А. В. ЛЕВИЧЕВ

ТРИ ПОЛНОСТЬЮ ИСКАЖЕННЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ЛОРЕНЦЕВЫ ПРОСТРАНСТВА

Александру Даниловичу — к юбилею

Предлагаемая работа относится к однородной хроногеометрии, именно — посвящена исследованию причинной структуры и некоторых других характеристик нескольких конкретных левоинвариантных лоренцевых метрик на четырехмерных группах Ли (те используемые в работе определения и понятия, которые в тексте не приводятся, имеются, например, в [1. 2]).

Лоренцево пространство M называется *полностью искаженным* [1], если хронологическое будущее I_x^+ каждой точки $x \in$ совпадает со всем M.

Все рассматриваемые в данной работе лоренцевы пространства получены введением левоинвариантных лоренцевых метрик на четырехмерных односвязных группах Ли M. Удобно исходить из данной в алгебре Ли $L = L(M)$ лоренцевой формы g (т. е. лоренцева скалярного произведения $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = g(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, здесь векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ принадлежат L). Алгебра Ли L отождествляется с касательным пространством к M в $\mathbf{1} \in M$. С помощью левых сдвигов вводится скалярное произведение в касательных пространствах к M во всех ее точках. Получаемое однородное лоренцево пространство обозначается (M, g) или просто M, когда g зафиксирована. В [2] для таких пространств предложен термин лоренцева группа Ли. Заметим, что две разные лоренцевы группы Ли (M, g), (M_1, g_1) могут быть изометричны (локально или глобально) как лоренцевы пространства.

В лоренцевых группах Ли хронологическое будущее любой точки x получается из хронологического будущего I^+ точки $\mathbf{1} \in M$ левым сдвигом на x: $I_x^+ = x \cdot M$. Наличие хотя бы одной замкнутой временной кривой (машины времени) равносильно полной искаженности пространства (M, g).

В данной работе рассматриваются четырехмерные односвязные лоренцевы группы Ли (или их семейства: в форме g на L допускается наличие числовых параметров), соответствующие алгебрам Ли $L\,\mathrm{IV}$, $L\,\mathrm{VIII}$, $L\,\mathrm{XXV}$. Эта нумерация предложена С. П. Гавриловым. Его классификация четырехмерных вещественных алгебр Ли является детализацией таковой в [3]. Она фактически совпадает с классификацией Ф. Патеры и П. Винтерница [4]. Две первые из этих алгебр Ли содержат трехмерный абелев идеал, а $L\,\mathrm{XXV}$ является полупрямой суммой алгебры Гейзенберга и одномерной алгебры Ли.

Мы доказываем полную искаженность рассматриваемых лоренцевых групп Ли. Наибольший интерес представляет, по-видимому, $M\,\mathrm{XXV}$ (далее называем его МТТ-миром: Мак-Ленаган, Тариг, Таппер [5]). Получающееся пространство известно в общей теории относительности. Оно допускает как решение уравнений Эйнштейна — Максвелла двойственную интерпретацию: с источником и без него.

Вообще, стимулом для изучения лоренцевых многообразий является возможность моделирования гравитационного поля некоторой лоренцевой метрикой, определенной на подходящем четырехмерном многообразии. Открытое в 1949 г. К. Геделем [6] однородное диффеоморфное $\mathbf{R}^4$ решение (физически интерпретируемое как «идеальная жидкость») уравнений Эйнштейна, имеющее машину времени, породило бурную и долгую дискуссию среди соответствующих специалистов (возможно, по причине использования в [6] перехода от исходной системы координат к другой с зануляющимся в некоторых точках якобианом, т. е. с возможным нарушением одновязности модели).

С развитием однородной хроногеометрии была более строго установлена как полная искаженность решения Геделя [7], так и найдено несколько семейств трех- и четырехмерных полностью искаженных лоренцевых групп Ли [8—16].

Помимо причинной структуры мы исследуем и характеристики, связанные с кривизной. Дело в том, что имеются веские основания потребовать для соответствующего метрике g тензора Эйнштейна $T = \mathrm{Ric} - Sg/2$ (здесь Ric — тензор Риччи, S — скалярная кривизна) выполнения определенных неравенств — энергетических условий. Оказывается, что в некоторых ситуациях их достаточно для того, чтобы независимо от конкретного вида метрики ответить на поставленные вопросы (в том числе такие, как определение причинной структуры, предсказание сингулярностей, поведение геодезических).

Слабое энергетическое условие состоит в том, что

$$T(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geqslant 0 \tag{А}$$

в каждой точке $x \in M$ и при любом времениподобном векторе $\mathbf{a}$ из касательного пространства T_x в этой точке. Вследствие непрерывности это условие будет выполнено и для любого изотропного вектора $\mathbf{a}$.

Физически это неравенство эквивалентно утверждению, что «локальная плотность энергии, измеренная каким-либо наблюдателем, неотрицательна» [17, с. 102]. Условие

$$\mathrm{Ric}(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geqslant 0 \tag{Б}$$

для любого времениподобного $\mathbf{a}$ называется *условием времениподобного схождения* [17, с. 109]. По непрерывности оно выполняется и для всех изотропных векторов.

Если выполняются оба эти неравенства, то говорят, что *M удовлетворяет сильному энергетическому условию.*

В настоящей работе метрика является исходной, а выделение тех случаев, в которых выполняются привденные выше неравенства, представляет несомненный интерес. Один пункт каждой из трех частей работы посвящен проверке условий (А), (Б).

Напомним еще одно важное при исследовании лоренцевых многообразий понятие. (Псевдо)риманово многообразие называется *геодезически полным,* если для любой его геодезической область изменения ее аффинного параметра есть вся числовая прямая. Лоренцево многообразие M называется *причинно* (*времениподобно, изотропно*) *геодезически полным,* если любая его причинная (соответственно временная, изотропная) геодезическая полна. В [17] отмечается, что (при $\dim M = 4$) времениподобная геодезическая неполнота имеет непосредственное физическое истолкование: из нее следует возможность существования свободно движущихся наблюдателей, мировые линии которых имеют начало или конец на ограниченном интервале собственного времени (сингулярность). Хотя аффинный параметр на изотропной геодезической не совпадает по своему физическому смыслу с собственным временем на временной геодезической, тем не менее изотропно геодезически неполные пространства, вероятно, тоже нужно считать сингулярными. Таким образом, причинная геодезическая полнота является минимальным условием, при котором пространство — время можно считать свободным от сингулярностей. Этому вопросу также посвящен один пункт каждой части.

§ 1. МТТ-мир

1.1. Метрика МТТ-мира (Мак-Ленаган, Тариг, Таппер) приведена в [18] на с. 96:

$$ds^2 = px^{-2}(dx^2 + dy^2) + x^2 d\varphi^2 - (dt - 2y\,d\varphi)^2, \tag{1.1}$$

здесь $p = \mathrm{const} > 0$. Заметим, что на этой же с. 96 имеется опечатка в выражении для векторов Киллинга. Правильный их набор (см. [5]) таков: ∂_t, ∂_φ, $2\varphi\partial_t + \partial_y$, $x\partial_x + y\partial_y - \varphi\partial_\varphi$.

Реализуем МТТ-мир как лоренцеву группу Ли (т. е. как группу Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой), действуя по подробно изложенной в [2] схеме. Группа Ли M диффеоморфна $\mathbf{R}^4$ с групповой операцией $z = x \cdot y$:

$$z_1 = x_1 + y_1,\ z_2 = x_2 + y_2 \exp x_1,$$
$$z_3 = x_3 + y_3 \exp(-x_1),\ z_4 = x_4 + y_4 + 2x_2 y_3 \exp(-x_1).$$

Отождествим алгебру Ли $L = L(M)$ с совокупностью всех левоинвариантных векторных полей на M. Выберем такой базис в L: $\mathbf{l}_1 = \partial_1$, $\mathbf{l}_2 = (\exp x_1)\partial_2$, $\mathbf{l}_3 = \exp(-x_1)\partial_3 + 2x_2 \exp(-x_1)\partial_4$, $\mathbf{l}_4 = \partial_4$. Эти векторные поля на M (разложенные по $\partial_1, \ldots, \partial_4$) являются вектор-столбцами матрицы dL_x дифференциала левого сдвига L_x в $\mathbf{1} = (0, 0, 0, 0)$:

$$dL_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-x_1) & 0 \\ 0 & 0 & 2x_2 \exp(-x_1) & 1 \end{pmatrix}.$$

Их коммутационные соотношения таковы:

$$[\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2] = \mathbf{l}_2,\ [\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_1] = \mathbf{l}_3,\ [\mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3] = 2\mathbf{l}_4. \tag{1.2}$$

Таким образом, L является полупрямой суммой алгебры Ли Гейзенберга (нильпотентного идеала с базисом $\mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$) и одномерной подалгебры, натянутой на $\mathbf{l}_1$.

Правоинвариантные векторные поля $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_4$ — столбцы матрицы dR_x дифференциала правого сдвига R_x в $\mathbf{1}$ — являются векторами Киллинга любой левоинвариантной метрики на M. Таблица их коммутационных соотношений получается из (1.2) заменой всех знаков в правой части на противоположные.

Зададим лоренцеву форму

$$g = \mathrm{diag}(p, p, 1, -1) \tag{1.3}$$

в L (т. е. в касательном пространстве $T = T_1(M)$) и разнесем ее левыми сдвигами по всей M. Получающееся лоренцево пространство $M = (M, g)$ имеет следующую метрику в координатном базисе:

$$ds^2 = p\,dx_1^2 + p \exp(-2x_1)\,dx_2^2 + \exp(2x_1)\,dx_3^2 - (dx_4 - 2x_2\,dx_3)^2, \tag{1.4}$$

тогда как (1.3) задает метрику в базисе левоинвариантных векторных полей $\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_4$ на M. Квадратичная форма (1.1) получается из (1.4) заменами $x = \exp x_1$, $y = x_2$, $\varphi = x_3$, $t = x_4$. Векторы Киллинга $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_4$ совпадают (после соответствующей замены координат) с приведенными в [5], где отмечается, что размерность полной группы движений равна четырем (т. е. дополнительных векторов Киллинга нет).

1.2. Для исследования причинной структуры МТТ-мира рассмотрим однопараметрическое семейство лоренцевых групп Ли, задаваемых формой

$$g_q = \mathrm{diag}(p, p, 1, q), \tag{1.5}$$

здесь $q < -1/4$. В каждом из таких (M, g_q) зафиксируем ориентацию по времени:

$$K^+ = \{\mathbf{c} \in L\colon \langle \mathbf{c}, \mathbf{c}\rangle_q \leqslant 0,\ \mathbf{c}_4 \geqslant 0\},$$

здесь $\langle\ ,\ \rangle_q$ — лоренцево скалярное произведение в L, задаваемое формой (1.5). Ясно, что при $q = -1$ получается МТТ-мир, задаваемый формой (1.3).

Так как $\langle \mathbf{c}, \mathbf{c}\rangle_s = \langle \mathbf{c}, \mathbf{c}\rangle_q + (s - q) c_4^2$, то при $q < s < -1/4$ конус K_s^+ строго содержится в K_q^+.

Теорема 1.1. *При всех $q < -1/4$ в лоренцевой группе Ли (M, g_q) имеется замкнутая времениподобная кривая. Все эти пространства геодезически полны.*

Замечание. Полная искаженность всех пространств (M, g_q) означает равномерную устойчивость, которой обладает это свойство для исходного МТТ-мира. Более того, если в рассматриваемой в этом параграфе группе Ли введена лоренцева метрика G (не обязательно лево- или правоинвариантная), причем $K_s^+(x) \subset K_G^+(x) \subset K_q^+(x)$ для всех $x \in M$ и некоторых $q < s < -1/4$, то в метрике G, очевидно, тоже имеется замкнутая времениподобная кривая.

Для доказательства теоремы будет применен результат М. А. Улановского [9]. В его работе вводится $M_1 \subset M$, являющееся множеством всех элементов x группы M, обладающих тем свойством, что дифференциал σ_x внутреннего автоморфизма $y \mapsto x \cdot y \,.\, x^{-1}$ в $\mathbf{1} \in M$ переводит конус K^+ в такой конус $\sigma_x(K^+)$, что выпуклое замыкание объединения $K^+ \cup \sigma_x(K^+)$ исчерпывает алгебру Ли L. Тогда если для некоторого связного открытого $M_2 \subset M_1$ выполняется $M_2 \cap J_1^+ \neq \varnothing$ и $M_2 \cap J_1^- \neq \varnothing$, то (M, g) является полностью искаженным.

Сформулируем достаточные условия полной искаженности несколько иначе. Через $\mathring{K}^+$ ниже обозначается открытый конус будущего. M_1 состоит из тех точек $x \in M$, для которых найдется вектор $\mathbf{b} \in L$ с условиями

$$\mathbf{b} \in \mathring{K}^+, \tag{1.6}$$

$$\sigma_x^{-1}(-\mathbf{b}) \in \mathring{K}^+. \tag{1.7}$$

Условия на M_2 и $J^+ \equiv J_1^+, J^- \equiv J_1^-$ остаются прежними. В рассматриваемом нами МТТ-мире

$$\sigma_x^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 \exp(-x_1) & \exp(-x_1) & 0 & 0 \\ -x_3 \exp x_1 & 0 & \exp x_1 & 0 \\ 2x_2x_3 & 2x_3 & -2x_2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Лемма 1.1. *Множество M_1 содержит $P = \{x\colon x_1 < 0,\ x_2 \geqslant 2\}$.*

Доказательство. Пусть $x \in P$. Возьмем $\mathbf{b} = \{0, 0, 1, 2\}$. Тогда выполняется (1.6). Условие (1.7) эквивалентно одновременному выполнению неравенств $x_2 > 1$, $\exp(2x_1) < 4(x_2 - 1)^2$. Они выполнены, так как $x \in P$.

Лемма 1.2. *Множество $M_2 = \{x\colon x_1 < 0,\ x_2 > 2\}$ пересекается как с J^+, так и с J^-* (причинными будущим и прошлым точки $\mathbf{1}$).

Доказательство. Если $\mathbf{a} \in K^+$ (соответственно K^-), то исходящая из $\mathbf{1} \in M$ однопараметрическая полугруппа h: $x = x(t)$, $t \geqslant 0$, с начальным касательным вектором $\mathbf{a}$ целиком содержится в J^+ (соответственно J^-). Это следует из левоинвариантности метрики. Уравнения для h таковы:

$$\dot{x} = dL_x\mathbf{a}, \quad x(0) = \mathbf{1}. \tag{1.9}$$

Для наших целей достаточно того, что из (1.9) вытекает

$$x_1 = a_1 t, \quad x_2 = (a_2/a_1)(\exp(a_1 t) - 1).$$

Поэтому при $a_1 < 0$, $0 < t$, всегда $x_1 < 0$.

Вектор $\mathbf{a}$ возьмем сначала из K^+ с дополнительными условиями: $a_1 < 0$, $(a_2/a_1) < -2$. Так как $\lim\limits_{t \to +\infty} x_2(t) = -(a_2/a_1)$, то при достаточно больших положительных t соответствующая часть кривой h попадает в M_2. Отсюда следует, что $M_2 \cap J^+ \neq \phi$. Выбирая с такими же условиями вектор из K^-, получаем и $M_2 \cap J^- \neq \phi$. Лемма 2 доказана. Тем самым доказана первая часть теоремы 1.

1.3. В этом пункте доказывается, что рассматриваемое (M, g_q) является геодезически полным. Напомним некоторые известные (см. [19]) факты.

Каждой проходящей через $\mathbf{1}$ геодезической H: $x = x(t)$ соответствует траектория $\mathbf{c}(t) = dL_{x^{-1}(t)}\dot{x}$ в алгебре Ли L. Заданная в L форма

$g=(g_{ij})$ может рассматриваться как линейный оператор, действующий из L в L^*, а $g^{-1}=(g^{ij})$ действует из L^* в L. Если $\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_n$ — базис в L; $\mathbf{l}^1, \ldots$ $\ldots, \mathbf{l}_n$ — базис в L; $\mathbf{l}^1, \ldots, \mathbf{l}^n$ — взаимный базис в L^* (т. е. $(\mathbf{l}^i, \mathbf{l}^k)=\delta^i_k$, где $(\ ,\ )$ — спаривание L^* и L), $\mathbf{c}\in L$, $\mathbf{u}\in L^*$, то координатная запись равенств $\mathbf{u}=g(\mathbf{c})$, $\mathbf{c}=g^{-1}(\mathbf{u})$ такова: $u_i=g_{im}c^m$, $c^k=g^{km}u_m$.

Будем всегда подразумевать левое действие в пространстве вектор-столбцов L и правое — в пространстве вектор-строк L^*. Пусть $\mathbf{c}\in L$. Под $\mathrm{ad}^*_{\mathbf{c}}$ понимается линейный оператор в L^*, задаваемый равенством $(\mathrm{ad}^*_{\mathbf{c}}\mathbf{u}, \mathbf{b})=(\mathbf{u}, \mathrm{ad}_{\mathbf{c}}\mathbf{b})$, здесь $\mathbf{b}\in L$, $\mathbf{u}\in L^*$. При выборе взаимных базисов в L и L^* матрицы операторов $\mathrm{ad}_{\mathbf{c}}$ и $\mathrm{ad}^*_{\mathbf{c}}$ одинаковы.

Уравнение для траектории h: $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$ в L^*, соответствующей геодезической H, таково:

$$\dot{\mathbf{u}}=\mathbf{u}\,\mathrm{ad}^*_{g^{-1}(\mathbf{u})}. \tag{1.10}$$

После того как $\mathbf{u}(t)$, а тем самым $\mathbf{c}(t)=g^{-1}(\mathbf{u}(t))$ найден, геодезическая $x(t)$ восстанавливается из уравнения $\dot{x}=dL_x\mathbf{c}$ (линейного, если M реализована как некоторая подгруппа матричной группы).

Из вышеизложенного следует, что исследуемая геодезическая полна тогда и только тогда, когда полно решение уравнения 1.10, т. е. аргумент в $x(t)$ принимает все вещественные значения.

Каждая траектория h: $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$ с начальным условием $\mathbf{u}(o)=\mathbf{f}$ целиком содержится в k-орбите $O_{\mathbf{f}}$ элемента $\mathbf{f}$ (символ «k» означает коприсоединенное действие группы Ли M в пространстве L^*). В уже введенных обозначениях

$$O_{\mathbf{f}}=\{\mathbf{u}\in L^*\colon\ \mathbf{u}=\mathbf{f}\sigma_{x^{-1}}\}_{x\in M}.$$

Само же k-представление сопоставляет (в выбранных нами координатах) элементу $x\in M$ линейный оператор σ_x^{-1}, действующий в L^*. Так как $\sigma_{x^{-1}}=\sigma_x^{-1}$, то из (1.8) вытекает, что

$$\begin{gathered}O_{\mathbf{f}}=\{\mathbf{u}\colon\ u_1=f_1+f_2x_2\exp(-x_1)-f_3x_3\exp x_1+2f_4x_2x_3,\\ u_2=f_2\exp(-x_1)+2f_4x_3,\ u_3=f_3\exp x_1-2f_4x_2,\ u_4=f_4\},\end{gathered}$$

здесь $x_1, \ldots, x_4$ являются координатами (избыточными) на $O_{\mathbf{f}}$. Так как всегда

$$u_4=f_4,\ 2f_4(u_1-f_1)=f_2f_3-u_3u_2, \tag{1.11}$$

то имеются двумерные и нульмерные (при $f_2=f_3=f_4=0$) орбиты. В последнем случае геодезическая совпадает с соответствующей однопараметрической подгруппой, поэтому достаточно исследовать оставшуюся возможность: $f_2^2+f_3^2+f_4^2\neq 0$.

Из 1.11 следует, что при $f_4\neq 0$ орбита O_f является гиперболическим параболоидом, а при $f_4=0$ — гиперболическим цилиндром.

Кривая h содержится не только в $O_{\mathbf{f}}$, но и в

$$H_f\colon\ g^{ij}u_iu_j=g^{ij}f_if_j\equiv\langle\mathbf{f},\ \mathbf{f}\rangle$$

(закон сохранения энергии). В нашем случае

$$H_{\mathbf{f}}\colon\ (u_1^2+u_2^2)/p+u_3^2+qu_4^2=\langle\mathbf{f}, \mathbf{f}\rangle.$$

Пусть гиперплоскость T задается уравнением $u_4=f_4$. Поверхность $T\cap H_{\mathbf{f}}$ является эллипсоидом, поэтому кривая h ограничена. Тогда (см., например, [20, теорема 2]) решение уравнения 1.10 продолжается на всю вещественную ось. Доказана

Лемма 1.3. *Лоренцевы группы Ли* (M, g_q) *геодезически полны.*

Справедливость теоремы 1.1 установлена в леммах 1.1—1.3.

Осуществимо ли физическое моделирование такой области этого пространство-времени, в которой содержится замкнутая времениподобная кривая? Автору (математику) ответ на этот вопрос неизвестен.

1.4. Так как МТТ-мир является решением уравнений Эйнштейна — Максвелла, то для него выполняется слабое энергетическое условие. Это может быть проверено и непосредственно. В рассматриваемом базисе левоинвариантных векторных полей на M тензор Риччи таков: $\mathrm{Ric} = \mathrm{diag}(-2, 0, 0, 2/p)$. Отсюда следует, что выполняется условие времениподобного схождения. Скалярная кривизна равна $-4/p$, поэтому тензор Эйнштейна равен $\mathrm{diag}(0, 2, 2/p, 0)$, т. е. он положительно полуопределен на всех (а не только на времениподобных) векторах. Мы установили, что для МТТ-мира выполняется сильное энергетическое условие.

§ 2. ПОЛНАЯ ИСКАЖЕННОСТЬ И ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ЛОРЕНЦЕВЫХ ГРУПП ЛИ $E(1, 1) \otimes \mathbf{R}$

Рассматриваемая в этом параграфе четырехмерная алгебра Ли $L = L\mathrm{IV}$ может быть задана коммутационными соотношениями: $[\mathbf{l}_4, \mathbf{l}_1] = \mathbf{l}_1$, $[\mathbf{l}_4, \mathbf{l}_2] = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$. Соответствующая гомеоморфная $\mathbf{R}^4$ группа Ли M задается операцией $z = x \cdot y$: $z_1 = x_1 + y_1 \exp x_4 + y_2 x_4 \exp x_4$, $z_2 = x_2 + y_2 \exp x_4$, $z_3 = x_3 + y_3$, $z_4 = x_4 + y_4$.

Отметим, что $M = E(1, 1) \otimes \mathbf{R}$, где $E(1, 1)$ — компонента единицы группы движений псевдоевклидовой плоскости.

В [21] приведена схема классификации всех лоренцевых групп Ли, соответствующих группе M. Именно в L были выделены идеалы V_1, V_2, U_2, V_3, натянутые (соответственно) на $\mathbf{l}_1$; $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$; $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_3$; $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$. Эти идеалы инвариантны относительно автоморфизмов алгебры Ли L и не зависят от выбора базиса в L: $V_2 = [L, L]$, V_1 есть единственный, лежащий в V_2 одномерный идеал, $U_2 = V_1 \oplus C$, V_3 есть прямая сумма одномерного центра C и V_2. При заданной в L лоренцевой форме g они определенным образом расположены по отношению к световому конусу, что и кладется в основу классификации левоинвариантных лоренцевых метрик на рассматриваемой группе Ли.

2.1. В настоящей работе рассматривается случай времениподобных идеалов. В [24] согласно имеющейся в [2] общей схеме был получен канонический вид соответствующих лоренцевых форм g в L:

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & p & 0 \\ 0 & q & s & 0 \\ p & s & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

здесь $q > 0$; $\varepsilon = 0, \pm 1$; $v > 0$, s — такие параметры, что $\varepsilon + p^2 > 0$, $\Delta = q(\varepsilon + p^2) - s^2 > 0$. Ниже нам понадобятся матрицы

$$dL_x = \begin{pmatrix} \exp x_4 & x_4 \exp x_4 & 0 & 0 \\ 0 & \exp x_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} \exp x_4 & x_4 \exp x_4 & 0 & -(x_1 + x_2) \\ 0 & \exp x_4 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

2.2. Для исследования причинной структуры зафиксируем ориентацию по времени:

$$K^+ = \{\mathbf{a} \in L:\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle < 0,\ a_1 - p a_3 \geqslant 0\},$$

здесь $\langle\ ,\ \rangle$ — лоренцево скалярное произведение, задаваемое формой (2.1).

Теорема 2.1. *В рассматриваемом пространстве (M, g) имеется замкнутая временоподобная кривая. Само (M, g) является геодезически полным.*

Схема доказательства первого утверждения теоремы — та же, что и в § 1 (см. п. 1.2).

Лемма 2.1. *Множество M_1 содержит $P = \{x\colon x_4 \geqslant 4\sqrt{q}\}$.*

Доказательство. Пусть $x \in P$. Возьмем $\mathbf{b} = \{1, 1/2\sqrt{q}, 0, 0\}$, тогда выполняется (1.6). Условие (1.7) эквивалентно одновременному выполнению неравенств $1/4 < (1 - x_4/(2\sqrt{q}))^2$, $x_4/(2\sqrt{q}) - 1 \geqslant 0$. Они выполнены, так как $x \in P$.

Лемма 2.2. *Множество $M_2 = \{x\colon x_4 > 4\sqrt{q}\}$ пересекается как с J^+, так и с J^-.*

Доказательство. Если $\mathbf{a} \in K^+$ (соответственно K^-), то исходящая из $\mathbf{1} \in M$ однопараметрическая полугруппа $h\colon x = x(t)$, $t \geqslant 0$, с начальным касательным вектором $\mathbf{a}$ целиком содержится в J^+ (соответственно J^-). Это следует из левоинвариантности метрики. Из уравнений 1.9 для h вытекает, что $x_4 = a_4 t$.

Возьмем сначала такой $\mathbf{a}$ с $a_4 > 0$, что $\mathbf{a} \in K^+$. Тогда при достаточно больших положительных t соответствующая часть кривой h попадает в M_2. Отсюда следует, что $M_2 \cap J^+ \neq \phi$. Выбирая с таким же условием вектор $\mathbf{a}$ из K^-, получаем $M_2 \cap J^- \neq \phi$. Лемма доказана.

2.3. В этом пункте доказывается, что рассматриваемое (M, g) является геодезически полным. Так как метод, использованный в п. 1.3, срабатывает в данном случае лишь при $\varepsilon = 1$, то проведем доказательство другим способом.

Уравнения для отыскания проходящей через $\mathbf{1} \in M$ геодезической $x = x(t)$ с начальным касательным вектором $\mathbf{a}$ таковы (см. [22]):

$$\dot{x} = dL_x g^{-1} \sigma_x^T g \mathbf{a}. \tag{2.3}$$

Начальные условия: $x(0) = \mathbf{1}$.

Учитывая 2.1, 2.2 и продифференцировав повторно по аргументу t четвертое уравнение системы 2.3, получаем

$$\ddot{x}_4 = \Delta(\dot{x}_1(a_1 - pa_3) + \dot{x}_2(a_1 - pa_3 - qa_2 - sa_3))/v. \tag{2.4}$$

Полнота исследуемой геодезической эквивалентна полноте по t решения дифференциального уравнения (2.4). Оно сводится к уравнению вида

$$(\dot{x}_4)^2 + V(x_4, \mathbf{a}) = E(\mathbf{a}), \tag{2.5}$$

описывающему одномерное движение частицы с энергией $E(\mathbf{a})$ в поле с потенциалом $V(x_4, \mathbf{a})$.

Если $a_1 \neq pa_3$, то старший член в $V(x_4, \mathbf{a})$ равен $-\Delta x_4^2 \exp(2x_4) \times \times (\varepsilon + p^2)(a_1 - pa_3)^2/v$. Из его положительности следует (см. [22]) полнота решения.

Если $a_1 = pa_3$, $qa_2 + sa_3 \neq 0$, то старший член в 2.5 равен $-\Delta \exp(2x_4) \times \times (\varepsilon + p^2)(qa_2 + s a_3)^2/v$, т. е. тоже имеется полнота.

Если же и $qa_2 + sa_3 = 0$, то из 2.4 следует, что $x_4 = a_4 t$. Нами доказана

Лемма 2.3. *Группа Ли $E(1, 1) \otimes \mathbf{R}$ с левоинвариантной метрикой, определяемой формулой 2.1, является полным лоренцевым пространством.*

Из справедливости лемм 2.1—2.3 вытекает утверждение теоремы 2.1.

Замечание. Автор благодарен С. Н. Астракову за помощь в исследовании геодезической полноты метрик на рассмотренной во втором параграфе данной работы группе Ли.

2.4. Так как рассматриваемая алгебра Ли содержит трехмерную абелеву подалгебру, то подсчет кривизны удобно производить в базисе левоинвариантных векторных полей $\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_4$ на соответствующей группе (см. [2]). Для общего вида формы 2.1 результаты вычислений довольно громоздкие, поэтому ограничимся случаем $p = s = 0$, $\varepsilon = 1$; т. е.

$$g = \mathrm{diag}(-1,\ q,\ 1,\ v), \tag{2.6}$$

здесь $q, v > 0$.

Ненулевые компоненты тензора Риччи таковы:

$$\begin{aligned} R_{11} &= (2 + 1/(2q))/v,\ R_{12} = R_{21} = 1/v, \\ R_{22} &= (1/2 - 2q)/v,\ R_{44} = -2 + 1/(2q). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Пусть h — положительный корень уравнения $16q^2 + 4q - 1 = 0$. Из 2.7 вытекает, что при $0 < q \leqslant h$ тензор Риччи положительно полуопределен. В любом случае

$$v\,\mathrm{Ric}\,(\mathbf{a},\ \mathbf{a}) = 2\,(a_1 + a_2/2)^2 - (1/(2q))\,\langle \mathbf{a},\ \mathbf{a}\rangle + (1/2 - 2q)\,a_2^2 + \\ + (1/(2q))\,a_3^2 + v\,(1/q - 2)\,a_4^2.$$

Отсюда следует, что условие времениподобного схождения выполняется тогда и только тогда, когда $0 < q \leqslant 1/4$.

Соответствующая форме 2.6 скалярная кривизна S равна $(1/(2q) - - 6)/v$. Поэтому тензор Эйнштейна $T = \mathrm{Ric} - Sg/2$ имеет следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned} &T_{11} = (3/(4q) - 1)/v,\ T_{12} = T_{21} = 1/v; \\ &T_{22} = (1/4 - q)/v,\ T_{33} = (3 - 1/(4q))/v, \\ &T_{44} = 1 - 1/(4q). \end{aligned}$$

Так как $vT\,(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 2\,(a_1 + a_2/2)^2 + 3\,(1 - 1/4q))\,\langle \mathbf{a},\ \mathbf{a}\rangle + (1/2 - 4q)\,a_2^2 + + a_3^2/(2q) + (1/(2q) - 2)\,a_4^2$, то, по крайней мере при $0 < q \leqslant 1/8$ выполняется слабое энергетиеское условие, т. е. при этих же значениях параметра q выполняется и сильное энергетическое условие.

§ 3. ПРИМЕР ПОЛНОСТЬЮ ИСКАЖЕННОГО ЛОРЕНЦЕВОГО ПРОСТРАНСТВА, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО АЛГЕБРЕ ЛИ ИЗ СЕМЕСТВА L VIII

В данном параграфе рассмотрим алгебру Ли из однопараметрического семейства $L\,\mathrm{VIII}$, задаваемую коммутационными соотношениями

$$[\mathbf{l}_4,\ \mathbf{l}_1] = \mathbf{l}_2, \quad [\mathbf{l}_4,\ \mathbf{l}_2] = -\mathbf{l}_1. \tag{3.1}$$

Само же семейство $L\,\mathrm{VIII}$ задается соотношениями

$$\begin{aligned} [\mathbf{l}_4,\ \mathbf{l}_1] &= \mathbf{l}_1 \sin\theta + \mathbf{l}_2 \cos\theta, \\ [\mathbf{l}_4,\ \mathbf{l}_2] &= -\mathbf{l}_1 \cos\theta + \mathbf{l}_2 \sin\theta, \end{aligned}$$

где $\theta \in [0,\ \pi/2)$. Отметим, что $L = E(2) \oplus \mathbf{R}$, где $E(2)$ — алгебра Ли группы движений евклидовой плоскости.

Соответствующая алгебре Ли L группа Ли $M \cong \mathbf{R}^4$ может быть задана следующей групповой операцией:

$$z = x \cdot y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \cos x_4 - y_2 \sin x_4 \\ x_2 + y_1 \sin x_4 + y_2 \cos x_4 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Эти формулы соответствуют соотношениям 3.1. Левоинвариантную лоренцеву метрику на M задаем следующей лоренцевой формой в L:

$$g = \mathrm{diag}(-1,\ 1,\ 1,\ 1). \tag{3.3}$$

Зафиксируем ориентацию по времени:

$$K^+ = \{\mathbf{a} \in L\colon\ \langle \mathbf{a},\ \mathbf{a}\rangle \leqslant 0,\ a_1 \geqslant 0\}. \tag{3.4}$$

Теорема 3.1. *Получившаяся лоренцева группа Ли является полностью искаженной, геодезически полной. В ней выполняется сильное энергетическое условие.*

Доказательство разобьем на три части.

1°. Укажем замкнутый группопуть (см. [2]) $h = h_1 \cup h_2$, состоящий из двух звеньев — h_1 и h_2. Сами же h_1, h_2 являются отрезками направленных в будущее одномерных смежных классов. Отрезок h_1 является частью направленной в будущее однопараметрической подгруппы $x(u)$, задаваемой начальным касательным вектором $\{\sqrt{3}, 1, 0, 1\}$. Он имеет параметрическую длину 2π: $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$. Уравнения подгруппы таковы:

$$x(u) = (\sqrt{3}s + c - 1,\ \sqrt{3}(1-c) + s,\ 0,\ u), \tag{3.5}$$

где через s обозначен $\sin u$, через c — $\cos u$.

Для проверки этого и дальнейших фактов читателю могут понадобиться следующие матрицы:

$$dL_x = \begin{pmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} c & -s & 0 & x_2 \\ s & c & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

где s, c — это соответственно $\sin x_4$ и $\cos x_4$. Уравнения звена h_2: $y = y(v)$, $v \in [0, 2\pi]$, таковы:

$$y = (\sqrt{3}s + 1 - c,\ \sqrt{3}(c-1) + s,\ 0,\ 2\pi - v). \tag{3.8}$$

Здесь s, c — это соответственно $\sin v$ и $\cos v$. Звено h_2 получено левым сдвигом на элемент $(0, 0, 0, 2\pi) \in M$ из отрезка $\bar{h}_2$ однопараметрической подгруппы с начальным касательным вектором $\{\sqrt{3}, 1, 0, -1\}$. Справедливость первого утверждения теоремы 3 вытекает из вышеприведенных соотношений (3.2)—(3.8) и однородности (M, g).

Замечание. Проверка того, что h является замкнутой времениподобной кривой, может быть выполнена и более традиционным (по сравнению с техникой, применяемой при исследовании левоинвариантных метрик) способом. Для этого отыскивается метрика в координатном базисе:

$$ds^2 = (s^2 - c^2)\,dx_1^2 - 4scdx_1dx_2 + (c^2 - s^2)\,dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2,$$

где s, c — это $\sin x_4$ и $\cos x_4$.

2°. Исследование на геодезическую полноту проводится методом, изложенным в п. 1.3.

Орбита Of ковектора $f \in L^*$ совпадает с множеством всех $f\sigma_x$, $x \in M$, т. е. состоит из всех $u \in L^*$ с

$$u_1 = f_1 \cos x_4 + f_2 \sin x_4,\ u_2 = f_2 \cos x_4 - f_1 \sin x_4,$$
$$u_3 = f_3,\ u_4 = x_2 f_1 - x_1 f_2 + f_4.$$

Интеграл энергии H_f имеет вид $-u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = \langle f, f \rangle$. Так как $u_1^2 + u_2^2 = f_1^2 + f_2^2$, $u_3 = f_3$, то кривая $u(t)$ компактна: она является пересечением однополостного гиперболоида H_f, плоскости $u_3 = f_3$ и эллиптического цилиндра $u_1^2 + u_2^2 = f_1^2 + f_2^2$. Отсюда вытекает геодезическая полнота рассматриваемой лоренцевой группы Ли.

3°. Так же, как и в п. 2.4, для подсчета тензора Риччи в левоинвариантном базисе $l_1, \ldots, l_4$ на M удобно применить предложенный С. П. Гавриловым (матричный) способ (см. [2]). Тензор Риччи равен $\mathrm{diag}(0, 0, 2)$, т. е. является положительно полуопределенным. Это влечет выполнение условия времениподобного схождения. Скалярная кривизна S равна 2, поэтому тензор Эйнштейна $T = \mathrm{Ric} - Sg/2 = \mathrm{diag}(1, -1, -1, 1)$. Отсюда следует, что слабое энергетическое условие тоже выполняется: тензор T получается из метрического умножением на отрицательное число и добавлением положительно полуопределенного тензора Риччи; тем самым выполнено сильное энергетическое условие. Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бим Дж., Эрлих П.** Глобальная лоренцева геометрия.— М.: Мир, 1985.— 400 с.

2. **Левичев А. В.** Методы исследования причинной структуры однородных лоренцевых многообразий // Сиб. мат. журн.— 1990.— Т. 31, № 3.— С. 39—54.

3. **Петров А. З.** Новые методы в общей теории относительности.— М.: Наука, 1966.— 496 с.

4. **Patera J., Winternitz P.** Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras // J. math. phys.— 1977.— V. 18, N 7.— P. 1449—1455.

5. **Tariq N., Tupper B. O. J.** Einstein — Maxwell metrics admitting dual interpretation // Ibid.— 1976.— V. 17.— P. 292—296.

6. **Gödel K.** An example of a new type of cosmological solution of Einstein's field equation of gravitation // Rev. mod. phys.— 1949.— V. 21.— P. 447—450.

7. **Левичев А. В.** Причинная структура левоинвариантных лоренцевых метрик на группе $M_2 \otimes \mathbf{R}^2$ // Сиб. мат. журн.— 1990.— Т. 31, № 4.— С. 93—101.

8. **Улановский М. А.** Однородные лоренцевы пространства. 2 // Укр. геометр. сб.— Харьков, 1988.— Вып. 31.— С. 112—117.

9. **Улановский М. А.** Однородные лоренцевы пространства. 1 // Там же.— 1987.— Вып. 30.— С. 116—122.

10. **Levichev A. V.** On causal structure of homogeneous Lorentzian manyfolds // GRG.— 1989.— V. 21, N 10.— P. 1027—1045.

11. **Левичева В. Ю.** Левоинвариантные лоренцевы метрики на группе M_4II/Ред. «Сиб. мат. журн.» — Новосибирск, 1989.— Деп. в ВИНИТИ, № 1583 — В 89.

12. **Красильников М. П.** Причинная структура геодезически полных левоинвариантных лоренцевых метрик на одной четырехмерной группе Ли/Ред. «Сиб. мат. журн.» — Новосибирск, 1988.— Деп. в ВИНИТИ, № 2697 — В 88.

13. **Кушманцева В. А., Левичев А. В.** Причинная структура антимаховской метрики // Сиб. мат. журн.— 1990.— Т. 31, № 6.— С. 90—95.

14. **Левичев А. В., Астраков С. Н.** Геодезическая полнота и структура левоинвариантных лоренцевых метрик по группе $E(1, 1) \otimes \mathbf{R}$ // Всесоюз. шк. Оптимальное управление и анализ, Кемерово, сент.— окт. 1988 г.: Тез. докл.— Кемерово, 1988.— С. 31.

15. **Raychaudhuri A. K., Thakurta S. N. G.** Homogeneous spacetimes of the Gödel type // Phys. Rev. D.— 1980.— V. 22, N 4.— P. 802—806.

16. **Dunn K.** Two-Fluid Cosmological Models in Gödel-Type Spacetimes // GRG.— 1989.— V. 21, N 2.— P. 137—147.

17. **Хокинг С., Эллис Дж.** Крупномасштабная структура пространства — времени.— М.: Мир, 1977.— 413 с.

18. **Точные** решения уравнений Эйнштейна/Д. Крамер, Х. Штефани, Э. Херльт, М. Мак-Каллум. Под ред. Э. Шмутцера: Пер. с англ.— М.: Энергоиздат, 1982.— 416 с.

19. **Арнольд В. И.** Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.— 431 с.

20. **Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.** Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.— М.: Наука, 1976.— 496 с.

21. **Астраков С. Н., Левичев А. В., Репин А. Е.** Канонический вид левоинвариантных лоренцевых метрик на одной четырехмерной группе Ли/Ред. «Сиб. мат. журн.» — Новосибирск. 1987.— 12 с.— Деп. в ВИНИТИ 05.12.86, № 8341 — В.

22. **Гаврилов С. П.** Геодезические левоинвариантных метрик на связной двумерной неабелевой группе Ли // Гравитация и теория относительности.— Казань, 1981.— Вып. 18.— С. 28—44.