

лежать пространству $W_p^l(D)$ и для нее справедлива оценка

$$\|F\|_{W_p^l(D)} \leq C \{f\}_\Gamma. \quad (4.21)$$

Из (4.15) и (4.21) следует (4.1). Из результатов § 3—4 следует справедливость теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975. — 480 с.
2. Яковлев Г. Н. Граничные свойства функций класса $W_p^{(l)}$ на областях с угловыми точками // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 140, № 1. — С. 73—76.
3. Никольский С. М. Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками. I — III // Мат. сб.: I. — 1956. — Т. 48 82, № 3. — С. 303—318; II. — 1957. — Т. 44 86. — С. 127—144; III. — 1958. — Т. 45 87. — С. 181—194.
4. Marshall J. The trace of Sobolev — Slobodeckij spaces on Lipschitz domains // Manuscr. math. — 1987. — Vol. 58, N 1/2. — P. 47—65.
5. Яковлев Г. Н. Задача Дирихле для областей с нелипшицевой границей // Дифференц. уравнения. — 1965. — Т. 1, № 8. — С. 1085—1098.
- Мазья В. Г., Поборчий С. В. О следах функций с суммируемым градиентом в области с вершиной пика на границе // Мат. заметки. — 1989. — Т. 45, № 1. — С. 57—65.
7. Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полла Г. Неравенства. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.
8. Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984. — 224 с.
9. Мазья В. Г. Пространства Соболева. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. — 416 с.
10. Буренков В. И. Об аддитивности классов $W_p^{(r)}(\Omega)$ // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1967. — Т. 89. — С. 31—35.

В. М. ГОЛЬДШТЕЙН, В. И. КУЗЬМИНОВ, И. А. ШВЕДОВ

К ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЧИГЕРА О L_p -КОГОМОЛОГИЯХ КОНУСА

Посвящается А. Д. Александрову

Чигер в [1] доказал существование невырожденного спаривания между гомологиями Горески-Мак-Ферсена компактного псевдомногообразия и его L_2 -когомологиями. В основе доказательства невырожденности этого спаривания лежат вычисления L_2 -когомологий конуса. Результаты Чигера о L_2 -когомологиях конуса были обобщены в [2] на случай L_p -когомологий. В [2] и [4] изучались L_p -когомологии искривленных цилиндров, т. е. многообразий $[a, b) \times X$ с римановой метрикой вида $(dt)^2 + f^2(t)(dx)^2$, где $(dx)^2$ — риманова метрика на многообразии X .

В настоящей работе на основе результатов из [3] и [4] вычислены L_p -когомологии искривленного цилиндра в том случае, когда f — монотонная функция, а полуинтервал $[a, b)$ ограничен. Полученные результаты позволяют доказать нормальную разрешимость оператора внешнего дифференцирования $d: W_p^{k-1}(M) \rightarrow W_p^k(M)$ для компактного риманова многообразия M с изолированными особенностями в том случае, когда метрика этого многообразия в окрестности каждой особенности эквивалентна метрике искривленного цилиндра с ограниченным полуинтервалом $[a, b)$ и монотонной функцией f . Требования ограниченности полуинтервала $[a, b)$ и монотонности функции f существенны.

Всюду в дальнейшем

X — гладкое n -мерное риманово многообразие, $1 \leq n$, $-\infty < a < b \leq \infty$, f — непрерывная положительная функция на $[a, b)$, $m = m(n, p, k) = n/p - k + 1$,

$$p' = p/(p-1), \quad k' = n+1-k, \quad \Gamma_f = \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \mid \int_a^b f^\gamma(t) dt < \infty \right\},$$

$$\Delta_f = \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid n - \alpha p \in \Gamma_f \}, \quad \Delta'_f = \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid n - \alpha' p' \in \Gamma_f \},$$

$C_{a,b}^f X$ — цилиндр $[a, b) \times X$ с метрикой $(dt)^2 + f^2(t)(dx)^2$, $X_a = \{a\} \times X$,

$\pi: C_{a,b}^f X \rightarrow X$ — проекция цилиндра на его основание,

$W_p^h(M)$ — пространство дифференциальных форм ω степени k на римановом многообразии M , для которых

$$\|\omega: W_p^h(M)\| = \left\{ \int_M (|\omega(x)|^p + |d\omega(x)|^p) dx \right\}^{1/p} < \infty,$$

$H_p^h(M)$ — топологическое векторное пространство k -мерных когомологий банахова коцепного комплекса $\{W_p^*(M), d\}$,

$(H_p^h(M))_0$ — замыкание нуля в $H_p^h(M)$, $\bar{H}_p^h(M)$ — банахово пространство $H_p^h(M)/(H_p^h(M))_0$,

$i^*: H_p^h(C_{a,b}^f X) \rightarrow H_p^h(X)$, $j^*: H_p^h(C_{a,b}^f X, X_a) \rightarrow H_p^h(C_{a,b}^f X)$ — отображения, индуцированные вложениями $i: X_a \rightarrow X$ и $j: (C_{a,b}^f X, \emptyset) \rightarrow (C_{a,b}^f X, X_a)$.

В [3] доказана точность когомологической последовательности

$$\dots \rightarrow H_p^{h-1}(X) \xrightarrow{\partial} H_p^h(C_{a,b}^f X, X_a) \xrightarrow{j^*} H_p^h(C_{a,b}^f X) \xrightarrow{i^*} H_p^h(X) \rightarrow \dots \quad (1)$$

Отображения ∂ , j^* и i^* непрерывны.

$$B(\alpha, \beta, v) = \sup_{t \in (\alpha, \beta)} \left\{ \left[\int_t^\beta v^p(\tau) d\tau \right]^{1/p} \left[\int_\alpha^t v^{-p'}(\tau) d\tau \right]^{1/p'} \right\}.$$

Нам будут нужны следующие результаты из [3] и [4]:

(А) Если $k \in \Delta_f$, то отображение $i^*: H_p^h(C_{a,b}^f X) \rightarrow H_p^h(X)$ сюръективно; если $k \in \Delta_f$ и $B(a, b, f^m) < \infty$, то это отображение i^* является изоморфизмом топологических векторных пространств.

(В) Если $B(a, b, f^m) < \infty$, то $H_p^h(C_{a,b}^f X, X_a) = 0$.

(С) Если $B(b, a, f^m) < \infty$, $k \notin \Delta_f$, то $H_p^h(C_{a,b}^f X) = 0$.

(D) Если $B(a, b, f^m) < \infty$, $k \notin \Delta_f$ и $(H_p^h(X))_0 = 0$, то $H_p^h(C_{a,b}^f X) = 0$.

Лемма 1. Пусть полуинтервал $[a, b)$ ограничен, f — положительная непрерывная монотонная функция на $[a, b)$. Тогда условия $B(a, b, f^m) < \infty$ и $k \in \Delta_f + 1$ эквивалентны, условия $B(b, a, f^m) < \infty$ и $k \in \Delta_f'$ также эквивалентны.

Доказательство. Пусть $k \in \Delta_f + 1$, т. е. $\int_a^b f^{mp}(t) dt < \infty$. Предположим сначала, что f^m — неубывающая функция. Тогда

$$\begin{aligned} B(a, b, f^m) &= \sup_{t \in (a, b)} \left\{ \left[\int_t^b f^{mp}(\tau) d\tau \right]^{1/p} \left[\int_a^t f^{-mp'}(\tau) d\tau \right]^{1/p'} \right\} \leq \\ &\leq \left[\int_a^b f^{mp}(\tau) d\tau \right]^{1/p} (b-a)^{1/p'} f^{-m}(a) < \infty. \end{aligned}$$

Пусть теперь f^m — невозрастающая функция. Тогда

$$B(a, b, f^m) \leq \sup_{t \in (a, b)} \{(b-t)^{1/p} f^m(t) (t-a)^{1/p'} f^{-m}(t)\} \leq b-a.$$

Итак, из условия $k \in \Delta_f + 1$ вытекает условие $B(a, b, f^m) < \infty$. Обратное следование очевидно. Эквивалентность другой пары условий доказывается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $(H_p^h(C_{a,b}^f X))_0 = H_p^{h-1}(C_{a,b}^f X) = 0$. Тогда $\partial: H_p^{h-1}(X) \rightarrow H_p^h(C_{a,b}^f X, X_a)$ — топологическое вложение.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} H_p^{k-1}(C_{a,b}^f X) & \xrightarrow{i^*} & H_p^{k-1}(X) & \xrightarrow{\partial} & H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a) & \xrightarrow{j^*} & H_p^k(C_{a,b}^f X) \\ \downarrow & & \downarrow q & & \downarrow q & & \downarrow \\ \bar{H}_p^{k-1}(C_{a,b}^f X) & \xrightarrow{\bar{i}^*} & \bar{H}_p^{k-1}(X) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \bar{H}_p^k(C_{a,b}^f X, X_a) & \xrightarrow{\bar{j}^*} & \bar{H}_p^k(C_{a,b}^f X) \end{array}, \quad (2)$$

вертикальные стрелки которой — канонические проекции на фактор-пространства. Так как $(H_p^k(C_{a,b}^f X))_0 = H_p^{k-1}(C_{a,b}^f X) = 0$, то по теореме 1 работы [3] нижняя строка диаграммы (2) точна. Следовательно, подпространство $\bar{\partial}(H_p^{k-1}(X))$ замкнуто в $\bar{H}_p^k(C_{a,b}^f X, X_a)$ и поэтому является банаховым пространством. По теореме Банаха отображение $\bar{\partial}$ открыто. Точность нижней строки диаграммы (2) в члене $\bar{H}_p^{k-1}(X)$ эквивалентна точности последовательности

$$(H_p^{k-1}(X))_0 \rightarrow (H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a))_0 \xrightarrow{j^*} (H_p^k(C_{a,b}^f X))_0.$$

Так как $(H_p^k(C_{a,b}^f X))_0 = 0$, то ∂ переводит $(H_p^{k-1}(X))_0$ на $(H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a))_0$.

Пусть U — открытая окрестность нуля в $H_p^{k-1}(X)$. Так как $(H_p^{k-1}(X))_0 \subset U$ и $\partial((H_p^{k-1}(X))_0) = (H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a))_0$, то $\partial(U) = q^{-1}\bar{\partial}q(U)$. Так как канонические проекции открыты и непрерывны, а $\bar{\partial}$ — топологическое вложение, то множество $\partial(U)$ открыто в $\partial(H_p^{k-1}(X)) \subset H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a)$. Тем самым инъективное непрерывное отображение ∂ переводит пространство $H_p^{k-1}(X)$ гомеоморфно на подпространство пространства $H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a)$. Лемма доказана.

Если f — монотонная функция, то множество Γ_f либо совпадает со всей прямой, либо является лучом. Луч Γ_f может быть как открытым, так и замкнутым. Ясно, что то же самое выполнено и для множеств Δ_f и Δ'_f .

Лучи Δ_f и Δ'_f противоположно направлены: луч Δ_f направлен влево на числовой прямой, если f — невозрастающая функция, и вправо, если f — неубывающая функция.

Для ограниченного полуинтервала $[a, b)$ имеем $0 \in \Gamma_f$. Поэтому $n/p \in \Delta_f$ и $n/p + 1 \in \Delta'_f$. Для монотонной f $(\Delta_f + 1) \cup \Delta'_f = \mathbb{R}$. Если f — монотонная невозрастающая функция, то $\mathbb{R} \setminus (\Delta_f \cup \Delta'_f) \subset (n/p, n/p + 1)$. В этом случае единственным целым числом, которое может лежать в $\mathbb{R} \setminus (\Delta_f \cup \Delta'_f)$, является число $[n/p] + 1$.

Если f — монотонная неубывающая функция, то

$$\begin{aligned} (\Delta_f \setminus (\Delta_f + 1)) \cap \Delta'_f &= \Delta_f \cap (\mathbb{R} \setminus (\Delta_f + 1)) \cap \Delta'_f = \\ &= \Delta_f \cap (\mathbb{R} \setminus (\Delta_f + 1)) = \Delta_f \setminus (\Delta_f + 1). \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть полуинтервал $[a, b)$ ограничен и f — монотонная невозрастающая функция на $[a, b)$. Тогда

1) отображение $i^*: H_p^k(C_{a,b}^f X) \rightarrow H_p^k(X)$ является изоморфизмом топологических векторных пространств, если $k \in \Delta_f$;

$$H_p^k(C_{a,b}^f X) = 0, \text{ если } k \in \Delta'_f \setminus \Delta_f;$$

$$H_p^k(C_{a,b}^f X) = 0, \text{ если } k \in \mathbb{R} \setminus (\Delta_f \cup \Delta'_f), \quad (H_p^k(X))_0 = 0;$$

2) $H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a) = 0$, если $k \in \Delta_f + 1$; отображение $\partial: H_p^{k-1}(X) \rightarrow H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a)$ является изоморфизмом топологических векторных пространств, если $k - 1 \in \Delta'_f \setminus \Delta_f$.

Если $k-1 \in \mathbf{R} \setminus (\Delta_f \cup \Delta'_f)$ и $(H_p^{k-1}(X))_0 = 0$, то отображение $\partial: H_p^{k-1}(X) \rightarrow H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a)$ является изоморфизмом топологических векторных пространств.

Доказательство. Пусть $k \in \Delta_f$. Так как луч Δ_f направлен влево, то $k-1 \in \Delta_f$. По лемме 1 $B(a, b, f^m) < \infty$. По утверждению (A) i^* — изоморфизм топологических векторных пространств.

Пусть $k \in \Delta'_f \setminus \Delta_f$. По лемме 1 $B(b, a, f^m) < \infty$. По утверждению (C) $H_p^k(C_{a,b}^f X) = 0$.

Пусть $k \in \mathbf{R} \setminus (\Delta_f \cup \Delta'_f)$ и $(H_p^k(X))_0 = 0$. Так как $(\Delta_f + 1) \cup \Delta'_f = \mathbf{R}$, то $k \in \Delta_f + 1$. По лемме 1 $B(a, b, f^m) < \infty$. По утверждению (D) $H_p^k(C_{a,b}^f X) = 0$.

2) Пусть $k \in \Delta_f + 1$. По лемме 1 $B(a, b, f^m) < \infty$. По утверждению (B) $H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a) = 0$.

Пусть $k-1 \in \Delta'_f \setminus \Delta_f$. Тогда $k, k-1 \in \Delta'_f$. По лемме 1 $B(b, a, f^m) < \infty$ и $B(b, a, f^{m+1}) < \infty$. По утверждению (C) $H_p^k(C_{a,b}^f X) = H_p^{k-1}(C_{a,b}^f X) = 0$. По лемме 2 $H_p^{k-1}(X) \rightarrow H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a)$ — изоморфизм топологических векторных пространств.

Пусть $k-1 \in \mathbf{R} \setminus (\Delta_f \cup \Delta'_f)$ и $(H_p^{k-1}(X))_0 = 0$. Тогда $k \in \Delta'_f \setminus \Delta_f$. По доказанному п. 1) теоремы $H_p^k(C_{a,b}^f X) = H_p^{k-1}(C_{a,b}^f X) = 0$. По лемме 2 ∂ — изоморфизм топологических векторных пространств. Теорема доказана.

В доказательстве следующей теоремы нам понадобится оператор S_c из [3]. Пусть ω — форма на $C_{a,b}^f X$. Представим ее в виде $\omega = \omega_A + dt \wedge \omega_B$, где ω_A, ω_B — формы, не содержащие dt . Тогда для $c \in [a, b]$

$$S_c \omega = \int_c^t \omega_B(\tau) d\tau.$$

Теорема 2. Пусть полуинтервал $[a, b)$ ограничен, f — монотонная неубывающая функция на $[a, b)$. Тогда:

1) если $k \notin \Delta_f$, то $H_p^k(C_{a,b}^f X) = 0$ и отображение $\partial: H_p^{k-1}(X) \rightarrow H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a)$ является изоморфизмом топологических векторных пространств;

2) если $k \in \Delta_f + 1$, то $H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a) = 0$ и отображение $i^*: H_p^k(C_{a,b}^f X) \rightarrow H_p^k(X)$ является изоморфизмом топологических векторных пространств;

3) если $k \in \Delta_f \setminus (\Delta_f + 1)$, $k \neq 0$, то $\dim H_p^k(C_{a,b}^f X) = \dim H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a) = \infty$, отображение $i^*: H_p^k(C_{a,b}^f X) \rightarrow H_p^k(X)$ — открытое сюръективное, но не инъективное отображение, отображение $\partial: H_p^{k-1}(X) \rightarrow H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a)$ является топологическим вложением, но не сюръективно.

Доказательство. 1) Пусть $k \notin \Delta_f + 1$. Тогда $k-1, k \in \Delta'_f$. По лемме 1 $B(b, a, f^m) < \infty$ и $B(b, a, f^{m+1}) < \infty$. По утверждению (C) $H_p^{k-1}(C_{a,b}^f X) = 0$ и $H_p^k(C_{a,b}^f X) = 0$, если $k \notin \Delta_f$. По лемме 2 отображение $\partial: H_p^{k-1}(X) \rightarrow H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a)$ — топологический изоморфизм при $k \notin \Delta_f$.

2) Пусть $k \in \Delta_f + 1$. По лемме 1 $B(a, b, f^m) < \infty$ и по утверждению (B) $H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a) = 0$, а по утверждению (A) i^* — изоморфизм топологических векторных пространств.

Для доказательства п. 3 нам понадобятся две следующие леммы.

Лемма 3. Пусть $k \in (\Delta_f \setminus (\Delta_f + 1)) \cap (\Delta'_f + 1)$. Тогда для любой ненулевой замкнутой формы $\omega \in W_p^h(X)$ форма $\pi^* \omega$ задает ненулевой элемент в $H_p^k(C_{a,b}^f X)$.

Доказательство. Пусть $\omega \in W_p^h(X)$, $d\omega = 0$. Так как $k \in \Delta_f$, то по формуле (2) из работы [3] заключаем, что $\pi^* \omega \in L_p^h(C_{a,b}^f X)$. Предпо-

ложим, что $\pi^*\omega = d\psi$, где $\psi \in W_p^{k-1}(C_{a,b}^f X)$. Для каждого $c \in (a, b)$ имеем $S_c d\psi = S_c \pi^*\omega = 0$, так как $(\pi^*\omega)_b = 0$. По леммам 3 и 8 работы [3] $\psi = d \lim_{c \rightarrow b} S_c \psi + \lim_{c \rightarrow b} S_c d\psi = dS_c \psi$. Следовательно, $\pi^*\omega = d\psi = 0$. Отсюда $\omega = 0$. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $k-1 \in \Delta_f' \setminus \Delta_f$ и $B(b, a, f^m) < \infty$. Тогда $(H_p^k(C_{a,b}^f X))_0 = 0$.

Доказательство. Пусть $\omega \in W_p^k(C_{a,b}^f X)$, $d\omega = 0$, $\psi_j \in W_p^{k-1}(C_{a,b}^f X)$, $d\psi_j \rightarrow \omega$ в $W_p^k(C_{a,b}^f X)$ при $j \rightarrow \infty$. По лемме 3 и 8 из [3] $\psi_j = dS_b \psi_j + S_b d\psi_j$. Поэтому $d\psi_j = dS_b d\psi_j$. По лемме 4 из [3] $\lim_{j \rightarrow \infty} S_b d\psi_j = S_b \omega \in L_p^{k-1}(C_{a,b}^f X)$. Так как $\lim_{j \rightarrow \infty} dS_b d\psi_j = \lim_{j \rightarrow \infty} d\psi_j = \omega$, то $dS_b \omega = \omega$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 2. Как было отмечено выше, для неубывающей функции f и ограниченного полуинтервала $[a, b)$ имеем $(\Delta_f \setminus (\Delta_f + 1)) \cap \Delta_f' = \Delta_f' \setminus (\Delta_f + 1)$. Так как $\Delta_f' \subset \Delta_{f+1}'$, то $(\Delta_f \setminus (\Delta_f + 1)) \cap (\Delta_f' + 1) = \Delta_f' \setminus (\Delta_f + 1)$. Пусть $k > 0$, $k \in \Delta_f' \setminus (\Delta_f + 1)$. Обозначим через Z векторное пространство замкнутых форм из $W_p^k(X)$, а через B — его подпространство $d(W_p^{k-1}(X))$. Из условия $k \notin \Delta_f + 1$ следует, что $k \leq n$. Так как при этом по предположению $k > 0$, то оба пространства Z и B бесконечномерны. По лемме 3 проекция $\pi: C_{a,b}^f X \rightarrow X$ индуцирует инъективное отображение $\pi^*: Z \rightarrow H_p^k(C_{a,b}^f X)$. Так как $i^*\pi^*(B) = 0$, то $\pi^*(B) \subset j^*(H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a))$. Из этого следует, что $\dim H_p^k(C_{a,b}^f X) = \dim H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a) = \infty$, отображение $i^*: H_p^k(C_{a,b}^f X) \rightarrow H_p^k(X)$ не инъективно, а $\partial: H_p^{k-1}(X) \rightarrow H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a)$ не сюръективно.

Обозначим через Z_1 подпространство замкнутых форм в $W_p^k(C_{a,b}^f X)$. Вложение $X_a \subset C_{a,b}^f X$ индуцирует сюръективное отображение $i^*: Z_1 \rightarrow Z$. По теореме Банаха оно открыто. Поэтому открыто и отображение $i^*: H_p^k(C_{a,b}^f X) \rightarrow H_p^k(X)$.

В доказательстве п. 1 было установлено, что $H_p^{k-1}(C_{a,b}^f X) = 0$. По лемме 4 $(H_p^k(C_{a,b}^f X))_0 = 0$. По лемме 2 отображение $\partial: H_p^{k-1}(X) \rightarrow H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a)$ является топологическим вложением. Теорема доказана.

В теореме 2 не рассмотрен случай, когда $k = 0 \in \Delta_f' \setminus (\Delta_f + 1)$. Так как нульмерные коциклы комплекса $\{W_p^*(C_{a,b}^f X), d\}$ являются локально постоянными функциями, то $H_p^0(C_{a,b}^f X, X_a) = 0$, а $H_p^0(C_{a,b}^f X) = 0$ тогда и только тогда, когда $0 \notin \Delta_f$. Если $0 \in \Delta_f$, то $\dim H_p^0(C_{a,b}^f X)$ совпадает с числом компонент связности многообразия X , при этом $(H_p^0(C_{a,b}^f X))_0 = 0$.

Теорема 3. Если полуинтервал $[a, b)$ ограничен, функция f монотонна, $(H_p^k(X))_0 = (H_p^{k-1}(X))_0 = 0$, то $(H_p^k(C_{a,b}^f X))_0 = (H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a))_0 = 0$.

Доказательство. Если f — неубывающая функция, а $k \in \Delta_f' \setminus (\Delta_f + 1)$, то по лемме 4 $(H_p^k(C_{a,b}^f X))_0 = 0$. Так как $j^*((H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a)))_0 \subset (H_p^k(C_{a,b}^f X))_0$, то $(H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a))_0 \subset \partial(H_p^{k-1}(X))$. По теореме 2 ∂ отображает $H_p^{k-1}(X)$ на $\partial(H_p^{k-1}(X))$ гомеоморфно. Поэтому $(H_p^k(C_{a,b}^f X, X_a))_0 = 0$, если $(H_p^{k-1}(X))_0 = 0$.

Во всех остальных случаях утверждения теоремы 3 очевидным образом следуют из теорем 1 и 2. Теорема доказана.

Ограниченный линейный оператор $T: X \rightarrow Y$, действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y , называется *нормально разрешимым оператором*, если подпространство $T(X)$ замкнуто в Y . Непосредственно из определений следует, что оператор внешнего дифференцирования $d: W_p^{k-1}(M) \rightarrow W_p^k(M)$ нормально разрешим в том и только том случае, когда $(H_p^k(M))_0 = 0$. Если M компактно, то $(H_p^k(M))_0 = 0$

(см. [2]). Поэтому из теоремы 3 следует нормальная разрешимость оператора d на искривленном цилиндре $C_{a,b}^f X$, в том случае, когда многообразие X компактно, полуинтервал $[a, b)$ ограничен, а функция f монотонна. Этот результат может быть обобщен. Пусть M — гладкое $(n+1)$ -мерное многообразие. Пусть $\{X_i\}$ — конечная система гладких компактных n -мерных попарно не пересекающихся подмногообразий края ∂M многообразия M . Для каждого X_i рассмотрим цилиндр $[0, 1) \times X_i$ и приклеим его к многообразию M по тождественному отображению основания $\{0\} \times X_i$ цилиндра. Применяя к полученному в результате приклеиваний многообразию M_1 процедуру сглаживания углов, зададим на M_1 структуру гладкого многообразия, совпадающую на M с имеющейся там структурой. Выберем гладкие положительные функции f_i на $[0, 1)$ и зададим на M_1 какую-нибудь риманову метрику, эквивалентную метрике искривленного цилиндра $C_{1/2,1}^f$ на каждом цилиндре $[1/2, 1) \times X_i$. Будем говорить, что риманово многообразие M_1 получено из M приклеиванием искривленных цилиндров с функциями f_i .

Теорема 4. Пусть риманово многообразие M_1 получено из компактного многообразия M приклеиванием искривленных цилиндров с монотонными функциями f_i . Тогда оператор внешнего дифференцирования $d: W_p^{k-1}(M_1) \rightarrow W_p^k(M_1)$ нормально разрешим для любого k .

Доказательство. Обозначим через M_0 подмногообразие $M \cup \left(\bigcup_i ([0, 1/2] \times X_i) \right)$ многообразия M_1 . Это многообразие компактно. Поэтому его L_p -когомологии совпадают с обычными сингулярными и, следовательно, конечномерны. Множество M_0 имеет липшицеву границу в M_1 (см. [3]), и поэтому имеется точная последовательность банаховых комплексов

$$0 \rightarrow W_p^*(M_1, M_0) \rightarrow W_p^*(M_1) \rightarrow W_p^*(M_0) \rightarrow 0.$$

Так как $W_p^*(M_1, M_0) = \sum_i W_p^*(C_{1/2,1}^{f_i} X_i, X_i)$, то дифференциалы в комплексе $W_p^*(M_1, M_0)$ нормально разрешимы. По замечанию 1 из работы [5] дифференциалы d комплекса $W_p^*(M_1)$ нормально разрешимы. Теорема доказана.

Покажем теперь, что предположения об ограниченности полуинтервала $[a, b)$ и монотонности функции f существенны. Пусть $a=1$, $b=\infty$, $\bar{H}_p^{k-1}(X) \neq 0$, функция f на $[1, \infty)$ такова, что $B(a, b, f^m) = B(b, a, f^m) = \infty$. Можно взять, например, функцию $f(t) = t$. По теореме 1 из [4] $H_p^k(C_{1,\infty}^f X)_0 \neq 0$.

Пусть полуинтервал $[a, b)$ ограничен, а функция f на $[a, b)$ такова, что множество Γ_f ограничено. В этом случае для любого p можно так выбрать целые числа $k > 0$ и n , что будет выполняться условие $k \notin (\Delta_f + 1) \cup \Delta_f'$.

Пусть X — такое n -мерное многообразие, что $\bar{H}_p^{k-1}(X) \neq 0$. Тогда по теореме 1 из [4] $(H_p^k(C_{a,b}^f X))_0 \neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cheeger J. On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds // Proc. Symp. Math.— 1980.— Vol. 36.— P. 91—146.
2. Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А. L_p -когомологии римановых многообразий // Исследования по геометрии и математическому анализу.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987.— С. 101—116.
3. Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А. Редуцированные L_p -когомологии искривленных цилиндров // Сиб. мат. журн.— 1990.— Т. 31, № 5.— С. 10—23.
4. Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А. L_p -когомологии искривленных цилиндров // Там же.— № 6.— С. 55—63.
5. Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А. О нормальной и компактной разрешимости линейных операторов // Там же.— 1989.— Т. 30, № 5.— С. 49—59.