В. Б. МАРЕНИЧ

СТРОЕНИЕ ОТКРЫТЫХ МНОГООБРАЗИЙ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Довольно давно известна следующая гипотеза о строении полных некомпактных (открытых) римановых многообразий V^n неотрицательной секционной кривизны $K_\sigma \geqslant 0$.

Гипотеза (Чигер, Громол [1]). *Если в открытом многообразии V^n, $n > 2$, неотрицательной секционной кривизны $K_\sigma \geqslant 0$ найдется точка, в которой все секционные кривизны строго больше нуля, то V^n диффеоморфно эвклидову пространству $\mathbf{R}^n$.* (Проблема № 18 в известном списке Яо — см. [2].)

Двумерные многообразия указанного вида были рассмотрены еще Кон-Фоссеном [3], который доказал, что связная ориентируемая поверхность неотрицательной кривизны либо диффеоморфна плоскости $\mathbf{R}^2$, либо изометрична цилиндру $S^1 \times \mathbf{R}$. Доказательство основано на формуле Гаусса — Боннэ. Отсутствие формулы Гаусса — Боннэ для размерностей $n > 2$ объясняет трудности, встречающиеся при попытках доказать указанную гипотезу.

В настоящей работе излагается доказательство основного технического утверждения (лемма 3.17), необходимого для доказательства гипотезы Чигера — Громола для аналитических многообразий (см. ниже теорему 1).

Во всяком многообразии V^n указанного вида можно построить семейство абсолютных выпуклых эквидистант C_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, сходящихся к вполне геодезическому подмногообразию S без края. Причем само многообразие V^n оказывается диффеоморфным пространству нормального расслоения νS подмногообразия S в V^n (см. [1]). Поэтому доказательство гипотезы сводится к доказательству того, что S — точка, либо того, что в случае $\dim S > 0$ в каждой точке многообразия V^n найдется двумерное направление σ нулевой кривизны. Укажем эти направления: пусть $\dim S > 0$, точка p лежит на S, вектор e лежит в T_pS, а вектор v — в ν_pS, где T_pS — касательное пространство к S в точке p, ν_pS — пространство векторов, нормальных к S в точке p. Из точки p выпустим в направлении v геодезическую $l_v(\rho) = \exp_p(\rho v)$. Перенося вдоль $l_v(\rho)$ параллельно векторы e и v, мы получим семейство двумерных направлений $\sigma(\rho, v, e, \rho)$.

Теорема 1. *Если V^n — аналитическое открытое риманово многообразие неотрицательной секционной кривизны, то $K_{\sigma(p,v,e,\rho)} \equiv 0$.*

Идея доказательства теоремы 1 уже приводилась в работе [4], где указанное в теореме утверждение было доказано при некоторых ограничениях на V^n). Так как при доказательстве теоремы 1 можно перейти к универсальной накрывающей, то многообразие V^n можно, не ограничивая общность, считать односвязным.

Введем основные определения и обозначения.

В работе [1] было построено семейство абсолютно выпуклых множеств C_t, сходящихся к S, обладающих следующими свойствами:

1) внутренность C_T непуста,

2) существует разбиение $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T$ отрезка $[0, T]$ такое, что для всякого t, $t_{i-1} < t < t_i$

$$C_t = \{p \in C_{t_i} \mid \rho(p, \partial C_{t_i}) \geqslant t_i - t\},$$

3) $\dim C_{t_i} > \dim C_{t_{i-1}}$,

4) $S = C_0$ — вполне геодезическое подмногообразие без края,

5) для любых точек $p \in S$ и векторов $e \in T_pS$ и $v \in \nu_pS$ справедливо $K_{\sigma(p,v,e,0)} = 0$.

Доказательство теоремы 1 будет проводиться от противного: предположим, что найдутся точка $p \in S$ и векторы e, v такие, что для некоторого N (выберем его наименьшим из возможных)

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^{-N} K_{\sigma(p,v,e,\rho)} \neq 0.$$

Так как кривизна V^n неотрицательна, то N — четное: $N = 2b$. Важную роль в приводимом ниже рассуждении играет множество направлений $\mathfrak{L}_p \subset \nu_p S$:

$$\mathfrak{L}_p = \{\overline{pq} \mid q \in \partial C_t,\ \rho(p, q) = \rho(p, \partial C_t)\},$$

где $\overline{pq}$ — единичный вектор направления кратчайшей pq, соединяющей точки p и q, в точке p; а также функция f расстояния от геодезической $\gamma(s) \subset S$ до пересечения ∂C_τ с пленкой Синга, построенной на $\gamma(s)$. Из точки p в направлении e выпустим геодезическую $\gamma(s) = \exp_p(se)$. Для вектора w из $\nu_p S$ обозначим через $i(w)$ минимальное i такое, что w принадлежит $T_p C_{t_{i+1}}$, а через $q_\tau(w, s)$ — точку пересечения $\partial C_{t_{i(w)}+\tau}$ с геодезической, выпущенной из точки $\gamma(s)$ в направлении вектора $w(s) = I_{p\gamma(s)}(w)$, где $I_{p\gamma(s)}$ — оператор параллельного переноса из p в точку $\gamma(s)$ вдоль геодезической γ. Тогда

$$f_\tau(w, s) = \rho(\gamma(s), q_\tau(w, s)),$$

определение остальных понятий и обозначений приводится в тексте.

Автор выражает глубокую признательность В. А. Топоногову за постоянное внимание к работе и многочисленные обсуждения.

§ 1. СИСТЕМА КООРДИНАТ ФЕРМИ С ОСЬЮ $\gamma(t)$, ЛЕЖАЩЕЙ НА ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОМ МНОГООБРАЗИИ S

Из точки p на S выпустим геодезическую $\gamma(t)$, лежащую в S, и построим вдоль $\gamma(t)$ систему координат Ферми $(\alpha, t, x) = (\alpha^1, \ldots, \alpha^{d-1}, t, x^{d+1}, \ldots, x^n)$ (см. [5, с. 133]) так, чтобы первые $d-1$ координаты были римановыми координатами в $\exp_p(\nu_p S)$, а $\gamma(t)$ совпадала с d-координатной осью. Последнее означает, что если $e_i(\alpha, t, x)$ — координатные векторы построенной системы в точке $p(\alpha, t, x)$ с координатами (α, t, x), то для $i < d$ векторы $e_i = e_i(0, 0, 0)$ лежат в $\nu_p S$, а $e_d(0, t, 0) = \dot\gamma(t)$. Так как S — вполне геодезическое подмногообразие, то при параллельном переносе $I_{p\gamma(t)}$ векторы из $\nu_p S$ перейдут в векторы из $\nu_{\gamma(t)} S$. Поэтому наборы $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^{d-1})$ из первых $d-1$ координат будут служить координатами в $\exp_{\gamma(t)}(\nu_{\gamma(t)} S)$. Вектор из $\nu_{\gamma(t)} S$ с координатами α обозначим $v(\alpha, t)$. В $\nu_{\gamma(t)} S$ введем также полярные координаты $(\rho, \Phi) = (\rho, \varphi^2, \ldots, \varphi^{d-1})$ так, чтобы вектор $v(\rho, \Phi, t) \in \nu_{\gamma(t)} S$, имеющий координаты (ρ, Φ), при параллельном переносе $I_{\gamma(t)p}$ переходил в вектор $v(\rho, \Phi) \in \gamma_p S$ с теми же координатами, а вектор $v(\alpha, t)$ при $\alpha^1 = 1$, $\alpha^2 = \ldots = \alpha^{d-1} = 0$ совпадал с вектором $v(\rho, \Phi, t)$ при $\rho = 1$, $\varphi_2 = \ldots = \varphi^{d-1} = 0$. Введем обозначения: $g_{ik}(\alpha, t, x)$, $\Gamma^i_{jk}(\alpha, t, x)$ и $R_{ij,kl}(\alpha, t, x)$ — суть метрический тензор, символы Кристофеля и тензор кривизны V^n построенной системы координат в точке $p(\alpha, t, x)$. Такой же смысл имеют $g_{ik}(\rho, \Phi, t, x)$, $\Gamma^i_{jk}(\rho, \Phi, t, x)$ и $R_{ij,kl}(\rho, \Phi, t, x)$, но в точке $p(\rho, \Phi, t, x)$ с координатами (β, Φ, t, x) в полярной системе координат.

Аргументы g_{ik}, Γ^i_{jk} и $R_{ij,kl}$, равные нулю, будем опускать. Например, $g_{ik}(\rho, \Phi) = g_{ik}(\rho, \Phi, 0, 0)$. Будем также считать, что $|R_{ij,kl}(\alpha, t, x)| \leqslant 1$ — это не ограничивает общности рассуждений, так как все рассмотрение проводится в окрестности компактного подмногообразия S.

Пусть $e_k(\rho, \Phi)$ — k-й координатный вектор системы (α, t, x) в точке $p(\rho, \Phi)$. По определению $e_k(\rho, \Phi)$ есть вектор скорости k-й координатной кривой $q_k(\theta, \rho, \Phi)$, выходящей из точки $p(\rho, \Phi)$,

$$q_k(\theta, \rho, \Phi) = \exp_p(\rho v(1, \Phi) + \theta e_k), \quad k \neq d,$$

$$q_d(\theta, \rho, \Phi) = \exp_{\gamma(\theta)}(\rho v(1, \Phi, \theta)).$$

Соединим точку $q_k(\theta, \rho, \Phi)$ с точкой p кратчайшей $s_k(\xi, \theta, \rho, \Phi)$. Тогда вариация геодезической $l_{v(\Phi)}(\xi) = \exp_p(\xi v(1, \Phi))$, заданная семейством кратчайших $s_k(\xi, \theta, \rho, \Phi)$, определит на $l_{v(\Phi)}(\xi)$ якобиево поле $\eta_k(\xi, \rho, \Phi)$ такое, что $e_k(\rho, \Phi) = \eta_k(\rho, \rho, \Phi)$. Легко видеть, что якобиевы поля $\eta_k(\xi, \rho, \Phi)$ удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$\eta_k(0, \rho, \Phi) = 0, \quad \eta_k'(0, \rho, \Phi) = e_k/\rho, \quad k \neq d,$$
$$\eta_d(0, \rho, \Phi) = e_d, \quad \eta_d'(0, \rho, \Phi) = 0.$$

Вдоль геодезической $l_{v(\Phi)}(\xi)$ построим систему координат Ферми так, чтобы координатные векторы $\tilde{e}_i(\xi, \Phi)$ вдоль $l_{v(\Phi)}(\xi)$ удовлетворяли следующим условиям:

$\tilde{e}_i(0, \Phi)$, $i \geqslant d$, совпадают с e_i,

$\tilde{e}_i(0, \Phi)$, $i < d$, образуют ортонормированный базис в $\nu_p S$,

$\tilde{e}_1(\xi, \Phi)$ совпадает с $\dot{l}_{v(\Phi)}(\xi)$ — вектором скорости $l_{v(\Phi)}(\xi)$.

Обозначим через $\eta_k^r(\xi, \rho, \Phi) = (\eta_k(\xi, \rho, \Phi), \tilde{e}_r(\xi, \Phi))$ r-ю координату якобиева поля η_k в этой системе координат, а также

$$\tilde{R}_{ij,kl}(\xi, \Phi) = (R(\tilde{e}_i(\xi, \Phi), \tilde{e}_j(\xi, \Phi))\tilde{e}_k(\xi, \Phi), \tilde{e}_l(\xi, \Phi)).$$

Напомним, что $N = 2b$ — наименьшее из возможных чисел такое, что $K_{\sigma(p,v,e,\rho)} = O(\rho^{2b})$ для всех $p \in S$, $e \in T_pS$, $v \in \nu_pS$. Поэтому для $i \geqslant d$

$$R_{1i,1i}(\xi, \Phi) = O(\xi^{2b}). \qquad (1.1)$$

Якобиево поле $\eta_k(\xi, \rho, \Phi)$ удовлетворяет линейной системе уравнений Якоби

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\eta_k^r(\xi, \rho, \Phi) - \tilde{R}_{1r,1l}(\xi, \Phi)\,\eta_k^l(\xi, \rho, \Phi) = 0. \qquad (12)$$

Следовательно,

$$\eta_k^r(\xi, \rho, \Phi) = \sum_{l=1}^{n} \mu_l^r(\xi, \rho, \Phi)(e_k, \tilde{e}_l), \qquad (1.3)$$

где $\mu_l(\xi, \rho, \Phi) = \mu_l^r(\xi, \rho, \Phi)\tilde{e}_r(\xi, \Phi)$ — якобиевы поля вдоль геодезической $l_{v(\Phi)}(\xi)$, удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$\begin{aligned} &\mu_l(0, \rho, \Phi) = 0, \quad \mu_l'(0, \rho, \Phi) = \hat{e}_l/\rho, \quad l \neq d,\\ &\mu_d(0, \rho, \Phi) = e_d, \quad \mu_d'(0, \rho, \Phi) = 0. \end{aligned} \qquad (1.4)$$

Лемма 1.1. *Найдется* ρ_0 *такое, что для всех* $\xi < \rho < \rho_0$

$$|\mu_r^k(\xi, \rho, \Phi) - \xi\rho^{-1}\delta_{kr}| \leqslant 2\xi \int_0^\xi \sqrt{\tilde{R}_{1r,r1}(\theta, \Phi)}\,d\theta, \quad r \neq d,$$

$$|\mu_r'^k(\xi, \rho, \Phi) - \rho^{-1}\delta_{kr}| \leqslant 2\int_0^\xi \sqrt{R_{1r,r1}(\theta, \Phi)}\,d\theta, \quad r \neq d,$$

$$|\mu_d^k(\xi, \rho, \Phi) - \delta_{dk}| \leqslant 2\xi \int_0^\xi \sqrt{R_{1d,d1}(\theta, \Phi)}\,d\theta,$$

$$|\mu_d'^k(\xi, \rho, \Phi)| \leqslant 2\int_0^\xi \sqrt{\tilde{R}_{1d,d1}(\theta, \Phi)}\,d\theta.$$

Доказательство. Пусть пока $\mu_r(\xi, \rho, \Phi) = \mu_r(\xi)$ и $\tilde{R}_{1i,1j}(\theta, \Phi) = \tilde{R}_{1i,j1}(\theta)$. Из (1.2) и (1.4) находим, что для $r \neq d$

$$\mu_r^k(\xi') - \xi'\rho^{-1}\delta_{kr} = \sum_{l=1}^{n}\int_0^{\xi'}\int_0^{\tau} \tilde{R}_{1k,1l}(\theta)\,\mu_r^l(\theta)\,d\theta\,d\tau =$$

$$= \int_0^{\xi'}\int_0^{\tau} \tilde{R}_{1k,1r}(\theta)\,\mu_r^r(0)\,d\theta\,d\tau + \sum_{l \neq r}\int_0^{\xi'}\int_0^{\tau} \tilde{R}_{1k,1l}(\theta)\,\mu_r^l(\theta)\,d\theta\,d\tau. \qquad (1.5)$$

Так как V^n — многообразие неотрицательной кривизны,

$$|\widetilde{R}_{1r,1k}(\theta)| \leqslant \sqrt{\widetilde{R}_{1k,k1}(\theta)\,\widetilde{R}_{1r,r1}(\theta)} \leqslant \sqrt{\widetilde{R}_{1r,r1}(\theta)}. \tag{1.6}$$

Отсюда

$$|\mu_r^k(\xi') - \xi'\rho^{-1}\delta_{kr}| \leqslant \int_0^{\xi'}\int_0^{\tau} \sqrt{\widetilde{R}_{1r,r1}(\theta)}\,|\mu_r^r(\theta)|\,d\theta\,d\tau +$$

$$+ \sum_{l\neq r}\int_0^{\xi'}\int_0^{\tau} |\widetilde{R}_{1k,1l}(\theta)\,\mu_r^l(\theta)|\,d\theta\,d\tau \leqslant \int_0^{\xi'}\int_0^{\tau} \sqrt{\widetilde{R}_{1r,r1}(\theta)}\,|\mu_r^r(\theta)|\,d\theta\,d\tau +$$

$$+ \sum_{l\neq r}\int_0^{\xi'}\int_0^{\tau} |\mu_r^l(\theta)|\,d\theta\,d\tau.$$

Обозначим

$$A(\xi) = \sup_{l,\theta<\xi}\left(|\mu_r(\theta) - \theta\rho^{-1}\delta_{lr}|\right).$$

Тогда из предыдущей формулы получаем

$$|\mu_r^k(\xi') - \xi'\rho^{-1}\delta_{kr}| \leqslant \int_0^{\xi'}\int_0^{\tau} \sqrt{\widetilde{R}_{1r,r1}(\theta)}\,\theta\rho^{-1}d\theta\,d\tau + (n-1)\int_0^{\xi'}\int_0^{\tau} A(\theta)\,d\theta\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \xi'\int_0^{\xi'} \sqrt{\widetilde{R}_{1r,r1}(\theta)}\,d\theta + \frac{n-1}{2}(\xi')^2 A(\xi') \leqslant \xi\int_0^{\xi} \sqrt{\widetilde{R}_{1r,r1}(\theta)}\,d\theta + \frac{n-1}{2}\xi^2 A(\xi).$$

Перейдем в полученном неравенстве к супремуму по k и $\xi' < \xi$. Тогда

$$A(\xi) \leqslant \xi\int_0^{\xi} \sqrt{\widetilde{R}_{1r,r1}(\theta)}\,d\theta + \frac{n-1}{2}\xi^2 A(\xi).$$

Выбирая ρ_0 так, чтобы $(n-1)\rho_0^2 < 1$, получаем

$$A(\xi) \leqslant 2\xi\int_0^{\xi} \sqrt{\widetilde{R}_{1r,r1}(\theta)}\,d\theta.$$

Совершенно аналогично для $r = d$ выводим

$$|\mu_d^k(\xi) - \delta_{kd}| \leqslant 2\xi\int_0^{\xi} \sqrt{\widetilde{R}_{1d,d1}(\theta)}\,d\theta.$$

Используя формулу

$$\mu_r'^k(\theta) = \mu_r'^k(0) + \sum_{l=1}^{n}\int_0^{\theta} \widetilde{R}_{1k,1l}(\tau)\,\mu_r^l(\tau)\,d\tau,$$

вытекающую из системы уравнения Якоби, имеем

$$|\mu_r'^k(\xi) - \rho^{-1}\delta_{kr}| \leqslant 2\int_0^{\xi} \sqrt{\widetilde{R}_{1r,r1}(\theta)}\,d\theta, \quad r \neq d,$$

$$\mu_d'^k(\xi)| \leqslant 2\int_0^{\xi} \sqrt{\widetilde{R}_{1d,d1}(\theta)}\,d\theta. \quad \blacksquare$$

Лемма 1.2. *Если $k \geqslant d$ или $r \geqslant d$, то*

$$g_{kr}(\rho, \Phi) = \delta_{kr} + O(\rho^{b+r}).$$

Доказательство. Так как метрический тензор симметричен ($g_{kr}(\rho, \Phi) = g_{rk}(\rho, \Phi)$), то, не ограничивая общности, можно считать $k \geqslant d$. Оценим

$$\bar{g}_{ks}(\rho, \Phi) = (e_k(\rho, \Phi), \widetilde{e}_s(\rho, \Phi)) = \eta_k^s(\rho, \Phi).$$

Так как $k \geqslant d$, из определения векторов $\tilde{e}_i(\rho, \Phi)$ следует $\tilde{e}_k(\rho, \Phi) = e_k(\rho, \Phi)$ или $\eta_k^s(\rho, \Phi) = \mu_k^s(\rho, \Phi)$. Поэтому из леммы 1.1. находим

$$|\bar{g}_{ks}(\rho, \Phi) - \delta_{hs}| \leqslant 2\rho \int_0^\rho \sqrt{\tilde{R}_{1k,k1}(\theta, \Phi)}\, d\theta$$

или из оценки (1.1) для $k \geqslant d$,

$$\bar{g}_{ks}(\rho, \Phi) = \delta_{ks} + O(\rho^{b+2}).$$

Разлагая вектор $e_r(\rho, \Phi)$ по ортонормированному базису $\tilde{e}_s(\rho, \Phi)$, нетрудно получить

$$g_{kr}(\rho, \Phi) = \sum_s \bar{g}_{ks}(\rho, \Phi)\, \bar{g}_{rs}(\rho, \Phi), \tag{1.7}$$

откуда легко следует требуемое соотношение. ■

Лемма 1.3. *Если $k \geqslant d$ и $r \geqslant d$, то*

$$g_{kr}(\rho, \Phi) = \delta_{kr} + O(\rho^{2b+2}).$$

Доказательство. Как видно из (1.7), достаточно проверить, что если $k \geqslant d$ и $r \geqslant d$, то

$$\bar{g}_{kr}(\rho, \Phi) = \delta_{hr} + O(\rho^{2b+2})$$

или

$$\mu_k^r(\rho, \Phi) = \delta_{kr} + O(\rho^{2b+2}).$$

Действительно, из (1.5) следует

$$\mu_k^r(\rho, \Phi) = \delta_{kr} + \int_0^\rho \int_0^\xi \tilde{R}_{1r,1k}(\theta, \Phi)\, \mu_k^k(\theta, \Phi)\, d\theta\, d\xi +$$

$$+ \sum_{l \neq k} \int_0^\rho \int_0^\xi \tilde{R}_{1r,1l}(\theta, \Phi)\, \mu_k^l(\theta, \Phi)\, d\theta\, d\xi.$$

По лемме 1 $\mu_k^l(\theta, \Phi) = O(\theta^{b+2})$ для $l \neq k \geqslant d$, а в силу (1.6) $\tilde{R}_{1r,1l}(\theta, \Phi) = O(\theta^b)$ для $r \geqslant d$, поэтому

$$\mu_k^r(\rho, \Phi) = \delta_{kr} + \int_0^\rho \int_0^\xi \tilde{R}_{1r,1k}(\theta, \Phi)\, \mu_k^k(\theta, \Phi)\, d\theta\, d\xi + O(\rho^{2b+4}).$$

Так как V^n — многообразие неотрицательной кривизны,

$$|\tilde{R}_{1r,1k}(\theta, \Phi)| \leqslant \sqrt{\tilde{R}_{1r,r1}(\theta, \Phi) \tilde{R}_{1k,k1}(\theta, \Phi)}$$

или $\widehat{R}_{1r,1k}(\theta, \Phi) = O(\theta^{2b})$ для $k \geqslant d$ и $r \geqslant d$. По лемме 1.1 $|\mu_k^k(\theta, \Phi)| \leqslant 1 + O(\rho^{b+2})$ для $\theta \leqslant \rho$, поэтому $\mu_k^r(\rho, \Phi) = \delta_{kr} + O(\rho^{2b+2})$. ■

Лемма 1.4. *Если $i \geqslant d$, то $R_{1i,1i}(\rho) = O(\rho^{2b})$.*

Доказательство. Так как $e_1(\rho) = \tilde{e}_1(\rho)$, то

$$R_{1i,1i}(\rho) = \sum_{k,l} \tilde{R}_{1k,1l}(\rho)\, \bar{g}_{ik}(\rho)\, \bar{g}_{il}(\rho).$$

Как показано в доказательстве леммы 1.2, $\bar{g}_{is}(\rho) = \delta_{is} + O(\rho^{b+2})$ для $i \geqslant d$, поэтому

$$R_{1i,i1}(\rho) = \tilde{R}_{1i,1i}(\rho) + 2\sum_k \tilde{R}_{1i,1k}(\rho)\, \bar{g}_{ik}(\rho) + O(\rho^{2b+4}).$$

Пользуясь (1.1) и (1.6), для $i \geqslant d$ получаем $R_{1i,1i}(\rho) = \tilde{R}_{1i,1i}(\rho) + O(\rho^{2b+2})$ или $R_{1i,1i}(\rho) = O(\rho^{2b})$, что и требовалось доказать. ■

Лемма 1.5. *Если $i \geqslant d$ или $r \geqslant d$, то $\Gamma_{1r}^i(\rho) = O(\rho^{b+1})$.*

Доказательство. Оценим сначала функцию $\tilde{\Gamma}_{1r}^k(\rho) = \left(\frac{D}{\partial\rho} e_r(\rho), \tilde{e}_k(\rho)\right)$. По определению $e_r(\rho)$ есть значение поля Якоби

$\eta_r(\rho, \rho)$ вдоль $l(\xi) = \exp_p(\xi e_1)$ с начальными условиями

$$\eta_r(0, \rho) = 0, \quad \eta_r'(0, \rho) = \frac{e_r}{\rho}, \quad r \neq d,$$

$$\eta_d(0, \rho) = e_d, \quad \eta_d'(0, \rho) = 0.$$

Поэтому из системы уравнений Якоби (1.2) при $r = d$ получаем

$$\overline{\Gamma}^k_{1d}(\rho) = \left(\frac{D}{\partial\rho} e_d(\rho), \tilde{e}_k(\rho)\right) = \eta_d'^k(\rho, \rho) = \mu_d'^k(\rho)$$

или по лемме 1.1 $\overline{\Gamma}^k_{1d}(\rho) = O(\rho^{b+1})$.

Если $r \neq d$, то из линейности системы уравнений (1.2) и начальных условий следует, что поля $\eta_r(\xi, \rho)$ и $\eta_r(\xi, \rho')$ отличаются лишь множителем: $\eta_r(\xi, \rho') = \rho(\rho')^{-1}\eta_r(\xi, \rho)$. Таким образом,

$$\overline{\Gamma}^k_{1r}(\rho) = \left(\frac{D}{\partial\rho} e_r(\rho), \tilde{e}_k(\rho)\right) = \frac{d}{\partial\rho}\eta^k_r(\rho, \rho) = \frac{\partial}{\partial\rho'}\left(\rho(\rho')^{-1}\eta^k_r(\rho', \rho)\right)\Big|_{\rho'=\rho} =$$

$$= \eta_r'^k(\rho, \rho) - \rho^{-1}\eta^k_r(\rho, \rho).$$

Из (1.3) и леммы 1.1 для $r \geqslant d$ имеем $\overline{\Gamma}^k_{1r}(\rho) = O(\rho^{b+1})$. Так как $\Gamma^i_{1r}(\rho) = g^{is}(\rho)\Gamma_{1r,s}(\rho)$, где $g^{is}(\rho)$ — матрица, обратная к $g_{is}(\rho)$, а $\Gamma_{1r,s}(\rho) = \left(\frac{D}{\partial\rho} e_r(\rho), e_s(\rho)\right)$, то из равенства $e_s(\rho) = \bar{g}_{sk}(\rho)\tilde{e}_k(\rho)$ вытекает

$$\Gamma_{1r,s}(\rho) = \overline{\Gamma}^k_{1r}(\rho)\bar{g}_{sk}(\rho), \quad \Gamma^i_{1r}(\rho) = \overline{\Gamma}^k_{1r}(\rho)\bar{g}_{sk}(\rho)g^{is}(\rho).$$

Из леммы 1.2 нетрудно получить, что если $i \geqslant d$ или $s \geqslant d$, то $g^{is}(\rho) = \delta_{is} + O(\rho^{b+2})$. Поэтому из полученных оценок для $\overline{\Gamma}^k_{1r}(\rho)$ следует, что если $i \geqslant d$ или $r \geqslant d$, то $\Gamma^i_{1r}(\rho) = O(\rho^{b+1})$. ■

Лемма 1.6. *Для всех k справедливо соотношение* $\Gamma^k_{dd}(\rho) = O(\rho^{b+1})$, *а если $k < d$, то* $\Gamma^k_{dd}(\rho) = O(\rho^{b+2})$.

Доказательство. По определению

$$R_{1d,dk}(\rho) = \left(\frac{\partial\Gamma^s_{dd}(\rho)}{\partial\rho} - \frac{\partial\Gamma^s_{1d}(\rho, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} + \Gamma^r_{dd}(\rho)\Gamma^s_{1r}(\rho) - \Gamma^r_{1d}(\rho)\Gamma^s_{dr}(\rho)\right)g_{sk}(\rho). \tag{1.8}$$

Повторяя рассуждения доказательств лемм 1.1 — 1.5 для произвольного t, получим $\Gamma^s_{1d}(\rho, t) = O(\rho^{b+1})$, откуда $\frac{\partial\Gamma^s_{1d}}{\partial t}(\rho, t) = O(\rho^{b+1})$.

Как известно, для любой системы координат Ферми $g_{sk}(\rho) = \delta_{sk} + O(\rho^2)$, $\Gamma^i_{jk}(\rho) = O(\rho)$. Поэтому из (1.8) следует

$$\left|\frac{\partial\Gamma^k_{dd}}{\partial\rho}(\rho)\right| \leqslant |R_{1d,dk}(\rho)| + O(\rho^2)\sum_s |R_{1d,ds}(\rho)| + O(\rho^2)\sum_s\left|\frac{\partial\Gamma^s_{dd}}{\partial\rho}(\rho)\right| +$$

$$+ O(\rho)\sum_s |\Gamma^s_{dd}(\rho)| + O(\rho^{b+1}). \tag{1.9}$$

Суммируя по k, получаем

$$\sum_k\left|\frac{\partial\Gamma^k_{dd}}{\partial\rho}(\rho)\right| \leqslant O(\rho)\sum_k |\Gamma^k_{dd}(\rho)| + \sum_k |R_{1d,dk}(\rho)|(1 + O(\rho^2)) + O(\rho^{b+1}). \tag{1.10}$$

Из леммы 3 ввиду неотрицательности кривизны V^n находим

$$|R_{1d,dk}(\rho)| \leqslant \sqrt{R_{1d,d1}(\rho)R_{kd,dk}(\rho)} = O(\rho^b).$$

Подставим последнее неравенство в (1.10):

$$\sum_k\left|\frac{\partial\Gamma^k_{dd}}{\partial\rho}(\rho)\right| \leqslant O(\rho)\sum_k |\Gamma^k_{dd}(\rho)| + O(\rho^b).$$

Следовательно, для всех k

$$\Gamma^k_{dd}(\rho) = O(\rho^{b+1}). \tag{1.11}$$

Если же $k < d$, то функция $R_{kd,dk}(\rho)$ неотрицательна и равна нулю при $\rho = 0$. Поэтому $R_{kd,dk}(\rho) = O(\rho^2)$ и

$$|R_{1d,dk}(\rho)| \leqslant \sqrt{R_{1d,d1}(\rho) R_{kd,dk}(\rho)} = O(\rho^{b+1}).$$

Подставляя последнее соотношение в (1.9) и пользуясь оценкой (1.11), находим, что $\Gamma^k_{dd}(\rho) = O(\rho^{b+2})$ для всех $k < d$. ■

§ 2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГРАНИЦЫ ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА

Так как S лежит в $C_{t_{m-1}}$, то по определению семейства C_t для любых τ, $r_{in} > \tau > 0$, и $p \in S$ найдется точка $q \in \partial C_{t_{m-1}+\tau}$ такая, что $\rho(p, q) = \tau$. Для простоты везде ниже $C_{t_{m-1}+\tau}$ обозначено через C_τ. Известно (см. [6 теорема 6.5, замечание 1]), что на каждой геодезической $\gamma(t)$, проходящей через p и лежащей в S, а также на векторе $\overline{pq}$ можно построить пленку Синга π, изометричную полосе на плоскости. Компонента края этой пленки, отличная от $\gamma(t)$, есть геодезическая $\gamma_\tau(t)$, лежащая в ∂C_τ, причем $\rho(\gamma(t), \gamma_\tau(t)) = \tau$. Для $p \in S$ обозначим

$$\mathfrak{L}_p = \{\overline{pq} \mid q \in \partial C_\tau,\ \rho(p, q) = \rho(p, \partial C_\tau)\} \tag{2.1}$$

(в силу $\tau < r_{in}$ вектор $\overline{pq}$ определен корректно). Образ вектора $\overline{pq}$ при параллельном переносе $I_{p\gamma(t)}$ из точки p в точку $\gamma(t)$ вдоль γ будет лежать в $\mathfrak{L}_{\gamma(t)}$. Так как любой путь $\omega \subset S$ можно приблизить кусочно геодезическим, то параллельный перенос I_ω вдоль любого пути ω, лежащего в S, переводит $\mathfrak{L}_{\omega(0)}$ в $\mathfrak{L}_{\omega(1)}$. Обозначим

$$N^\delta_p = \{v \in \nu_p S \mid \exists w \in \mathfrak{L}_p\colon\ \angle(v, w) < \delta\}. \tag{2.2}$$

Везде ниже предполагается $\delta < \pi/2$. Так как $\mathfrak{L}_{\omega(0)}$ при параллельном переносе I_ω переходит в $\mathfrak{L}_{\omega(1)}$, то таким же свойством обладает и N^δ: $I_\omega N^\delta_{\omega(0)} = N^\delta_{\omega(1)}$. Если $q \in \partial C_\tau$ такова, что $\overline{pq} \in \mathfrak{L}_p$, то q — регулярная точка ∂C_τ, т. е. существует касательная к ∂G_τ гиперплоскость $T_q\partial C_\tau \subset T_q V^n$, проходящая через q, причем внешняя для C_τ нормаль $\nu_q \partial C_\tau$ совпадает с $-\overline{qp}$. Действительно, если точка $p \in S$ такая, что $\rho(p, q) = \rho(p, \partial C_\tau)$, то шар $B(p, \tau)$ содержится в C_τ, а точка q лежит на $\partial B(\rho, \tau)$. Так как $\tau < r_{in}$, то q — регулярная точка $\partial B(\rho, \tau)$, причем нормаль к $\partial B(\rho, \tau)$ в точке q совпадает с $-\overline{qp}$. Поскольку в каждой точке $\partial\, C_\tau$ определен касательный к C_τ конус $K_q C_\tau$, который является выпуклым подмножеством $T_q V^n$ (см. [6, 4.3]), а $B(p, \tau) \subset C_\tau$, то конус $K_q C_\tau$ содержит касательный к $B(p, \tau)$ конус в точке q. Следовательно, $K_q C_\tau$ совпадает с открытым полупространством векторов в $T_q V^n$, образующих с $-\overline{qp}$ угол, больше чем $\pi/2$. Поэтому q — регулярная точка ∂C_τ, в ней существует единственная опорная гиперплоскость к ∂C_τ, которую мы обозначим $T_q \partial C_\tau$, и

$$\nu_q \partial C_\tau = -\overline{qp}. \tag{2.3}$$

Вообще говоря, для произвольной точки $q' \in \partial C_\tau$ множество опорных гиперплоскостей к ∂C_τ (которые мы также обозначим $T_q \partial C_\tau$) может состоять из более чем одной гиперплоскости. Тогда и множество $\nu_q \partial C_\tau$ — нормалей к этим гиперплоскостям — состоит из более чем одного вектора. Однако из выпуклости C_τ следует:

Лемма 2.1. *Для всякой точки p и любого $\delta < \pi/2$ найдется $\tau_0 < r_{in}$ такое, что для τ, $\tau < \tau_0$, выполнено $\angle(w, -\overline{qp}) \leqslant \delta$ для всех $q \in \partial C_\tau$, $\overline{pq} \in N^\delta_p$ и $w \in \nu_q \partial C_\tau$.*

Доказательство. Если $\overline{pq} \in N^\delta_p$, то найдется точка $\bar q \in \partial C_\tau$ такая, что $\overline{p\bar q} \in \mathfrak{L}_p$, т. е. $\rho(p, \bar q) = \tau$ и $\angle(\overline{pq}, \overline{p\bar q}) < \delta$. Рассмотрим треугольник

$pq\bar{q}$. Как было отмечено, $\bar{q}$ — регулярная точка ∂C_τ и касательный конус K_qC_τ — полупространство векторов u таких, что $(u, \overline{\bar{q}p})>0$. Так как $q\in$ $\in C_\tau$ и C_τ выпукло, то $(\overline{\bar{q}q}, \overline{\bar{q}p})\geqslant 0$, т. е. угол $\bar{q}$ в треугольнике $pq\bar{q}$ не больше $\pi/2$. Рассмотрим плоский треугольник $p'q'\bar{q}'$ с теми же длинами сторон. По теореме сравнения Топоногова углы $p'q'\bar{q}'$ не больше соответствующих углов $pq\bar{q}$, т. е. $\angle \bar{q}'\leqslant\pi/2$ и $\angle p'\leqslant\delta$,

$$\rho(\bar{q}, q)=\rho(\bar{q}', q')<\tau\operatorname{tg}\delta,\ \rho(p, q)=\rho(p', q')<\tau\cos^{-1}\delta. \tag{2.4}$$

Докажем, что $K_q\subset K_qC_\tau$, где K_q — конус векторов, образующих с $\overline{qp}$ угол, меньший $\pi/2-\delta$. Пусть x — единичный вектор из T_pV^n, перпендикулярный $\overline{pq}$. Обозначим через $q(x, \varphi)$ точку пересечения $\partial B(p, \tau)$ с геодезической, выпущенной из p в направлении $\overline{pq}\cos\varphi+x\sin\varphi$. Построим на евклидовой плоскости треугольник $p'q'q'(x, \varphi)$ со сторонами, равными сторонам треугольника $pqq(x, \varphi)$. Если $\rho(p, q)=\tau$, то $\nu_q\partial C_\tau=\{-\overline{qp}\}$, и лемма доказана. Если же $\rho(p, q)>\tau$, то угол $q'(x, \varphi)$ в треугольнике $p'q'q'(x, \varphi)$ при $\varphi=0$, π равен соответственно π и 0. Поэтому при некотором $\varphi(x)$ этот угол равен $\pi/2$. Ввиду (2.4) и неравенства $\rho(p, q(x, \varphi))\geqslant$ $\geqslant\tau$ угол q' в треугольнике $p'q'q'(x, \varphi(x))$ не меньше $\pi/2-\delta$. По теореме Топоногова угол q в треугольнике $pqq(x, \varphi(x))$ не меньше $\pi/2-\delta$. Ввиду выбора x отсюда следует $K_q\subset K_qC_\tau$. Поэтому $\nu_qK_q\supseteq\nu_q\partial C_\tau$, а так как для любого вектора $w\in\nu_qK_q$ имеем $\angle(w, -\overline{qp})\leqslant\delta$, то утверждение леммы 2.1 доказано. ■

Пусть $q_\tau(\Phi, t)$ — точка пересечения ∂C_τ с геодезической, выпущенной из точки $\gamma(t)$ в направлении $v(1, \Phi, t)$. Для вектора $v(1, \Phi, t)\in N^\delta_{\gamma(t)}$ рассмотрим функцию $f(\tau, \Phi, t)=\rho(\gamma(t), q_\tau(\Phi, t))$. Так как поверхность ∂C_τ, вообще говоря, не гладкая, то функция f может быть не дифференцируемой. Но из выпуклости C_τ следует, что ∂C_τ — локально липшицево многообразие, а функция f в каждой точке имеет односторонние производные, которые почти всюду совпадают [6, п. 4.4].

Лемма 2.2. *Для всех* i, $2\leqslant i\leqslant d-1$, $v(1, \Phi)\in N^\delta_p$

$$\left|\frac{\partial f(\tau, \Phi, t)}{\partial\varphi^i}\right|\leqslant\tau\operatorname{tg}\delta.$$

Доказательство. Пусть $\Phi(s)=(\varphi^2(s), \ldots, \varphi^{d-1}(s))$ такова, что $\varphi^j(s)=\varphi^j(0)+s\delta_{ij}$. Кривую $q_\tau(\Phi(s), t)$ обозначим $q(s)$. Оценим сначала $\|\dot{q}(0)\|$. Для любого значения s точка $q(s)$ лежит на ∂C_τ, т. е. вектор $\overline{q(0)q(s)}$ лежит в замыкании конуса $K_{q(0)}C_\tau$. Поэтому в треугольнике $\gamma(t)q(0)q(s)$ угол $q(0)$ не больше, чем $\pi/2$. Так как по лемме 2.1 $\rho(\gamma(t), q(0))\leqslant\tau\cos^{-1}\delta$, то из теоремы Топоногова получаем, что $\rho(q(0), q(s))\leqslant\tau\cos^{-1}\delta\operatorname{tg}\psi(s)$, где $\psi(s)$ — угол $\gamma(t)$ в треугольнике $\gamma(t)q(0)q(s)$. По определению $\psi(s)=s$, поэтому

$$\|\dot{q}(0)\|=\lim_{s\to 0}\frac{\rho(q(0), q(s))}{s}\leqslant\tau\cos^{-1}\delta,$$

а так как по лемме 2.1 $|\angle(\dot{q}(0), \overline{q(0)\gamma(t)})-\pi/2|\leqslant\delta$, то из формулы первой вариации длины получаем требуемое неравенство. ■

Пусть $v(1, \Phi, t)$ — поле параллельных векторов вдоль геодезической $\gamma(t)$ такое, что $v(1, \Phi)\in N^\delta_p$. Построим пленку Синга $\pi(s, t)=$ $=\exp_{\gamma(t)}(sv(1, \Phi, t))$. Пересечение этой пленки с ∂C_τ обозначим $q(t)$, и пусть $f(t)=\rho(\gamma(t), q(t))$.

Лемма 2.3. *Для всех* τ, $\tau<\tau_0<r_{in}$,

$$\|\dot{q}(t)\|\leqslant(1+\tau)\cos^{-1}\delta,\ |f'(t)|\leqslant(1+\tau)\operatorname{tg}\delta.$$

Доказательство проведем сначала для $t=0$. Пусть $\bar{q}(t)$ — d-координатная линия системы координат Ферми с осью $\gamma(t)$ (см. § 1), проходящая через точку $q(0)$. Векторы $\dot{q}(0)$ и $\dot{\bar{q}}(0)$ лежат в касательной плоскости к пленке $\pi(s,\ t)$ в точке $q(0)$, и так как вектор $\overline{\bar{q}(t)q(t)}$ перпендикулярен $\dot{\bar{q}}(t)$, то $\|\dot{q}(0)\| = \|\dot{\bar{q}}(0)\| \cos^{-1} \angle(\dot{\bar{q}}(0),\ \dot{q}(0))$. Так как $q(0)$ лежит на границе касательного конуса $K_q C_\tau$, то $\angle(\dot{q}(0),\ \dot{\bar{q}}(0)) \leqslant \delta$, а так как $\dot{\bar{q}}(0)$ совпадает с d-координатным вектором, то по лемме 1.2 $\|\dot{\bar{q}}(0)\| \leqslant \leqslant 1 + O(\tau^2)$, т. е. для всех τ, меньших некоторого τ_0, выполнено $\|\dot{\bar{q}}(0)\| \leqslant 1 + \tau$, откуда $\|\dot{q}(0)\| \leqslant (1+\tau)\cos^{-1}\delta$. Оценка для $f'(0)$ сразу следует из полученной оценки на $\|\dot{q}(0)\|$, формулы первой вариации длины и того факта, что угол между $\dot{q}(0)$ и $\overline{q(0)p}$ по лемме 1 отличается от $\pi/2$ не более чем на δ.

Приведенное рассуждение можно повторить для всех t. Причем τ_0 можно выбрать равномерно по всем t, так как таковым его можно выбрать в лемме 1.2 в силу компактности той области, где вводятся координаты Ферми. ■

Следующая лемма объединяет результаты лемм 2.2 и 2.3.

Лемма 2.4. *Пусть* $\Phi(t)$ — *произвольная функция такая, что* $v(1,\ \Phi(t),\ t) \in N^\delta_{\gamma(t)}$. *Тогда для* $q(t) = q_\tau(\Phi(t),\ t)$ *и* $f(t) = \rho(\gamma(t),\ q(t))$

$$\|\dot{q}(t)\| \leqslant \left(1 + \tau + \tau\left\|\frac{d\Phi(t)}{dt}\right\|\right)\cos^{-1}\delta,$$

$$|f'(t)| \leqslant \left(1 + \tau + \tau\left\|\frac{d\Phi(t)}{dt}\right\|\right)\operatorname{tg}\delta.$$

Доказательство. Как и в лемме 2.3, достаточно рассмотреть случай $t = 0$. Пусть $\bar{q}(t) = q_\tau(\Phi(0),\ t)$. Тогда из неравенства треугольника $\rho(q(0),\ q(t)) \leqslant \rho(q(0),\ \bar{q}(t)) + \rho(\bar{q}(t),\ q(t))$ и лемм 2.2, 2.3 следует первое неравенство леммы. Аналогично из равенства

$$\rho(\gamma(t),\ q(t)) - \rho(p,\ q(0)) = (\rho(\gamma(t),\ q(t)) - \\ - \rho(\gamma(t),\ \bar{q}(t))) + (\rho(\gamma(t),\ \bar{q}(t)) - \rho(p,\ q(0)))$$

находим второе неравенство. ■

Пусть $v \in \nu_p S$, $l_v(s) = \exp_p(sv)$ и $\rho_v(s) = \rho\left(l_v(s),\ \partial C_{\tau_0}\right)$, где $0 < \tau_0 < < r_{in}$.

Лемма 2.5.

$$\lim_{s \searrow 0} \frac{\tau_0 - \rho_v(s)}{s} = \cos \angle(v,\ \mathfrak{L}_p).$$

Доказательство. Пусть $Q(s)$ — ближайшие к $l_v(s)$, Q — ближайшие к p точки на ∂C_{τ_0}. По определению $\mathfrak{L}_p$ если $q \in Q$, то $\overline{pq} \in \mathfrak{L}_p$. При $s \searrow 0$ множества $Q(s)$ стремятся к Q, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $s(\varepsilon)$ такое, что для всех $s < s(\varepsilon)$ множество $Q(s)$ лежит в ε-окрестности Q. Действительно, если бы нашлась последовательность точек $q_i \in Q(s_i)$, где $s_i \searrow 0$, такая, что $\rho(q_i,\ Q) > \varepsilon_0 > 0$, то для какой-нибудь предельной точки $\bar{q}$ последовательности q_i (которая существует в силу компактности ∂C_{τ_0}) выполнялось бы

$$\rho(p,\ \bar{q}) = \lim \rho(p,\ q_i) = \lim \rho(l_v(s_i),\ q_i) = \lim \rho\left(l_v(s_i),\ \partial C_{\tau_0}\right) = \rho\left(p,\ \partial C_{\tau_0}\right) = \tau_0,$$

но это противоречит $\rho(\bar{q},\ Q) \geqslant \varepsilon_0 > 0$, т. е. условию $\bar{q} \in Q$. Поэтому $Q(s)$ стремятся к Q при $s \to 0$. Следовательно, если $\varphi(s) = \operatorname{dist}(Q(s),\ Q)$, то $\varphi(s) \to 0$ при $s \to 0$.

Как известно (см. [6, теорема 6.5]), функция $\rho_v(s)$ вогнута. Поэтому она в каждой точке имеет односторонние производные ρ'_-, ρ'_+, которые почти всюду совпадают.

Лемма 2.6.

$$\inf_{q \in Q(s)} \frac{d}{ds}\rho(l_v(s),\ q) \leqslant \rho'_+ \leqslant \rho'_- \leqslant \sup_{q \in Q(s)} \frac{d}{ds}\rho(l_v(s),\ q).$$

Доказательство. Пусть $q(s)$ — какая-нибудь точка из $Q(s)$. Тогда по определению

$$\rho_v(s+\varepsilon)=\rho(l_v(s+\varepsilon),\ q(s+\varepsilon))\leqslant\rho(l_v(s+\varepsilon),\ q(s)).$$

Следовательно,

$$\rho_v(s+\varepsilon)-\rho_v(s)=\rho(l_v(s+\varepsilon),\ q(s+\varepsilon))-\rho(l_v(s),\ q(s))\leqslant\rho(l_v(s+\varepsilon),\ q(s))-$$
$$-\rho(l_v(s),\ q(s))\leqslant\varepsilon\frac{d}{ds'}\rho(l_v(s'),\ q(s))|_{s'=s}+O(\varepsilon^2).$$

Аналогично

$$\rho_v(s)-\rho_v(s+\varepsilon)\leqslant-\varepsilon\frac{d}{ds}\rho(l_v(s+\varepsilon),\ q(s+\varepsilon))+O(\varepsilon^2),$$

откуда

$$O(\varepsilon)+\frac{d}{ds}\rho(l_v(s+\varepsilon),\ q(s+\varepsilon))\leqslant\frac{\rho_v(s+\varepsilon)-\rho_v(s)}{\varepsilon}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{d}{ds'}\rho(l_v(s'),\ q(s))|_{s'=s}+O(\varepsilon).$$

Так как $Q(s+\varepsilon)\to Q(s)$ при $\varepsilon\to 0$ и функция $d\rho(l_v(s),\ q)/ds$ непрерывна по q, то из последнего неравенства заключаем, что

$$\begin{aligned}\rho'_+(s)&=\frac{d}{ds'}\rho\big(l_v(s'),\ q^+(s)\big)\big|_{s'=s},\\ \rho'_-(s)&=\frac{d}{ds'}\rho\big(l_v(s'),\ q^-(s)\big)\big|_{s'=s},\end{aligned}\tag{2.5}$$

где $q^+(s)$ и $q^-(s)$ — некоторые точки из $Q(s)$; в силу вышесказанного $q^+(s)=q^-(s)$ для почти всех s. Из (2.5) следует утверждение леммы 2.6.

Продолжим доказательство леммы 2.5.

Как показано выше, $Q(s)\to Q$ при $s\to 0$. Следовательно, если $q(s)\in Q(s)$, то вектор $\overline{l_v(s)q(s)}$ стремится к некоторому вектору $w\in\mathfrak{L}_p$. Покажем, что $\angle(v,\ w)=\angle(v,\ \mathfrak{L}_p)$. Пусть $\bar{w}$ — вектор из $\mathfrak{L}_p$, для которого $\angle(v,\ w)>\angle(v,\ \bar{w})$. Обозначим $\bar{q}=l_{\bar{w}}(s)\cap\partial C_{\tau_0}$ и покажем, что найдется $s(\varepsilon,\ w)>0$ такое, что для всех s, $0<s<s(\varepsilon,\ w)$, множество $Q(s)$ не пересекается с ε'-окрестностью $\bar{q}$, где $\varepsilon'=\varepsilon\tau_0(\angle(v,\ w)-\angle(v,\ \bar{w}))/2$. Действительно, если $q'=l_{\bar{v}}(s)\cap\partial C_{\tau_0}$, где вектор $\bar{v}$ из $\mathfrak{L}_p$ такой, что $\angle(v,\ \bar{v})=\angle(v,\ \mathfrak{L}_p)$, то

$$\rho(l_v(s),\ q')\leqslant\tau_0-s\cos\angle(v,\ \bar{v})+O(s^2).$$

Следовательно, для всех $q\in Q(s)\cap B(\bar{q},\ \varepsilon')$

$$\rho(l_v(s),\ q)\leqslant\tau_0-s\cos\angle(v,\ \bar{v})+O(s^2).\tag{2.6}$$

Но если $q\in Q(s)\cap B(\bar{q},\ \varepsilon')$, то

$$\angle(v,\overline{pq})\geqslant\angle(v,w)-\varepsilon\tau_0^{-1}-O(\varepsilon)\geqslant\angle(v,\bar{v})(1+c(\varepsilon,\tau_0)),$$

где $c(\varepsilon,\ \tau_0)\geqslant c>0$ для достаточно малых ε. Из последнего неравенства и формулы первой производной длины аналогично неравенству (2.6) находим

$$\rho(l_v(s),\ q)\geqslant\tau_0-s\cos(\angle(v,\ \bar{v})(1+c))-O(s^2),$$

что для малых s противоречит (2.6). Следовательно, для всех s, меньших некоторого $s(\varepsilon,\ w)$, множества $Q(s)$ и $B(\bar{q},\ \varepsilon')$ не пересекаются. Поэтому для $q(s)\in Q(s)$ вектор $\overline{l_v(s)q(s)}$ при $s\to 0$ может сходиться только к такому вектору $\bar{v}\in\mathfrak{L}_p$, для которого $\angle(v,\ \bar{v})=\angle(v,\ \mathfrak{L}_p)$. Отсюда нетрудно получить, что множества $Q(s)$ при $s\to 0$ сходятся к $\bar{Q}=\{q\in\partial C_{\tau_0}\,|\,\overline{pq}\in\mathfrak{L}_p,\ \angle(v,\overline{pq})=\angle(v,\mathfrak{L}_p)\}$. Так как для любой точки $q\in\bar{Q}$ по формуле первой вариации длины

$$\frac{d}{ds}\rho(l_v(s), q)|_{s=0} = -\cos\angle(v, \overline{pq}) = -\cos\angle(v, \mathfrak{L}_p),$$

то из формулы (2.5) имеем утверждение леммы. ■

Пусть $q_\tau(v)$ — точка пересечения ∂C_τ с геодезической $l_v(s)$, а $\rho_\tau(p, v) = \rho(p, q_\tau(v))$. По определению ∂C_τ для $\tau < \tau_0$ справедливо $\rho(q_\tau(v), \partial C_{\tau_0}) = \tau_0 - \tau$, поэтому

$$\rho_v(\rho_\tau(p, v)) = \tau_0 - \tau. \tag{2.7}$$

Как отмечалось выше, $\rho_v(s)$ — вогнутая функция. Так как $\rho_v(s)$ убывает по s, то, дифференцируя (2.7) два раза по τ, видим, что функция $\rho_\tau(p, v)$ вогнута. Поэтому для $\rho_\tau(p, v)$ определена производная справа по τ при $\tau = 0$. Дифференцируя (2.7) по τ и пользуясь утверждением леммы 2.5, получаем

$$\lim_{\tau\to 0} \varepsilon(\tau, p, v) = 0, \tag{2.8}$$

где $\varepsilon(\tau, p, v) = \cos^{-1}\angle(v, \mathfrak{L}_p) - \rho_\tau(p, v)/\tau$.

Лемма 2.7. $\varepsilon(\tau) = \sup\limits_{p,v\in N_p^\delta} \varepsilon(\tau, p, v) \to 0$ *при* $\tau \to 0$.

Доказательство. Достаточно проверить, что $\varepsilon(\tau, p, v)$ непрерывно зависит от τ, p и v из N_p^δ. Пусть заданы последовательности точек $p_n \in S$, сходящихся к точке p, и векторов $v_n \in \partial N_{p_n}^\delta$, сходящихся к вектору $v \in \partial N_p^\delta$. Так как $\angle(v_n, \mathfrak{L}_{p_n}) = \delta = \angle(v, \mathfrak{L}_p)$, то ввиду определения $\varepsilon(\tau, p, v)$ достаточно показать, что при $n \to \infty$

$$\rho_\tau(p_n, v_n) - \rho_\tau(p, v) = o(1)\tau. \tag{2.9}$$

Пусть $q = q_\tau(p, v)$, $q_n = q_\tau(p_n, v_n)$. Поскольку $p_n \to p$, $v_n \to v$, то угол p в треугольнике pqq_n стремится к нулю. Так как $q_n \to q$, вектор $\overline{qq_n}$, можно считать, стремится к некоторому вектору из $\partial K_q C_\tau$. По лемме 2.1 конус $K_q C_\tau$ содержит все векторы, образующие с $\overline{qp}$ угол не больше, чем $\pi/2 - \delta$. Поэтому угол q в треугольнике pqq_n не превосходит $\pi/2 + \delta$, т. е. при $n \to \infty$ отграничен от π. Следовательно, по формуле первой вариации длины при $n \to \infty$

$$\rho(p, q) - \rho(p, q_n) = O(\angle p)\rho(p, q) = o(1)\tau.$$

Аналогично рассматривая треугольник pq_np_n из условия $\angle q_n \to 0$ и $\angle p_n \equiv \pi/2$, находим

$$\rho(p, q_n) - \rho(p_n, q_n) = o(1)\tau.$$

Из последних двух соотношений следует (2.9). ■

Из леммы 2.7 вытекает

Лемма 2.8. *Для всех* $p \in S$ *и* $v \in \partial N_p^\delta$

$$|\rho_\tau(p, v) - \tau\cos^{-1}\delta| \leqslant \varepsilon(\tau)\tau,$$

где $\varepsilon(\tau) \to 0$ *при* $\tau \to 0$.

Отметим также важное следствие леммы 2.5:

Лемма 2.9. *Пусть* $\mathfrak{L}_p(v)$ — *векторы из* $\mathfrak{L}_p$, *ближайшие к* v (co — выпуклая оболочка). *Тогда*

$$\operatorname{dist}\left(\nu_{q_\tau(v)}\partial C_\tau, I_{pq_\tau(v)}(\mathrm{co}\,\mathfrak{L}_p(v))\right) \leqslant \varepsilon^*(\tau),$$

где $\varepsilon^*(\tau) \to 0$ *при* $\tau \to 0$.

Доказательство. Нетрудно видеть из определения семейства C_τ, что $\nu_{q_\tau(v)}\partial C_\tau$ есть выпуклая оболочка векторов $\overline{q_\tau(v)q}$, где q из ∂C_{τ_0}, $\tau_0 > \tau$, — ближайшие к $q_\tau(v)$ (см. лемму 11.4 из [6]). А так как по лемме 2.5 такие векторы $\overline{q_\tau(v)q}$ стремятся к векторам из $\mathfrak{L}_p$, ближайшим к v, то отсюда и следует утверждение леммы. ■

§ 3. ФУНКЦИЯ РАССТОЯНИЯ ОТ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ДО ГРАНИЦЫ ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА

В этом параграфе мы рассмотрим функцию расстояния f от геодезической $\gamma(t)$, лежащей в S, до гиперповерхности ∂C_τ вдоль векторного поля $v(\alpha(t), t)$ заданного на $\gamma(t)$. Более точно: пусть $v(\alpha(t), t)$ — поле векторов вдоль геодезической $\gamma(t)$, нормальных к S, т. е.

$$v(\alpha(t), t) \in \nu_{\gamma(t)}S, \tag{3.1}$$

где $\alpha(t)$ — координаты вектора (см. § 1). Пусть

$$q_\tau(\alpha(t), t) = (\exp_{\gamma(t)}(sv(\alpha(t), t))) \cap \partial C_\tau \tag{3.2}$$

— пересечение ∂C_τ с геодезической, выпущенной из точки $\gamma(t)$ в направлении вектора $v(\alpha(t), t)$. Тогда

$$f_\tau(\alpha(t), t) = \rho(\gamma(t), q_\tau(\alpha(t), t)). \tag{3.3}$$

Кривую $q_\tau(\alpha(t), t)$ можно рассматривать как пересечение ∂C_τ с пленкой Синга $\pi(s, t)$ на $\gamma(t)$, построенной с помощью векторного поля $v(\alpha(t), t)$:

$$\pi(s, t) = \exp_{\gamma(t)}(sv(\alpha(t), t)), \tag{3.4}$$

$$q_\tau(t) = q_\tau(\alpha(t), t) = \pi(s, t) \cap \partial C_\tau. \tag{3.5}$$

Тогда функция $f_\tau(t)$ — это расстояние от $\gamma(t)$ до пересечения пленки $\pi(s, t)$ с ∂C_τ:

$$f_\tau(t) = \rho(\gamma(t), q_\tau(t)). \tag{3.6}$$

Изучению функции f и посвящен настоящий параграф. В § 2 было показано, что функция $f_\tau(\alpha, t)$ липшиц-непрерывна для всех $v(\alpha)$ из N_p^δ, где $p = \gamma(0)$ и $\delta < \pi/2$, по α и t (см. леммы 2.2 и 2.4). Если бы многообразие V^n было плоским, а поле $v(\alpha(t), t)$ — полем параллельных векторов вдоль $\gamma(t)$, то, очевидно, функция f была бы вогнутой (это следует из выпуклости C_τ) и, будучи определенной для всех t и ограниченной,— просто постоянной. В общем случае, когда тензор кривизны V^n не обращается тождественно в нуль, а поле векторов $v(\alpha(t), t)$ параллельно вдоль $\gamma(t)$ (т. е. $\alpha(t) \equiv \alpha(0)$) и $v(\alpha(0), 0) \in N_p^\delta$, можно доказать, что в каждой точке t_0, у, вообще говоря, негладкой функции $f_\tau(\alpha, t) \doteq f_\tau(\alpha(0), t)$ для достаточно малых τ существует гладкая опорная «почти выпуклая» функция $\bar{f}_{t_0}(t)$, т. е. такая, что при $t = t_0$

$$\bar{f}_{t_0}(t_0) = f_\tau(\alpha, t_0), \tag{3.7}$$

для всех t из некоторой окрестности параметра t_0

$$\bar{f}_{t_0}(t) \geqslant f_\tau(\alpha, t) \tag{3.8}$$

и $\bar{f}_{t_0}$ «почти вогнута» в точке t_0 в следующем смысле: для некоторой константы K, зависящей лишь от δ,

$$\bar{f}''_{t_0}(t_0) \leqslant K\left(\bar{f}_{t_0}(t_0)\right)^{b+1}. \tag{3.9}$$

Чтобы построить $\bar{f}_{t_0}$, выберем произвольно в точке $q = q_\tau(\alpha(t_0), t_0)$ опорную к K_qC_τ гиперплоскость $\overline{H}$, определим гиперповерхность $H = \exp_q \overline{H}$ и рассмотрим функцию $\bar{f}_{t_0}(t) = \rho(\gamma(t), \bar{q}(t))$, где $\bar{q}(t) = \pi(s, t) \cap H$.

Лемма 3.1. *Если векторное поле $v(\alpha(t), t)$ гладкое и $v(\alpha(t_0), t_0)$ лежит в $N^\delta_{\gamma(t_0)}$, $\delta < \pi/2$, то для всех достаточно малых τ, точки $q = q_\tau(\alpha(t_0), t_0)$ и произвольной опорной гиперплоскости $\overline{H}$ к K_qC_τ кривая $\bar{q}(t)$*

$$\bar{q}(t) = \exp_{\gamma(t)}(sv(\alpha(t), t)) \cap H$$

пересечения пленки π и $H=\exp_q \bar{H}$ при t, лежащих в некоторой достаточно малой окрестности параметра t_0, определена и является гладкой кривой, а функция $\bar{f}_{t_0}(t)=\rho(\gamma(t), \bar{q}(t))$ гладкая.

Доказательство. Действительно, если $\varepsilon_1 < r_{in}(V^n)$, то ε_1-окрестность B_1 точки q в H является гладко вложенной гиперповерхностью в V^n, так как отображение $\exp_q$ на B_1 — диффеоморфизм на свой образ. Для всякого $\varepsilon_2 < r_{in}(V^n)$ отображение $\exp_p$ также является диффеоморфизмом ε_2-окрестности B_2 точки p на свой образ, причем нормы его дифференциала и дифференциала обратного отображения ограничены некоторой константой, зависящей только от ε_2. Поэтому если $f(t_0)+\varepsilon_1 < r_{in}$ (а это так в силу неравенства (2.4) для достаточно малых τ), то $B_3 = \exp_p^{-1}(B_1 \cap B_2)$ и $\tilde{\pi}=\exp_p^{-1}(\pi \cap B_2)$ — гладкие гиперповерхность и поверхность соответственно. Из леммы 2.1 следует, что в точке $\tilde{q}$ они пересекаются трансверсально. Пользуясь стандартными теоремами, отсюда легко заключить, что $\tilde{\pi}$ пересекает трансверсально B_3 также для всех t из достаточно малой окрестности параметра t_0, а пересечение является гладкой кривой $\tilde{q}(t)$. Образ этой кривой при отображении $\exp_p$ есть кривая $\bar{q}(t)$, откуда следует утверждение леммы.

Свойство (3.7) выполнено по определению, а (3.8) следует из того, что C_τ — абсолютно выпуклое множество и поэтому H лежит вне его внутренности. Докажем (3.9). Чтобы не усложнять обозначений, опорную функцию $\bar{f}_{t_0}$ обозначим через $\bar{f}$.

Лемма 3.2. *Пусть $v(\alpha, t)$ — поле параллельных векторов вдоль $\gamma(t)$, нормальных к S так, что $v(\alpha, 0)$ лежит в N_p^δ, где $p=\gamma(0)$ и $\delta < \pi/2$. Пусть также $q=q_\tau(\alpha, t_0)$, (см. (3.2)), $\bar{H}$ — произвольная опорная к K_qC_τ гиперплоскость в T_qV^n и $H=\exp_q \bar{H}$. Тогда для функции $\bar{f}(t)=\rho(\gamma(t), \bar{q}(t))$, где $\bar{q}(t)=\exp_{\gamma(t)}(sv(\alpha, t))\cap H$, выполнено неравенство $\bar{f}''(t_0) \leqslant K(\bar{f}(t_0))^{b+1}$; здесь константа K зависит лишь от δ.*

Доказательство леммы 3.2 будет дано ниже.

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $t_0=0$ и $\alpha=(1, 0\ldots 0)$. В этом случае все координаты (кроме координат с номерами 1 и d) кривой $\bar{q}(t)$ в системе координат Ферми с d-осью $\gamma(t)$ (см. § 1) равны нулю, а координаты с номерами 1 и d равны по определению $\bar{f}(t)$ и t соответственно. Поэтому вектор скорости $\bar{e}$ кривой $\bar{q}(t)$ в точке q имеет следующие координаты: $\bar{e}^1=\bar{f}^1(0)$, $\bar{e}^d=1$, $\bar{e}^k=0$ для $k\neq 1, d$. Выпустим из точки q геодезическую $\tilde{\gamma}(t)$ с таким же вектором скорости в точке q:

$$\frac{d\tilde{\gamma}^k}{dt}(0)=\begin{cases}\bar{f}'(0), & k=1,\\ 1, & k=d,\\ 0, & k\neq 1, d,\end{cases} \tag{3.10}$$

а параметр t на $\tilde{\gamma}(t)$ выберем равным ее d-координате. Оценку второй производной функции $\tilde{f}(t)=\rho(\gamma(t), \tilde{\gamma}(t))$ дает следующая

Лемма 3.3. *Имеет место соотношение*

$$\tilde{f}''(0)=-(1-O(\tau))\int_0^f R[v(\alpha), e](\theta)\,d\theta+O\left((\tilde{f}'(0))^2\tau^{b+1}\right)+O\left(\tau^{2b+2}\right),$$

где через $R[v(\alpha, t), e](\theta)$ обозначена секционная кривизна $K_{\sigma(\gamma(t), v(\alpha, t), \dot{\gamma}(t), \theta)}$.

Доказательство. Соединим точки $\gamma(t)$ и $\tilde{\gamma}(t)$ кратчайшей $l_t(\xi)$, где параметр ξ пропорционален длине и изменяется от 0 до $f(0)$ при всех t. Вектор скорости геодезической $l_t(\xi)$ в точке $\xi=0$, соединяющей точки $\gamma(t)$ и $\tilde{\gamma}(t)$ с координатами $(0,\ldots 0, t, 0,\ldots 0)$ и $(\tilde{\gamma}^1(t),\ldots \tilde{\gamma}^{d-1}(t), t, \tilde{\gamma}^{d+1}(t),\ldots)$ соответственно, имеет координаты $\dot{l}_t(0)=f^{-1}(0)(\tilde{\gamma}^1(t), \ldots$

$\ldots, \gamma^{d-1}(t), 0, \gamma^{d+1}(t), \ldots)$. При этом по лемме 1.4

$$K_{\sigma(p,v(\alpha,0),e,\theta)} = R_{1d,d1}(0,\ \theta) + O(\theta^{2b+2}).$$

Тогда в силу (3.10)

$$\frac{D}{dt}\dot{l}_t(0)\,|_{t=0} = f^{-1}(0)\left(\frac{\partial f(\alpha,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}\right)\dot{l}_0(0). \tag{3.11}$$

Семейство геодезических $l_t(\xi)$ задает на $l(\xi)=l_0(\xi)$ якобиево поле $\eta(\xi)=\frac{\partial}{\partial t}l_t(\xi)\,|_{t=0}$, которое удовлетворяет начальным условиям

$$\eta(0)=\frac{\partial}{\partial t}l_t(0)\,|_{t=0}=\dot{\gamma}(0)=e_d,$$

$$\frac{D}{\partial\xi}\eta(\xi)\,|_{\xi=0}=\frac{D}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial t}l_t(\xi)\,|_{t=\xi=0}=\frac{D}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\xi}l_t(\xi)\,|_{\xi=t=0}=\frac{D}{\partial t}\dot{l}_t(0)\,|_{t=0}=\bar{f}^{-1}(0)\bar{f}'(0)\dot{l}(0)$$

в силу (3.11). Вдоль геодезической $l(\xi)$ построим систему координат Ферми так, что $\dot{l}(\xi)=\tilde{e}_1(\xi)$, $\tilde{e}_d=e_d$. Тогда утверждение леммы 3.3 будет следовать из соотношения

$$\bar{f}''(0)=-(1-O(\tau))\int_0^{f(0)}\widetilde{R}_{1d,d1}(\theta)\,d\theta+O\left(|\bar{f}'(0)|^2\tau^{b+1}\right)+O\left(\tau^{2b+2}\right). \tag{3.12}$$

По формуле второй вариации для семейства геодезических $l_t(\xi)$ вторая производная их длин по t при $t=0$ имеет вид

$$\bar{f}''(0)=\left(\frac{D}{\partial t}\dot{\tilde{\gamma}}(t)\,|_{t=0},\ \dot{l}(f(0))\right)+\int_0^{f(0)}\left(\sum_{k\neq 1}(\eta'^k(\xi))^2+\sum_{k,l\neq 1}\widetilde{R}_{1k,1l}(\xi)\eta^k(\xi)\eta^l(\xi)\right)d\xi \tag{3.13}$$

(см. [5, с. 141]).

Параметр t на $\tilde{\gamma}(t)$, вообще говоря, не будет длиной дуги. Поэтому внеинтегральный член в формуле (3.13) может быть отличен от нуля. Но так как геодезическая кривизна $\tilde{\gamma}(t)$ равна нулю, то

$$\frac{D}{\partial t}\dot{\tilde{\gamma}}(t)=\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|'\,\dot{\tilde{\gamma}}(t)/\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|. \tag{3.13'}$$

Дифференцируя по t при $t=0$ выражение

$$\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|^2=g_{ij}(\tilde{\gamma}(t))\frac{d\tilde{\gamma}^i}{dt}(t)\cdot\frac{d\tilde{\gamma}^j}{dt}(t)$$

и пользуясь (3.10), а также тем, что в указанных координатах Ферми $g_{11}\equiv 1$, находим

$$(\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|^2)'\,|_{t=0}=2\frac{\partial g_{1d}}{\partial\alpha^1}(q)(\bar{f}'(0))^2+\frac{\partial g_{dd}}{\partial\alpha^1}(q)(\bar{f}'(0))+\frac{\partial g_{1d}}{\partial t}(q)(\bar{f}'(0))+$$
$$+\frac{\partial g_{dd}}{\partial t}(q)+2g_{1i}(q)\left(\frac{d^2\tilde{\gamma}^i}{dt^2}(0)\right)(\bar{f}'(0))+2g_{id}(q)\frac{d^2\tilde{\gamma}^i}{dt^2}(0). \tag{3.14}$$

Если $\tilde{\gamma}(t)$ параметризовать длиной дуги $s(t)$, то $\tilde{\gamma}(s)$ будет удовлетворять уравнению геодезической

$$\frac{d^2\tilde{\gamma}^i(s)}{ds^2}+\Gamma^i_{jk}(\tilde{\gamma}(s))\frac{d\tilde{\gamma}^j(s)}{ds}\cdot\frac{d\tilde{\gamma}^k(s)}{ds}=0. \tag{3.15}$$

А так как

$$\frac{d^2\tilde{\gamma}^i}{dt^2}(0)=\frac{d^2\tilde{\gamma}^i}{ds^2}(0)\cdot\left(\frac{ds}{dt}(0)\right)^2+\frac{d\tilde{\gamma}^i}{ds}(0)\cdot\frac{d^2s}{dt^2}(0),$$

то в силу условий (3.10) на $\dot{\tilde{\gamma}}(0)$, уравнения (3.15), а также оценок из § 1 компонент метрического тензора и символов Кристоффеля указанной системы координат Ферми из равенства (3.14) следует

$$(\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|^2)'|_{t=0} = O(|\bar{f}'(0)|\tau^{b+1}) + O(\tau^{2b+2}) + 2|f'(0)|^2 \frac{d^2 s}{dt^2}(0). \quad (3.16)$$

Из леммы 2.3 вытекает $|\bar{f}'(0)| = 0(\tau)$, откуда $\|\dot{\tilde{\gamma}}(0)\| = 1 + O(\tau)$. Очевидно, что

$$\frac{d^2 s}{dt}(0) = (\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|)'|_{t=0}, \quad (3.17)$$

поэтому из равенства (3.16) имеем

$$(\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|)'|_{t=0} = O(|\bar{f}'(0)|\tau^{b+1}) + O(\tau^{2b+2}). \quad (3.18)$$

Из (3.10), (3.13) и равенства $(\dot{l}(\bar{f}(0)))^i = \delta_{i1}$ заключаем

$$\left(\frac{D\dot{\tilde{\gamma}}}{\partial t}(0), \dot{l}(\bar{f}(0))\right) = O(|\bar{f}'(0)|^2 \tau^{b+1}) + O(\tau^{2b+2}). \quad (3.19)$$

Для завершения доказательства осталось оценить интегральный член в формуле (3.13). По лемме 1.1 для достаточно малых ξ и $k \neq 1$

$$|\eta'^k(\xi)| \leqslant 2\int_0^\xi \sqrt{\tilde{R}_{1d,d1}(\theta)}\,d\theta$$

или, пользуясь неравенством Коши — Буняковского,

$$|\eta'^k(\xi)|^2 \leqslant 4\xi \int_0^\xi \tilde{R}_{1d,d1}(\theta)\,d\theta.$$

Аналогично для k, $l \neq 1$, d

$$|\eta^k(\xi)\eta^l(\xi)| \leqslant \left(2\xi\int_0^\xi \sqrt{\tilde{R}_{1d,d1}(\theta)}\,d\theta\right)^2 \leqslant 4\xi^3 \int_0^\xi \tilde{R}_{1d,d1}(\theta)\,d\theta.$$

Так как

$$|\eta^d(\xi) - 1| \leqslant 2\xi \int_0^\xi \sqrt{\tilde{R}_{1d,d1}(\theta)}\,d\theta$$

и

$$|\tilde{R}_{1d,1k}(\theta)| \leqslant \sqrt{\tilde{R}_{1d,d1}(\theta)} = O(\theta^b),$$

то

$$\left|\int_0^\xi \tilde{R}_{1d,1k}(\theta)\eta^d(\theta)\eta^k(\theta)\,d\theta\right| \leqslant \left|\int_0^\xi \tilde{R}_{1d,1k}(\theta)\eta^k(\theta)\,d\theta\right| +$$
$$+ \int_0^\xi \sqrt{\tilde{R}_{1d,d1}(\theta)}\left(2\theta\int_0^\theta \sqrt{\tilde{R}_{1d,d1}(\mu)}\,d\mu\right)d\theta + O(\xi^{2b}).$$

Аналогично

$$\left|\int_0^\xi \tilde{R}_{1d,1k}(\theta)\eta^k(\theta)\,d\theta\right| \leqslant \int_0^\xi \tilde{R}_{1d,d1}(\theta)\,d\theta +$$
$$+\int_0^\xi \sqrt{\tilde{R}_{1d,d1}(\theta)}\left(2\theta\int_0^\theta \sqrt{\tilde{R}_{1d,d1}(\mu)}d\mu\right)d\theta + O(\xi^{2b+2}) = \int_0^\xi \tilde{R}_{1d,d1}(\theta)\,d\theta + O(\xi^{2b+2}).$$

Подставляя полученные оценки в (3.13), мы получаем (3.12), откуда следует утверждение леммы. ■

Доказательство леммы 3.2. Сравним векторы направлений кратчайших $v(t)=\gamma(t)\bar{q}(t)$, $\tilde{v}(t)=\gamma(t)\tilde{\gamma}(t)$, соединяющих точку $\gamma(t)$ с точками $\bar{q}(t)$ и $\tilde{\gamma}(t)$. Как уже отмечалось, если $s(t)$ — длина дуги геодезической $\tilde{\gamma}(t)$, то

$$\frac{d^2\tilde{\gamma}^k(s)}{ds^2}+\Gamma^k_{ij}(\tilde{\gamma}(t))\frac{d\tilde{\gamma}^i(s)}{ds}\frac{d\tilde{\gamma}^j(s)}{ds}=0. \tag{3.20}$$

Воспользуемся теперь тем, что по определению

$$\begin{gathered}\bar{q}^k(0)=\tilde{\gamma}^k(0),\\ \frac{d}{dt}\left(\bar{q}^k(t)-\tilde{\gamma}^k(t)\right)\Big|_{t=0}=0.\end{gathered} \tag{3.21}$$

Переходя в уравнении (3.20) к переменной t, в силу (3.17), (3.18), (3.21), а также оценок § 1 символы Кристоффеля используемой системы координат Ферми, получаем ($k\neq 1$)

$$\tilde{\gamma}^k(t)=\bar{q}^k(0)-\frac{t^2}{2}\left(\Gamma^k_{dd}(q)+\bar{f}'(0)O\left(\tau^{b+1}\right)+O\left(\tau^{2b+2}\right)\right)+o(t^2), \tag{3.22}$$

откуда, пользуясь (3.10) и (3.21), мы можем оценить угол между векторами $v(t)$ и $\tilde{v}(t)$:

$$\angle(v(t),\tilde{v}(t))=O\left(\bar{f}^{-1}(0)\right)\left(\sum_{k=2}^{n}\left(\tilde{\gamma}^k(t)-\bar{q}^k(t)\right)^2\right)^{1/2}=t^2O\left(\tau^b\right)+o(t^2). \tag{3.23}$$

Рассмотрим треугольник $\gamma(t)\tilde{\gamma}(t)\bar{q}(t)$. По определению стороны $\gamma(t)\tilde{\gamma}(t)$ и $\gamma(t)\bar{q}(t)$ этого треугольника имеют в вершине $\gamma(t)$ направления $\tilde{v}(t)$ и $v(t)$ соответственно. Поэтому угол $\gamma(t)$ в этом треугольнике, как показывает полученная оценка на $\angle(v(t),\ \tilde{v}(t))$, равен $t^2O(\tau^b)+o(t^2)$. Угол $\tilde{\gamma}(t)$ этого же треугольника при $t\to 0$ стремится к углу между $-\overline{qp}$ и некоторым вектором, касательным к гиперповерхности H в точке q. Нормаль этой гиперповерхности в точке q лежит в конусе нормалей к ∂C_τ в точке q, а так как по лемме 2.1 $\angle(-\overline{qp},\ \nu_q\partial C_\tau)\leqslant\delta$, то угол $\tilde{\gamma}(t)$ в треугольнике $\gamma(t)\tilde{\gamma}(t)\bar{q}(t)$ стремится при $t\to 0$ к некоторому углу в интервале $(\pi/2-\delta,\ \pi/2+\delta)$. Последнее позволяет оценить сторону $\tilde{\gamma}(t)\bar{q}(t)$ в треугольнике:

$$\rho(\tilde{\gamma}(t),\ \bar{q}(t))=O(\bar{f}(0))\angle(v(t),\ \tilde{v}(t))\cos^{-1}(\delta)=t^2O(\tau^{b+1})+o(t^2).$$

Из последнего неравенства и неравенства треугольника легко получаем

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\rho(\gamma(t),\tilde{\gamma}(t))-\rho(\gamma(t),\bar{q}(t))\right)\big|_{t=0}=O\left(\tau^{b+1}\right),$$

т. е.

$$|\tilde{f}''(0)-\bar{f}''(0)|=O(\tau^{b+1}).$$

Откуда, пользуясь оценкой (3.12), получаем утверждение леммы. ■

Ниже нам понадобится существование опорной функции к функции $f_\tau(\alpha(t),\ t)$, когда поле $v(\alpha(t),\ t)$ уже не будет параллельным вдоль $\gamma(t)$, но будет выполнено

$$v(\alpha(t),\ t)\in N^{\delta}_{\gamma(t)},\quad \delta<\pi/2, \tag{3.24}$$

$$\|Dv(\alpha(t),\ t)/\partial t\|\leqslant K\tau^{b+1}. \tag{3.25}$$

Покажем, что и в этом случае у $f_\tau(\alpha(t),\ t)$ при каждом параметре t_0 найдется опорная функция со свойствами (3.7)—(3.9). Для этого мы используем вместо леммы 3.3 следующую лемму:

Лемма 3.4. *Пусть* $\gamma_1(t)=\exp_q(s(t)\cdot e_1)$ — *геодезическая, выходящая из точки* q *в направлении* e_1 *таком, что* $\varphi=\angle(e_1,\ \bar{e})=O(\tau^{b+2})$, *параметр*

t *на которой выбран так, что* $\gamma(t)$ — *ближайшая к* $\gamma_1(t)$ *на геодезической* γ. *Тогда*

$$\frac{d^2}{dt^2}(\rho(\gamma(t), \gamma_1(t)) - \rho(\gamma(t), \tilde{\gamma}(t)))|_{t=0} = O(\tau^{2b+3}).$$

Доказательство. Семейство кратчайших $\gamma(t)\gamma_1(t)$ задает на pq якобиево поле $\eta_1(\xi)$, $0 \leqslant \xi \leqslant \bar{f}(0)$. Покажем, что это поле мало отличается от рассмотренного при доказательстве леммы 3.3 поля η. Действительно, если $\bar{v}(t) = \overline{\gamma(t)\gamma_1}(t)$, то, как следует из условия леммы,

$$\angle(v(t), \bar{v}(t)) = tO(\tau^{b+1}),$$

$$\frac{D}{\partial\xi}\bar{\eta}(\xi)|_{\xi=0} = \frac{D}{\partial t}\bar{v}(t)|_{t=0} = O(\tau^{b+1}),$$

откуда следует, что якобиево поле $\tau^{-b-1}(\bar{\eta}(\xi) - \eta(\xi))$ удовлетворяет начальным условиям

$$\tau^{-b-1}(\bar{\eta}(0) - \eta(0)) = 0,$$

$$\left\| \frac{D}{\partial\xi}\tau^{-b-1}(\bar{\eta}(\xi) - \eta(\xi))|_{\xi=0} \right\| = O(1) \leqslant K$$

для некоторого K. А так как для данного K, очевидно, по непрерывности найдется ρ, что для всех якобиевых полей μ с начальными условиями по модулю не большими чем K для $\xi < \rho$ справедливо: $\|D\mu(\xi)/\partial\xi\| \leqslant 2K$, то для всех $\xi < \bar{f}(0) < \rho$

$$\left\| \frac{D}{\partial\xi}(\bar{\eta}(\xi) - \eta(\xi)) \right\| \leqslant 2K\tau^{b+1}.$$

Пользуясь ранее найденной при доказательстве леммы 2.2 оценкой на $D\eta(\xi)/\partial\xi$, получаем

$$\left\| \frac{D}{\partial\xi}\bar{\eta}(\xi) \right\| = O(\tau^{b+1}).$$

Откуда, повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве леммы 3.3, легко следует утверждение леммы. ■

Итак, мы выяснили, что у функции $f_\tau(\alpha(t), t)$, если векторное поле $v(\alpha(t), t)$ вдоль $\gamma(t)$ удовлетворяет условиям (3.24) и (3.25), в каждой точке t_0 существует опорная функция $\bar{f}_{t_0}(t)$ со свойствами (3.7)—(3.9). При этом константа K, как следует из доказательства леммы 3.2, может быть выбрана единой для всех t_0. А так как по лемме 2.1 для всех $v(\alpha(t), t)$ из $N^{\delta}_{\gamma(t)}$, $\delta < \pi/2$, имеем $f_\tau(\alpha(t), t) \leqslant K(\delta)\tau$, то функция $f_\tau(\alpha(t), t) - K \cdot \tau^{b+1}t^2$ вогнута. Последнее означает, что у функции $f_\tau(\alpha(t), t)$ в каждой точке существуют производные справа и слева: f'_+ и f'_- соответственно, которые почти везде совпадают. И каждая односторонняя производная, скажем f'_+, является функцией с ограниченным изменением. Следовательно,

$$f'_+(t) = \delta(t) + \chi(t) + F(t), \tag{3.26}$$

где $\delta(t)$ — функции скачков, $\chi(t)$ — сингулярная непрерывная функция, производные δ и χ всюду, за исключением множества меры нуль, определены и равны нулю, а $F(t)$ — абсолютно непрерывная функция, восстанавливаемая по своей производной

$$F(T) - F(0) = \int_0^T F'(t)\,dt. \tag{3.27}$$

При этом из того, что $f_\tau(\alpha(t), t)$ почти выпукла, т. е. функции $\bar{f}_{t_0}$ удовлетворяют условию (9), следует, что δ и χ — монотонно невозрастающие функции, и поэтому

$$\left|\int_0^T F'(t)\,dt\right| \leqslant |f'_+(T) - f'_+(0)|. \tag{3.28}$$

Понятно, что если пленка $\pi(s, t)$ гладкая, например, выполнены (3.24), (3.25), то дифференциальные свойства функции f связаны с аналогичными свойствами ∂C_τ. Известно, например, что гиперповерхность ∂C_τ почти всюду дифференцируема, а именно: за исключением множества хаусдорфовой коразмерности 1 имеет единственную опорную гиперповерхность (см. [7]). Кроме этого почти всюду у ∂C_τ можно определить аналог второй формы (см. [6]). Найдем связь $F'(t)$ и геодезической кривизны ∂C_τ в соответствующей точке $q_\tau(\alpha(t), t)$ в направлении $\dot{q}_\tau(\alpha(t), t)$ там, где указанные величины определены.

Определение 1. Пусть q — точка на ∂C_τ, e — вектор, лежащий на границе касательного конуса $K_q C_\tau$, т. е. такой, что $\rho(\exp_q(se), \partial C_\tau) = o(s)$ при $s \to 0$. Тогда *геодезической кривизной $G(q, e)$ гиперповерхности ∂C_τ в точке q и в направлении вектора e* будем называть предел (конечный или бесконечный):

$$G(q, e) = \lim_{s\to 0} \rho(\exp_q(se), \partial C_\tau)/(s^2/2).$$

Пусть теперь q — регулярная точка гиперповерхности ∂C_τ, т. е. такая, где касательный конус $K_q C_\tau$ является полупространством; существует единственная опорная гиперплоскость $\bar{H}$, из нормали к которой ν состоит конус нормалей $\nu_q \partial C_\tau$ к гиперповерхности ∂C_τ в точке q. Пусть вектор e — единичный опорный к ∂C_τ в точке q, т. е. нормален к ν, а $q(s)$ — последовательность точек на ∂C_τ ближайших к $\exp_q(se)$. При $s \to 0$ точки $q(s)$ сходятся к точке q, а векторы $\overline{qq}(s)$ — к e.

Определение 2. *Оператором $A_q(e)$* назовем многозначное отображение, сопоставляющее вектору e множество векторов $w = \lim\limits_{s\to 0} s^{-1}(I_{q(s)q} \times \times(\nu(s)) - \nu)$, где $\nu(s)$ — произвольно выбранный вектор из конуса нормалей $\nu_{q(s)} \partial C_\tau$.

Оператор A можно определить и в нерегулярных точках гиперповерхности, но при этом векторы e надо выбирать лежащими на границе касательного конуса $K_q C_\tau$, а вектор ν — ближайшим к e из $\nu_q \partial C_\tau$.

Определение 3. *Второй формой* $\mathrm{II}(e_1, e_2)$ *поверхности ∂C_τ в точке q* назовем отображение, сопоставляющее двум векторам e_1 и e_2, лежащим на границе опорного конуса $K_q C_\tau$, число

$$\mathrm{II}(e_1, e_2) = \sup\{(w, e_2) \mid w \in A_q(e_1)\}.$$

Форма II, вообще говоря, несимметрична и нелинейна и называется формой только потому, что в точках, где существует настоящая вторая фундаментальная форма, она с ней совпадает.

Лемма 3.5. *Если в точке q определены $G(q, e)$ и $\mathrm{II}(e, e)$, то $G(q, e) = \mathrm{II}(e, e)$.*

Доказательство. Пусть $\gamma(s) = \exp_q(se)$, $q(s)$ — точка на ∂C_τ, ближайшая к $\gamma(s)$, $\nu(s) = \overline{q(s)\gamma(s)}$ — вектор, который (как легко видеть) лежит в $\nu_{q(s)} \partial C_\tau$. Также легко видеть, что из выпуклости C_τ следует непрерывность кривой $q(s)$ для малых s, а из $\rho(\gamma(s), q(s)) = \rho(\gamma(s), \partial C_\tau)$, что функция $\rho(s) = \rho(\gamma(s), q(s))$ липшиц-непрерывна с константой 1. Более того, у функции $\rho(s)$ при каждом значении $s_0 > 0$ существует гладкая опорная функция ρ_{s_0} такая, что $\rho''_{s_0}(s_0)$ ограничены при достаточно малых s_0 и стремятся к нулю при $s_0 \to 0$. Действительно, пусть $\bar{H}(s_0)$ — гиперплоскость в $T_{q(s_0)} V^n$, ортогональная вектору $\nu(s_0)$, и $H(s_0) = \exp_{q(s_0)}(\bar{H}(s_0))$. Тогда ввиду выпуклости C_τ следует, что $H(s_0)$ лежит вне внутренности C_τ и поэтому

$$\rho(s) \geqslant \rho_{s_0}(s), \quad \rho(s_0) = \rho_{s_0}(s_0). \tag{3.29}$$

Прямой и несложный подсчет показывает, что у всех гиперповерхностей $H(s)$ вторая форма в точке $q(s)$ вырождается (тождественно нулевая), а в точках q' на $H(s)$, близких к $q(s)$, не превосходит по норме $K\rho(q', q(s))$, где K — константа, зависящая лишь от нормы оператора кривизны V^n в точках $q'q(s)$. Поэтому для всех точек q' на $H(s)$ из некоторой s_1-окрестности B_{s_1} точки $q(s)$ для достаточно малого s_1 и всех s, $0 < s < s_2$, где s_2 фиксирован, отображение

$$\nu_s\colon \bar{B}_s = B_s \times (-s_1, s_1) \to V^n,$$

где $\nu_s(q', \theta) = \exp_{q'}(\theta\nu_{q'}H(s))$, является гладким взаимно однозначным отображением на свой образ $\nu_s(\bar{B}_s)$, а векторное поле $\partial\nu_s(q', \theta)/\partial\theta$ — гладким полем на $\nu_s\bar{B}_s$. Если s_0 достаточно мало, то точки $\gamma(s_0)$ попадают в $\nu_s(\bar{B}_s)$ вместе с некоторой своей окрестностью. При $s_0 \to 0$ вектор $\dot{\gamma}(s_0)$ стремится к e, вектор $\nu(s_0) = \partial\nu_{s_0}(\cdot, 0)/\partial\theta$ — к ν и e ортогонален ν, следовательно, кривая $\gamma(s)$ при малых s трансверсальна полям $\partial\nu_s(q', \theta)/\partial\theta$. По теореме о неявной функции отображение $p_{s_0}\nu_{s_0}^{-1}$, где p_{s_0} — проектирование $p_{s_0}\colon \bar{B}_{s_0} = B_{s_0} \times (-s_1, s_1) \to B_{s_0}$ вдоль второго сомножителя, переводит $\gamma(s)$ при малых s_0 и малых $(s - s_0)$ в гладкую кривую $q_{s_0}(s)$ на $H(s_0)$. Семейство кривых $q_{s_0}(s)$ гладко зависит от s_0, поэтому найдется константа K такая, что все геодезические кривизны $q_{s_0}(s)$ при $s = s_0$ и достаточно малых s_0 по модулю не превосходят K. Ввиду $\rho_{s_0}(s) = \rho(\gamma(s), H(s_0)) = \rho(\gamma(s), q_{s_0}(s))$ для всех достаточно малых s_0

$$\left|\rho''_{s_0}(s_0)\right| \leqslant K' \tag{3.30}$$

для некоторой константы K'. Поскольку у $\rho(s)$ существует гладкая опорная функция ρ_{s_0} со свойствами (3.29), (3.30), $\rho(s)$ имеет в каждой точке, за исключением множества I меры нуль, производную $\rho'(s)$, которая совпадает с $\rho'(s)$, т. е.

$$\rho(s) = \int\limits_{[0,s]\setminus I} \left(\frac{d\rho_\mu}{d\theta}(\theta)\big|_{\mu=0}\right) d\theta = \int\limits_0^s \left(\frac{d\rho_\mu}{d\theta}(\theta)\big|_{\mu=0}\right) d\theta. \tag{3.31}$$

Из формулы первой вариации длины находим, что

$$\frac{d\rho_\mu}{d\theta}(\theta)\big|_{\mu=0} = (\dot{\gamma}(\theta), \bar{\nu}(\theta)),$$

где $\bar{\nu}(\theta) = I_{q(\theta)\gamma(\theta)}(\gamma(\theta))$. Хорошо известно, что при $\theta \to 0$ норма оператора голономии $(I_{q(\theta)q} - I_{\gamma(\theta)q}(I_{q(\theta)\gamma(\theta)}))$ не превосходит величины, равной константе, умноженной на площадь плоского треугольника с такими же длинами сторон, как у треугольника $qq(\theta)\gamma(\theta)$, и на норму оператора кривизны многообразия V^n. Поэтому

$$\|I_{\gamma(\theta)q}(\bar{\nu}(\theta)) - I_{q(\theta)q}(\nu(\theta))\| \leqslant K\theta\rho(\theta). \tag{3.32}$$

А так как по определению

$$\lim_{\theta\to 0} \theta^{-1}(e, I_{q(\theta)q}(\nu(\theta))) = \mathrm{II}(e, e),$$

из (3.32) и равенства $I_{\gamma(\theta)q}(\dot{\gamma}(\theta)) = e$ следует, что

$$\theta^{-1}\frac{d\rho_\mu}{d\theta}(\theta)\big|_{\mu=\theta} \to \mathrm{II}(e, e)$$

при $\theta \to 0$. Подставляя полученное соотношение в (3.31), получаем утверждение леммы. ■

Ниже понадобятся оценки, доказанные в следующих леммах.

Лемма 3.6. *Если q — регулярная точка на ∂C_τ, а e_1 и e_2 — ортогональные опорные векторы в этой точке, то*

$$|\mathrm{II}(e_1, e_2)|^2 \leqslant G(e_1)\overline{G}(e_2),$$

где $\overline{G}(e) = \max\{G(e), G(-e)\}$.

Доказательство. Пусть $\gamma_i(s) = \exp_q(se_i)$, $i = 1, 2$; $q_i(s)$ — точки на ∂C_τ, ближайшие к $\gamma_i(s)$, а $\nu_i(s)$ — произвольно выбранные векторы из $\nu_{q_i(s)}\partial C_\tau$. Легко видеть, что

$$\overline{qq_i}(s) = e - s^{-1}\rho(\gamma_i(s), q_i(s))\overline{\nu}_i(s) + o(s),$$

где $\overline{\nu}_i(s) = I_{q_i(s)q}(\nu_i(s))$. В силу регулярности точки q векторы $\overline{\nu}_i(s)$ сходятся к $\nu = \nu_q\partial C_\tau$ при $s \to 0$, следовательно, ввиду определения $G(e_i)$

$$\overline{qq_i}(s) = e - \frac{s}{2}G(e_i)\nu + o(s). \tag{3.33}$$

Поэтому, учитывая равенство $\rho(q, q_i(s)) = s + o(s)$, имеем

$$\overline{q_1(s)q_2}(\theta s) = I_{qq_1(s)}\left(\frac{\theta s e_2 - \frac{(\theta s)^2}{2}G(e_2)\nu - se_1 + \frac{s^2}{2}G(e_1)\nu}{\sqrt{1+\theta^2}}\right).$$

Так как $\nu_1(s) = \nu + sA(e_1) + o(s)$ и ввиду выпуклости C_τ

$$(\nu_1(s), \overline{q_1(s)q_2}(\theta s)) \leqslant 0,$$

то для всех $\theta > 0$ получаем

$$(A(e_1), e_2)\frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} \leqslant \frac{G(e_1)}{\sqrt{1+\theta^2}} + \frac{\theta^2 G(e_2)}{\sqrt{1+\theta^2}}. \tag{3.34}$$

Аналогично, для $\theta < 0$

$$(A(e_1), e_2)\frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} \leqslant \frac{G(e_1)}{\sqrt{1+\theta^2}} + \frac{\theta^2 G(-e_2)}{\sqrt{1+\theta^2}}. \tag{3.35}$$

Осталось заметить, что равенства (3.34) и (3.35) могут иметь место для всех указанных θ, если только

$$|(A(e_1), e_2)|^2 \leqslant G(e_1)\overline{G}(e_2). \quad \blacksquare$$

Лемма 3.7. *Если в регулярной точке q в двух ортогональных направлениях e_1 и e_2 существуют геодезические кривизны $G_1 = G(q, e_1)$ и $G_2 = G(q, e_2)$, то и в любом направлении $e_\varphi = (\cos\varphi)e_1 + (\sin\varphi)e_2$ при $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ существует геодезическая кривизна $G_\varphi = G(q, e_\varphi)$, для которой*

$$G_\varphi \leqslant G_1 \cdot 2\cos^2\varphi + G_2 \cdot 2\sin^2\varphi.$$

Доказательство. Пусть, как и выше, $q_1(s)$ и $q_2(s)$ — точки на ∂C_τ, ближайшие соответственно к точкам $\gamma_1(s) = \exp_q(se_1)$ и $\gamma_2(s) = \exp_q(se_2)$. Через $q_\varphi(s)$ обозначим середину отрезка, кратчайшей l_1, соединяющей точки $q_1(2s\cos\varphi)$ и $q_2(2s\sin\varphi)$. Так как C_τ выпукло, то точка $q_\varphi(s)$ лежит в C_τ, и поэтому

$$\rho(\gamma_\varphi(s), \partial C_\tau) \leqslant \rho(\gamma_\varphi(s), q_\varphi(s)),$$

где $\gamma_\varphi(s) = \exp_q(se_\varphi)$. Точки $\gamma_1(2s\cos\varphi)$ и $\gamma_2(2s\sin\varphi)$ также соединим кратчайшей l_2, а через $\overline{\gamma}_\varphi(s)$ обозначим ее середину. Прямой и несложный подсчет показывает, что $\rho(\gamma_\varphi(s), \overline{\gamma}_\varphi(s)) = O(s^3)$ при $s \to 0$. Столь же простой подсчет дает следующую оценку расстояния от середины $q_\varphi(s)$ кратчайшей l_1 до середины $\overline{\gamma}_\varphi(s)$ кратчайшей l_2 через расстояния между их концами:

$$\rho(q_\varphi(s), \overline{\gamma}_\varphi(s)) \leqslant \frac{1}{2}(\rho_1(2s\cos\varphi) + \rho_2(2s\sin\varphi)) + o(s^3),$$

где $\rho_i(s) = \rho(q_i(s), \gamma_i(s))$. Сопоставляя полученные неравенства и пользуясь определением геодезической кривизны, получаем утверждение леммы. ■

Определение. Точку q на ∂C_τ назовем *ε-регулярной*, если в C_τ найдется шар $B(p, \varepsilon)$ с центром в точке p радиуса ε, касающийся ∂C_τ в точке q. Ниже предполагается, что ε достаточно мало так, что шар $B(p, \varepsilon)$ выпуклый.

Лемма 3.8. *Если q — ε-регулярная точка, то:*

1) *для всякого ε', $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, точка q ε'-регулярная,*

2) *q — регулярная точка, в ней определена единственная нормаль ν_q, равная $\nu_q \partial C_\tau = -\overline{qp}$;*

3) *в любом опорном направлении e в точке q определена геодезическая кривизна $G(q, e)$, не превосходящая ε^{-1}.*

Доказательство. Свойства 1, 2 очевидны, а для доказательства свойства 3 достаточно сравнить расстояние от $\gamma(s) = \exp_q(se)$ до ∂C_τ и B: $\rho(\gamma(s), \partial C_\tau) \leqslant \rho(\gamma(s), B)$, и воспользоваться неравенством

$$0 \leqslant \frac{d^2}{ds^2} \rho(\gamma(s), B)|_{s=0} \leqslant \varepsilon^{-1},$$

вытекающим из формулы второй вариации длины. ■

Поскольку ∂C_τ является μ-эквидистантной выпуклой гиперповерхности $\partial C_{\tau+\mu}$ для любого $\mu > 0$, можно получить оценку на геодезическую кривизну ∂C_τ следующим образом. Пусть точка q лежит на ∂C_τ, e — вектор из $\partial K_q C_\tau$, а нормаль ν ортогональна e и регулярна, т. е. такая, что вдоль нее реализуется расстояние от ∂C_τ до $\partial C_{\tau+\mu}$. Последнее означает, что найдется точка q_μ на $\partial C_{\tau+\mu}$ такая, что $\overline{qq_\mu} = \nu$ и $\rho(q, q_\mu) = \mu$. В этом случае q_μ μ-регулярная точка $\partial C_{\tau+\mu}$, т. е. $K_{q_\mu} C_{\tau+\mu}$ — полупространство, а весь конус нормалей $\nu_{q_\mu} \partial C_{\tau+\mu}$ состоит из одного вектора $\nu_\mu = -\overline{q_\mu q}$. Пусть $l(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \mu$, — кратчайшая qq_μ, а $e(\theta)$ — параллельное поле вдоль $l(\theta)$ такое, что $e(0) = e$.

Лемма 3.9. *Имеет место неравенство*

$$G(q, e) \geqslant \int_0^M R[\dot{l}(\theta), e(\theta)]\, d\theta.$$

Доказательство. Пусть $\gamma(s) = \exp_q(se)$, $\gamma_\mu(s) = \exp_{q_\mu}(se(\mu))$, а $q(s)$ — точки на ∂C_τ, ближайшие к $\gamma(s)$. Так как $\partial C_{\tau+\mu}$ — выпуклая гиперповерхность, то $\gamma_\mu(s)$ лежит вне $C_{\tau+\mu}$, а так как C_τ — μ-эквидистанта $C_{\tau+\mu}$, то $\rho(q(s), \gamma_\mu(s)) \geqslant \mu$. Поэтому из неравенства треугольника получаем

$$\rho(\gamma(s), q(s)) \geqslant \rho(\gamma_\mu(s), q(s)) - \rho(\gamma_\mu(s), \gamma(s)) \geqslant \mu - \rho(\gamma_\mu(s), \gamma(s)).$$

Ввиду формул первой и второй вариаций длины кратчайших $\gamma_\mu(s)\gamma(s)$

$$\frac{d}{ds} \rho(\gamma_\mu(s), \gamma(s))|_{s=0} = 0.$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \rho(\gamma_\mu(s), \gamma(s))|_{s=0} \leqslant -\int_0^\mu R[\dot{l}(\theta), e(\theta)]\, d\theta,$$

откуда следует утверждение леммы. ■

Теперь мы можем вернуться к изучению функции $f_\tau(\alpha(t), t)$, которая определялась как расстояние от геодезической $\gamma(t) \subset S$ до пересечения ∂C_τ с пленкой π вида (3.4), построенной на $\gamma(t)$ с помощью векторного поля $v(\alpha(t), t)$ вдоль $\gamma(t)$, ортогонального S. Согласно (3.26) f'_+ — производная справа функции $f_\tau(\alpha(t), t)$ — всюду определена и почти всюду (за исключением множества J_1 меры нуль на $\mathbf{R}$) совпадает с абсолютно непрерывной функцией $F(t)$:

$$f'_+(t)|_{R \setminus J_1} = F(t)|_{R \setminus J_1}, \tag{3.36}$$

которая, в свою очередь, почти всюду (за исключением множества J_2 меры нуль) дифференцируема. При этом

$$\left(f'_+(t)\right)'\big|_{\mathbf{R}\setminus(J_1\cup J_2)} = F'(t)\big|_{\mathbf{R}\setminus(J_1\cup J_2)}. \tag{3.37}$$

Обозначим $J = J_1 \cup J_2$.

Лемма 3.10. *Если* $t \in \mathbf{R}\setminus J$ (т. е. в t определена и конечна производная $\left(f'_+(t)\right)'$, *то в точке* $q(t) = q_\tau(\alpha(t), t)$ *в направлении* $\dot q(t)$ *геодезическая кривизна* ∂C_τ *определена и конечна.*

Доказательство. Пусть $\tilde\gamma(t')$, $t' \geqslant t$,— геодезическая, как в лемме 3.3, выходящая из точки $q(t)$ в направлении $\dot q(t)$ и параметризованная так, что вектор $\overline{\gamma(t')\tilde\gamma(t')}$ ортогонален $\dot\gamma(t')$. Тогда по лемме 3.3 функция $\tilde f(t') = \rho(\gamma(t'), \tilde\gamma(t'))$ имеет ограниченную вторую производную при $t = t'$. Условие $\left|\left(f'_+(t)\right)'\right| \leqslant K < \infty$ означает, что для $t' > t$

$$\left|\rho(\gamma(t'), q(t')) - f'_+(t)(t'-t)\right| \leqslant K(t'-t)^2.$$

Так как $f'_+(t) = \tilde f'(t)$, то для $t' > t$

$$|f(t') - \tilde f(t')| \leqslant K(t'-t)^2. \tag{3.38}$$

Заметим теперь, что $f(t')$ и $\tilde f(t')$ являются длинами сторон в треугольнике $\gamma(t')q(t')\tilde\gamma(t')$. Для угла $\gamma(t')$ в этом треугольнике аналогично оценке (3.23) получаем

$$\angle\gamma(t') = O(t^2\tau^{b+1}) + o(t^2),$$

откуда в силу (3.38) легко следует, что для $t' > t$

$$\rho(\tilde\gamma(t'), q(t')) \leqslant K(t'-t)^2. \tag{3.39}$$

Из (3.18), полученной оценки и неравенства

$$\rho(\tilde\gamma(t'), \partial C_\tau) \leqslant \rho(\tilde\gamma(t'), q(t'))$$

вытекает, что предел в определении геодезической кривизны $G(q(t), \dot q(t))$ существует и конечен. ■

Упростим выражение для $\tilde f''$ из леммы 3.3.

Лемма 3.11. *Если для всех* t *вектор* $v(\alpha(t), t)$ *лежит в* $N^\delta_{\gamma(t)}$ *при некотором фиксированном* $\delta < \pi/2$, *то*

$$\tilde f''(t) = -(1 - O(\tau)) \int_0^{f(t)} R[v(\alpha(t), t), e](\theta)\, d\theta + O\left(\tau^{2b+3}\right).$$

Доказательство. Пусть $t \in \mathbf{R}\setminus J$, тогда $f'(t) = \tilde f'(t)$, а так как по лемме 2.4 $f'(t) = O(\tau)$, то из леммы 3.3 следует, что $\tilde f''(t) = O(\tau^{b+3})$. Точка $t \in \mathbf{R}\setminus J$ выбрана произвольно, и согласно лемме 3.2 $F'(t) = f''(t) \leqslant \tilde f''(t) = O(\tau^{b+3})$, поэтому из формулы

$$f(T) = f(t) + \int_t^T f'_+(\theta)\, d\theta$$

с помощью (3.28) получаем

$$f(T) \leqslant f(t) + f'_+(t)(T-t) + \int_t^T \int_t^\theta F'(\mu)\, d\mu d\theta \leqslant f(t) + f'_+(t)(T-t) + O\left((T-t)^2\tau^{b+3}\right). \tag{3.40}$$

Из леммы 2.1 следует, что если $v(\alpha(t), t)$ для всех t лежит в $N^\delta_{\gamma(t)}$, $\delta > \pi/2$, то $f(t) \leqslant K\tau$. Не ограничивая общности, можно считать, что $f'_+(t) \leqslant 0$ (в противном случае заменим e на $-e$), поэтому из неравенства $f(T) > 0$ находим

$$|f'_+(t)| \leqslant f(t)(T-t)^{-1} + K\tau^{b+3}(T-t). \tag{3.41}$$

Выбирая $T = t + \tau^{-b/2-1}$, получим

$$|f'_+(t)| \leqslant K\tau^{b/2+2}. \tag{3.42}$$

Осталось заметить, что в точках $t \in \mathbf{R}\setminus J$ значения $\bar{f}'(t)$ и $f'_+(t)$ совпадают, и подставить полученную оценку (3.42) в утверждение леммы 3.3. ■

Теперь можно перейти к одной из основных задач этого параграфа — нахождению формулы для $F'(t)$ при $t \in \mathbf{R}\setminus J$. Для этого понадобится следующее определение геодезической кривизны пленки π в точке $q(t)$ на этой пленке в направлении $\dot{q}(t)$. Точка $q(t) = q_\tau(\alpha(t), t)$ лежит на пленке $\pi(s, t)$ вида (3.4), вектор $\dot{q}(t)$ касается ее в этой точке. Пусть $\tilde{\gamma}(s) = \exp_{q(t)}(s\dot{q}(t))$ — геодезическая, выходящая из $q(t)$ в этом направлении. Через $\tilde{q}(s)$ обозначим точку на π, ближайшую к $\tilde{\gamma}(s)$. Так как пленка π гладкая (мы предполагаем, что для поля $v(\alpha(t), t)$ выполнены свойства (3.24), (3.25)), существует вектор

$$K(t) = \frac{D^2}{ds^2}\left(\rho\left(q(s), \tilde{\gamma}(s)\right)\overline{q(s)\tilde{\gamma}(s)}\right)\Big|_{s=0},$$

который мы назовем *геодезической кривизной пленки π в точке $q(t)$ в направлении $\dot{q}(t)$*.

Лемма 3.12. *Для всех $t \in \mathbf{R}\setminus J$ и полей $v(\alpha(t), t)$, лежащих в $N^\delta_{\gamma(t)}$, $\delta < \pi/2$, выполнено неравенство*

$$\left(f'_+(t)\right)' = F'(t) \leqslant -(1 - O(\tau))\int\limits_0^{f(t)} R\left[v(\alpha(t), t), e\right](\theta)\, d\theta +$$

$$+ O\left(\varphi^2(t)\tau^{-1}\right) - \left(v(\alpha(t), t), \bar{v}(t)\right)^{-1}\left(G\left(q(t), \dot{q}(t)\right) - (K(t), v(t))\right),$$

где $v(t)$ — нормаль $v_{q(t)}\partial C_\tau$, а $\bar{v}(t)$ — ее образ при параллельном переносе $I_{q(t)\gamma(t)}$.

Доказательство. Для упрощения записи ниже полагаем $t = 0$. Пусть, как и ранее, $\gamma(t)$ — геодезическая на S, выходящая из точки p в направлении e, точка $q(t) = q_\tau(\alpha(t), t)$ на ∂C_τ является точкой пересечения ∂C_τ с геодезической $l_{v,t}$, выходящей из $\gamma(t)$ в направлении $v(t) = v(\alpha(t), t)$, нормально к S. Через H будем обозначать $\exp_q$ — образ некоторой опорной к ∂C_τ в точке q гиперплоскости с нормалью v (см. ниже), содержащей опорное направление $\dot{q}(0)$. Пусть, как и ранее, $\tilde{\gamma}(t)$ — геодезическая, выходящая из q в направлении $\dot{q}(0)$ и параметризованная так, что вектор $\overline{\gamma(t)\tilde{\gamma}(t)}$ ортогонален $\dot{\gamma}(t)$. Через $\tilde{q}(t)$ обозначим точку на ∂C_τ, ближайшую к $\tilde{\gamma}(t)$, а через $H(t)$ — гиперповерхность, являющуюся $\exp_{\tilde{q}(t)}$-образом гиперплоскости в $T_{\tilde{q}(t)}V^n$, ортогональной вектору $\overline{\tilde{q}(t)\tilde{\gamma}(t)}$. Обозначим через $\bar{q}(t)$ пересечение $H(t)$ и $\gamma(t)\tilde{\gamma}(t)$ и через $q_1(t)$ — пересечение $H(t)$ и $l_{v,t}$. По лемме 3.10 в точке q определена геодезическая кривизна в направлении $\dot{q}(0)$, поэтому векторы $\omega_1(t) = 2t^{-2}\rho(\tilde{q}(t), \tilde{\gamma}(t)) \times \times \overline{\tilde{q}(t)\tilde{\gamma}t}$ можно считать при $t \to 0$ $(t > 0)$ сходящимися к $G(q, \dot{q}(0))v$, где v — некоторая нормаль, определяющая H. Поэтому, рассматривая треугольник $\tilde{\gamma}(t)\bar{q}(t)\tilde{q}(t)$, из формулы первой вариации длины находим

$$\rho\left(\tilde{\gamma}(t), \bar{q}(t)\right) = \frac{t^2}{2} G\left(q, \dot{q}(0)\right)\left(v(t), \bar{v}(t)\right)^{-1}. \tag{3.43}$$

Если $r'(t)$ — точка на пленке π, ближайшая к $\tilde{\gamma}(t)$, то по определению вектор $\bar{\omega}_2(t) = 2t^{-2}\rho(r'(t), \tilde{\gamma}(t))\overline{r'(t)\tilde{\gamma}(t)}$ при $t \to 0$ $(t > 0)$ сходится к $K(0)$. Если $r(t)$ — точка на π, ближайшая к $\bar{q}(t)$, то треугольники $\gamma(t)\tilde{\gamma}(t)r'(t)$ и $\gamma(t)\bar{q}(t)r(t)$ «подобны», т. е. имеют равные углы $\gamma(t)$ и $\angle r(t) = \angle r'(t) = \pi/2$. Следовательно, из формулы первой вариации длины и соотношения, что $\rho(q(t), \tilde{\gamma}(t)) = O(t^2)$ для вектора $\omega_2(t) = \frac{2}{t^2}\rho\big(r(t), \bar{q}(t)\big)\overline{r(t)\bar{q}(t)}$, имеем

$$\omega_2(t) = \big(I_{r'(t)r(t)}(\bar{\omega}_2(t))\big)(1 + O(t^2)).$$

Поэтому расстояние $\rho(t)$ от точки $r(t)$ до гиперповерхности $H(t)$ имеет вид

$$\rho(t) = (\omega_2(t), \nu(t))\frac{t^2}{2} + o(t^2). \tag{3.44}$$

Гиперповерхность $H(t)$ проходит через $\tilde{q}(t)$ и является $\exp_{\tilde{q}(t)}$-образом гиперплоскости, ортогональной вектору $\nu(t) = \widetilde{q(t)\gamma}(t)$. Эта гиперплоскость, очевидно, опорная к ∂C_τ в точке $\tilde{q}(t)$.

Если $\rho(t) > 0$, то $r(t)$ лежит дальше от $\gamma(t)$, чем точка $q_1(t)$ (пересечение $H(t)$ и $l_{v,t}$), если $\rho(t) < 0$ — то ближе.

Найдем точку $r_1(t)$ на $l_{v,t}$ так, чтобы угол $r_1(t)$ в треугольнике $q(t)r_1(t)\gamma(t)$ равнялся бы $\pi/2$, и покажем, что

$$\rho(r_1(t), r(t)) = O(t^2\tau^{2b+2}). \tag{3.45}$$

Соединим точки $r(t)$ и $r_1(t)$ кратчайшей. Так как кривизна пленки π в точке q в направлении $\dot{q}(0)$ равна K, а в направлении $\overline{qp}$ (которое почти ортогонально $\dot{q}(0)$; (см. лемму 1.2) равна нулю, то в силу гладкости пленки π геодезические кривизны пленки π в точке $r(t)$ не больше, чем $K(1 + (\angle(\overline{qp}, \dot{q}(0)))^2) + O(\rho(r(t), q(t)))$, или (по лемме 1.2) не больше $K + O(\tau^{2b+2}) + O(t)$. Следовательно, направление $\overline{r(t)r_1(t)}$ почти касательное к пленке π:

$$\angle(\overline{r(t)r_1}(t), T_{r(t)}\pi) \leqslant (K + O(\tau^{2b+2}) + O(t))\rho(r(t), r_1(t)).$$

Вектор $\overline{r(t)\bar{q}(t)}$ по определению ортогонален пленке π, поэтому из последнего соотношения следует

$$\left|\angle r(t) - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \big(K + O(\tau^{2b+2}) + O(t)\big)\rho(r(t), r_1(t)).$$

С другой стороны, сравнивая координаты точек $r_1(t)$ и $\bar{q}(t)$ в системе координат Ферми $(\alpha^1, \dots \alpha^{d-1}, t, x^{d+1}, \dots x^n)$, как это было сделано при доказательстве леммы 3.3, из (3.23), (3.25) для вектора $\omega_3(t) = \rho(r_1(t), \bar{q}(t))\overline{r_1(t)\bar{q}(t)}$ получаем

$$\omega_3^i(t) = t^2 O\left(\Gamma_{dd}^i(q) + t'(0)\Gamma_{1d}^i(q) + \left\|\frac{Dv}{dt}(0)\right\|\right), \quad i \neq 1,$$

откуда, рассуждая, как и при оценке угла $r(t)$, имеем

$$\left|\angle r_1(t) - \frac{\pi}{2}\right| = O\big(\tau^{b+1}\big) + O(t).$$

Из полученных оценок углов $\angle r(t)$ и $\angle r_1(t)$ в треугольнике $\bar{q}(t)r(t)r_1(t)$ и соотношения $\rho(r(t), r_1(t)) = O(t^2\tau^{b+1})$ следует, что

$$\begin{gathered}\angle\bar{q}(t) = O(\tau^{b+1}) + O(t),\\ \rho(r(t), r_1(t)) = O(\angle\bar{q}(t)\rho(r(t), \bar{q}(t))) = O(t^2\tau^{2b+2}).\end{gathered} \tag{3.46}$$

Поэтому расстояние от точки $r_1(t)$ до гиперповерхности $H(t)$ отличается от $\rho(t)$ на $O(t^2\tau^{2b+2})$. Так как геодезическая $l_{v,t}$ пересекает эту гиперповерхность в точке q_1 под углом $\angle(I_{\gamma(t)q_1(t)}v(t), \nu_1(t))$, где $\nu_1(t)$ — нормаль к $H(t)$ в точке $q_1(t)$, а $\nu_1(t) \to \nu$ при $t \to 0$, то для расстояния между точками $r_1(t)$ и $q_1(t)$, лежащими на $l_{v,t}$, находим

$$\rho(q_1(t), r_1(t)) = \rho(t)(v(t), \bar{\nu}(t))^{-1} + O(t^2\tau^{2b+2}), \tag{3.47}$$

где расстояние, стоящее в (3.47) слева, мы считаем строго положительным, если $r_1(t)$ дальше от $\gamma(t)$, чем точка $q_1(t)$, и неположительным в противном случае. Для завершения доказательства осталось заметить, что гиперповерхность $H(t)$ является образом опорной гиперплоскости к ∂C_τ и поэтому точка $q_1(t)$ лежит дальше от $\gamma(t)$, чем точка $q(t)$, т. е. $\rho(\gamma(t),\ q(t)) \leqslant \rho(\gamma(t),\ q_1(t))$. Поэтому из (3.43)—(3.47) и оценки $\rho(\gamma(t),\ \tilde{\gamma}(t))$, вытекающей из леммы 3.4, следует утверждение леммы 3.12. ∎

Лемма 3.13. *Если точка q регулярная, то вместо неравенства в лемме* 3.12 *имеет место равенство.*

Доказательство. Если точка q регулярная, то нормали к ∂C_τ в точках $q(t)$ и $\tilde{q}(t)$ сходятся к одной и той же единственной нормали ν, т. е. $\angle(\nu(t),\ \nu'(t)) \to 0$ при $t \to 0$, где $\nu'(t)$ — любая нормаль из $\nu_{q(t)}\partial C_\tau$. Поэтому

$$\rho(q(t),\ q_1(t)) = o(\rho(q_1(t),\ \bar{q}(t))) = o(t^2). \ \blacksquare$$

Замечание. Из доказательства леммы 3.12 видно, что в качестве нормали ν мы можем выбрать любую нормаль, являющуюся пределом нормалей ν_i к гиперповерхности ∂C_τ в точках q_i, если точки q_i таковы, что направление $\overline{qq_i}$ стремится к направлению $\dot{q}(0)$ при $i \to \infty$. А так как конус нормалей $\nu_q\partial C_\tau$ есть выпуклая оболочка регулярных нормалей из этого конуса, то для всякого опорного направления $\dot{q}(0)$ нормаль ν можно выбрать регулярную. Поэтому ниже, если не оговорено противное, мы будем считать, что в лемме 3.12 нормаль ν регулярная, т. е. такая, в направлении которой реализуется расстояние от ∂C_τ до $\partial C_{\tau+\varepsilon}$ для малых ε.

Перейдем к определению векторного поля $v(\alpha(t),\ t)$, которое, чтобы не усложнять обозначений, будем обозначать $v(t)$. Пусть также I_s — параллельный перенос из точки $\gamma(t)$ в $\pi(s,\ t)$ вдоль кратчайшей $l_t(s) = \exp_{\gamma(t)}(sv(t))$, поля: $e(s,\ t) = \partial\pi(s,\ t)/\partial t$ и $v(s,\ t) = \partial\pi(s,\ t)/\partial s$, а $(\ )^T$, $(\ )^N$ — касательная и нормальная составляющие к S вектора из $T_{\gamma(t)}V$. При этом для $X \in T_{\gamma(t)}S$ обозначим через $\bar{D}_X = (D_X)^N$ нормальную связность в ортогональном расслоении νS. Выберем векторное поле $v(t)$ так, что

$$\frac{\bar{D}v}{\partial t}(t) = \frac{1}{f(t)} \int\limits_0^{f(t)} \int\limits_0^s I_\theta^{-1} (R(v, e)\, v(\theta, t))^N d\theta\, ds, \tag{3.48}$$

где $f(t) = f_\tau(\alpha(t),\ t)$.

Лемма 3.14. *Для любого вектора $v(\alpha)$ из N_ρ^δ, $\delta < \pi/2$ и $\delta < \delta' < \pi/2$, найдется τ_0 такое, что для всех $0 < \tau < \tau_0$ существует поле $v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau^{-b}$, удовлетворяющее* (3.48) *и $v(0) = v(\alpha)$ и лежащее в $N^{\delta'}$: $v(t) \in N_{\gamma(t)}^{\delta'}$. При этом для всех $0 \leqslant t \leqslant \tau^{-b}$ выполнено* (3.25)

$$\left\| \frac{D}{\partial t} v(t) \right\| = O(\tau^{b+1})$$

и

$$\varphi(t) = \angle(e(f(t),\ t),\ I_{f(t)}(\dot{\gamma}(t))) = O(\tau^{2b+2}). \tag{3.49}$$

Доказательство. Покажем сначала, что для любых K и функции $f(t)$ такой, что $\tau \leqslant f(t) \leqslant K\tau$, существует поле $v(t)$, удовлетворяющее (3.48). Действительно, в координатах Ферми с осью $\gamma(t)$ (см. § 1) векторное поле $e(\theta,\ t)$ имеет координаты $(e(\theta,\ t))^k = \delta_{dk} + \theta(Dv(t)/dt)^k$, поэтому уравнение (3.48) может быть переписано в следующем виде:

$$\left(\frac{\bar{D}v}{\partial t}(t)\right)^k = \frac{1}{f(t)} \int\limits_0^{f(t)} \int\limits_0^s \Big(R_{id,j}^k \left(v^1(t), \dots v^{d-1}(t), t, 0 \dots 0\right) v^i(t)\, v^j(t) +$$

$$+ R_{is,j}^k \left(v^1(t), \dots v_i^{d-1}(t), t, 0 \dots 0\right) v^i(t)\, v^j(t) \left(\frac{\bar{D}v}{\partial t}(t)\right)^s \Big)\, dt,\ 1 \leqslant i, j, k, s < d.$$

Учитывая порядок по τ величин, последнее равенство можно переписать в виде

$$\left(\frac{\bar{D}v}{\partial t}(t)\right)^k = F^k(f(t), v(t)) + F_i^k(f(t), v(t))\left(\frac{\bar{D}v}{\partial t}(t)\right)^i,$$

где $|F_i^k(f(t), v(t))| = O(\tau)$. Поэтому при малых τ матрица $(\delta_{sk} - F_s^k)$ имеет обратную G_k^s и (3.48) эквивалентна системе уравнений

$$\left(\frac{\bar{D}v}{\partial t}(t)\right)^k = G_i^k(f(t), v(t))\, F^i(f(t), v(t)),$$

где $G_i^k(s, v)$ и $F^i(s, v)$ — непрерывные по s и v функции, удовлетворяющие оценкам

$$|G_i^k(s, v) - \delta_{ik}| = O(s\|v\|), \quad |F^i(s, v)| = O(s\|v\|).$$

Поэтому существование решения $v(t)$ уравнения (3.48) на всей оси t, любого начального значения $v(0) = v(\alpha)$ и любой функции $f(t)$, удовлетворяющей оценке $\tau \leqslant f(t) \leqslant K\tau$ при некотором K, легко доказывается стандартным методом последовательных приближений. Отметим, что в силу (3.48) $\left(\frac{\bar{D}v}{\partial t}(t), v(t)\right) \equiv 0$ для всех t, поэтому $\|v(t)\| = \|v(\alpha)\| = 1$.

Так как поле $e(s, t)$ якобиево вдоль геодезической $l_t(s)$, из уравнения Якоби следует

$$I_{f(t)}^{-1}(e(f(t), t) = e(0; t) + f(t)\frac{Dv}{\partial t}(t)) + \int_0^{f(t)}\int_0^s I_\theta^{-1}(R(v, e)\, v(\theta, t))\, d\theta ds.$$

Поскольку S — вполне геодезическое подмногообразие, а поле $v(t)$ нормальное к S вдоль $\gamma(t)$, то $\frac{Dv}{\partial t} = \frac{\bar{D}v}{\partial t}$, и поэтому для поля, удовлетворяющего (3.48), из последнего соотношения находим

$$I_{f(t)}^{-1}(e(f(t), t)) = e(0, t) + \int_0^{f(t)}\int_0^s I_\theta^{-1}(R(v, e)\, v(\theta, t)\, d\theta ds)^T. \tag{3.50}$$

Отсюда следует, что векторное поле $I_\theta^{-1}(e(\theta, t))$ для всех θ, t — касательное к S, а так как $v(t)$ нормальное к S, то по определению числа b

$$\|R(v, e)v(\theta, t)\| = O(\theta^b), \quad \|(R(v, e)v(\theta, t))^T\| = O(\theta^{2b}), \tag{3.51}$$

откуда

$$e(f(t), t) = I_{f(t)}(e(0, t)) + O(\tau^{2b+2}). \tag{3.52}$$

Последнее соотношение объясняет происхождение уравнения (3.48).

Рассмотрим теперь случай, когда $f(t)$ не произвольная функция, а $f(t) = f(\alpha(t), t)$. Тогда решение уравнения (3.48) при заданных $\delta < \delta' < \pi/2$ существует на некотором интервале $[0, t)$, что легко доказывается методом последовательных приближений. Пусть теперь $[0, t_1)$ — максимальный интервал, на котором существует решение $v(t)$ уравнения (3.48), где $f(t) = f(\alpha(t), t)$ и $v(0) = v(\alpha)$ для заданного $v(\alpha)$ из N_p^δ. Из (3.51) находим, что для всех $0 \leqslant t < t_1$ выполнено

$$\|Dv(t)/\partial t\| \leqslant K'\tau^{b+1}$$

при некоторой константе K', следовательно, $t_1 > (\delta' - \delta)/K'\tau^{b+1}$. Поэтому для достаточно малых τ решение $v(t)$ определено на отрезке $[0, \tau^{-b}]$. Утверждение (3.49) вытекает из (3.52). ■

Подсчитаем кривизну пленки $\pi(s, t)$. Для этого введем следующие обозначения:

$$\bar{e}(s, t) = I_s(\dot{\gamma}(t)) = I_s(e(0, t)),$$
$$\bar{\nu}(s, t) = I_s I_{f(t)}^{-1}(\nu(t)),$$

где $\nu(t)$ — некоторая нормаль из конуса нормалей $\nu_{q(t)}\partial C_\tau$,

$$A_\tau(s,t)(v(t)) = I_s^{-1}\left(R\left(\bar{e},\bar{\nu}\right)v(s,t)\right),$$

$$A_\tau(t) = \int\limits_0^{f(t)} sf^{-1}(t)\,\|A_\tau(s,t)(v(t))\|\,ds.$$

Для $T=\tau^{-b}$, положим

$$A_\tau = \int\limits_0^T A_i(t)\,dt.$$

(Параметр τ выделяется особо, так как по этому параметру $A_\tau(s,t)v(t)$ при фиксированном векторе v не является, вообще говоря, гладкой.)

Лемма 3.15. *Геодезическая кривизна $K(t)$ пленки π в точке $q(t)$ в направлении $\dot{q}(t)$ удовлетворяет соотношению*

$$(K(t),\nu(t)) = \int\limits_0^{f(t)} \left(R\left(\nu,\bar{e}\right)\bar{e},v\right)(s,t)\,ds + f'_+(t)\,O\left(\tau^{b+1}\right) +$$

$$+\int\limits_0^{f(t)} (A_\tau(s,t)\,v(t),w(s,t))\,ds + O\left(\tau^{2b+2}\right),$$

где $w(s,t)$ — векторное поле вдоль $l_t(v)$ такое, что

$$\|w(s,t)\| = O(f^{b+1}s + s^{b+2}).$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать $t=0$. Как следует из (3.45), «геодезическая кривизна» пленки π совпадает с точностью до $O(\tau^{2b+2})$ с аналогично определенной геодезической кривизной K' кривой $q(t)=\pi(f(t),t)$ при $t=0$, т. е.

$$K' = \frac{D^2}{\partial t^2}\,\omega(t)\,|_{t=0},$$

где $w(t)=\rho(q(t),\tilde{\gamma}(t))\overline{q(t)\tilde{\gamma}(t)}$, где $\tilde{\gamma}(t)$ — как и ранее, геодезическая, выходящая из q в направлении $\dot{q}(0)$ и параметризованная так, что в введенной системе координат Ферми $(\tilde{\gamma}(t))^d\equiv t$. Для доказательства достаточно, аналогично (3.45), проверить, что угол между $\dot{l}_t(f(t))$ и вектором $\omega(t)$ порядка $O(\tau^{b+1})$ при $\tau\to 0$, $t>0$ (напомним, что $l_t(s)=\exp_{\gamma(t)}(sv(t))$). Последнее легко следует из оценки (3.22) координат вектора $\omega(t)$ в системе координат Ферми $(\alpha^1,\ldots\alpha^{d-1},t,\ldots)$ с осью $\gamma(t)$. Покажем теперь, что

$$K' = \frac{D}{\partial t}\,\dot{q}(t)\,|_{t=0}.$$

Действительно, вектор $\omega(t)$ лежит в $T_{q(t)}V^n$, совпадает по направлению с вектором $\overline{q(t)\tilde{\gamma}(t)}$ и равен длине стороны $q(t)\tilde{\gamma}(t)$ в треугольнике $qq(t)\tilde{\gamma}(t)$. Так как длина стороны $q\tilde{\gamma}(t)$ в этом треугольнике есть $t+O(t(f')^2)$, а длина стороны $q(t)\tilde{\gamma}(t)=O(t^2)$, то с точностью до $O(t^3)$ вектор $\omega(t)$ равен вектору $t(\overline{q\tilde{\gamma}(t)-q\tilde{q}(t)})$, параллельно перенесенному из q в $q(t)$. Поскольку $\gamma(t)$ — геодезическая, в силу (3.19) получаем

$$\frac{D^2}{\partial t^2}\,\omega(t)\,|_{t=0} = \frac{D}{\partial t}\,\dot{q}(t)\,|_{t=0} + O\left((f'_+(0))^2\tau^{b+1}\right) + O\left(\tau^{2b+2}\right). \tag{3.53}$$

Воспользуемся определением пленки $\pi(s,t)$ и вычислим последнее выражение:

$$\frac{D}{\partial t}\,\dot{q}(t)\,|_{t=0} = \frac{D}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\,\pi(f(t),t)\,|_{t=0} = \frac{D}{\partial t}\,e(f(t),t)\,|_{t=0} + f'_+(0)\,\frac{D}{\partial s}\,e(s,0)\,|_{s=f(0)} +$$

$$+ f'_+(0)\,\frac{D}{\partial t}\,v(f(t),t)\,|_{t=0} + \left(f'_+(0)\right)^2\frac{D}{\partial s}\,v(s,0)\,|_{s=f(0)}.$$

Так как поля $e(s, t)$, $v(s, t)$ коммутируют и $Dv/\partial s \equiv 0$ по определению,

$$\frac{D}{\partial t}\dot{q}(t)|_{t=0}\frac{D}{\partial t}e(f(t), t)|_{t=0} + 2f'_+(0)\frac{D}{\partial t}v(f(t), t)|_{t=0}.$$

Оценим сначала второе слагаемое. Имеем

$$I_{f(0)}^{-1}\frac{D}{\partial t}v(f(t), t)|_{t=0} = \frac{D}{\partial t}v(t)|_{t=0} + \int_0^{t(0)} I_s^{-1}\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}v(s, t)|_{t=0}ds =$$

$$= \frac{D}{\partial t}v(t)|_{t=0} + \int_0^{f(t)} I_s^{-1}(R(v, e)v)(s, 0)\,ds.$$

Поэтому согласно определению поля $v(t)$

$$\frac{D}{\partial t}v(f(t), t) = O(\tau^{b+1}).$$

Аналогично, воспользовавшись (3.52), получаем

$$I_{f(0)}^{-1}\frac{D}{\partial t}e(f(t), t)|_{t=0} = I_{f(0)}^{-1}\left(\frac{D}{\partial t}I_{f(t)}(e(0, t))\right) + O(\tau^{2b+2}) =$$

$$= \frac{D}{\partial t}e(0, t) + \int_0^{f(0)} I_s^{-1}\left(\frac{D}{ds}\frac{D}{\partial t}I_s(e(0, t)) - \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\ I_s(e(0,\quad t))\right)\Big|_{t=0} +$$

$$+ O(\tau^{2b+2}) = \int_0^{f(0)} I_s^{-1}(R(v, e)\bar{e}(s, 0))\,ds + O(\tau^{2b+2}).$$

Поле $e(s, 0)$ якобиево вдоль $l_0(s)$, поэтому из уравнения Якоби и определения (3.48) поля $v(t)$ несложно получить, что поле $w(s) = e(s, 0) - \bar{e}(s, 0)$ вдоль $l_0(s)$ в координатах Ферми с осью $l_0(s)$ (см. лемму 1.1) имеет с точностью до $O(s^{b+3})$ координаты, являющиеся полиномами:

$$w^i(s) = w_1^i s + w_2^i s^{b+2},\ \text{где}\ w_1^i = O\left(f^{b+1}(0)\right),\ \text{и}\ w_2^i(O)(1)\ \text{при}\ f \to 0.\ \blacksquare$$

Наша задача теперь состоит в оценке последнего члена в формуле для $(f'_+)'$ из леммы 3.12. (Именно хотелось бы доказать, что этот член не намного больше нуля — не более чем на $O(\tau^{2b+2})$.) Чтобы оценить $G(q, \dot{q}(0))$, воспользуемся леммой (3.9), а также следующим утверждением.

Лемма 3.16. *Для заданного целого числа a и фиксированного $\mu > 0$ найдется константа $K(a, \mu)$ такая, что для любого полинома $P(\theta)$ степени не больше a и неотрицательного на отрезке $[0, \mu]$ имеет место неравенство*

$$P(0) \leqslant K(a, \mu)\int_0^{\mu} P(\theta)\,d\theta.$$

Доказательство легко следует из того факта, что по значениям интеграла

$$I(\theta) = \int_0^{\theta} P(s)\,ds$$

в точках $\theta_i = i\mu/(a+1)$, $i = \overline{1,\ a+1}$, можно восстановить все коэффициенты полинома P. Если $P(\theta) = \sum_{k=0}^{a} P_k\theta^k$, то $I(\theta_i) = \sum_{k=1}^{a+1}\frac{P_{k-1}}{k}(\theta_i)^k$, т. е. вектор $I = (I(\theta_1), \ldots I(\theta_{a+1}))$ является образом вектора $P = (P_0,\ P_1/2,\ \ldots P_a/(a+1))$ при линейном отображении W: $P \to L$, где W имеет матрицу $w_{ij} = (\theta_j)^i$. Определитель этой матрицы (определитель

Ван-дер-Монда), равный $\prod\limits_i \theta_i \prod\limits_{i>j} (\theta_i - \theta_j)$, отличен от нуля. Поэтому определено обратное отображение W^{-1}. Пусть $W^{-1} = (b_{ij})$ и $K' = \max |b_{ij}|$. Так как полином $P(\theta)$ неотрицателен на $[0, \mu]$, для всех $1 \leqslant i \leqslant a+1$ имеем $0 \leqslant I(\theta_i) \leqslant I(\mu)$, откуда легко следует утверждение леммы:

$$|P_0| = |\sum b_{0j} I(\theta_j)| \leqslant \sum_j |b_{0j}| \quad |I(\theta_j)| \leqslant (a+1) K' I(\mu). \ \blacksquare$$

В силу леммы 3.16 для некоторой константы K, зависящей лишь от чисел b и μ, выполнено

$$G(q, e) \geqslant KR[e, \nu] - O(\tau^{2b+1}), \tag{3.54}$$

где ν — произвольная регулярная нормаль из $\nu_q \partial C_\tau$. Напомним, что в данном параграфе через C_τ мы обозначаем выпуклые множества с непустой внутренностью, ранее обозначавшиеся как $C_{t_{m-1}+\tau}$ (см. определение семейства эквидистант C_t, $0 \leqslant t \leqslant T$). Поэтому можно положить μ равным любому положительному числу. Пусть $\mu = 1$, тогда (3.54) выполнено с некоторой константой K, зависящей лишь от b.

Чтобы оценить интеграл

$$\int\limits_0^{f(t)} (A_\tau(s, t) v(t), w(s, t))\, ds\, |_{t=0}$$

в утверждении леммы 3.15, воспользуемся приемом из доказательства леммы 3.16. По определению функция $A_\tau(s) v$ гладкая по s, $0 \leqslant s \leqslant f$ (здесь мы полагаем $t = 0$). Чтобы получить с точностью $O(\tau^b)$ оценку супремума по s, $0 \leqslant s \leqslant f$, этой функции, достаточно вывести необходимую оценку выражения

$$A_{ij} = \int\limits_{s_i}^{t} \left(A_\tau(s) v, \bar{w}_j^i(s)\right) ds,$$

где $s_i = if/b$, а $\bar{w}_j^i(s)$ — поля на $l_v(s)$, $0 \leqslant s \leqslant f$, следующего вида:

$$\bar{w}_j^i(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant s \leqslant s_i, \\ ((s - s_i)/(f - s_i))\, \bar{e}_j(s) + O(s), & s_i \leqslant s \leqslant f; \end{cases}$$

здесь $\bar{e}_j(s)$ — параллельные поля вдоль $l_v(s)$ такие, что $v(f)$, $\bar{e}_j(f)$ образуют базис $T_g V^n$.

Действительно, если

$$A_\tau(s) v = \sum_{k=0}^{b} A_k s^k + O\left(s^{b+1}\right),$$

то коэффициенты A_k находятся по числам A_{ij}, как и в лемме 3.16, с помощью матрицы, определитель которой зависит лишь от b, f и отграничен от нуля некоторой константой k для всех $0 \leqslant f \leqslant \tau \quad (1 + \cos\delta)$ при фиксированном b.

Для вывода оценок A_{ij} воспользуемся следующей конструкцией. Пусть $\bar{w}$ — единичный вектор из $T_q V^n$, ортогональный $\dot{q}(0)$, а $q(t, w)$ — кривая, выходящая из точки q в направлении $\dot{q}(0) + f^{b+1} w$, причем так, что

$$\frac{D}{\partial t}\, \dot{q}(t, w)\,|_{t=0} = \frac{D}{\partial t}\, \bar{e}\,(q(t, w))\,|_{t=0}, \tag{3.55}$$

где $\bar{e}(q(t, w)) = I_{\gamma(t) q(t,w)}(\dot{\gamma}(t))$. Существование такой кривой легко доказать, например, выписывая вытекающее из (3.55) уравнение для вектора $\bar{v}(t) = \gamma(t) q(t, w)$, как это сделано при доказательстве леммы 3.14. Тогда если $\dot{q}(t, w) = \bar{e}(q(t, w)) + f^{b+1} \bar{w}(t)$, то из (3.55) находим

$\frac{D}{\partial t}\overline{w}(t)|_{t=0}=0$. Продолжим поля $\overline{w}(t)$ и $\overline{e}(q(t, w))$ на пленку $\overline{\pi}(s, t)=$ $=\exp_{\gamma(t)}(s\overline{v}(t))$ так, чтобы $\overline{w}(t)=\overline{w}(f(t), t)$ и для $0\leqslant s\leqslant f$

$$\frac{D}{\partial s}\overline{w}(s, 0)\equiv 0, \quad \frac{D}{\partial t}\overline{w}(s, t)|_{t=0}\equiv 0,$$

а $\frac{D}{\partial s}\widetilde{e}(s, 0)=\overline{w}(s, 0)f^b$ (или $\widetilde{e}(s, 0)=\overline{e}(s, 0)+sf^b\overline{w}(s, 0)$). Тогда, повторяя рассуждения из леммы 3.15, получаем

$$\left(\frac{D}{\partial t}\overline{e}(q(t, w))|_{t=0}, \nu\right)=\int_0^f(R(v, e)\widetilde{e}(s, t)|_{t=0}, \overline{\nu}(s))\,ds+$$

$$+\int_0^f\left(\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\widetilde{e}(s,t)|_{t=0}, \overline{\nu}(s)\right)ds=\int_0^f(R(v, e)\widetilde{e}(s, 0), \overline{\nu}(s))\,ds.$$

Действительно, по определению

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{ds}\widetilde{e}(s, t)|_{t=0}=f^b\frac{D}{\partial t}\overline{w}(s, t)|_{t=0}=0,$$

а из равенства $e(t, s)=\partial\overline{\pi}(s, t)/\partial t$ следует

$$\|e(s, t)-\widetilde{e}(s, t)\|=O(f^{b+2}).$$

Учитывая также

$$\|\overline{e}(s, 0)-\widetilde{e}(s, 0)\|=O(f^{b+1}),$$

находим:

$$\int_0^f R(v(s), e(s, 0))\widetilde{e}(s, 0), \overline{\nu}(s))\,ds=\int_0^f(R(v(s), \widetilde{e}(s, 0))\widetilde{e}(s, 0), \overline{v}(s))\,ds+$$

$$+O\left(f^{b+3}\right)\sup\{\|R(\widetilde{e}(s, 0), \overline{\nu}(s))v(s)\|\,|\,0\leqslant s\leqslant f\}=\int_0^f(R(v(s), \widetilde{e}(s, 0))\widetilde{e}(s, 0),$$

$$\overline{\nu}(s))\,ds+O\left(f^{b+3}\right)\sup\{\|R(\overline{e}(s), \overline{\nu}(s))v(s)\|\,|\,0\leqslant s\leqslant f\}+O\left(f^{2b+4}\right), \tag{3.56}$$

$$\left|\int_0^f(R(v(s), \widetilde{e}(s, 0))\widetilde{e}(s, 0), \overline{\nu}(s))\,ds\right|\leqslant\int_0^f \boldsymbol{R}[\widetilde{e}(s, 0), \overline{\nu}(s)]\,ds+O\left(f^{2b+1}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_0^f R[\overline{e}(s), \overline{v}(s)]\,ds\right)(1+O(f))+O\left(f^{2b+1}\right), \tag{3.57}$$

откуда

$$\left|\left(\left(\frac{D}{\partial t}\overline{e}(q(t))-\frac{D}{\partial t}\overline{e}(q(t, w))\right)\Big|_{t=0}, \nu\right)\right|\leqslant\int_0^f R[\overline{e}(s), \overline{\nu}(s)]\,ds+O\left(f^{2b+1}\right)+$$

$$+O\left(f^{b+3}\right)\sup\{\|A_\tau(s, 0)v(s)\|\,|\,0\leqslant s\leqslant f\}. \tag{3.58}$$

Однако левая часть неравенства (3.58) есть разность двух ковариантных производных по направлениям $\overline{e}(q)$ и $\overline{e}(q)+f^{b+1}w$ соответственно от векторного поля $\overline{e}$, заданного в окрестности точки p следующим образом: $\overline{e}(q)=I_{\gamma(t(q))q}(\dot{\gamma}(t(q)))$, где $\gamma(t(q))$ — точка на γ, ближайшая к q. Поэтому в силу линейности ковариантной производной

$$\left|\left(\frac{D}{\partial w}\overline{e}(q), \nu\right|\leqslant f^{-b-1}\int_0^f R[\overline{e}(s), \overline{\nu}(s)]\,ds+O(f^2)\sup\{\|A_\tau(s)v\|\,|\,0\leqslant s\leqslant f\}+O(f^b). \tag{3.59}$$

Дословно повторяя рассуждения из доказательства леммы 3.15, вычисляем

$$\left(\frac{D}{\partial w}\bar{e}(q),\ \mathrm{v}\right)=\int\limits_0^f (R(\bar{e}(s),\ \bar{\mathrm{v}}(s))\,v(s),\ \widetilde{w}(s))\,ds,$$

где $\widetilde{w}(s)$ — якобиево поле вдоль $l_v(s)$ такое, что $\widetilde{w}(0)=0$ и $\widetilde{w}(f)=w$. Поэтому из соотношения, $\widetilde{w}(s)=\overline{w}(s)+O(s)$, полагая попеременно $\widetilde{w}(f)=\bar{e}_j(f)$, находим:

$$A_{1j}=O\left(f^b\right)+f^{-b-1}\int\limits_0^f R\,[\bar{e},\bar{\mathrm{v}}]\,(s)\,ds+O\,(f^2)\sup\{\|A_\tau(s)\,v\|\ |\,0\leqslant s\leqslant f\}. \quad (3.60)$$

Чтобы доказать справедливость полученной оценки для всех i, т. е.

$$A_{ij}=O\left(f^b\right)+f^{-b-1}\int\limits_0^f R\,[\bar{e},\bar{\mathrm{v}}]\,(s)\,ds+O\,(f^2)\sup\{\|A_\tau(s)\,v\|\ |\,0\leqslant s\leqslant f\}, \quad (3.61)$$

достаточно повторить приведенные рассуждения, заменяя везде геодезическую γ на геодезическую $\gamma_i(t)=\exp_{l_v(s_i)}(t\bar{e}(s_i))$ и учитывая неравенства

$$0\leqslant\int\limits_{s_i}^f R\,[\bar{e},\bar{\mathrm{v}}]\,(s)\,ds\leqslant\int\limits_0^f R\,[\bar{e},\bar{\mathrm{v}}]\,(s)ds.$$

Из (3.61), как уже отмечалось, следует

$$\sup\{\|A_\tau(s)\,v\|\ |\,0\leqslant s\leqslant f\}\leqslant O\left(f^b\right)+f^{-b-1}\int\limits_0^f R\,[\bar{e},\bar{\mathrm{v}}]\,(s)\,ds. \quad (3.62)$$

Подставляя оценку (3.62) в выражение для $\left(f'_+\right)'$ при $t\in R\backslash J$ в лемме 3.12, мы получаем основной результат этого параграфа.

Лемма 3.17. *Функция $f_\tau(t)$ в точках $t\in\mathbf{R}\backslash J$ удовлетворяет оценке*

$$\left(f'_+\right)'(t)\leqslant\left\{-(1-O(\tau))\int\limits_0^{f(t)} R\,[v,\bar{e}]\,(s)\,ds+O\left(\tau^{2b+1}\right)\right\}-$$
$$-\left(v,\bar{\mathrm{v}}\right)^{-1}\left(KR\,[\bar{e},\bar{\mathrm{v}}]\,(f(t))-\int\limits_0^f (R\,(v,\bar{e})\,\bar{e},\bar{\mathrm{v}})\,(s)\,ds\right)$$

для некоторой константы K и любой регулярной нормали v из $\mathrm{v}_q\partial C_\tau$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Cheeger J., Gromoll D.** On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature // Ann. Math.— 1972.— V. 96, N 3.— P. 413—443.

2. **Yau S. T.** Problem section // Seminar on differential geometry.— Ann. Math. Stud. N 102, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1982.

3. **Кон-Фоссен С. Э.** Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом.— М.: Физматгиз, 1959.— 303 с.

4. **Маренич В. Б.** Строение тензора кривизны открытого многообразия неотрицательной кривизны // Докл. АН СССР.— 1985.— Т. 273, № 5.— С. 1057—1062.

5. **Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.** Риманова геометрия в целом.— М.: Мир, 1971.— 343 с.

6. **Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.** Выпуклые множества в римановых пространствах неотрицательной кривизны // Успехи мат. наук.— 1977.— Т. 32, № 3.— С. 3—55.

7. **Буяло С. В.** Выпуклые множества и некоторые экстремальные теоремы в римановой геометрии: Дис. .. .канд. физ.-мат. наук: 01.01.04.— Л., 1977.— 86 с.