tag{7.1}$$

Следовательно, $\delta_2 < 1/2$, т. е. инфимум δ_2 не достигается на пуассоновском распределении. Это означает, в частности, что в теореме 7.3 при $k = 2$ дополнительное условие совпадения моментов третьего и четвертого порядков является необходимым. Автору не известно точное значение δ_k при $k \ge 2$.

Докажем оценку (7.1). Из условия $\mathbf{E}\,g(\nu) = \mathbf{E}\,g(\nu + 1) = 0$ получаем

$$g(-3/2 + 5/4) = g(5/2 + 5/4) = a,\ g(-1/2 + 5/4) = b,\ g(1/2 + 5/4) = c,$$

$$g(3/2 + 5/4) = d,\ a + b + c + d = 0.$$

Следовательно,

$$\Delta_{\nu,2} = \sup\{(d^2 + b^2 + c^2 + a^2)([(a + c - b)^2 + (b + c - 2c)^2 + (c + a -$$
$$- 2d)^2])^{-1} : a + b + c + d = 0\} =$$

$$= 64^{-1}\sup\{[(3x - y)^2 + (3y - x)^2 + (4z + x + y)^2 + (-3x - 3y - 4z)$$

$$= 16^{-1}\sup\{(5x^2 + 5y^2 + 2xy + 8xz + 8yz + 8z^2)/(x^2 + y^2 + z^2) : \forall x, y, z\} =$$

$$= 1/4\sup\{(3x^2 + 2z^2 + 2xz)/(2x^2 + z^2) : \forall x, z\} = 5/8,$$

что и требовалось доказать.

7.2. Доказательство теоремы 7.1, за исключением свойств 10 и 11, аналогично доказательству теоремы 6.1. Свойство 10 установлено в [14]. Докажем свойство 11. Пусть G — бесконечно дифференцируемая функция с периодом 1 и $\mathbf{E}\,G(X) = b$. Положим $g(u) = G(u) - q$. Тогда $g(u+1) - g(u) \equiv 0$, $\mathbf{E}\,g(X) = 0$. Следовательно, $\mathbf{E}\,\Delta^i g(X) = 0$ для любого $i \ge 0$ и $\mathbf{E}(\Delta^k g(X))^2 = 0$. Таким образом, $\mathbf{E}\,g^2(X) = 0$. Теперь возьмем $G(u) = a\cos(2u\pi) + b\sin(2u\pi)$. Тогда $e^{i2\pi X} = c$ п. н., что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 7.2. Вычислим функционал $\Delta_{M,k}$ для геометрического распределения $\mathrm{P}(M=i)=1/2^{i+1}$, $i\geq 0$. Положим $G_n(u)=2^{u/2}f(u,n)$, где функция $f(u,n)$ такая, что $f(u,n)=1$ при $u\leq n-1$, $f(u,n)=0$ при $u\geq n$, $|f(u,n)|\leq 1$. Следовательно,

$$|G_n(u)| = |2^{(u+1)/2}f(u+1,n)-2^{u/2}f(u,n)| =$$

$$= |(\sqrt{2}-1)2^{u/2}f(u,n)+O(1)2^{u/2}\mathrm{I}(n-1\leq u\leq n)|,$$

$$\mathrm{E}(\Delta^k G_n(M))^2=\mathrm{E}((\sqrt{2}-1)^k 2^{M/2}f(M,n)+O(1)\mathrm{I}(n-1\leq M\leq n)2^{M/2})^2=$$

$$=(\sqrt{2}-1)^{2k}\mathrm{E}\,2^M f(M,n)+O(1)=(\sqrt{2}-1)^{2k}\mathrm{E}\,G_n^2(M)+O(1).$$

С другой стороны, $|\mathrm{E}\,G_n^{(i)}(M)|=O(1)\mathrm{E}\,2^{M/2}=O(1)$. Положим

$$g_n(u)=G_n(u)(\mathrm{E}(G_n^{(k)}(M))^2)^{-1}$$

и используем свойство 8:

$$\Delta_{M,k}\geq \limsup_{n\to\infty}\mathrm{E}\,g_n^2(M)=(\sqrt{2}-1)^{-2k}=(\sqrt{2}+1)^{2k}.$$

Осталось показать, что $\Delta_M\leq(\sqrt{2}+1)^2$. Так как выполняется неравенство $\mathrm{D}\,g(M)\leq\mathrm{E}(g(M)-g(0))^2$, можно считать, что $g(0)=0$. Имеем

$$2J=2\mathrm{E}\,g^2(M)=\sum_{i=1}^{\infty}g^2(i)2^{-i}=\sum_{i=1}^{\infty}(\Delta g(i-1)+g(i-1))^2\,2^{-i}=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}(\Delta g(i-1))^2 2^{-i}+\sum_{i=1}^{\infty}g^2(i-1)2^{-i}+2\sum_{i=1}^{\infty}g(i-1)\Delta g(i-1)2^{-i}=$$

$$=\mathrm{E}(\Delta g(M))^2+J+2\mathrm{E}\,g(M)\Delta g(M).$$

Используя неравенство Юнга, при $\varepsilon<1$ получим

$$\mathrm{E}\,g^2(M)\leq(1+\varepsilon^{-1})(1-\varepsilon)^{-1}\mathrm{E}(\Delta g(M))^2.$$

Минимум правой части по $\varepsilon>0$ достигается при $\varepsilon=\sqrt{2}-1$. Таким образом,

$$\mathrm{D}\,g(M)\leq(\sqrt{2}+1)^2\mathrm{E}(\Delta g(M))^2,\qquad \Delta_M\leq(\sqrt{2}+1)^2,$$

что и требовалось доказать.

Докажем свойство 2, т. е. вычислим функционал $\Delta_{T,k}$ для распределения Пуассона с параметром λ. Исследование функционала $R_{Y,k}$, где случайная величины Y имеет стандартное нормальное распределение, было основано на следующем свойстве Аппеля для ортогональных полиномов Эрмита (см. [22]):

$$\frac{d\,H_n(x)}{d\,x}=n^{1/2}H_{n-1}(x). \tag{7.2}$$

Суть приведенной характеризации нормального распределения с помощью функционалов $R_{Y,k}$ состоит в том, что среди всех последовательностей многочленов, обладающих свойством Аппеля (7.2), система многочленов Эрмита есть единственная, удовлетворяющая условию ортогональности. Естественным аналогом (7.2) в случае конечных разностей является равенство $\Delta P_n(x) = c_n P_{n-1}(x)$. Это приводит к многочленам Пуассона — Шарлье $\{P_n(x): n \geq 0\}$, которые образуют ортогональную систему для распределения Пуассона, т. е.

$$P_n(x) = \lambda^{n/2} (n!)^{-1/2} (-1)^n \frac{1}{p(u)} \Delta^n p(x-n),$$

$$\mathrm{E}\, P_n(T) P_m(T) = \delta_{n,m}, \quad \Delta P_n(x) = (n/\lambda)^{1/2} P_{n-1}(x),$$

где $p(x) = e^{-\lambda} \lambda^x / x!$. Возьмем $g(x) = P_k(x)$. Тогда

$$\mathrm{E}\, \Delta^i g(T) = \lambda^{-i/2} (k!/(k-i)!)^{1/2} \mathrm{E}\, P_{k-i}(T) = 0, \quad i = 0, \ldots, k-1,$$

$$\mathrm{E}\, g^2(T) = 1, \quad \mathrm{E}\, (\Delta^k g(T))^2 = k!\, \lambda^{-k}.$$

Следовательно, $\Delta_{T,k} \geq \lambda^k / k!$. С другой стороны, рассматривая произвольный полином $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i P_i(x)$, имеем

$$\Delta^j P(x) = \sum_{i=j}^{m} a_i P_{i-j}(x) \, (i!/(i-j)!)^{1/2} \lambda^{-j/2}.$$

Значит, если $\mathrm{E}\, P^{(j)}(T) = 0$ для $j = 0, \ldots, k-1$, то $a_j = 0$ для $j = 0, \ldots, k-1$ и

$$\mathrm{E}\, P^2(T) = \sum_{i=k}^{m} a_i^2 \leq \lambda^{-k} \frac{1}{k!} \sum_{i=k}^{m} a_i^2 \frac{i!}{(i-j)!} = \lambda^{-k} \frac{1}{k!} \mathrm{E}\, (P^{(k)}(T))^2.$$

Следовательно, в силу свойства 1 (теорема 7.1) $\Delta_{T,k} \leq 1/k!$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 7.3. Доказательство утверждений (a1) и (б1) аналогично доказательству аналогичных свойств из теоремы 6.3 о характеризации гауссовского распределения. Утверждение (a2) следует из утверждения (б2). Докажем (б2). Укажем те отличия в рассуждениях, которые необходимо сделать при повторении доказательства теоремы 1.2. Так же, как и в случае нормального распределения, мы придем к неравенству

$$I = \mathrm{E}\, (\Delta g(X+Y))^2 - \mathrm{E}\,\mathrm{E}\, (\Delta g(X+Y) \mid X))^2 \leq \varepsilon_1 = (1 + \Delta X / \Delta Y)\, \varepsilon.$$

Имеем

$$I = \mathrm{E}\, (\Delta g(X+Y) - \mathrm{E}\, (\Delta g(X+Y) \mid Y)))^2 \geq$$

$$\geq \mathrm{E}\, (\mathrm{E}\, (\Delta g(X+Y) \mid X) - \mathrm{E}\, \Delta g(X+Y)))^2,$$

откуда

$$\mathbf{E}\,|\,(\Delta g(X+Y) - \mathbf{E}(\Delta g(X+Y)\mid Y))\,|^2 \le \varepsilon_1\,,$$

$$\mathbf{E}\,|\,\mathbf{E}(\Delta g(X+Y)\mid X) - \mathbf{E}\,\Delta g(X+Y))\,|^2 \le \varepsilon_1\,.$$

Учитывая, что мы можем повторить ту же процедуру, но начиная с Y, в конечном счете приходим к оценкам

$$\Delta_X \le \mathbf{D}\,X(1+\varepsilon_2)\,,\quad \Delta_Y \le \mathbf{D}\,Y(1+\varepsilon_2)\,,\quad \varepsilon_2 = \varepsilon^{1/2}(\Delta\,X/\mathbf{D}\,Y + \Delta\,Y/\,\mathbf{D}\,X)\,.$$

Применяя теорему 2 [17], получим

$$\sup_A |\,\mathbf{P}(X-a\in A) - \mathbf{P}(T_\lambda \in A)\,| \le c\,(\Delta_X/\mathbf{D}\,Y + \Delta_Y/\mathbf{D}\,X)\,\varepsilon^{1/4}\,,$$

$$\sup_A |\,\mathbf{P}(Y-b\in A) - \mathbf{P}(T_\beta \in A)\,| \le c\,(\Delta_X/\mathbf{D}\,Y + \Delta_Y/\mathbf{D}\,X)\,\varepsilon^{1/4}\,,$$

где случайные величины T_λ и T_β имеют распределения Пуассона. Теорема 7.3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Chen L. H. Y., Lou J. H.** Asymptotic normality and convergence of eigenvalues // Reserch Report.—N 390.—National University of Singapore.—1989.
2. **Chen L. H. Y., Lou J. H.** Asymptotic normality and convergence of eigenvalues // Stochasic processes and their applications.—1990.—V. 34.—P. 197.
3. **Brascamp H. J., Lieb E. H.** On extensions of the Brunn — Minkowski and Prekopa — Leindner theorems including inequalities for log concave functions and with applications to the diffusion equation // J. Fuct. Anal.—1976.—V. 22.—P. 366–389.
4. **Chernoff H.** A note on an inequality involving the normal distribution // Ann. probab.—1981.—V. 9.—P. 533–535.
5. **Боровков А. А., Утев С. А.** Об одном неравенстве и связанной с ним характеризацией нормального распределения // Теория вероятностей и ее применения.—1983.—Т. 28, № 2.—С. 209–218.
6. **Brown L. D.** A proof of the central limit theorem motivated by the Cramer — Rao inequality //Statistics and Probability.—North-Holland, 1982.—P. 140–148.
7. **Cacoullos T.** On upper and lower bounds for the variance of a function of a random variable // Ann. Probab.—1982.—V. 10.—P. 799–809.
8. **Cacoullos T.** Dual Poincare-type inequalities via the Cramer — Rao and the Cauchy — Schwarz inequalities and related characterizations // Statistical Data Analysys and Inference.—North Holland, 1989.—P. 239–250.
9. **Cacoullos T., Papathanasiou V.** On upper bounds for the variance of functions of random variables // Statistics & Probability Letters.—1985.—V. 3—P. 175–184.
10. **Cacoullos T., Papathanasiou V.** Characterizations of distributions by variance bounds // Statistics & Probability Letters.—1989.—V. 7.—P. 351–356.

11. Какулос Т., Папатанасу В., Утев С.А. Еще одна характеризация нормального распределения и связанное с ней доказательство центральной предельной теоремы // Теория вероятностей и ее применения. — 1992. — Т. 37, № 3.
12. Cacoullos T., Papathanasiou V., Utev S. A. Variational inequalities with examples and an application to the central limit theorem (в печати).
13. Chen L. H. Y. The central limit theorem and Poincare-type inequalities // Ann. Probab.—1988.—V. 16.—P. 300–304.
14. Chen L. H. Y., Lou J. H. Characterization of probabilities distributions by Poincare-type inequalities // Ann. Inst. H. Poincare.—1987.—V.23.—P. 91–110.
15. Chen L. H. Y., Lou J. H. A characterization of probability measures which admit Poincare inequalities // Reserch Report.—N 371.—National University of Singapore.—1989.
16. Freimer M., Mudholkar G. S. An analogue of Chernoff — Borovkov — Utev inequality and related characterization // Теория вероятностей и ее применения.— 1991.—Т. 36, № 3.—С. 609–612.
17. Утев С. А. Вероятностные задачи,связанные с одним интегродифференциальным неравенством // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 3.—С. 182–186.
18. Утев С. А. Характеризационные задачи, связанные с одним интегродифференциальным функционалом // Устойчивость стохастических процессов.—М.: ВНИИСИ, 1992.
19. Itoh Y. An application of the convolution inequality for the Fisher information // Ann. Inst. Statist. Math.—1989.—V. 41.—P. 9–12.
20. Papathanasiou V. A simple proof of a characteristic property of the normal distribution (в печати).
21. Milhaud X A short proof of a Chernoff inequality // Probability and Mathematical statistics. — 1985. — V.5, N 1. — P. 173–175.
22. Szeg G. Orthogonal polynomials. — New York: AMS, 1959.