

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ НА СЛЕД ФУНКЦИИ ИЗ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА НА ГРАНИЦЕ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ С НЕЛИПШИЦЕВОЙ ГРАНИЦЕЙ

Посвящается А. Д. Александрову

Для области с гладкой границей описание следов функций из пространств Соболева дается, как известно (см., например, [1]), с помощью пространств Бесова. В случае кусочно-гладкой границы плоской области, имеющей угловые точки, описание граничного поведения функции существенно зависит от характера угловой точки. Отметим некоторые результаты, относящиеся к двумерному случаю, которому посвящена и данная работа.

Для области с липшицевой границей с угловыми точками полное описание следов функций класса W_p^l , $l \geq 1$, $1 < p < \infty$, дано в [2]. В [3] исследовано граничное поведение для липшицевых областей функций из пространств Никольского. В [4] аналогичный вопрос рассмотрен для пространств Соболева — Слободецкого. Плоские области с нелипшицевой границей рассматривались в работах [5] и [6]. В [5] охарактеризованы следы функций из W_p^1 , $1 < p < \infty$, определенных в области с вершиной внешнего пика на границе. В [6] исследован случай области с пиком на границе для пространства W_1^1 .

В данной статье мы рассматриваем функции класса W_p^l , $l \geq 1$, $1 < p < \infty$, на кусочно-гладкой границе ограниченной плоской области, имеющей угловые точки. Получаемые необходимые и достаточные условия охватывают как случай липшицевой границы, так и случай, когда некоторые угловые точки являются вершинами пика.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть ξ — неотрицательная измеримая на интервале $(a; b)$ функция. Обозначим через $L_{p,\xi}(a; b)$, $1 \leq p < \infty$, множество измеримых на $(a; b)$ функций f таких, что

$$\|f\|_{p,\xi(a;b)} = \left\{ \int_a^b |f(t)|^p \xi(t) dt \right\}^{1/p} < \infty.$$

Если k — натуральное число, $1 \leq p < \infty$, то через $W_{p,\xi}^k(a; b)$ обозначается класс функций f из $L_{p,\xi}(a; b)$, имеющих на $(a; b)$ обобщенные производные $f^{(j)}$ до порядка k включительно, принадлежащие $L_{p,\xi}(a; b)$. Полагаем

$$\|f\|_{W_{p,\xi}^k(a;b)} = \sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|_{p,\xi(a;b)}.$$

Для функции f , определенной на $(a; b)$, через $\Delta(f, s, t)$ будем обозначать разность $f(s) - f(t)$ в том случае, если $[s; t] \subset (a; b)$. Если же $[s; t] \not\subset (a; b)$, то полагаем $\Delta(f, s, t) = 0$.

Пусть χ — характеристическая функция интервала $(0; 1)$. Положим

$$\begin{aligned} e_\xi(s, t) &= \min \{ \xi(s); \xi(t) \}, \\ \sigma_\xi(s, t) &= \chi \left(\frac{|s - t|}{e_\xi(s, t)} \right). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Если $0 < r < 1$, $1 \leq p < \infty$, то через $b_{p,\xi}^r(a; b)$ обозначим класс измеримых на $(a; b)$ функций f , для которых конечен интеграл

$$\|f\|_{b_{p,\xi}^r(a; b)} = \left\{ \int_a^b \int_a^b \frac{|\Delta(f, s, t)|^p}{|s - t|^{rp+1}} \sigma_\xi(s, t) ds dt \right\}^{1/p}.$$

Несложно проверить, что

$$\|f\|_{b_{p,\xi}^r(a; b)} = \left\{ 2 \int_a^b ds \int_0^{\xi(s)} \frac{|\Delta(f, s + \tau, s)|^p}{\tau^{rp+1}} d\tau \right\}^{1/p}. \quad (1.2)$$

Пусть $\beta > 0$ — нецелое число, $m = [\beta]$ — целая часть β , $r = \beta - m$, и пусть $1 \leq p < \infty$. Тогда $B_{p,\xi}^\beta(a; b)$ — это класс функций f из $W_{p,\xi}^m(a; b)$ таких, что

$$\|f\|_{B_{p,\xi}^\beta(a; b)} = \|f\|_{W_{p,\xi}^m(a; b)} + \|f\|_{b_{p,\xi}^r(a; b)} < \infty.$$

Если в определении $W_{p,\xi}^m(a; b)$ и $B_{p,\xi}^\beta(a; b)$ вместо ξ и σ_ξ взять функции, тождественно равные единице, то мы получаем, очевидно, известные пространства Соболева $W_p^m(a; b)$ и Бесова $B_p^\beta(a; b)$.

Пусть ξ — неотрицательная измеримая функция, определенная на $(a; b)$, и пусть в $\mathbb{R}^2$ задана кривая

$$\Gamma = \{x = (x_1, x_2): a < x_1 < b, x_2 = \xi(x_1)\},$$

где функция $\xi \in C^l([a; b])$, l — некоторое натуральное число. Обозначим через λ параметризацию Γ ,

$$\lambda: x_1 \rightarrow (x_1, \xi(x_1)). \quad (1.3)$$

Если функция f определена на Γ , то будем считать, что $f \in W_{p,\xi}^m(\Gamma)$ ($f \in B_{p,\xi}^\beta(\Gamma)$), если $f \circ \lambda \in W_{p,\xi}^m(a; b)$ ($f \circ \lambda \in B_{p,\xi}^\beta(a; b)$). Полагаем

$$\|f\|_{W_{p,\xi}^m(\Gamma)} = \|f \circ \lambda\|_{W_{p,\xi}^m(a; b)},$$

$$\|f\|_{B_{p,\xi}^\beta(\Gamma)} = \|f \circ \lambda\|_{B_{p,\xi}^\beta(a; b)}.$$

Пусть $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ — объединение кривых $\Gamma_i = \{x = (x_1, x_2): a < x_1 < b, x_2 = \xi_i(x_1)\}$, $i = 1, 2$, причем $\xi_i \in C^l([a; b])$, $\lim_{\tau \rightarrow a+0} \xi_1(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow a+0} \xi_2(\tau)$. Положим $\xi = \xi_2 - \xi_1$, и пусть λ_i — параметризация (1.3) кривой Γ_i . Если функция f определена на Γ , то $f_i = f|_{\Gamma_i}$, $i = 1, 2$. Будем говорить, что f принадлежит $W_{p,\xi}^m(\Gamma)$ (принадлежит $B_{p,\xi}^\beta(\Gamma)$), если $f_i \in W_{p,\xi}^m(\Gamma_i) \in B_{p,\xi}^\beta(\Gamma_i)$. Полагаем

$$\|f\|_{W_{p,\xi}^m(\Gamma)} = \sum_{i=1}^2 \|f_i\|_{W_{p,\xi}^\beta(\Gamma_i)},$$

$$\|f\|_{B_{p,\xi}^\beta(\Gamma)} = \sum_{i=1}^2 \|f_i\|_{B_{p,\xi}^\beta(\Gamma_i)}.$$

Для функции f из $W_{p,\xi}^m(\Gamma)$ введем в рассмотрение следующие величины:

$$E_p^m(f, \Gamma) = \sum_{j=0}^m \left\| \frac{d^j}{dx_1^j} \left(\frac{f_2 \circ \lambda_2 - f_1 \circ \lambda_1}{\xi} \right) \right\|_{p, \xi(a; b)},$$

$$I_p^m(f, \Gamma) = \sum_{j=0}^m \left\| \frac{d^j}{dx_1^j} \left(\frac{f_2 \circ \lambda_2 - f_1 \circ \lambda_1}{x_1} \right) \right\|_{p, x_1(a; b)}.$$

Если l — натуральное число и $1 \leq p < \infty$, то положим

$$\langle f \rangle_\Gamma = \sum_{i=1}^2 \|f_i\|_{B_{p,\xi}^{l-1/p}(\Gamma_i)} + E_p^{l-1}(f, \Gamma), \quad (1.4)$$

$$\{f\}_\Gamma = \sum_{i=1}^2 \|f_i\|_{B_p^{l-1/p}(\Gamma_i)} + I_p^{l-1}(f, \Gamma). \quad (1.5)$$

Мы предполагаем, что в $\mathbb{R}^2$ зафиксирована декартова прямоугольная система координат. Пусть G — область в $\mathbb{R}^2$, ∂G — граница G и $W_p^l(G)$, $l \geq 1$, $1 < p < \infty$, — пространство Соболева функций, определенных на G . Точку $M \in \partial G$ будем называть l -регулярной, если существует окрестность $O(M)$ точки M такая, что в некоторой локальной системе координат x_1, x_2 , получаемой из фиксированной в $\mathbb{R}^2$ движением с началом в точке M , часть границы $\partial G \cap O(M)$ имеет вид

$$\{x = (x_1, x_2): -a < x_1 < a, x_2 = \xi(x_1)\}, \quad (1.6)$$

где $a > 0$ — некоторое число, $\xi \in C^{l,1}(-a; a)$ и, кроме того, для некоторого числа $h > 0$

$$\{x = (x_1, x_2): |x_1| < a, \xi(x_1) < x_2 < \xi(x_1) + h\} \subset G \cap O(M). \quad (1.7)$$

Точка, не являющаяся l -регулярной, называется *угловой*. Далее мы считаем, что множество угловых точек конечно и что угловые точки могут быть только двух типов. К первому типу относятся точки, являющиеся вершиной острого угла или пика, направленного во внешность области, ко второму — вершины острых углов или пиков, направленных вовнутрь области. Уточним это определение. Точка $M_1 \in \partial G$ будет *угловой точкой первого типа*, если существует такая окрестность $O(M_1)$, что в некоторой локальной системе координат x_1, x_2 с началом в M_1 , получаемой из фиксированной в $\mathbb{R}^2$ движением, область $Q = O(M_1) \cap G$ имеет вид

$$Q = \{x = (x_1, x_2): 0 < x_1 < a, \varphi_1(x_1) < x_2 < \varphi_2(x_1)\}, \quad (1.8)$$

где $a > 0$ — некоторое число, $\varphi_i \in C^{l,1}([0; a])$,

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \varphi_i(\tau) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.9)$$

и если

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (1.10)$$

то для некоторой постоянной $C < \infty$ выполняется

$$0 < \varphi'(\tau) \leq C \quad \text{при } 0 < \tau < a. \quad (1.11)$$

Случай $\lim_{\tau \rightarrow +0} \varphi'(\tau) = 0$ не исключается.

Точка $M_2 \in \partial G$ будет *угловой точкой второго типа*, если в некоторой локальной системе координат x_1, x_2 с началом в M_2 имеет место

$$G \cap V = V \setminus \bar{Q}, \quad (1.12)$$

где $V = \{x = (x_1, x_2): |x_i| < a, i = 1, 2\}$ — квадрат, а Q — область (1.8).

Далее мы считаем, что граница области G имеет конечное число угловых точек $M_1, \dots, M_m, M_{m+1}, \dots, M_n$, причем M_i при $1 \leq i \leq m$ — это угловые точки первого типа, а M_i при $m+1 \leq i \leq n$ — точки второго типа. Все остальные точки ∂G предполагаются l -регулярными.

Определим, что мы понимаем под следом функции на границе области. Через $B_r(x)$ обозначим круг радиуса r с центром в точке $x \in \mathbb{R}^2$. Если U — некоторое множество в $\mathbb{R}^2$, то через $|U|$ обозначается мера Лебега U .

Пусть $F \in L_{1,loc}(G)$. Найдем след $F|_{\partial G}$ как функцию, определяе-

мую равенством $F|_{\partial G}(x) = f(x)$ в каждой точке $x \in \partial G$, где $f(x)$ существует и где обозначено

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r(x) \cap G|} \int_{B_r(x) \cap G} F(y) dy.$$

Если $F \in W_p^l(G)$, $l \geq 1$, $1 < p < \infty$, то, поскольку граница области имеет только конечное число угловых точек, а остальные точки l -регулярны, след $F|_{\partial G}$ существует для почти всех $x \in \partial G$ относительно l -меры Хаусдорфа [1].

Рассмотрим систему окрестностей $\{U_j\}_{j=1}^N$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $\partial G \subset \bigcup_{j=1}^N U_j$;
- 2) если M_i , $1 \leq i \leq n$, — угловая точка, то $M_i \in U_i$ и окрестность U_i не содержит других угловых точек;
- 3) если $1 \leq i \leq m$, то в некоторой локальной системе координат x_1, x_2 с началом в M_i область $U_i \cap G$ имеет вид (1.8);
- 4) если $m+1 \leq i \leq n$, то в некоторой локальной системе координат x_1, x_2 с началом в M_i множество вида (1.12) содержится в U_i ;
- 5) если $n+1 \leq i \leq N$, то все точки $\partial G \cap U_i$ будут l -регулярными.

Пусть функция f определена на ∂G . Положим $f_i = f|_{\partial G \cap U_i}$ и

$$\|f\|_{\partial G} = \sum_{i=1}^m \langle f_i \rangle_{\partial G \cap U_i} + \sum_{i=m+1}^n \{f_i\}_{\partial G \cap U_i} + \sum_{i=n+1}^N \|f_i\|_{B_p^{l-1/p}(\partial G \cap U_i)}. \quad (1.13)$$

Ясно, что $\|f\|_{\partial G}$ зависит от выбора системы окрестностей и локальных координат, но можно показать, что получаются эквивалентные нормы.

Обозначим через $TW_p^l(G)$ линейное пространство следов на ∂G функций из $W_p^l(G)$. Это пространство изоморфно фактор-пространству $W_p^l(G)/\dot{W}_p^l(G)$. Норма в $TW_p^l(G)$ определяется следующим образом:

$$\|f\|_{TW_p^l(G)} = \inf \{ \|F\|_{W_p^l(G)} : F \in W_p^l(G), f = F|_{\partial G} \}.$$

Далее для величин α и β обозначение $\alpha \sim \beta$ будет использоваться в тех случаях, когда отношение $\alpha \sim \beta$ отделено от нуля и ограничено сверху положительными постоянными, зависящими только от p, l и области G .

Постоянные, зависящие только от l, p и области G , будем далее обозначать $C, C_1, C_2, \dots$, причем в различных неравенствах возможно использование одного обозначения для, вообще говоря, различных по значению констант.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. Пусть l — натуральное число, $1 < p < \infty$. Тогда справедливо соотношение

$$\|f\|_{TW_p^l(G)} \sim \|f\|_{\partial G}. \quad (1.14)$$

Теорема доказывается в § 3—4.

Замечание. Необходимо отметить, что теорема не является в полной мере обобщением результатов работы [2]. Мы рассматриваем более общий случай области, но ограничиваемся следом только самой функции. В [2] граничное поведение функции охарактеризовано через след самой функции и следы производных по нормали к границе.

В заключение этого параграфа приведем некоторые известные неравенства, необходимые нам в дальнейшем.

Неравенство Юнга. Пусть p, r, q — вещественные числа, $1 \leq p \leq q < \infty$, $1 - 1/p + 1/q = 1/r$, $F \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $K \in L_q(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим свертку

$$F * K(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F(y) K(x - y) dy.$$

Тогда

$$\|F * K\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq \|K\|_{L_r(\mathbb{R}^n)} \|F\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.15)$$

Неравенство Харди. Пусть $1 < p < \infty$, $r > 0$, $\alpha > 0$. Тогда

$$\int_0^\alpha \left| \int_0^s f(\tau) d\tau \right|^p \frac{ds}{s^{r+1}} \leq \left(\frac{p}{r} \right)^p \int_0^\alpha s^{p-r-1} |f(s)|^p ds, \quad (1.16)$$

$$\int_\alpha^\infty \left| \int_s^\infty f(\tau) d\tau \right|^p \frac{ds}{s^{1-r}} \leq \left(\frac{p}{r} \right)^p \int_\alpha^\infty s^{p+r-1} |f(s)|^p ds. \quad (1.17)$$

Доказательство неравенств (1.15) — (1.17) можно найти в [7] или в [1].

§ 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом параграфе мы получим интегральное представление функции из $W_p^l(P)$, где $P \subset \mathbb{R}^2$ — область с вершиной внешнего острого угла или пика на границе и докажем некоторые вспомогательные утверждения. При выводе интегрального представления мы следуем схеме, предложенной в [1]) (см. § 7).

Введем некоторые обозначения. Пусть $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ — мультииндекс, где β_1, β_2 — неотрицательные числа, тогда $|\beta| = \beta_1 + \beta_2$, $\beta! = \beta_1! \beta_2!$. Если $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ — мультииндекс, то $x^\beta = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}$. Для натурального m через $\bar{m}$ обозначаем мультииндекс $\bar{m} = (m, m)$. Для дифференцируемой функции $F(x) = F(x_1, x_2)$ частные производные будем обозначать одним из следующих способов: $\frac{\partial^{|\beta|} F}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2}} = D_1^{\beta_1} D_2^{\beta_2} F = D^\beta F$. Через K и K_1 ниже везде обозначены функции из $C_0^\infty(\mathbb{R})$ такие, что $\text{supp } K \subset [0; 1]$, $\text{supp } K_1 \subset [1/2; 1]$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau) d\tau = 1. \quad (2.1)$$

Пусть φ — функция из $C^l([0; 1])$, удовлетворяющая условию (1.11). Через P будем обозначать область

$$P = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1; 0 < x_2 < \varphi(x_1)\}. \quad (2.2)$$

Положим

$$\Omega(s, x) = D^{\bar{l}} \left[\frac{s^{\bar{l}-1}}{(\bar{l}-1)!} \int_{\mathbb{R}^2} K\left(\frac{u_1}{\varphi(x_1)}\right) K_1\left(\frac{x_2 + u_2}{\varphi(x_1)}\right) \eta(s-u) \frac{du}{\varphi^2(x_1)} \right], \quad (2.3)$$

где $\eta(x) = \eta(x_1)\eta(x_2)$, $\eta(x_i)$ — функция Хевисайда, т. е. $\eta(\tau) = 1$ при $\tau > 0$ и $\eta(\tau) = 0$ при $\tau < 0$. Функция $s \rightarrow \Omega(s, \cdot)$ принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ и удовлетворяет условиям (см. [1], § 7)

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Omega(s, x) ds = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\varepsilon^2} \Omega\left(\frac{s}{\varepsilon}, x\right) ds = 1$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Пусть $F \in W_p^l(P)$ и $\varepsilon \in (0; 1)$ — произвольное число. Полагаем

$$F_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^2} F(x+s) \frac{1}{\varepsilon^2} \Omega\left(\frac{s}{\varepsilon}, x\right) ds.$$

Для любого $\delta \in (0; 1)$ справедливо равенство

$$F_\delta(x) = F_1(x) - \int_{\delta}^1 \frac{\partial F_\varepsilon(x)}{\partial \varepsilon} d\varepsilon.$$

Так как $F_\delta \rightarrow F$ при $\delta \rightarrow +0$ в $L_p(P)$, то существует предел в $L_p(P)$ и правой части последнего равенства. Предельные функции равны почти всюду в P . Поэтому в качестве исходного равенства мы будем рассматривать равенство

$$F(x) = F_1(x) - \int_0^1 \frac{\partial F_\varepsilon(x)}{\partial \varepsilon} d\varepsilon. \quad (2.4)$$

Из (2.3) и определения F_* следует

$$F_1(x) = \sum_{n,m=0}^{l-1} c_{n,m} \int_{\mathbb{R}^2} F(t) \frac{(t_1 - x_1)^m (t_2 - x_2)^n}{\varphi^{n+m+2}(x_1)} K^{(m)}\left(\frac{t_1 - x_1}{\varphi(x_1)}\right) K_1^{(n)}\left(\frac{t_2}{\varphi(x_1)}\right) dt, \quad (2.5)$$

где $c_{n,m} = c_n c_m$ — некоторые постоянные, не зависящие от функции F . Так как

$$K_1^{(n)}\left(\frac{t_2}{\varphi(x_1)}\right) = \varphi^n(x_1) \frac{\partial^n}{\partial t_2^n} K_1\left(\frac{t_2}{\varphi(x_1)}\right),$$

то из (2.5) получаем

$$F_1(x) = \sum_{n,m=0}^{l-1} c_{n,m} \int_{\mathbb{R}^2} (t_1 - x_1)^m K^{(m)}\left(\frac{t_1 - x_1}{\varphi(x_1)}\right) \times \\ \times \sum_{i=0}^n d_i D_2^i F(t) (t_2 - x_2)^i K_1\left(\frac{t_2}{\varphi(x_1)}\right) \frac{dt}{\varphi^{m+2}(x_1)} = \sum_{r=0}^{l-1} \alpha_r(x_1) x_2^r, \quad (2.6)$$

где d_i — некоторые постоянные коэффициенты,

$$\alpha_r(x_1) = \sum_{i=0}^{l-1-r} b_{ri} \int_{\mathbb{R}^2} D_2^{r+i} F(t) t_2^i K_1\left(\frac{t_2}{\varphi(x_1)}\right) \sum_{m=0}^{l-1} c_m \left(\frac{t_1 - x_1}{\varphi(x_1)}\right)^m K^{(m)}\left(\frac{t_1 - x_1}{\varphi(x_1)}\right) \frac{dt}{\varphi^2(x_1)} = \\ = \sum_{i=0}^{l-r-1} b_{ri} \int_{\mathbb{R}^2} D_2^{r+i} F(t) t_2^i K_1\left(\frac{t_2}{\varphi(x_1)}\right) \mathfrak{A}\left(\frac{t_1 - x_1}{\varphi(x_1)}\right) \varphi^{-2}(x_1) dt. \quad (2.7)$$

В (2.7) обозначено $\mathfrak{A} = \sum_{m=0}^{l-1} c_m u^m K^{(m)}(u)$. Отметим, что $\text{supp } \mathfrak{A} \subset [0; 1]$.

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (2.4). Имеем

$$- \int_0^1 \frac{\partial F_\varepsilon(x)}{\partial \varepsilon} d\varepsilon = - \int_0^1 d\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} F(x+s) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} \Omega\left(\frac{s}{\varepsilon}, x\right) ds.$$

Из (2.3), повторяя выкладки из [1] (см. § 7, п. 7.1), получаем

$$- \int_0^1 \frac{\partial F_\varepsilon}{\partial \varepsilon} d\varepsilon = \sum_{m=0}^{l-1} c_m \varphi^{l-2}(x_1) \int_0^1 \varepsilon^{l-3} d\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} D_1^l F(t) K\left(\frac{t_1 - x_1}{\varepsilon \varphi(x_1)}\right) \left(\frac{t_1 - x_1}{\varepsilon \varphi(x_1)}\right)^l \times \\ \times \left(\frac{t_2 - x_2}{\varepsilon \varphi(x_1)}\right)^m K_1^{(m)}\left(\frac{t_2 - x_2}{\varepsilon \varphi(x_1)} + \frac{x_2}{\varphi(x_1)}\right) dt +$$

$$+ \sum_{m=0}^{l-1} c_m \varphi^{l-2}(x_1) \int_0^1 \varepsilon^{l-3} d\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} D_2^l F(t) \left(\frac{t_2 - x_2}{\varepsilon \varphi(x_1)} \right)^l \times \\ \times \left(\frac{t_1 - x_1}{\varepsilon \varphi(x_1)} \right)^m K^{(m)} \left(\frac{t_1 - x_1}{\varepsilon \varphi(x_1)} \right) K_1 \left(\frac{t_2 - x_2}{\varepsilon \varphi(x_1)} + \frac{x_2}{\varphi(x_1)} \right) dt = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2.$$

Вводя обозначения

$$\mathfrak{M}_1(\tau) = K(\tau) \tau^l, \quad \mathfrak{M}_2(\tau) = \sum_{m=0}^{l-1} \tau^m K^{(m)}(\tau), \quad (2.8)$$

$$\mathfrak{R}_1(x, \tau) = \sum_{m=0}^{l-1} \tau^m K_1^{(m)} \left(\tau + \frac{x_2}{\varphi(x_1)} \right), \quad (2.9)$$

$$\mathfrak{R}_2(x, \tau) = K_1 \left(\tau + \frac{x_2}{\varphi(x_1)} \right) \tau^l,$$

можем записать

$$\mathcal{R}_i(x) = \int_0^1 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^{3-l}} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi^{l-2}(x_1) D_i^l F(t) \mathfrak{M}_i \left(\frac{t_1 - x_1}{\varepsilon \varphi(x_1)} \right) \mathfrak{R}_i \left(\frac{t_2 - x_2}{\varepsilon \varphi(x_1)} + \frac{x_2}{\varphi(x_1)} \right) dt. \quad (2.10)$$

Полагая $\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}$, получаем

$$F(x) = F_1(x) + \mathcal{R}(x) = \sum_{r=0}^{l-1} \alpha_r(x_1) x_2^r + \mathcal{R}_1(x) + \mathcal{R}_2(x), \quad (2.11)$$

где α_r заданы равенством (2.7), а $\mathcal{R}_i$, $i=1, 2$, — равенством (2.10). Равенство (2.11) и есть искомое интегральное представление функции $F \in W_p^l(P)$. Далее везде предполагается, что $l \geq 1$, $1 < p < \infty$.

Лемма 1. Для функций α_r , $r=0, 1, \dots, l-1$, определенных в (2.7), справедливы оценки

$$\|\alpha_r^{(m)}\|_{p, \varphi, (0;1)} \leq C_1 \|F\|_{W_p^l(P)}, \quad m=0, 1, \dots, l-r, \quad (2.12)$$

$$\|\varphi^j \alpha_r^{(l-r+j)}\|_{p, \varphi, (0;1)} \leq C_2 \|F\|_{W_p^l(P)}, \quad 0 \leq j \leq r.$$

Доказательство. Сделаем в интеграле (2.7) замену переменных

$$t_1 = x_1 + s_1 \varphi(x_1), \quad t_2 = s_2 \varphi(x_1). \quad (2.13)$$

Тогда

$$\alpha_r(x_1) = \sum_{i=0}^{l-r-1} b_{ri} \varphi^i(x_1) \int_{\mathbb{R}^2} D_2^{r+i} F(x_1 + s_1 \varphi(x_1), s_2 \varphi(x_1)) s_2^i \mathfrak{A}(s_1) K_1(s_2) ds. \quad (2.14)$$

Продифференцируем обе части равенства (2.14) m раз, где $0 \leq m \leq l-r$. Тогда после некоторых вычислений получаем

$$\alpha_r^{(m)}(x_1) = \sum_{i=0}^{l-r-m} b_{ri} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^m}{dx_1^m} [\varphi^j(x_1) D_2^{r+i} F(x_1 + s_1 \varphi(x_1), s_2 \varphi(x_1))] \times \\ \times s_2^i \mathfrak{A}(s_1) K_1(s_2) ds + \sum_{i=l-r-m+1}^{l-1} b_{ri} \sum_{j=0}^{m-l+r+i} C_m^j \frac{d^j}{dx_1^j} \varphi^i(x_1) \times \\ \times \frac{d^{m-j-l+r+i}}{dx_1^{m-j-l+r+i}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^{l-r-i}}{dx_1^{l-r-i}} D_2^{r+i} F(x_1 + s_1 \varphi(x_1), s_2 \varphi(x_1)) s_2^i \mathfrak{A}(s_1) K_1(s_2) ds +$$

$$+ \sum_{i=l-r-m+1}^{l-1} b_{ri} \sum_{j=m-l+r+i+1}^m C_m^j \frac{d^j}{dx_1^j} \varphi^i(x_1) \int_{\mathbf{R}^2} \frac{d^{m-j}}{dx_1^{m-j}} D_2^{r+i} F(x_1 + s_1 \varphi(x_1), s_2 \varphi(x_1)) \times \\ \times s_2^i \mathfrak{A}(s_1) K_1(s_2) ds = J_1 + J_2 + J_3. \quad (2.15)$$

Сделаем в интегралах, входящих в сумму в правой части (2.15), замену переменных, обратную к (2.13). В интеграле J_2 после замены переменных положим

$$X_2(t) = \frac{d^{l-r-i}}{dx_1^{l-r-i}} D_2^{r+i} F(x_1 + s_1 \varphi(x_1), s_2 \varphi(x_1)) \Big|_{\substack{s_1 = \frac{t_1 - x_1}{\varphi(x_1)} \\ s_2 = \frac{t_2}{\varphi(x_1)}}}$$

и перепишем его в виде

$$J_2 = \sum_{i=l-r-m+1}^{l-1} b_{ri} \sum_{n=0}^{m-l+r+i} C_m^n \frac{d^n}{dx_1^n} \varphi^i(x_1) \int_{\mathbf{R}_2} X_2(t) \times \\ \times \frac{d^{m-n-l+r+i}}{dx_1^{m-n-l+r+i}} \left[\frac{1}{\varphi^2(x_1)} \left(\frac{t_2}{\varphi(x_1)} \right)^i \mathfrak{A} \left(\frac{t_1 - x_1}{\varphi(x_1)} \right) K_1 \left(\frac{t_2}{\varphi(x_1)} \right) \right] dt. \quad (2.16)$$

Поступая аналогично с интегралами J_1 и J_3 , мы видим, что при $0 \leq m \leq l-r$ функция $\alpha_r^{(m)}$ является суммой функций вида

$$\xi(x_1) = \int_{\mathbf{R}^2} X_2(t) \tilde{A}_1 \left(x_1, \frac{t_1 - x_1}{\varphi(x_1)} \right) \tilde{A}_2 \left(x_1, \frac{t_2}{\varphi(x_1)} \right) \frac{dt}{\varphi^2(x_1)}, \quad (2.17)$$

где $X \in L_p(P)$, а функции $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ удовлетворяют условию

$$|\tilde{A}_i(x_1, u)| \leq C A_i(u), \quad 0 \leq x_1, \quad u \leq 1, \quad i = 1, 2, \quad (2.18)$$

где функции $A_i(u)$ ограничены и $\text{supp } A_i \subset [0; 1]$.

Если $m = l - r$, то для производных функций $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ справедливы оценки

$$\left| \frac{d^j}{dx_1^j} \tilde{A}_1 \left(x_1, \frac{t_1 - x_1}{\varphi(x_1)} \right) \right| \leq \frac{1}{\varphi^j(x_1)} B_1 \left(\frac{t_1 - x_1}{\varphi(x_1)} \right), \quad (2.19)$$

$$\left| \frac{d^j}{dx_1^j} \tilde{A}_2 \left(x_1, \frac{t_2}{\varphi(x_1)} \right) \right| \leq \frac{1}{\varphi^j(x_1)} B_2 \left(\frac{t_2}{\varphi(x_1)} \right), \quad (2.20)$$

где $B_i(u)$ — ограниченные на $\mathbf{R}$ функции и $\text{supp } B_i \subset [0; 1]$. Из (2.19), (2.20) следует, что функция $\varphi^j(x_1) \alpha_r^{(l-r+j)}(x_1)$ также является суммой функций вида (2.17). Отсюда вытекает, что лемма 1 будет доказана, если мы покажем, что $\xi \in L_{p,\varphi}(0; 1)$ для функций ξ вида (2.17) с выполнением условия (2.18). Функцию $X(t)$ считаем определенной на всей плоскости $\mathbf{R}^2$, продолжая ее за область P нулем. Имеем

$$\|\xi\|_{L_{p,\varphi}(0;1)}^p = \int_0^1 \varphi(x_1) \left| \int_{\mathbf{R}^2} X(t) \tilde{A}_1 \left(x_1, \frac{t_1 - x_1}{\varphi(x_1)} \right) \tilde{A}_2 \left(x_1, \frac{t_2}{\varphi(x_1)} \right) \varphi^{-2}(x_1) dt \right|^p dx_1 \leq \\ \leq C \int_0^1 \varphi(x_1) \int_{\mathbf{R}^2} |X(t)| A_1 \left(\frac{t_1 - x_1}{\varphi(x_1)} \right) A_2 \left(\frac{t_2}{\varphi(x_1)} \right) \frac{dt}{\varphi^2(x_1)} dx_1. \quad (2.21)$$

Рассмотрим интеграл в квадратных скобках. Применяя неравенство

Гельдера по переменной t_2 , получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |X(t)| A_1\left(\frac{t_1-x_1}{\varphi(x_1)}\right) A_2\left(\frac{t_2}{\varphi(x_1)}\right) \frac{dt}{\varphi^2(x_1)} &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |X(t)|^p A_2\left(\frac{t_2}{\varphi(x_1)}\right) dt_2 \right\}^{1/p} \times \\ &\times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} A_2\left(\frac{t_2}{\varphi(x_1)}\right) dt_2 \right\}^{1-1/p} A_1\left(\frac{t_1-x_1}{\varphi(x_1)}\right) \frac{dt_1}{\varphi^2(x_1)} \leq \\ &\leq C \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t_1, x_1) A_1\left(\frac{t_1-x_1}{\varphi(x_1)}\right) \frac{dt_1}{\varphi^{1+1/p}(x_1)}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$\Phi(t_1, x_1) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |X(t)|^p A_2\left(\frac{t_2}{\varphi(x_1)}\right) dt_2 \right\}^{1/p}.$$

Из (2.21) и (2.22), применяя неравенство Гельдера,

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{p,\varphi,(0;1)}^p &\leq C \int_0^1 \left[\frac{1}{\varphi(x_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t_1, x_1) A_1\left(\frac{t_1-x_1}{\varphi(x_1)}\right) dt_1 \right]^p dx_1 \leq \\ &\leq C \int_0^1 \frac{dx_1}{\varphi(x_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^p(t_1, x_1) A_1\left(\frac{t_1-x_1}{\varphi(x_1)}\right) \left\{ \frac{1}{\varphi(x_1)} \int_{-\infty}^{\infty} A_1\left(\frac{t_1-x_1}{\varphi(x_1)}\right) dt_1 \right\}^{p-1} dx_1 \leq \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^2} |X(t)|^p \int_0^1 A_1\left(\frac{t_1-x_1}{\varphi(x_1)}\right) \frac{dx_1}{\varphi(x_1)} dt. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Для интеграла по x_1 в правой части (2.23), делая замену переменной $\tau = (t_1 - x_1)/\varphi(x_1)$ ($x_1 \rightarrow \tau$), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 A_1\left(\frac{t_1-x_1}{\varphi(x_1)}\right) \frac{dx_1}{\varphi(x_1)} &= \int_0^1 A_1\left(\frac{t_1-x_1}{\varphi(x_1)}\right) \frac{\varphi^{-1}(x_1) + (t_1-x_1)\varphi^{-2}(x_1)\varphi'(x_1)}{1 + (t_1-x_1)\varphi^{-1}(x_1)\varphi'(x_1)} dx_1 \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\tau) d\tau \leq C. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\xi\|_{p,\varphi,(0;1)}^p \leq C \int_{\mathbb{R}^2} |X(t)|^p dt = C \|X\|_{L_p(P)}^p.$$

Лемма 1 доказана.

Рассмотрим функцию $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$ (см. (2.10)) на кривых

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \{x = (x_1, x_2): 0 < x_1 < 1, x_2 = 0\}, \\ \gamma_1 &= \{x = (x_1, x_2): 0 < x_1 < 1, x_2 = \varphi(x_1)\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Положим

$$\mathcal{R}_0(x_1) = \mathcal{R}(x_1, 0), \quad \mathcal{R}_\varphi(x_1) = \mathcal{R}(x_1, \varphi(x_1)). \quad (2.25)$$

Лемма 2. Для функций (2.25) справедливы оценки

$$\left\| \varphi^{j-l} \frac{d^j}{dx_1^j} \mathcal{R}_{0,\varphi} \right\|_{p,\varphi,(0;1)} \leq C \|F\|_{W_p^l(P)}. \quad (2.26)$$

Доказательство. Мы получим оценку для $\mathcal{R}_0$. Аналогичная оценка для $\mathcal{R}_\varphi$ устанавливается дословным повторением рассуждений. Оценки (2.26) получаются по той же методике, что и оценки интегралов в [8] (см. § 1.9).

Из (2.10) следует

$$\frac{d^j}{dx_1^j} \mathcal{R}_0 = \sum_{i=1}^2 \int_0^1 \varepsilon^{l-j-3} \varphi^{l-2-j}(x_1) \int_{\mathbb{R}^2} D_i^l F(t) L_{1i} \left(\frac{t_1 - x_1}{\varepsilon \varphi(x_1)} \right) L_{2i} \left(\frac{t_2}{\varepsilon \varphi(x_1)} \right) dt d\varepsilon,$$

где L_{1i}, L_{2i} — ограниченные на $\mathbb{R}$ функции и $\text{supp } L_{ki} \subset [0; 1]$, $k=1, 2$. Отсюда следует

$$\varphi^{j-l} \frac{d^j}{dx_1^j} \mathcal{R}_0(x_1) = \sum_{i=1}^2 \int_0^1 \varepsilon^{l-3-j} d\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} D_i^l F(t) L_{1i} \left(\frac{t_1 - x_1}{\varepsilon \varphi(x_1)} \right) L_{2i} \left(\frac{t_2}{\varepsilon \varphi(x_1)} \right) \frac{dt}{\varphi^2(x_1)}.$$

Поэтому, учитывая, что $l-1-j \geq 0$,

$$\left| \varphi^{j-l}(x_1) \frac{d^j}{dx_1^j} \mathcal{R}_0(x_1) \right| \leq C \sum_{i=1}^2 \int_0^1 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{R}^2} |D_i^l F(t)| \left| L_{1i} \left(\frac{t_1 - x_1}{\varepsilon \varphi(x_1)} \right) L_{2i} \left(\frac{t_2}{\varepsilon \varphi(x_1)} \right) \right| \frac{dt}{\varphi^2(x_1)}. \quad (2.27)$$

Пусть $Y_i(t)$ — продолжение $|D_i^l F(t)|$ на всю плоскость с P нулем. Применяя обобщенное неравенство Минковского, из (2.27) получаем

$$\begin{aligned} \left\| \varphi^{j-l} \frac{d^j}{dx_1^j} \mathcal{R}_0 \right\|_{p, \varphi, (0;1)} &\leq C \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_0^1 \left[\int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2 \varphi^{2-1/p}(x_1)} \int_{\mathbb{R}^2} Y_i(t) \times \right. \right. \\ &\times \left. \left| L_{1i} \left(\frac{t_1 - x_1}{\varepsilon \varphi(x_1)} \right) L_{2i} \left(\frac{t_2}{\varepsilon \varphi(x_1)} \right) \right| dt \right]^{1/p} dx_1 \Big\} \leq C \sum_{i=1}^2 \int_0^1 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \left[\int_{\mathbb{R}^2} Y_i(t) \left| L_{1i} \left(\frac{t_1 - x_1}{\varepsilon \varphi(x_1)} \right) \right| \times \right. \right. \\ &\times \left. \left| L_{2i} \left(\frac{t_2}{\varepsilon \varphi(x_1)} \right) \right| \frac{dt}{\varphi^{2-1/p}(x_1)} \right]^{1/p} dx_1 \Big\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Рассмотрим интеграл в квадратных скобках. Применяя неравенство Гельдера сначала к интегралу по t_2 и используя ограниченность и финитность функции L_{2i} , получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} Y_i(t) \left| L_{1i} \left(\frac{t_1 - x_1}{\varepsilon \varphi(x_1)} \right) L_{2i} \left(\frac{t_2}{\varepsilon \varphi(x_1)} \right) \right| \frac{dt}{\varphi^{2-1/p}(x_1)} &\leq \\ &\leq \frac{\varepsilon^{1-1/p}}{\varphi(x_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_i(t_1, x_1, \varepsilon) \left| L_{1i} \left(\frac{t_1 - x_1}{\varepsilon \varphi(x_1)} \right) \right| dt_1, \end{aligned}$$

где обозначено

$$\Psi_i(t_1, x_1, \varepsilon) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} Y_i^p(t) \left| L_{2i} \left(\frac{t_2}{\varphi(x_1) \varepsilon} \right) \right| dt_2 \right\}^{1/p}.$$

Применяя теперь неравенство Гельдера к интегралу по t_1 и используя ограниченность и финитность функций L_{1i} , мы видим, что выражение в квадратных скобках не превосходит величины

$$C \frac{\varepsilon^{2-2/p}}{\varphi^{1/p}(x_1)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_i^p(t_1, x_1, \varepsilon) \left| L_{1i} \left(\frac{t_1 - x_1}{\varepsilon \varphi(x_1)} \right) \right| dt_1 \right\}^{1/p}.$$

Отсюда и из (2.28) имеем

$$\left\| \varphi^{j-l} \frac{d^j}{dx_1^j} \mathcal{R}_0 \right\|_{p, \varphi, (0;1)} \leq C \sum_{i=1}^2 \int_0^1 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^{2/p}} \left\{ Y_i^p(t) \int_0^1 \left| L_{1i} \left(\frac{t_1 - x_1}{\varepsilon \varphi(x_1)} \right) \right| \frac{dx_1}{\varphi(x_1)} dt \right\}^{1/p}. \quad (2.29)$$

В интеграле

$$\int_0^1 \left| L_{1i} \left(\frac{t_1 - x_1}{\varepsilon \varphi(x_1)} \right) \right| \frac{dx_1}{\varphi(x_1)}$$

сделаем замену переменной $\tau = (t_1 - x_1) \varepsilon^{-1} \varphi^{-1}(x_1)$ ($x_1 \rightarrow \tau$), тогда, в силу финитности и ограниченности функции L_{1i} , имеем

$$\int_0^1 \left| L_{1i} \left(\frac{t_1 - x_1}{\varepsilon \varphi(x_1)} \right) \right| \frac{dx_1}{\varphi(x_1)} \leq C\varepsilon.$$

Используя эту оценку в (2.29), получаем

$$\begin{aligned} \left\| \varphi^{j-l} \frac{d^j}{dx_1^j} \mathcal{R}_0 \right\|_{p, \varphi, (0;1)} &\leq C \sum_{i=1}^2 \int_0^1 \varepsilon^{-\frac{1}{p}} d\varepsilon \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} Y_i^p(t) dt \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq C \sum_{i=1}^2 \|Y_i\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} = C \sum_{i=1}^2 \|D_i^l F\|_{L_p(P)}. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Рассмотрим отображение $\Lambda: x = (x_1, x_2) \rightarrow u = (u_1, u_2)$:

$$u_1 = x_1, \quad u_2 = \varphi(x_1) - x_2. \quad (2.30)$$

В силу условий, наложенных на φ , отображение Λ будет C^l -дiffeоморфизмом и $\Lambda(\bar{P}) = \bar{P}$.

Лемма 3. Пусть $F \in W_p^l(P)$ и Λ — отображение (2.30). Тогда функция $G = F \circ \Lambda^{-1}$ будет принадлежать $W_p^l(P)$, причем

$$\|G\|_{W_p^l(P)} \sim \|F\|_{W_p^l(P)}. \quad (2.31)$$

Доказательство леммы следует из определения отображения Λ и того, что $\varphi \in C^l([0; 1])$.

В следующей лемме мы рассмотрим продолжение функций с части границы области P внутрь области. Положим $\sigma(s, t) = \sigma_\varphi(s, t)$.

Лемма 4. Пусть γ_0, γ_1 — кривые (2.24) — части границы области P и пусть функции $f_i \in B_{p, \varphi}^{l-1/p}(\gamma_i)$, $i = 0, 1$, таковы, что для некоторого $x_1^0 \in (0; 1)$ $f_i(x_1) = 0$ при $x > x_1^0$. Тогда существуют такие функции $F_i \in W_p^l(P)$, что для почти всех $x_1 \in (0; 1)$ $f_i = F_i|_{\gamma_i}$, и существуют такие постоянные C_0 и C_1 , не зависящие от f_i , F_i , что справедливы оценки

$$\|F_i\|_{W_p^l(P)} \leq C_i \|f_i\|_{B_{p, \varphi}^{l-1/p}(\gamma_i)}, \quad i = 0, 1. \quad (2.32)$$

Доказательство. Под $f_1(x_1)$ понимается функция $f_1 \circ \lambda_1(x_1)$, где λ_1 — параметризация (1.3) кривой γ_1 . Рассмотрим функцию $f_0 \in B_{p, \varphi}^{l-1/p}(\gamma_0) = B_{p, \varphi}^{l-1/p}(0; 1)$. Положим

$$F_0(x) = F_0(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x_1 + \tau x_2) K(\tau) d\tau,$$

где $K \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию (2.1). Получим для F_0 оценку (2.32).

Пусть $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ — мультииндекс такой, что $m = |\beta| \leq l-1$. Тогда

$$D^\beta F_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0^{(m)}(x_1 + \tau x_2) \tau^{\beta_2} K(\tau) d\tau = \frac{1}{x_2} \int_{x_1}^{x_1+x_2} f_0^{(m)}(u) \left(\frac{u-x_1}{x_2} \right)^{\beta_2} K\left(\frac{u-x_1}{x_2} \right) du.$$

Здесь было использовано то, что $\text{supp } K \subset [0; 1]$. Учитывая ограниченность функции K , получаем

$$|D^\beta F_0(x)|^p \leq C \left(\frac{1}{x_2} \int_{x_1}^{x_1+x_2} |f_0^{(m)}(u)| du \right)^p.$$

Интегрируя это неравенство по P и используя теорему Фубини, имеем

$$\begin{aligned} \int_P |D^\beta F_0(x)|^p dx &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{\varphi(x_1)} |D^\beta F_0(x)|^p dx_2 \leq \\ &\leq \int_0^1 dx_1 \int_0^{\varphi(x_1)} \left[\frac{1}{x_2} \int_0^{x_2} |f_0^{(m)}(x_1 + v)| dv \right]^p dx_2. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Харди (1.16), из последнего неравенства получаем

$$\begin{aligned} \int_P |D^\beta F_0(x)|^p dx &\leq C \int_0^1 dx_1 \int_0^{\varphi(x_1)} |f_0^{(m)}(x_1 + x_2)|^p dx_2 = \\ &= C \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^{x_1+\varphi(x_1)} |f_0^{(m)}(\tau)|^p d\tau. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Пусть $\tau \rightarrow \mu(\tau)$ — обратная функция к функции $x_1 \rightarrow x_1 + \varphi(x_1)$. Тогда, меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$\int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^{x_1+\varphi(x_1)} |f_0^{(m)}(\tau)|^p d\tau = \int_0^1 d\tau \int_{\mu(\tau)}^{\tau} |f_0^{(m)}(\tau)|^p dx_1 = \int_0^1 |f_0^{(m)}(\tau)|^p (\tau - \mu(\tau)) d\tau.$$

Из определения функции μ следует, что $\tau - \mu(\tau) = \varphi(\mu(\tau))$. Так как $\mu(\tau) \leq \tau$ и функция φ возрастающая, то $\varphi(\mu(\tau)) \leq \varphi(\tau)$. Следовательно,

$$\int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^{x_1+\varphi(x_1)} |f_0^{(m)}(\tau)|^p d\tau \leq \int_0^1 |f_0^{(m)}(\tau)|^p \varphi(\tau) d\tau.$$

Отсюда и из (2.33) получаем

$$\int_P |D^\beta F_0(x)|^p dx \leq C \|f_0^{(m)}\|_{p, \varphi(0;1)}^p. \quad (2.34)$$

Пусть $m = |\beta| = l - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} D_1 D^\beta F_0(x) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-\infty}^{\infty} f_0^{(l-1)}(u) \left(\frac{u-x_1}{x_2} \right)^{\beta_2} K \left(\frac{u-x_1}{x_2} \right) \frac{du}{x_2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-\infty}^{\infty} f_0^{(l-1)}(u) L \left(\frac{u-x_1}{x_2} \right) \frac{du}{x_2}, \end{aligned}$$

где обозначено $L(\tau) = \tau^{\beta_2} K(\tau)$.

Дифференцируя и проводя простые выкладки, получаем

$$\begin{aligned} D_1 D^\beta F_0(x) &= - \int_{-\infty}^{\infty} f_0^{(l-1)}(u) L' \left(\frac{u-x_1}{x_2} \right) \frac{du}{x_2^2} = - \frac{1}{x_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} [f_0^{(l-1)}(u) - \\ &- f_0^{(l-1)}(x_1)] L' \left(\frac{u-x_1}{x_2} \right) du = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0^{(l-1)}(x_1 + \tau x_2) - f_0^{(l-1)}(x_1)}{x_2} L'(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Из (2.35) следует

$$\begin{aligned} |D_1 D^\beta F_0(x)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_0^{(l-1)}(x_1 + \tau x_2) - f_0^{(l-1)}(x_1)|}{\tau x_2} |\tau L'(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq \frac{C}{x_2} \int_0^{x_2} \frac{|f_0^{(l-1)}(x_1 + s) - f_0^{(l-1)}(x_1)|}{s} ds, \end{aligned} \quad (2.36)$$

откуда

$$\begin{aligned} \|D_1 D^\beta F_0\|_{L_{p(P)}}^p &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{\varphi(x_1)} |D_1 D^\beta F_0(x)|^p dx_2 \leq \\ &\leq C \int_0^1 dx_1 \int_0^{\varphi(x_1)} \left[\frac{1}{x_2} \int_0^{x_2} \frac{|f_0^{(l-1)}(x_1 + s) - f_0^{(l-1)}(x_1)|}{s} ds \right]^p dx_2. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Харди (1.16) и делая замену переменной, получаем

$$\begin{aligned} \|D_1 D^\beta F_0\|_{L_{p(P)}}^p &\leq C \int_0^1 dx_1 \int_0^{\varphi(x_1)} \frac{|f_0^{(l-1)}(x_1 + x_2) - f_0^{(l-1)}(x_1)|^p}{x_2^p} dx_2 = \\ &= C \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^{x_1 + \varphi(x_1)} \frac{|f_0^{(l-1)}(\tau) - f_0^{(l-1)}(x_1)|^p}{(\tau - x_1)^p} d\tau = \\ &= C \int_0^1 dx_1 \int_0^1 \frac{|f_0^{(l-1)}(\tau) - f_0^{(l-1)}(x_1)|^p}{|\tau - x_1|^p} \chi\left(\frac{\tau - x_1}{\varphi(x_1)}\right) d\tau \leq \\ &\leq C \int_0^1 \int_0^1 \frac{|f_0^{(l-1)}(\tau) - f_0^{(l-1)}(x_1)|^p}{|\tau - x_1|^p} \sigma(\tau, x_1) d\tau dx_1 = C \|f_0^{(l-1)}\|_{b_{p, \varphi}^{1-1/p}(0;1)}^p. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Оценим $D_2 D^\beta F_0$ при $|\beta| = l - 1$. Как и выше, $L(\tau) = \tau^{\beta_2} K(\tau)$. Производя несложные вычисления, имеем

$$\begin{aligned} D_2 D^\beta F_0(x) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-\infty}^{\infty} f_0^{(l-1)}(u) \left(\frac{u - x_1}{x_2}\right)^{\beta_2} K\left(\frac{u - x_1}{x_2}\right) \frac{du}{x_2} = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f_0^{(l-1)}(u) \left[\frac{1}{x_2^2} L\left(\frac{u - x_1}{x_2}\right) + \frac{u - x_1}{x_2^3} L'\left(\frac{u - x_1}{x_2}\right) \right] du = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f_0^{(l-1)}(x_1 + \tau x_2) [\tau L(\tau)]' \frac{d\tau}{x_2} = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0^{(l-1)}(x_1 + \tau x_2) - f_0^{(l-1)}(x_1)}{\tau x_2} \tau [\tau L(\tau)]' d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|D_2 D^\beta F_0| \leq \frac{C}{x_2} \int_0^{x_2} \frac{|f_0^{(l-1)}(x_1 + s) - f_0^{(l-1)}(x_1)|}{s} ds.$$

Повторяя рассуждения, приводящие к оценке (2.37) из (2.36), получаем

$$\|D_2 D^{\beta} F_0\|_{L_p(P)} \leq C \|f_0^{(l-1)}\|_{b_{p,\Phi}^{1-1/p}(0;1)}.$$

Отсюда из (2.34) и из (2.37) следует (2.32) для F_0 .

Рассмотрим теперь $f_1 \in B_{p,\Phi}^{l-1/p}(\gamma_1)$. Отображение Λ , определенное в (2.30), C^l -диффеоморфно отображает $\bar{P}$ на себя, причем $\Lambda(\gamma_0) = \gamma_1$ и $\Lambda(\gamma_1) = \gamma_0$. Обозначим $v = \Lambda^{-1}|_{\gamma_0}$. Тогда v есть C^l -диффеоморфизм γ_0 на γ_1 . Функция $g = f_1 \circ v \in B_{p,\Phi}^{l-1/p}(0;1)$. Несложно заметить, что $f_1 \circ v(u_1) = f_1 \circ \lambda_1(u_1)$ и

$$\|g\|_{B_{p,\Phi}^{l-1/p}(\gamma_0)} = \|f_1\|_{B_{p,\Phi}^{l-1/p}(\gamma_1)}.$$

По доказанному существует функция $G \in W_p^l(P)$ такая, что $G|_{\gamma_0} = g$. Пусть, например,

$$G(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u_1 + \tau u_2) K(\tau) d\tau.$$

Положим

$$F_1(x) = G \circ \Lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1 + \tau(\varphi(x_1) - x_2)) K(\tau) d\tau.$$

Тогда $F_1|_{\gamma_1} = f_1$. Поскольку оценка (2.32) справедлива для G и g , и так как по лемме 3

$$\|F_1\|_{W_p^l(P)} \sim \|G\|_{W_p^l(P)},$$

то отсюда вытекает оценка (2.32) для функций F_1 и f_1 . Лемма 4 доказана.

§ 3. ОБЛАСТЬ С ВЕРШИНОЙ ВНЕШНЕГО УГЛА ИЛИ ПИКА НА ГРАНИЦЕ

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, сделаем следующее замечание.

Используя стандартную технику, использующую разбиение единицы, можно ограничиться локальным рассмотрением следов. На l -регулярных участках границы (1.6) граничное поведение хорошо изучено, и мы рассмотрим вопрос о следах только в окрестности угловых точек. Конкретней, мы рассмотрим следы функций на границе области (1.8) и на границе области (1.12). Для упрощения рассуждений будем считать в (1.8) и (1.12) $a = 1$. Далее, имея в виду использование разбиения единицы, мы можем считать, что все функции, рассматриваемые в области или на границе области, обращаются в нуль вне некоторой окрестности U начала координат такой, что $\bar{U} \subset V$, где $V = (-1; 1) \times (-1; 1)$. Ниже, в этом и следующем параграфе, это условие предполагается выполненным.

Таким образом, в этом параграфе мы получим необходимые и достаточные условия на след функции из $W_p^l(Q)$, $l \geq 1$, $1 < p < \infty$, где Q — область (1.8) с $a = 1$, на $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 — стороны криволинейного треугольника Q ,

$$\Gamma_i = \{x = (x_1, x_2): 0 < x_1 < 1, x_2 = \varphi_i(x_1)\}, i = 1, 2. \quad (3.1)$$

Соотношение (1.14) справедливость которого нам надо установить, в данном случае будет иметь вид

$$\|f\|_{TW_p^l(Q)} \sim \langle f \rangle_{\Gamma}, \quad (3.2)$$

где (см. (1.4)) для $f: \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \rightarrow \bar{\mathbf{R}}, f_i = f|_{\Gamma_i}$,

$$\langle f \rangle_{\Gamma} = \sum_{i=1}^2 \|f_i\|_{B_{p,\Phi}^{l-1/p}(\Gamma_i)} + E_p^{l-1}(f, \Gamma).$$

Функция Φ определена в (1.10) и удовлетворяет условию (1.11).

Рассмотрим отображение $\Pi: [0; 1] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$,

$$u_1 = x_1, \quad u_2 = x_2 - \Phi_1(x_1). \quad (3.3)$$

Несложно заметить, что отображение Π будет C^l -диффеоморфно отображать $\bar{Q}$ на $\bar{P}$, где P — область (2.2), причем $\Pi(\Gamma_{i+1}) = \gamma_i$, $i = 0, 1$, где γ_i — кривые (2.24).

Если $F \in W_p^l(Q)$, то функция $G = F \circ \Pi^{-1} \in W_p^l(P)$, $\|F\|_{W_p^l(Q)} \sim \|G\|_{W_p^l(P)}$. Далее, так как $G(u_1, u_2) = F(u_1, u_2 + \Phi_1(u_1))$, то

$$\begin{aligned} \lim_{u_2 \rightarrow +0} G(u_1, u_2) &= F(u_1, \Phi_1(u_1)) = f_1(u_1), \\ \lim_{u_2 \rightarrow \Phi(u_1)} G(u_1, u_2) &= F(u_1, \Phi_2(u_1)) = f_2(u_1). \end{aligned} \quad (3.4)$$

В (3.4) обозначено $f_i(u_1) = f_i \circ \lambda_i(u_1)$, где λ_i — параметризация (1.3) кривой Γ_i , $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$. Положим $g_i = G|_{\gamma_i}$, $i = 0, 1$. Тогда $g_0(u_1) = f_1(u_1)$, $g_1(u_1) = f_2(u_1)$, $0 < u_1 < 1$. Из определения класса $B_{p,\Phi}^l$ на кривых следует

$$\begin{aligned} \|f_{i+1}\|_{B_{p,\Phi}^{l-1/p}(\Gamma_{i+1})} &= \|g_i\|_{B_{p,\Phi}^{l-1/p}(\gamma_i)}, \quad i = 0, 1, \\ E_p^{l-1}(f, \Gamma) &= E_p^{l-1}(g, \gamma), \quad I_p^{l-1}(f, \Gamma) = I_p^{l-1}(g, \gamma), \end{aligned}$$

где $f_i = f|_{\Gamma_i}$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $g_i = g|_{\gamma_i}$, $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1$.

Таким образом, теорему достаточно доказать для случая $Q = P$, т. е. $\Phi_1(x_1) = 0$, $\Phi_2(x_1) = \Phi(x_1)$, и, следовательно, в этом параграфе мы рассматриваем следы функций из пространства $W_p^l(P)$.

Пусть $F \in W_p^l(P)$. Тогда из (2.11) следует

$$F(x) = \sum_{r=0}^{l-1} \alpha_r(x_1) x_2^r + \mathcal{R}(x).$$

Отсюда имеем

$$f_0(x_1) = F|_{\gamma_0}(x_1) = \alpha_0(x_1) + \mathcal{R}(x_1, 0),$$

$$f_1(x_1) = F|_{\gamma_1}(x_1) = \sum_{r=0}^{l-1} \alpha_r(x_1) \Phi^r(x_1) + \mathcal{R}(x_1, \Phi(x_1)).$$

Обозначим, как и в (2.25), $\mathcal{R}(x_1, 0) = \mathcal{R}_0(x_1)$, $\mathcal{R}(x_1, \Phi(x_1)) = \mathcal{R}_{\Phi}(x_1)$.

Из лемм 1 и 2 следует, что нормы функций $\alpha_0, \sum_{r=0}^{l-1} \alpha_r \Phi^r$ в $B_{p,\Phi}^{l-1/p}(0; 1)$ и нормы функций $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_{\Phi}, \Phi^{-1}(f_1 - f_0)$ в $W_{p,\Phi}^{l-1}(0; 1)$ оцениваются через норму функции F в $W_p^l(P)$. Чтобы получить оценку $\langle f \rangle_{\Gamma}$ через норму $\|F\|_{W_p^l(P)}$, нам осталось получить оценки

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_0^{(l-1)}\|_{B_{p,\Phi}^{1-1/p}(0;1)} &\leq C \|F\|_{W_p^l(P)}, \\ \|\mathcal{R}_{\Phi}^{(l-1)}\|_{B_{p,\Phi}^{1-1/p}(0;1)} &\leq C \|F\|_{W_p^l(P)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Сделаем в (2.10) замену переменной $\varepsilon = r\Phi^{-1}(x_1)$, $\varepsilon \rightarrow r$. Тогда

$$\mathcal{R}(x_1) = \sum_{i=1}^2 \int_0^{\Phi(x_1)} r^{l-3} dr \int_{\mathbf{R}^2} D_i^l F(t) \mathfrak{M}_i\left(\frac{t_1 - x_1}{r}\right) \mathfrak{N}_i\left(\frac{t_2 - x_2}{r} + \frac{x_2}{\Phi(x_1)}\right) dt.$$

Отсюда следует

$$\mathcal{R}_0(x_1) = \sum_{i=1}^2 \int_0^{\varphi(x_1)} r^{l-3} dr \int_{\mathbb{R}^2} D_i^l F(t) \mathfrak{M}_i\left(\frac{t_1 - x_1}{r}\right) \mathfrak{N}_i\left(\frac{t_2 - x_2}{r} + \frac{x_2}{\varphi(x_1)}\right) dt,$$

$$\mathcal{R}_\varphi(x_1) = \sum_{i=1}^2 \int_0^{\varphi(x_1)} r^{l-3} dr \int_{\mathbb{R}^2} D_i^l F(t) \mathfrak{M}_i\left(\frac{t_1 - x_1}{r}\right) \mathfrak{N}_i\left(\frac{t_2 - \varphi(x_1)}{r} + 1\right) dt.$$

Мы получим оценку (3.5) для $\mathcal{R}_0$. Для $\mathcal{R}_\varphi$ эта оценка получается дословным повторением всех выкладок. Запишем $\mathcal{R}_0$ в виде

$$\mathcal{R}_0(x_1) = \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} D_i^l F(t) T_i(x, t) dt,$$

где

$$T_i(x, t) = \int_0^{\varphi(x_1)} r^{l-3} \mathfrak{M}_i\left(\frac{t_1 - x_1}{r}\right) \mathfrak{N}_i\left(\frac{t_2}{r}\right) dr;$$

тогда

$$\mathcal{R}_0^{(l-1)}(x_1) = \sum_{i=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} D_i^l F(t) D_1^{l-1} T_i(x, t) dt.$$

Из (2.8) и (2.9) следует, что $D_1^{l-1} T_i$ можно записать следующим образом:

$$D_1^{l-1} T_i(x_1, t) = \varphi^{-1}(x_1) M_{1i}\left(x_1, \frac{t_1 - x_1}{\varphi(x_1)}, \frac{t_2}{\varphi(x_1)}\right) + \int_0^{\varphi(x_1)} M_{2i}\left(\frac{t_1 - x_1}{r}\right) \mathfrak{N}_i\left(\frac{t_2}{r}\right) \frac{dr}{r^2},$$

$$i = 1, 2. \quad (3.6)$$

В (3.6) функция $M_{1i}(x_1, u_1, u_2)$ ограничена на $(0; 1) \times \mathbb{R}^2$, имеет ограниченные частные производные первого порядка, и справедливы оценки

$$|M_{1i}(x_1, u_1, u_2)| \leq S_{0i}(u_1, u_2),$$

$$|D_j M_{1i}(x_1, u_1, u_2)| \leq S_{ji}(u_1, u_2), \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.7)$$

где функции S_{ji} , $j = 0, 1, 2, 3$, ограничены и носители их содержатся в квадрате $(0; 1) \times (0; 1)$. Функция M_{2i} в (3.6) ограничена и имеет ограниченную производную M'_{2i} на $\mathbb{R}$, причем $\text{supp } M_{2i} \subset [0; 1]$.

Для доказательства (3.5) необходимо получить оценку интеграла (см. (1.2))

$$\int_0^1 ds \int_0^{\varphi(s)} \frac{|\Delta(\mathcal{R}_0^{(l-1)}, s + \tau, s)|}{\tau^p} d\tau. \quad (3.8)$$

Из (3.6) следует

$$\begin{aligned} & |D_1^{l-1} T_i(s + \tau, t) - D_1^{l-1} T_i(s, t)| \leq \\ & \leq \left| \int_0^\tau \frac{d}{d\rho} \left[\varphi^{-1}(s + \rho) M_{1i}\left(s + \rho, \frac{t_1 - s - \rho}{\varphi(s + \rho)}, \frac{t_2}{\varphi(s + \rho)}\right) \right] d\rho \right| + \\ & + \left| \int_{\varphi(s)}^{\varphi(s + \tau)} M_{2i}\left(\frac{t_1 - s - \tau}{r}\right) \mathfrak{N}_i\left(\frac{t_2}{r}\right) \frac{dr}{r^2} \right| + \left| \int_0^\tau M_{2i}\left(\frac{t_1 - s - \tau}{r}\right) \mathfrak{N}_i\left(\frac{t_2}{r}\right) \frac{dr}{r^2} \right| + \\ & + \left| \int_0^\tau M_{2i}\left(\frac{t_1 - s}{r}\right) \mathfrak{N}_i\left(\frac{t_2}{r}\right) \frac{dr}{r^2} \right| + \left| \int_\tau^{\varphi(s)} \frac{dr}{r^2} \int_0^\tau \frac{d}{d\rho} M_{2i}\left(\frac{t_1 - s - \rho}{r}\right) \mathfrak{N}_i\left(\frac{t_2}{r}\right) d\rho \right|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ниже через Y_i будем обозначать продолжение функции $|D_i^1 F|$ на всю плоскость нулем. Из (3.8) и (3.9) получаем оценку

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_0^{(l-1)}\|_{b_{p,\Phi}^{1-1/p(0;1)}} &\leq C \sum_{i=1}^2 \left(\left\{ \int_0^1 ds \int_0^{\varphi(s)} \left[\int_{\mathbf{R}^2} \int_0^\tau Y_i(t) \times \right. \right. \right. \\ &\quad \times \mathcal{E}_i \left(\frac{t_1 - s - \rho}{\varphi(s + \rho)}, \frac{t_2}{\varphi(s + \rho)} \right) \frac{d\rho dt}{\tau \varphi^2(s + \rho)} \Big] d\tau \Big\}^{1/p} + \\ &\quad + \left\{ \int_0^1 ds \int_0^{\varphi(s)} \left[\int_{\mathbf{R}^2} \int_{\varphi(s)}^{\varphi(s+\tau)} Y_i(t) M_{2i} \left(\frac{t_1 - s - \tau}{r} \right) \mathfrak{R}_i \left(\frac{t_2}{r} \right) \frac{dr dt}{\tau r^2} \right] d\tau \Big\}^{1/p} + \\ &\quad + \left\{ \int_0^1 ds \int_0^{\varphi(s)} \left[\int_{\mathbf{R}^2} \int_0^\tau Y_i(t) M_{2i} \left(\frac{t_1 - s - \tau}{r} \right) \mathfrak{R}_i \left(\frac{t_2}{r} \right) \frac{dr dt}{\tau r^2} \right] d\tau \Big\}^{1/p} + \\ &\quad + \left\{ \int_0^1 ds \int_0^{\varphi(s)} \left[\int_{\mathbf{R}^2} \int_0^\tau Y_i(t) M_{2i} \left(\frac{t_1 - s}{r} \right) \mathfrak{R}_i \left(\frac{t_2}{r} \right) \frac{dr dt}{\tau r^2} \right] d\tau \Big\}^{1/p} + \\ &\quad + \left\{ \int_0^1 ds \int_0^{\varphi(s)} \left[\int_{\mathbf{R}^2} dt \int_0^{\varphi(s)} dr \int_0^\tau Y_i(t) R_i \left(\frac{t_1 - s - \rho}{r} \right) N_i \left(\frac{t_2}{r} \right) \frac{d\rho}{\tau r^3} \right] d\tau \Big\}^{1/p} \right) = C \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^5 I_{ij}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

При выводе (3.10) использованы оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\varphi(s + \rho)} M_{1i} \left(s + \rho, \frac{t_1 - s - \rho}{\varphi(s + \rho)}, \frac{t_2}{\varphi(s + \rho)} \right) \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{\varphi^2(s + \rho)} \mathcal{E}_i \left(\frac{t_1 - s - \rho}{\varphi(s + \rho)}, \frac{t_2}{\varphi(s + \rho)} \right), \\ \left| \frac{d}{dr} M_{2i} \left(\frac{t_1 - s - \rho}{r} \right) \right| &\leq \frac{1}{r} R_i \left(\frac{t_1 - s - \rho}{r} \right), \end{aligned}$$

где, как следует из (3.7), функции $\mathcal{E}_i(u_1, u_2)$ и $R_i(u)$ ограничены в $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}$ соответственно, $\text{supp } \mathcal{E}_i \subset [0; 1] \times [0; 1]$, $\text{supp } R_i \subset [0; 1]$. Через N_i обозначена функция $|\mathfrak{R}_i|$.

Оценим интеграл I_{11} . Используя последовательно неравенство Гельдера по t и неравенство Харди (1.16), получаем

$$\begin{aligned} I_{11} &\leq C \left\{ \int_0^1 ds \int_0^{\varphi(s)} \left[\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left\{ \int_{\mathbf{R}^2} Y_i^p(t) \mathcal{E}_i \left(\frac{t_1 - s - \rho}{\varphi(s + \rho)}, \frac{t_2}{\varphi(s + \rho)} \right) dt \right\}^{1/p} \frac{d\rho}{\varphi^2(s + \rho)} \right] d\tau \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq C \left\{ \int_0^1 ds \int_0^{\varphi(s)} \frac{d\tau}{\varphi^2(s + \tau)} \int_{\mathbf{R}^2} Y_i^p(t) \mathcal{E}_i \left(\frac{t_1 - s - \tau}{\varphi(s + \tau)}, \frac{t_2}{\varphi(s + \tau)} \right) dt \right\}^{1/p} = \\ &= C \left\{ \int_{\mathbf{R}^2} Y_i^p(t) \left[\int_0^1 ds \int_0^{\varphi(s)} \varphi^{-2}(s + \tau) \mathcal{E}_i \left(\frac{t_1 - s - \tau}{\varphi(s + \tau)}, \frac{t_2}{\varphi(s + \tau)} \right) d\tau \right] dt \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл в квадратных скобках

$$J = \int_0^1 ds \int_0^{\varphi(s)} \mathcal{E}_i \left(\frac{t_1 - s - \tau}{\varphi(s + \tau)}, \frac{t_2}{\varphi(s + \tau)} \right) \frac{d\tau}{\varphi^2(s + \tau)}. \quad (3.11)$$

Формально двойной интеграл (3.11) вычисляется по области P . Фактически же область интегрирования определяется из неравенств

$$\begin{aligned} s + \tau &< t_1 < s + \tau + \varphi(s + \tau), \\ 0 &< t_2 < \varphi(s + \tau), \quad 0 < \tau < \varphi(s). \end{aligned}$$

Обозначим через μ функцию, обратную к функции $r \rightarrow r + \varphi(r)$. Тогда если $u = r + \varphi(r)$, то $r = \mu(u)$ и

$$\mu(u) + \varphi(\mu(u)) = u. \quad (3.12)$$

Таким образом,

$$J = \iint_{U_t} \mathcal{E}_i \left(\frac{t_1 - s - \tau}{\varphi(s + \tau)}, \frac{t_2}{\varphi(s + \tau)} \right) \frac{ds d\tau}{\varphi^2(s + \tau)}, \quad (3.13)$$

где $U_t = \{(s, \tau) : \mu(t_1) < s + \tau < t_1, 0 < \tau < \varphi(s)\}$. Отсюда получаем

$$J \leq C \left[\int_{\mu(\mu(t_1))}^{\mu(t_1)} ds \int_{\mu(t_1) - s}^{\varphi(s)} \frac{d\tau}{\varphi^2(s + \tau)} + \int_{\mu(t_1)}^{t_1} ds \int_0^{t_1 - s} \frac{d\tau}{\varphi^2(s + \tau)} \right].$$

Делая замену переменной $s + \tau = \rho$ ($\tau \rightarrow \rho$) и учитывая, что $\varphi(\rho) > \varphi(\mu(t_1))$, имеем

$$\begin{aligned} J &\leq \frac{C}{\varphi^2(\mu(t_1))} \left[\int_{\mu(\mu(t_1))}^{\mu(t_1)} [s + \varphi(s) - \mu(t_1)] ds + \int_{\mu(t_1)}^{t_1} (t_1 - s) ds \right] \leq \\ &\leq \frac{C}{\varphi^2(\mu(t_1))} \left\{ \varphi(\mu(t_1)) [\mu(t_1) - \mu(\mu(t_1))] + \frac{1}{2} (t_1 - \mu(t_1))^2 \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая монотонность φ и (3.12), из последнего неравенства получаем, что $J \leq C < \infty$. Отсюда следует

$$I_{i1} \leq C \|Y_i\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} = C \|D_i^1 F\|_{L_p(P)}. \quad (3.14)$$

Оценим интеграл I_{i2} . Применяя неравенство Гельдера сначала к интегралу по t , затем к интегралу по r и используя ограниченность M_{2i} , получим

$$\begin{aligned} I_{i2} &\leq C \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} Y_i^p(t) \int_0^1 ds \int_0^{\varphi(s)} \frac{d\tau}{\tau} \int_{\varphi(s)}^{\varphi(s+\tau)} \mathcal{R}_i \left(\frac{t_2}{r} \right) M_{2i} \left(\frac{t_1 - s - \tau}{r} \right) \frac{dr}{r^2} \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq C \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} Y_i^p(t) \iint_{U_t} ds d\tau \int_{\varphi(s)}^{\varphi(s+\tau)} \frac{dr}{\tau \varphi^2(s)} \right\}^{1/p}, \end{aligned}$$

где $U_t = \{(s, \tau) : \mu(t_1) < s + \tau < t_1, 0 < \tau < \varphi(s)\}$ (см. вывод неравенства (3.14)). Из последней оценки, учитывая, что $\varphi \in C'([0; 1])$, следует

$$I_{i2} \leq C \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} Y_i^p(t) \left[\iint_{U_t} \frac{ds d\tau}{\varphi^2(s)} \right] dt \right\}^{1/p}.$$

Так как при $0 < \tau < \varphi(s)$ из (1.11) следует $\varphi(s) \sim \varphi(s + \tau)$, то, как и при оценке интеграла (3.13), получаем

$$\iint_{U_t} \frac{ds d\tau}{\varphi^2(s)} \leq C \iint_{U_t} \frac{ds d\tau}{\varphi^2(s + \tau)} \leq C_1.$$

Отсюда вытекает оценка

$$I_{i2} \leq C \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} Y_i^p(t) dt \right\}^{1/p} = C \|D_i^1 F\|_{L_p(P)}. \quad (3.15)$$

Оценки

$$I_{ij} \leq C \|D_i^j F\|_{L_p(P)}, \quad j = 3, 4, \quad (3.16)$$

получаются тем же способом, что и (3.14), (3.15).

Оценим интеграл I_{i5} . Меняя порядок интегрирования по s и τ , применяя обобщенное неравенство Минковского, получаем

$$I_{i5} \leq \left\{ \int_0^{\Phi(1)} \left[\int_{\tau}^{\Phi(1)} \left\{ \int_0^1 \left[\int_0^{\tau} d\rho \int_{\mathbb{R}^2} Y_i(t) R_i \left(\frac{t_1 - s - \rho}{r} \right) N_i \left(\frac{t_2}{r} \right) dt \right]^p ds \right\}^{1/p} \frac{dr}{r^3} \right]^p \frac{d\tau}{\tau^p} \right\}^{1/p}.$$

Рассмотрим интеграл по t . Применяя неравенство Гельдера к интегралу по t_2 , имеем

$$\int_{\mathbb{R}^2} Y_i(t) R_i \left(\frac{t_1 - s - \rho}{r} \right) N_i \left(\frac{t_2}{r} \right) dt \leq C r^{1-\frac{1}{p}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t_1, r) R_i \left(\frac{t_1 - s - \rho}{r} \right) dt_1,$$

где

$$\Phi(t_1, r) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} Y_i^p(t) N_i \left(\frac{t_2}{r} \right) dt_2 \right\}^{1/p}.$$

Таким образом,

$$I_{i5} \leq C \left\{ \int_0^{\Phi(1)} \left[\int_{\tau}^{\Phi(1)} \left\{ \int_0^1 \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\rho \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t_1, r) R_i \left(\frac{t_1 - s - \rho}{r} \right) dt_1 \right]^p ds \right\}^{1/p} \frac{dr}{r^{2+1/p}} \right]^p \frac{d\tau}{\tau^p} \right\}^{1/p}.$$

К интегралу по ρ применим неравенство Гельдера, получим

$$I_{i5} \leq C \left\{ \int_0^{\Phi(1)} \left[\int_{\tau}^{\Phi(1)} \left\{ \int_0^1 ds \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t_1, r) R_i \left(\frac{t_1 - s - \rho}{r} \right) dt_1 \right]^p d\rho \right\}^{1/p} \frac{dr}{r^{2+1/p}} \right]^p \frac{d\tau}{\tau} \right\}^{1/p}.$$

Поменяв порядок интегрирования по s и ρ , применим неравенство Юнга (1.15):

$$\int_{-\infty}^1 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t_1, r) R_i \left(\frac{t_1 - \rho - s}{r} \right) dt_1 \right]^p ds \leq C r^p \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^p(t_1, r) dt_1.$$

Отсюда следует

$$I_{i5} \leq C \left\{ \int_0^{\Phi(1)} \left[\int_{\tau}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^p(t_1, r) dt_1 \right\}^{1/p} \frac{dr}{r^{1+1/p}} \right]^p d\tau \right\}^{1/p}.$$

К правой части последнего неравенства применим неравенство Харди (1.17). Получим

$$I_{i5} \leq C \left\{ \int_0^{\Phi(1)} \frac{d\tau}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^p(t_1, r) dt_1 \right\}^{1/p} \leq C \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} Y_i^p(t) \int_0^{\infty} N_i \left(\frac{t_2}{\tau} \right) \frac{d\tau}{\tau} dt \right\}^{1/p}.$$

Сделаем в интеграле по τ замену переменной $t_2/\tau = \rho$. Учитывая, что $\text{supp } N_i = \text{supp } |\mathfrak{N}_i| \subset [1/2; 1]$, имеем

$$\int_0^{\infty} N_i \left(\frac{t_2}{\tau} \right) \frac{d\tau}{\tau} = \int_0^{\infty} N_i(\rho) \frac{d\rho}{\rho} = \int_{1/2}^0 N_i(\rho) \frac{d\rho}{\rho} \leq C.$$

Тогда

$$I_{i5} \leq C \|D_i^j F\|_{L_p(P)}. \quad (3.17)$$

Из (3.14) — (3.17) следует (3.5). Из (3.5) следует

$$\langle f \rangle_\gamma \leq C \|F\|_{W_p^l(P)}.$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает

$$\langle f \rangle_\gamma \leq C \|f\|_{TW_p^l(P)}. \quad (3.18)$$

Пусть теперь функция f определена на $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1$, $f_i = f|_{\gamma_i}$, $i = 0, 1$, и $\langle f \rangle_\gamma < \infty$. Тогда $f_i \in B_{p,\varphi}^{l-1/p}(\gamma_i)$ и согласно лемме 4 существуют такие функции F_0, F_1 из $W_p^l(P)$, что $F_i|_{\gamma_i} = f_i$, $i = 0, 1$. Но тогда из (2.11) следует, что функции $f_0(x_1)$ и $f_1(x_1) = F_1(x_1, \varphi(x_1))$ можно записать в следующем виде:

$$f_0(x_1) = \beta_0(x_1) + \mathcal{R}_0(x_1), \quad (3.19)$$

$$f_1(x_1) = \sum_{r=0}^{l-1} \alpha_r(x_1) \varphi^r(x_1) + \mathcal{R}_1(x_1). \quad (3.20)$$

Из конечности $\langle f \rangle_\gamma$ следует, что

$$\rho_1 = \frac{f_1 - f_0}{\varphi} \in W_{p,\varphi}^{l-1}(0; 1).$$

Положим $\rho = \varphi^{-1}(\alpha_0 - \beta_0)$. Тогда из (3.19) и (3.20) имеем

$$\rho_1(x_1) = \rho(x_1) + \sum_{r=1}^{l-1} \alpha_r(x_1) \varphi^{r-1}(x_1) + \varphi^{-1}(x_1) [\mathcal{R}_1(x_1) - \mathcal{R}_0(x_1)].$$

Лемма 5. Для функции $\rho = \varphi^{-1}(\alpha_0 - \beta_0)$ имеют место включения

(i) $\rho \in W_{p,\varphi}^{l-1}(0; 1)$;

(ii) $\varphi \rho^{(l)} \in L_{p,\varphi}(0; 1)$.

Доказательство. (i) Положим

$$\rho_2(x_1) = \sum_{r=1}^{l-1} \alpha_r(x_1) \varphi^{r-1}(x_1) + \frac{1}{\varphi(x_1)} [\mathcal{R}_1(x_1) - \mathcal{R}_0(x_1)].$$

Тогда $\rho = \rho_1 - \rho_2$ и из лемм 1 и 2 следует, что $\rho \in W_{p,\varphi}^{l-1}(0; 1)$.

(ii). Так как $\alpha_0 - \beta_0 = \varphi \rho$, то

$$(\alpha_0 - \beta_0)^{(l-1)} = \varphi \rho^{(l-1)} + \sum_{m=0}^{l-2} C_{l-1}^m \rho^{(m)} \varphi^{(l-1-m)}.$$

Положим

$$\rho_3 = (\alpha_0 - \beta_0)^{(l-1)} - \sum_{m=0}^{l-2} C_{l-1}^m \rho^{(m)} \varphi^{(l-1-m)}.$$

Из леммы 1 и (i) следует, что $\rho_3 \in W_{p,\varphi}^1(0; 1)$ и $\varphi^{-1} \rho_3 \in L_{p,\varphi}(0; 1)$. Отсюда вытекает $\rho^{(l)} \varphi = \rho_3' - \varphi' \rho^{(l-1)} \in L_{p,\varphi}(0; 1)$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Пусть β_0, α_j ($j = 0, 1, \dots, l-1$) — функции из (3.19), (3.20), $\rho = \varphi^{-1}(\alpha_0 - \beta_0)$. Тогда

$$g_1(x) = x_2 \rho(x_1), \quad g_j(x) = \alpha_j(x_1) x_2^j \in W_p^l(P).$$

Доказательство. Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ — мультииндекс и $|\xi| \leq l$. Тогда $D^\xi g_1(x) = D_1^{\xi_1} D_2^{\xi_2} [x_2 \rho(x_1)]$ при $\xi_2 \leq 1$ и $D^\xi g_1 = 0$ при $\xi_2 > 1$. Если $\xi_2 = 0$, то $D^\xi g_1(x) = x_2 \rho^{(\xi_1)}(x_1)$. Если $\xi_2 = 1$, то $D^\xi g_1(x) = \rho^{(\xi_1)}$ и $\xi_1 \leq l-1$. Отсюда и из леммы 5 следует, что $g_1 \in W_p^l(P)$. Аналогично, используя лемму 1, показываем, что $g_j \in W_p^l(P)$, $j = 0, 1, \dots, l-1$. Лемма 6 доказана.

Из леммы 5 и (3.20) следует, что функцию f_1 можно записать в следующем виде:

$$f_1 = \beta_0 + (\alpha_1 + \rho) \varphi + \sum_{r=2}^{l-1} \alpha_r \varphi^r + \mathcal{R}_1.$$

Положим

$$H_1(x) = \beta_0(x_1) + [\alpha_1(x_1) + \rho(x_1)] x_2 + \sum_{r=2}^{l-1} \alpha_r(x_1) x_2^r.$$

Из леммы 6 следует, что $H_1 \in W_p^l(P)$. Для H_1 имеем

$$H_1|_{\gamma_0} = \beta_0, \quad H_1|_{\gamma_1} = \beta_0 + (\alpha_1 + \rho) \varphi + \sum_{r=2}^{l-1} \alpha_r \varphi^r. \quad (3.21)$$

Пусть $H_2 \in W_p^l(P)$ — продолжение $\mathcal{R}_0$ на P , $H_3 \in W_p^l(P)$ — продолжение $\mathcal{R}_1$ с γ_1 на P . Положим

$$H_4(x) = \left(1 - \frac{x_2}{\varphi(x_1)}\right) H_2(x) + \frac{x_2}{\varphi(x_1)} H_3(x). \quad (3.22)$$

Продолжения H_2 и H_3 определим следующим образом:

$$\begin{aligned} H_2(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_0(x_1 + tx_2) K(t) dt, \\ H_3(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_1(x_1 + \tau(\varphi(x_1) - x_2)) K(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Покажем, что $G(x) = x_2 \varphi^{-1}(x_1) H_3(x) \in W_p^l(P)$. Для первого слагаемого в (3.22) рассуждаем аналогично. Имеем для некоторого мультииндекса $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$

$$D^\gamma G(x) = \sum_{0 \leq \xi \leq \gamma} \frac{\xi! (\gamma - \xi)!}{\gamma!} D^\xi \left(\frac{x_2}{\varphi(x_1)} \right) D^{\gamma - \xi} H_3(x).$$

Отсюда и из (3.23) следует

$$D^{\gamma - \xi} H_3(x) = \sum_{0 \leq \alpha \leq \gamma - \xi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_1^{(|\alpha|)}(x_1 + \tau(\varphi(x_1) - x_2)) \mathcal{L}_\alpha(x, \tau) K(\tau) d\tau,$$

где $\mathcal{L}_\alpha$ — ограниченные функции.

Пусть $|\gamma| < l$. Тогда

$$D^\xi \left(\frac{x_2}{\varphi(x_1)} \right) = \frac{1}{\varphi^{\xi_1+1}(x_1)} \mathcal{E}_{\xi,1}(x),$$

где $\mathcal{E}_{\xi,1}$ — ограниченная в P функция. Таким образом,

$$\begin{aligned} D^\xi \left(\frac{x_2}{\varphi(x_1)} \right) D^{\gamma - \xi} H_3(x) &= \mathcal{E}_{\xi,1}(x) \sum_{0 \leq \alpha \leq \gamma - \xi} \varphi^{l-|\alpha|-\xi_1-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{|\alpha|-l}(x_1) \times \\ &\times \mathcal{R}_1^{(|\alpha|)}(x_1 + \tau(\varphi(x_1) - x_2)) \mathcal{L}_\alpha(x, \tau) K(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Из (1.11) следует, что $\varphi(x_1) \sim \varphi(x_1 + \tau(\varphi(x_1) - x_2))$ при $0 < x_2 < \varphi(x_1)$, $0 < \tau < 1$. Так как $l - |\alpha| - \xi_1 - 1 \geq l - |\gamma| + \xi_2 - 1 \geq 0$, то из последнего равенства получаем

$$\begin{aligned} \left| D^\xi \left(\frac{x_2}{\varphi(x_1)} \right) D^{\gamma - \xi} H_3(x) \right| &\leq C \sum_{0 \leq \alpha \leq \gamma - \xi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi^{|\alpha|-l}(x_1 + \tau(\varphi(x_1) - x_2))| \times \\ &\times \mathcal{R}_1^{(|\alpha|)}(x_1 + \tau(\varphi(x_1) - x_2)) |K(\tau)| d\tau. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Далее оценка интегралов в правой части (3.24) проводится с использованием леммы 2 так же, как и в лемме 4.

Если $|\gamma| = l$ и $|\xi| = 0$, то включение $\varphi^{-1}(x_1)x_2D^lH_3 \in L_p(P)$ следует из того, что $H_3 \in W_p^l(P)$. Если $0 < |\xi| < l$, то $0 < |\gamma - \xi| < l$ и включение

$$D^{\xi}\left(\frac{x_2}{\varphi(x_1)}\right) D^{\gamma-\xi}H_3(x) \in L_p(P)$$

доказывается так же, как и в случае $|\gamma| < l$.

Пусть $|\xi| = l$. Возможны два случая: (i) $\xi_2 = 0$, (ii) $|\xi| = l$, $\xi_2 = 1$.

(i) Имеем

$$D^{\xi}\left(\frac{x_2}{\varphi(x_1)}\right) D^{\gamma-\xi}H_3(x) = H_3(x) D^{\xi}\left(\frac{x_2}{\varphi(x_1)}\right) = H_3(x) x_2 \mathcal{E}_{\xi,2}(x_1) \varphi^{-l-1}(x_1),$$

где $\mathcal{E}_{\xi,2}$ — ограниченная на $(0; 1)$ функция. Следовательно, в этом случае

$$\left| H_3 D^{\xi}\left(\frac{x_2}{\varphi(x_1)}\right) \right| \leq C \sum_{0 < \alpha < \xi}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi^{-l}(x_1 + \tau(\varphi(x_1) - x_2)) \times \\ \times \mathcal{R}_1(x_1 + \tau\varphi(x_1) - x_2))| K(\tau) d\tau.$$

Далее оцениваем с помощью леммы 2 так же, как получали оценки в лемме 4.

(ii) Пусть $|\xi| = l$, $\xi_2 = 1$. Тогда

$$D^{\xi}\left(\frac{x_2}{\varphi(x_1)}\right) D^{\gamma-\xi}H_3(x) = H_3(x) \varphi^{-l}(x_1) \mathcal{E}_{\xi,3}(x_1),$$

где $\mathcal{E}_{\xi,3}$ — ограниченная функция. Далее рассуждаем, как и в случае (i).

Таким образом, $H_4 \in W_p^l(P)$. Полагаем $F(x) = H_1(x) + H_4(x)$. Функция F принадлежит $W_p^l(P)$ и $F|_{\gamma_0} = f_0$, $F|_{\gamma_1} = f_1$, причем

$$\|F\|_{W_p^l(P)} \leq C \langle f \rangle_{\gamma}.$$

Отсюда вытекает

$$\|f\|_{TW_p^l(P)} \leq C \langle f \rangle_{\gamma}. \quad (3.25)$$

Из (3.18) и (3.25) следует утверждение теоремы в случае области P .

§ 4. ОБЛАСТЬ С ВЕРШИНОЙ ВНУТРЕННЕГО УГЛА ИЛИ ПИКА НА ГРАНИЦЕ

В этом параграфе мы установим справедливость соотношения (см. (1.5))

$$\|f\|_{TW_p^l(V \setminus Q)} \sim \{f\}_{\partial(V \setminus Q)} = \|f\|_{\partial(V \setminus Q)}, \quad (4.1)$$

где $V = (-1; 1) \times (-1; 1)$, Q — область (1.8) с $a = 1$. Положим $D = V \setminus \bar{Q}$. Напоминаем (см. рассуждения в начале § 3), что все рассматриваемые в D и на границе ∂D функции предполагаются равными нулю вне некоторой окрестности U начала координат, такой, что $\bar{U} \subset V$. На функции φ_1 и φ_2 , определяющие границу ∂D , наложим дополнительное ограничение. Считаем, что выполняются условия

$$\max_{\tau \in [0;1]} |\varphi'_i(\tau)| \leq \delta_0 < 1, \quad i = 1, 2. \quad (4.2)$$

Условия (4.2) дают ограничение сверху на угол между кривыми (3.1) в начале координат. Условия не ограничивают общности, так как случай липшицевой границы рассмотрен в [2].

Так как множество $C^\infty(\bar{D})$ всюду плотно в $W_p^l(D)$ [9], то соотношение (4.1) достаточно доказать для бесконечно дифференцируемых функций. Это дает нам возможность рассматривать функции из $W_p^l(D)$ на линиях в D без дополнительных оговорок.

Пусть $F \in W_p^l(D) \cap C^\infty(\bar{D})$ и пусть $f = F|_{\partial D}$, $f_i = f|_{\Gamma_i}$. Функция F принадлежит классу W_p^l в областях $D \cap \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_2 < 0\}$ и $D \cap \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_2 > 0\}$. Поэтому справедливы неравенства [1]

$$\|f_i\|_{B_p^{l-1/p}(\Gamma_i)} \leq C \|F\|_{W_p^l(D)}. \quad (4.3)$$

Покажем, что

$$I_p^{l-1}(f, \Gamma) \leq C \|F\|_{W_p^l(D)}. \quad (4.4)$$

где обозначено $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Рассмотрим в D линии

$$\begin{aligned} \Gamma_3 &= \{x = (x_1, x_2) \in D: 0 < x_1 < 1, x_2 = x_1\}, \\ \Gamma_4 &= \{x = (x_1, x_2) \in D: -1 < x_1 < 0, x_2 = -x_1\}, \\ \Gamma_5 &= \{x = (x_1, x_2) \in D: -1 < x_1 < 0, x_2 = x_1\}, \\ \Gamma_6 &= \{x = (x_1, x_2) \in D: 0 < x_1 < 1, x_2 = -x_1\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

и области

$$\begin{aligned} D_1 &= \{x = (x_1, x_2) \in D: 0 < x_1 < 1, \varphi_2(x_1) < x_2 < x_1\}, \\ D_2 &= \{x = (x_1, x_2) \in D: 0 < x_2 < 1, -x_2 < x_1 < x_2\}, \\ D_3 &= \{x = (x_1, x_2) \in D: -1 < x_1 < 0, x_1 < x_2 < -x_1\}, \\ D_4 &= \{x = (x_1, x_2) \in D: -1 < x_2 < 0, x_2 < x_1 < -x_2\}, \\ D_5 &= \{x = (x_1, x_2) \in D: 0 < x_1 < 1, -x_1 < x_2 < \varphi_1(x_1)\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из $F \in W_p^l(D)$ следует $F \in W_p^l(D_j)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Положим $f_i = F|_{\Gamma_i}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Несложно заметить, что

$$I_p^{l-1}(f, \Gamma_i \cup \Gamma_{i+1}) \sim E_p^{l-1}(f, \Gamma_i \cup \Gamma_{i+1}), \quad i = 3, 4, 5.$$

Поэтому из результатов § 3 следует

$$I_p^{l-1}(f, \Gamma_i \cup \Gamma_{i+1}) \leq C \|F\|_{W_p^l(D)}. \quad (4.7)$$

Легко видеть, что

$$I_p^{l-1}(f, \Gamma_3 \cup \Gamma_4) = \sum_{m=0}^{l-1} \left\{ \int_0^1 \left| \frac{d^m}{dt^m} \left(\frac{F(-t, t) - F(t, t)}{t} \right) \right|^p t dt \right\}^{1/p}, \quad (4.8)$$

$$I_p^{l-1}(f, \Gamma_4 \cup \Gamma_5) = \sum_{m=0}^{l-1} \left\{ \int_0^1 \left| \frac{d^m}{dt^m} \left(\frac{F(-t, t) - F(-t, -t)}{t} \right) \right|^p t dt \right\}^{1/p}, \quad (4.9)$$

$$I_p^{l-1}(f, \Gamma_5 \cup \Gamma_6) = \sum_{m=0}^{l-1} \left\{ \int_0^1 \left| \frac{d^m}{dt^m} \left(\frac{F(-t, -t) - F(t, -t)}{t} \right) \right|^p t dt \right\}^{1/p}. \quad (4.10)$$

Рассмотрим $E_p^{l-1}(f, \Gamma_2 \cup \Gamma_3)$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{F(t, t) - F(t, \varphi_2(t))}{t - \varphi_2(t)} &= \frac{F(t, t) - F(t, \varphi_2(t))}{t} \left(1 - \frac{\varphi_2(t)}{t} \right)^{-1} = \\ &= \frac{F(t, t) - F(t, \varphi_2(t))}{t} \left[1 - \int_0^1 \varphi_2'(st) ds \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

С другой стороны,

$$\frac{F(t, t) - F(t, \varphi_2(t))}{t} = \frac{F(t, t) - F(t, \varphi_2(t))}{t - \varphi_2(t)} \left[1 - \int_0^1 \varphi_2'(st) ds \right]. \quad (4.12)$$

Из (4.11), (4.12) и того, что, ввиду (4.2), производные функций

$[1 - t^{-1}\varphi_2(t)]^{-1}$, $[1 - t^{-1}\varphi_2(t)]$ до порядка $l-1$ включительно ограничены, следует

$$E_p^{l-1}(f, \Gamma_2 \cup \Gamma_3) \sim I_p^{l-1}(f, \Gamma_2 \cup \Gamma_3). \quad (4.13)$$

Аналогично проверяется, что

$$E_p^{l-1}(f, \Gamma_6 \cup \Gamma_1) \sim I_p^{l-1}(f, \Gamma_6 \cup \Gamma_1). \quad (4.14)$$

Из (4.13), (4.14) и результатов § 3 следует, что неравенство (4.7) справедливо для $i = 1, \dots, 6$, если положить $f_7 = f_1$, $\Gamma_7 = \Gamma_1$. Так как

$$F(t, \varphi_2(t)) - F(t, \varphi_1(t)) = [F(t, \varphi_2(t)) - F(t, t)] + [F(t, t) - F(-t, t)] + \\ + [F(-t, t) - F(-t, -t)] + [F(-t, -t) - F(t, -t)] + [F(t, -t) - F(t, \varphi_1(t))],$$

то в силу (4.7) следует

$$I_p^{l-1}(f, \Gamma_1 \cup \Gamma_2) \leq C \|F\|_{W_p^l(D)}.$$

Отсюда, в свою очередь, ввиду (4.3) вытекает оценка

$$\{f\}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \leq C \|F\|_{W_p^l(D)}. \quad (4.15)$$

Пусть теперь на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ задана функция f . Положим $f_i = f|_{\Gamma_i}$, $i = 1, 2$, и пусть $\{f\}_{\Gamma} < \infty$. Поскольку $f_2 \in B_p^{l-1/p}(\Gamma_2)$, то существует [1] функция $F_1 \in W_p^l(D_1)$ такая, что $F_1|_{\Gamma_1} = f_2$, причем

$$\|F_1\|_{W_p^l(D_1)} \leq C \|f_2\|_{B_p^{l-1/p}(\Gamma_2)} \leq C \{f\}_{\Gamma}. \quad (4.16)$$

В (4.16) область D_1 определена в (4.6). Рассмотрим на Γ_3 (см. (4.5)) функции $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{l-1}$:

$$\mu_i = \frac{\partial^i F}{\partial n^i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, l-1,$$

где $\bar{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Γ_3 . Продолжим [1] функции μ_i на всю диагональ $\{x_1 = x_2\}$ квадрата V так, что для продолженных функций, которые мы будем также обозначать через μ_i , будет выполняться

$$\sum_{i=0}^{l-1} \|\mu_i\|_{B_p^{l-\frac{1}{p}-i}(\bar{\Gamma}_3 \cup \Gamma_5)} \leq C \sum_{i=0}^{l-1} \|\mu_i\|_{B_p^{l-\frac{1}{p}-i}(\Gamma_3)}. \quad (4.17)$$

Тогда в силу известных теорем о следах [1] и из (4.16) получаем

$$\sum_{i=0}^{l-1} \|\mu_i\|_{B_p^{l-\frac{1}{p}-i}(\bar{\Gamma}_3 \cup \Gamma_5)} \leq C \|F_1\|_{W_p^l(D_1)} \leq C \{f\}_{\Gamma}. \quad (4.18)$$

Из [2] следует, что существует функция $F_2 \in W_p^l(D_4 \cup D_5 \cup D_6)$ такая, что

$$\frac{\partial^i F_2}{\partial n^i} \Big|_{\Gamma_5} = \mu_i, \quad i = 0, 1, \dots, l-1, \quad F_2|_{\Gamma_1} = f_1, \quad (4.19)$$

и (ввиду результатов [2], а также вследствие (4.18))

$$\|F_2\|_{W_p^l(D_4 \cup \Gamma_6 \cup D_5)} \leq C \{f\}_{\Gamma}. \quad (4.20)$$

Рассмотрим функцию $F_3 \in W_p^l(D_2 \cup \Gamma_4 \cup D_3)$ такую, что

$$\frac{\partial^i F_3}{\partial n^i} \Big|_{\Gamma_3 \cup \bar{\Gamma}_5} = \mu_i, \quad i = 0, 1, \dots, l-1, \\ \|F_3\|_{W_p^l(D_3 \cup \Gamma_4 \cup D_2)} \leq C \{f\}_{\Gamma}.$$

Тогда в силу свойства аддитивности пространства Соболева [10] функция F , равная F_1 в D_1 , F_2 в $D_4 \cup \Gamma_6 \cup D_5$ и F_3 в $D_3 \cup \Gamma_4 \cup D_2$, будет принад-

лежать пространству $W_p^l(D)$ и для нее справедлива оценка

$$\|F\|_{W_p^l(D)} \leq C \{f\}_\Gamma. \quad (4.21)$$

Из (4.15) и (4.21) следует (4.1). Из результатов § 3—4 следует справедливость теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975. — 480 с.
2. Яковлев Г. Н. Граничные свойства функций класса $W_p^{(l)}$ на областях с угловыми точками // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 140, № 1. — С. 73—76.
3. Никольский С. М. Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками. I — III // Мат. сб.: I. — 1956. — Т. 48 82, № 3. — С. 303—318; II. — 1957. — Т. 44 86. — С. 127—144; III. — 1958. — Т. 45 87. — С. 181—194.
4. Marshall J. The trace of Sobolev — Slobodeckij spaces on Lipschitz domains // Manuscr. math. — 1987. — Vol. 58, N 1/2. — P. 47—65.
5. Яковлев Г. Н. Задача Дирихле для областей с нелипшицевой границей // Дифференц. уравнения. — 1965. — Т. 1, № 8. — С. 1085—1098.
- Мазья В. Г., Поборчий С. В. О следах функций с суммируемым градиентом в области с вершиной пика на границе // Мат. заметки. — 1989. — Т. 45, № 1. — С. 57—65.
7. Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полла Г. Неравенства. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.
8. Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984. — 224 с.
9. Мазья В. Г. Пространства Соболева. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. — 416 с.
10. Буренков В. И. Об аддитивности классов $W_p^{(r)}(\Omega)$ // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1967. — Т. 89. — С. 31—35.

В. М. ГОЛЬДШТЕЙН, В. И. КУЗЬМИНОВ, И. А. ШВЕДОВ

К ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЧИГЕРА О L_p -КОГОМОЛОГИЯХ КОНУСА

Посвящается А. Д. Александрову

Чигер в [1] доказал существование невырожденного спаривания между гомологиями Горески-Мак-Ферсена компактного псевдомногообразия и его L_2 -когомологиями. В основе доказательства невырожденности этого спаривания лежат вычисления L_2 -когомологий конуса. Результаты Чигера о L_2 -когомологиях конуса были обобщены в [2] на случай L_p -когомологий. В [2] и [4] изучались L_p -когомологии искривленных цилиндров, т. е. многообразий $[a, b) \times X$ с римановой метрикой вида $(dt)^2 + f^2(t)(dx)^2$, где $(dx)^2$ — риманова метрика на многообразии X .

В настоящей работе на основе результатов из [3] и [4] вычислены L_p -когомологии искривленного цилиндра в том случае, когда f — монотонная функция, а полуинтервал $[a, b)$ ограничен. Полученные результаты позволяют доказать нормальную разрешимость оператора внешнего дифференцирования $d: W_p^{k-1}(M) \rightarrow W_p^k(M)$ для компактного риманова многообразия M с изолированными особенностями в том случае, когда метрика этого многообразия в окрестности каждой особенности эквивалентна метрике искривленного цилиндра с ограниченным полуинтервалом $[a, b)$ и монотонной функцией f . Требования ограниченности полуинтервала $[a, b)$ и монотонности функции f существенны.

Всюду в дальнейшем

X — гладкое n -мерное риманово многообразие, $1 \leq n$, $-\infty < a < b \leq \infty$,
 f — непрерывная положительная функция на $[a, b)$, $m = m(n, p, k) = n/p - k + 1$,

$$p' = p/(p-1), \quad k' = n+1-k, \quad \Gamma_f = \left\{ \gamma \in \mathbf{R} \mid \int_a^b f^\gamma(t) dt < \infty \right\},$$

$$\Delta_f = \{ \alpha \in \mathbf{R} \mid n - \alpha p \in \Gamma_f \}, \quad \Delta'_f = \{ \alpha \in \mathbf{R} \mid n - \alpha' p' \in \Gamma_f \},$$