В. М. ГОРДИЕНКО

О ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКАХ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

В основе многих методов построения разностной сетки в криволинейном четырехугольнике лежит конформное отображение этого криволинейного четырехугольника на некоторый канонический четырехугольник, в котором сетка строится естественным образом, затем, используя обратное отображение, получают сетку в исходном криволинейном четырехугольнике.

В работе описывается класс канонических четырехугольников, предложенный С. К. Годуновым, и проводится обоснование этого предложения.

Напомним сначала понятие модуля криволинейного четырехугольника. Это необходимо для формулировки критерия того, что два данные четырехугольника могут быть конформно отображены друг на друга.

У криволинейного четырехугольника G (рис. 1) упорядочиваются

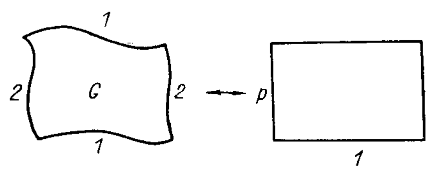

Рис. 1.

пары противоположных сторон: одна пара называется первой, а другая — второй. Криволинейный четырехугольник G конформно отображается на прямоугольник со сторонами длины 1 и p, причем стороны первой пары четырехугольника отображаются на стороны длины 1, а стороны второй пары — на стороны длины p. Такой прямоугольник существует и единственен. Модулем криволинейного четырехугольника G называется число p и обозначается через $\operatorname{mod} G$.

Очевидно, что два криволинейных четырехугольника могут быть конформно отображены друг на друга тогда и только тогда, когда их модули совпадают.

Переходим к описанию класса канонических четырехугольников, предложенных С. К. Годуновым, и формулировке результатов работы. Мы будем рассматривать криволинейные четырехугольники, граница которых состоит из четырех гладких дуг, а углы φ, ψ, τ, θ удовлетворяют условию $0 < \varphi, \psi, \tau, \theta < \pi$ (рис. 2).

Если сумма углов в криволинейном четырехугольнике G равна 2π $(\varphi + \psi + \tau + \theta = 2\pi)$, то подходящий конформный образ для G ищется среди прямолинейных четырехугольников с углами φ, ψ, τ, θ (рис. 3).

В § 1 доказано, что плоский прямолинейный четырехугольник с углами φ, ψ, τ, θ $(\varphi + \psi + \tau + \theta = 2\pi)$ и величиной модуля определяется однозначно (с точностью до подобия). И значит, для криволинейного четырехугольника G $(\varphi + \psi + \tau + \theta = 2\pi)$ существует единственный (с точностью до подобия) прямолинейный четырехугольник с углами φ, ψ, τ, θ, на который G может быть отображен конформно.

В случае, когда $\varphi + \psi + \tau + \theta \neq 2\pi$, конформный образ криволинейного четырехугольника ищется среди четырехугольников, расположенных на поверхностях постоянной кривизны и образованных геодезическими. В этом и состоит предложение С. К. Годунова — рассматривать конформные образы не обязательно на плоскости, а, возможно, на поверхности постоянной кривизны с тем, чтобы иметь возможность обеспечить совпадение соответствующих углов исходного криволинейного четырехугольника и его конформного образа.

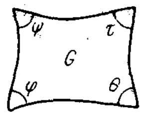

Рис. 2.

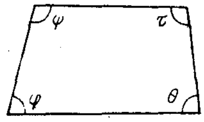

Рис. 3.

В § 2 рассматривается случай $\varphi+\psi+\tau+\theta>2\pi$ и доказывается, что если выполнено условие

$$\min\{\varphi, \psi, \tau, \theta\}>\frac{\varphi+\psi+\tau+\theta-2\pi}{2},$$

то на сфере найдется четырехугольник, образованный геодезическими (дугами большого круга), имеющий углы φ, ψ, τ, θ и заданный модуль.

В § 3 для случая $\varphi+\psi+\tau+\theta<2\pi$ доказывается, что на плоскости Лобачевского существует единственный четырехугольник, образованный геодезическими, имеющий углы φ, ψ, τ, θ и заданный модуль.

В статье Г. А. Чумакова [1], помещенной в этом же сборнике, описан алгоритм построения разностной сетки, использующий конформные образы на поверхностях постоянной кривизны.

Условимся далее здесь под словом четырехугольник без прилагательного «криволинейный» понимать четырехугольник, образованный геодезическими.

§ 1. ПОСТРОЕНИЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА НА ПЛОСКОСТИ ПО ЗАДАННЫМ УГЛАМ И МОДУЛЮ

Сформулируем два известных утверждения о модуле криволинейного четырехугольника, которые мы используем здесь и в § 3.

Утверждение 1. *Если криволинейный четырехугольник G разделен на два криволинейных четырехугольника G_1 и G_2 линией, соединяющей вторую пару противоположных сторон* (рис. 4), *то* $\operatorname{mod} G_1+\operatorname{mod} G_2\leqslant\operatorname{mod} G$ *и, в частности,* $\operatorname{mod} G_1<\operatorname{mod} G$.

Утверждение 2. *Если криволинейный четырехугольник G разделен на два криволинейных четырехугольника G_1 и G_2 линией, соединяющей первую пару противоположных сторон* (рис. 5), *то* $\frac{1}{\operatorname{mod} G_1}+\frac{1}{\operatorname{mod} G_2}\leqslant\frac{1}{\operatorname{mod} G}$ *и, в частности,* $\operatorname{mod} G_1>\operatorname{mod} G$.

По поводу доказательства утверждений см., например, [2]. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть заданы углы φ, ψ, τ, θ, удовлетворяющие условию $0<\varphi, \psi, \tau, \theta<\pi$, $\varphi+\psi+\tau+\theta=2\pi$, и число $m>0$. Утверждается, что на плоскости существует единственный (с точностью до подобия) четырехугольник с углами φ, ψ, τ, θ и модулем, равным m.*

Доказательство. Так как $\varphi+\psi+\tau+\theta=2\pi$, то четырехугольники с углами φ, ψ, τ, θ существуют. Чтобы описать их все с точностью до подобия, достаточно взять один из таких четырехугольников, зафиксировать одну сторону и перемещать противоположную параллельно самой себе (рис. 6).

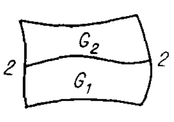

Рис. 4.

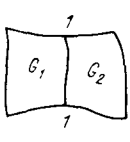

Рис. 5.

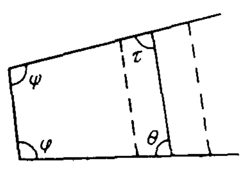

Рис. 6.

Из сформулированных в утверждениях 1 и 2 свойств модуля следует, что при описанном параллельном перемещении модуль четырехугольника изменяется монотонно. Можно также доказать, что модуль при этом изменяется от 0 до ∞. Значит, среди четырехугольников с углами φ, ψ, τ, θ существует только один, имеющий заданный модуль m. Теорема доказана.

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА НА СФЕРЕ ПО ЗАДАННЫМ УГЛАМ И МОДУЛЮ

На сфере фиксированного радиуса R требуется построить четырехугольник с заданными углами φ, ψ, τ, θ и модулем. Стороны четырехугольника должны быть геодезическими на сфере, т. е. дугами окружности большого радиуса. Предполагается, что углы удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered} 0<\varphi,\ \psi,\ \tau,\ \theta<\pi; \\ \varphi+\psi+\tau+\theta>2\pi; \\ \min\{\varphi,\ \psi,\ \tau,\ \theta\}>\frac{\varphi+\psi+\tau+\theta-2\pi}{2}. \end{gathered} \tag{1}$$

Отметим сразу необходимость последнего неравенства. В самом деле, пусть имеется четырехугольник с углами φ, ψ, τ, θ. Продолжим стороны, образующие угол φ до пересечения. Получим двуугольник, содержащий исходный четырехугольник (рис. 7). Площадь двуугольника равна $2\varphi R^2$, площадь четырехугольника — $(\varphi+\psi+\tau+\theta-2\pi)R^2$ (см. [3]), следовательно,

$$2\varphi>\varphi+\psi+\tau+\theta-2\pi.$$

Целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Если углы φ, ψ, τ, θ удовлетворяют неравенствам* (1) *и $m>0$, то на сфере существует четырехугольник с углами φ, ψ, τ, θ и модулем m.*

Длину стороны четырехугольника мы будем измерять величиной центрального угла.

Начнем с утверждения о единственности.

Лемма 1. *Четырехугольник однозначно определяется своими углами и одной стороной.*

Доказательство. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ известны углы φ, ψ, τ, θ и сторона $a=|AB|$. Покажем, что этим четырехугольник определен однозначно. Продолжим стороны BC и AD до пересечения (рис. 8). Получим треугольники ABO и DCO. В треугольнике ABO известны сторона a и прилежащие углы φ и ψ. Этим треугольник ABO определен однозначно и, значит, определены длины сторон BO и AO, а также угол BOA.

В треугольнике COD известны все три угла, поэтому этот треугольник определен однозначно, в частности, определены стороны CO и DO. Значит, определены длины сторон BC и AD, а следовательно, однозначно определен четырехугольник $ABCD$. Лемма доказана.

Конструкцию, использованную при доказательстве единственности в лемме 1, мы применим и для доказательства существования. Построение четырехугольника с заданными углами φ, ψ, τ, θ и стороной a (а также

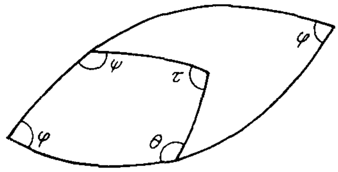

Рис. 7.

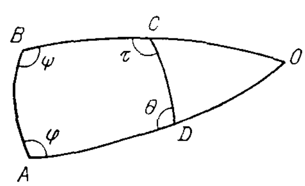

Рис. 8.

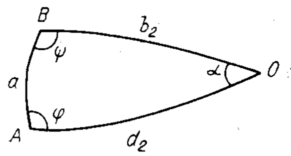

Рис. 9.

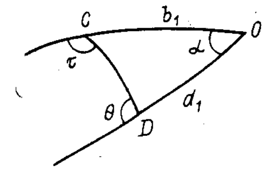

Рис. 10.

исследование возможности такого построения) будем проводить в три этапа.

Этап 1. Строим треугольник со стороной a и прилежащими углами φ, ψ (рис. 9). Это всегда можно сделать и притом единственным способом. Противолежащий стороне a угол α определяется по формуле (см. [3])

$$\cos\alpha = -\cos\varphi\cdot\cos\psi + \sin\varphi\cdot\sin\psi\cdot\cos a. \tag{2}$$

Таким образом, определена гладкая функция $\alpha=\alpha(a)$. Легко вычислить, что

$$\frac{d\alpha}{da} = \frac{\sin\varphi\cdot\sin\psi\cdot\sin a}{\sin\alpha} > 0. \tag{3}$$

Значит, функция $\alpha=\alpha(a)$ монотонно возрастающая. Обозначим

$$b_2 = b_2(a) = |BO|, \quad d_2 = d_2(a) = |AO|. \tag{4}$$

Этап 2. Построим треугольник COD с углами $\pi-\tau$, $\pi-\theta$, $\alpha=\alpha(a)$ (рис. 10). Это возможно тогда и только тогда, когда выполняются следующие неравенства:

$$\begin{gathered}\min\{\pi-\tau,\ \pi-\theta,\ \alpha\} > \frac{(\pi-\tau)+(\pi-\theta)+\alpha-\pi}{2} > 0,\\ \max\{\pi-\tau,\ \pi-\theta,\ \alpha\} < \pi.\end{gathered} \tag{5}$$

Обозначим

$$b_1 = b_1(a) = |CO|,\ d_1 = d_1(a) = |DO|,\ c = c(a) = |CD|. \tag{6}$$

Этап 3. Треугольники AOB и COD, построенные на предыдущих этапах, наложим друг на друга, совместив угол α (рис. 11). Обозначим

$$\begin{gathered} b = b(a) = b_2(a) - b_1(a),\\ d = d(a) = d_2(a) - d_1(a). \end{gathered} \tag{7}$$

Мы построили нужный четырехугольник, если $b(a)>0$ и $d(a)>0$. Таким образом, мы получили следующий результат.

Лемма 2. *Четырехугольник с углами φ, ψ, τ, θ и стороной a существует тогда и только тогда, когда величина $\alpha=\alpha(a)$, определенная соотношением* (2), *удовлетворяет неравенствам*

$$\begin{gathered}\min\{\pi-\tau,\ \pi-\theta,\ \alpha\} > \frac{(\pi-\tau)+(\pi-\theta)+\alpha-\pi}{2} > 0,\\ \max\{\pi-\tau,\ \pi-\theta,\ \alpha\} < \pi\end{gathered} \tag{8}$$

и выполнено

$$\begin{gathered} b(a) = b_2(a) - b_1(a) > 0,\\ d(a) = d_2(a) - d_1(a) > 0. \end{gathered} \tag{9}$$

(*Здесь использованы обозначения* (4), (6), (7).)

Докажем серию лемм.

Лемма 3. *Пусть существует четырехугольник с углами φ, ψ, τ, θ и стороной a_*. Тогда существует четырехугольник с углами φ, ψ, τ, θ и стороной a, где a близко к a_*. Причем, сторона c, противолежащая a, моно-*

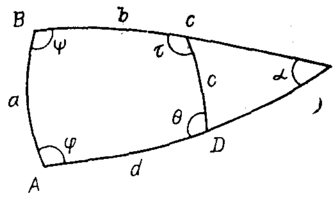
Рис. 11.

тонно растет при увеличении a ($c'(a)>0$), а прилежащие стороны b и d монотонно убывают ($b'(a)<0$, $d'(a)<0$).

Доказательство. Существование четырехугольника с заданными углами φ, ψ, τ, θ и стороной a, близкой к a_* следует из леммы 2 и соображений непрерывности. Далее, длина стороны b однозначно определяется величиной a в силу леммы 1. Но также и длина стороны a однозначно определяется, если известна сторона b (и углы). Значит, функция $b(a)$ монотонна. Аналогично, монотонными являются и функции $c(a)$ и $d(a)$.

Покажем, что $c(a)$ — монотонно возрастающая. Длина стороны c однозначно вычисляется из треугольника CDO (см. рис. 11) по трем его углам [3]:

$$\cos c = \frac{\cos\alpha + \cos\tau\cdot\cos\theta}{\sin\tau\cdot\sin\theta}.$$

Отсюда
$$dc = \frac{\sin\alpha\cdot d\alpha}{\sin\tau\cdot\sin\theta\cdot\sin c}.$$

Используя формулу (3), получим

$$\frac{dc}{da} = \frac{\sin\varphi\cdot\sin\psi\cdot\sin\alpha}{\sin\tau\cdot\sin\theta\cdot\sin c} > 0. \tag{10}$$

Значит, $c(a)$ — монотонно возрастающая. Покажем, что функции $b(a)$ и $d(a)$ — монотонно убывающие. Заметим сначала, что аналогично формуле (10) может быть получена формула

$$\frac{db}{dd} = \frac{\sin\varphi\cdot\sin\theta\cdot\sin d}{\sin\psi\cdot\sin\tau\cdot\sin b} > 0.$$

Значит, функции $b(a)$ и $d(a)$ или обе убывающие, или обе возрастающие. Допустим, что $b(a)$ и $d(a)$ обе возрастающие. Рассмотрим два четырехугольника $ABCD$ и $A'B'C'D'$ с углами φ, ψ, τ, θ (рис. 12). Пусть $a<a'$, тогда $c<c'$, а в силу сделанного предположения $b<b'$, $d<d'$. Проведем диагонали AC и $A'C'$. Наложим треугольник ABC на треугольник $A'B'C'$, совместив вершину B с B' и направления сторон AB с $A'B'$, BC с $B'C'$. Так как $a<b'$ и $b<b'$, то треугольник ABC вложен в треугольник $A'B'C'$. Значит, площадь треугольника $A'B'C'$ больше площади треугольника ABC. Аналогично, получаем, что площадь треугольника $A'C'D'$ больше площади треугольника ACD. Следовательно, площадь четырехугольника $A'B'C'D'$ больше площади четырехугольника $ABCD$. Но эти четырехугольники имеют равные углы и, значит, равные площади. Мы получили противоречие, которое доказывает, что $b(a)$ и $d(a)$ — монотонно убывающие функции.

Лемма 4. *Пусть при $a=a_0$ и $a=a_1$ ($0<a_0<a_1<\pi$) существуют четырехугольники с углами φ, ψ, τ, θ. Тогда четырехугольник с углами φ, ψ, τ, θ существует при каждом a таком, что $a_0\leqslant a\leqslant a_1$.*

Доказательство. Используем лемму 2 и введенные при ее формулировке обозначения. Пусть $a\in(a_0, a_1)$, функция $\alpha=\alpha(a)$ — монотонно возрастающая; при изменении a от a_0 до a_1 величина $\alpha=\alpha(a)$ изменяется от $\alpha_0=\alpha(a_0)$ до $\alpha_1=\alpha(a_1)$. Обоснуем выполнение неравенств (8). Заметим, что каждое из этих неравенств имеет один из следующих трех видов:

$$\alpha<f(\tau,\theta),\quad \alpha>g(\tau,\theta),\quad h(\tau,\theta)>0.$$

При $\alpha=\alpha_0$ и $\alpha=\alpha_1$ эти неравенства выполняются, значит, они выполня-

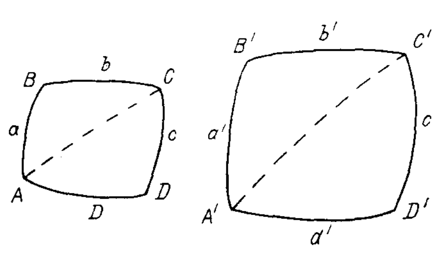
Рис. 12.

ются и при α таких, что $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$. Итак, неравенства (8) при $a \in (a_0, a_1)$ выполняются.

Покажем, что при $a \in (a_0, a_1)$ выполняются неравенства (9). Допустим, что существует $\widehat{a} \in (a_0, a_1)$ такая, что или $b(\widehat{a}) = 0$, или $d(\widehat{a}) = 0$ и пусть $\widehat{a}$ — самая правая из точек интервала (a_0, a_1), обладающая этим свойством. Тогда при $a \in (\widehat{a}, a_1)$ имеем $b(a) > 0$ и $d(a) > 0$ и, значит, при $a \in (\widehat{a}, a_1)$ четырехугольник с углами φ, ψ, τ, θ существует. В силу леммы 3 при $a \in (\widehat{a}, a_1)$ справедливо $b'(a) < 0$ и $d'(a) < 0$. Значит, $b(\widehat{a}) > b(a_1) > 0$ и $d(\widehat{a}) > d(a_1) > 0$. Получили противоречие с предположением, что $b(\widehat{a}) \cdot d(\widehat{a}) = 0$. Значит, $b(a) > 0$ и $d(a) > 0$ при $a \in (a_0, a_1)$. Лемма доказана.

Из двух сумм $\varphi + \psi$ и $\tau + \theta$ одна больше. Будем считать, что

$$\varphi + \psi \geqslant \tau + \theta. \tag{11}$$

Также из двух сумм $\psi + \tau$ и $\varphi + \theta$ одна больше, мы будем считать, что

$$\psi + \tau \geqslant \varphi + \theta. \tag{12}$$

Всюду далее в этом параграфе мы предполагаем неравенства (11) и (12) выполненными (иначе производится переобозначение сторон и углов).

Лемма 5. *При достаточно малых a четырехугольник с углами φ, ψ, τ, θ существует.*

Доказательство. Опять воспользуемся леммой 2. Вычислим $\alpha_0 = \alpha(0)$. Функция $\alpha(a)$ при $a > 0$ определяется из соотношения

$$\cos\alpha = -\cos\varphi \cdot \cos\psi + \sin\varphi \cdot \sin\psi \cdot \cos a.$$

Значит, $\cos\alpha_0 = \cos(\varphi + \psi - \pi)$, отсюда $\alpha_0 = |\varphi + \psi - \pi|$. Из неравенств $\varphi + \psi + \tau + \theta - 2\pi > 0$ и $\varphi + \psi \geqslant \tau + \theta$ следует, что $\varphi + \psi - \pi > 0$. Следовательно, $\alpha_0 = \varphi + \psi - \pi$. Когда a близко к нулю, $\alpha = \alpha(a)$ близко к α_0.

Выполнение условий (8) при $\alpha > \alpha_0 = \varphi + \psi - \pi$, но близких к α_0, легко проверить, используя неравенства (1) и (11). Выполнение неравенств (9) при $a = 0$ следует из того, что

$$b_2(0) = \pi,\ d_2(0) = \pi,\ b_1(0) < \pi,\ d_1(0) < \pi.$$

Значит, и при малых a $b(a) > 0$, $d(a) > 0$. Лемма доказана. Аналогично этой лемме может быть доказана следующая.

Лемма 6. *При достаточно малых b четырехугольник с углами φ, ψ, τ, θ существует.*

Вычислим длину стороны a при малых b. В предельном случае при $b = 0$ имеем треугольник ABD, в котором известны три угла (рис. 13). Величину a_1 можно вычислить из соотношения

$$\cos a_1 = \frac{\cos\theta + \cos\varphi \cdot \cos(\tau + \psi - \pi)}{\sin\varphi \cdot \sin(\tau + \psi - \pi)}.$$

При b, близких к 0, a близко к a_1. Применяя лемму 4, можно утверждать справедливость следующей леммы.

Лемма 7. *При любом $a \in (0, a_1)$ существует единственный четырехугольник с углами φ, ψ, τ, θ.*

Покажем, что при $a > a_1$ четырехугольников с углами φ, ψ, τ, θ не существует. В самом деле, если при $a = a_2 > a_1$ существует четырехугольник с углами φ, ψ, τ, θ, то по лемме 4 функция $b(a) > 0$ при $a \in (0, a_2)$, но, с другой стороны, $b(a_1) = 0$, противоречие.

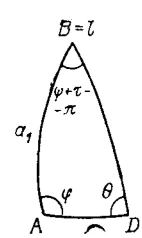

Рис. 13.

Переходим к доказательству теоремы 2. Обозначим через $m(a)$ модуль четырехугольника с углами φ, ψ, τ, θ и стороной a. При этом будем считать, что сторона a принадлежит ко второй паре противоположных сторон. Из свойств конформного отображения следует, что $m(a)$ — непрерывная функция, $m(a) \to 0$ при $a \to 0$ и $m(a) \to \infty$ при $a \to a_1$. Значит, когда a пробегает отрезок от 0 до a_1, величина модуля $m(a)$ принимает все значения от 0 до ∞. Теорема доказана.

В этой работе мы оставляем открытым вопрос о монотонности функции $m(a)$, поэтому в формулировке теоремы нет утверждения о единственности четырехугольника.

Отметим в заключение параграфа, что параметр $k(a) = \frac{a \cdot c(a)}{b(a) \cdot d(a)}$ монотонно зависит от a и изменяется от 0 до ∞, когда a изменяется от 0 до a_1. Поэтому величина $k = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ может быть использована в качестве параметра семейства четырехугольников с углами φ, ψ, τ, θ.

§ 3. ПОСТРОЕНИЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО ПО ЗАДАННЫМ УГЛАМ И МОДУЛЮ

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть заданы число $m > 0$ и углы φ, ψ, τ, θ, удовлетворяющие неравенствам:*

$$0 < \varphi,\ \psi,\ \tau,\ \theta < \pi; \quad \varphi + \psi + \tau + \theta < 2\pi.$$

Утверждается, что на плоскости Лобачевского существует единственный четырехугольник с углами φ, ψ, τ, θ и модулем m.

Для конкретности и наглядности мы будем использовать модель Пуанкаре плоскости Лобачевского (см., например, [4]). А именно, точкам плоскости Лобачевского соответствуют точки круга $x^2 + y^2 < R^2$ на евклидовой плоскости. Прямым плоскости Лобачевского соответствуют дуги окружностей, пересекающие границу круга $x^2 + y^2 < R^2$ под прямым углом. Расстояние в плоскости Лобачевского определяется метрикой

$$ds^2 = \frac{R^2 (dx^2 + dy^2)}{(R^2 - x^2 - y^2)}.$$

При этом угол между прямыми в плоскости Лобачевского равен углу между окружностями, которые соответствуют прямым в модели Пуанкаре.

Мы будем различать два случая.

Случай 1. Сумма углов при каждой из четырех сторон меньше π.

Случай 2. Существует сторона, сумма углов при которой не меньше π.

Рассмотрим случай 1, следовательно, выполняются неравенства $\varphi + \psi < \pi$, $\psi + \tau < \pi$, $\tau + \theta < \pi$, $\varphi + \theta < \pi$. Из точки O проведем два луча OF и OG, образующие угол φ. Точку O можно выбрать произвольно, удобно в качестве точки O взять центр круга (рис. 14). Длина стороны a будет играть роль параметра. Мы покажем, что длина стороны a может изменяться от некоторого $a_0 > 0$ до ∞. Сейчас мы определим величину a_0. На луче OF существует единственная точка A_0 такая, что прямая, проведенная через A_0 под углом ψ к OF, является параллельной к лучу OG. В самом деле, рассмотрим прямую, параллельную OG и пересекающую луч OF в точке $\tilde{A}$. Угол $O\tilde{A}G$ монотонно изменяется от $\pi - \varphi$ до 0, когда расстояние $|O\tilde{A}|$ изменяется от 0 до ∞.

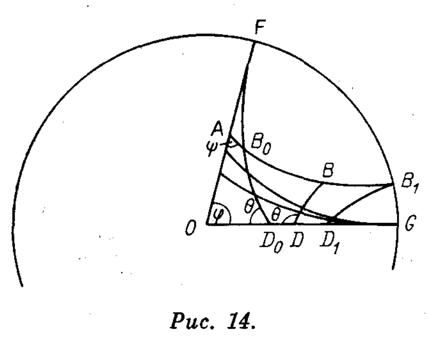

Рис. 14.

В силу сделанных предложений ψ удовлетворяет неравенствам $0 < \psi < \pi - \varphi$. Поэтому угол $O\tilde{A}G$ единственный раз примет значение, равное ψ при изменении $|O\tilde{A}|$ от 0 до ∞

Длину отрезка OA_0 обозначим a_0. Вычислить a_0 можно, рассматривая формально фигуру OA_0G как треугольник с углами φ, ψ, 0. Тогда получаем соотношение (см. [4])

$$\operatorname{ch} a_0 = \frac{1 + \cos\varphi \cdot \cos\psi}{\sin\varphi \cdot \sin\psi}.$$

Покажем, что при $a \leqslant a_0$ не существует четырехугольника с углами φ, ψ, τ, θ. В самом деле, если бы такой четырехугольник существовал, то его можно было бы вложить в треугольник OA_0G. Площадь четырехугольника равна $S = R^2[2\pi - (\varphi + \psi + \tau + \theta)]$, а площадь треугольника OA_0G равна $S_0 = R^2[\pi - (\varphi + \psi)]$. В силу неравенства $\tau + \theta < \pi$ имеем $S > S_0$.

Мы покажем, что если $a_0 < a < \infty$, то существует единственный четырехугольник с углами φ, ψ, τ, θ. Возьмем точку A на луче OF на расстоянии a от точки O. Проведем через A прямую AB_1 под углом ψ к OF. Прямые AB_1 и A_0G не пересекаются, так как имеют один и тот же угол с прямой OF. Значит, не пересекаются также прямые AB_1 и OG. Проведем из некоторой точки D на луче OG прямую под углом θ к лучу OG. Пусть эта прямая пересекает прямую AB_1 в точке B. Четырехугольник $ABCD$ будет искомый, если точка D на луче OG выбрана так, что площадь четырехугольника $ABCD$ равна

$$S = R^2[2\pi - (\varphi + \psi + \tau + \theta)].$$

Покажем, что на луче OG существует единственная точка D такая, что площадь четырехугольника $ABCD$ равна S. Легко видеть, что на луче OG найдется единственная точка D_0 такая, что прямая, проведенная к OG под углом θ, параллельна OF. Обозначим через B_0 точку пересечения прямых AB_1 и D_0G. Также на луче OG найдется единственная точка D_1 такая, что прямая, проведенная к OG под углом θ, параллельна AB_1.

Площадь четырехугольника OAB_0D_0 меньше S. Действительно, площадь четырехугольника OAB_0D_0 меньше площади «треугольника» OFD_0, которая равна $R^2[\pi - (\varphi + \theta)]$, что меньше S в силу неравенства $\tau + \theta < \pi$. Площадь «четырехугольника» OAB_1D_1 равна $R^2[2\pi - (\varphi + \psi + \theta)]$, что больше S. При движении точки D от D_0 к D_1 площадь четырехугольника $OABD$ монотонно растет, принимая значения и меньшие S, и большие S. Значит, на луче OG существует единственная точка D_0 такая, что площадь четырехугольника $OABD$ равна S. Тем самым, мы построили четырехугольник с углами φ, ψ, τ, θ и стороной $a \in (a_0, \infty)$ и показали, что такой четырехугольник единственный.

Переходим к рассмотрению второго случая. Значит, существует сторона, сумма углов при которой не меньше π. Эту сторону обозначим через a, т. е. $\varphi + \psi \geqslant \pi$. Заметим, что в силу неравенства $\varphi + \psi + \tau + \theta < 2\pi$ обязательно выполняется одно из двух неравенств: или $\varphi + \theta < \pi$, или $\psi + \tau < \pi$. Для определенности будем считать, что выполнено неравенство $\varphi + \theta < \pi$. Длина стороны a будет играть роль параметра. Окажется, что a изменяется от нуля до некоторого a_1. Сейчас мы определим величину a_1. Из точки O, в качестве которой удобно взять центр круга, соответствующего плоскости Лобачевского, проведем два луча OF и OG, образующие угол φ.

Если $\psi + \tau > \pi$, то построим треугольник OA_1D_0 такой, что точка A_1 лежит на луче OF, точка D_0 лежит на луче OG, угол OA_1D_0 равен $\gamma = \psi + \tau - \pi$, угол OD_0A равен θ (рис. 15). Легко видеть, что площадь треугольника OA_1D_0 равна $S = R^2[2\pi - (\varphi + \psi + \tau + \theta)]$. Длину стороны OA_1 обозначим через a_1. Величину a_1 можно вычислить, используя формулу

$$\operatorname{ch}\frac{a_1}{R} = \frac{\cos\theta + \cos\varphi \cdot \cos\gamma}{\sin\varphi \cdot \sin\gamma}.$$

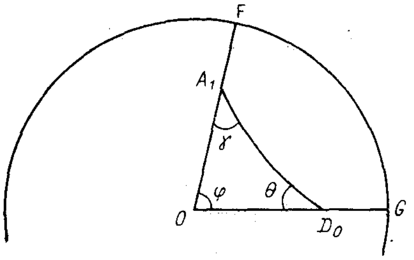

Рис. 15.

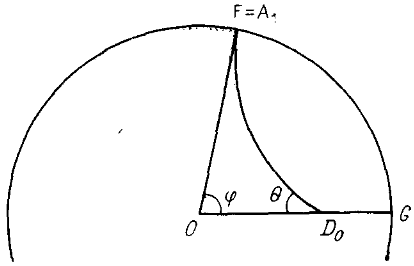

Рис. 16.

Если $\psi+\tau\leqslant\pi$, то точку D_0 на луче OG выберем так, чтобы прямая, пересекающая OG в точке D_0, была параллельна OF. Это возможно в силу неравенства $\varphi+\theta<\pi$ (рис. 16). В этом случае мы положим $a_1=\infty$, «точку» A_1 будем считать совпадающей с F. Заметим, что площадь «треугольника» OD_0F (OD_0A_1) равна $R^2[\pi-(\varphi+\theta)]$, что не больше, чем $S=R^2[2\pi-(\varphi+\psi+\tau+\theta)]$ (в силу неравенства $\psi+\tau\leqslant\pi$).

Покажем, что если $0<a<a_1$, то существует единственный четырехугольник с заданными углами. Пусть $a\in(0,\ a_1)$. Точку A возьмем на прямой OA_1 на расстоянии a от O. Проведем через точку A луч AB_1 под углом ψ к прямой OA_1 (рис. 17). Точку пересечения AB_1 и D_0A_1 обозначим через B_0. В силу неравенства $\varphi+\psi\geqslant\pi$ луч AB_1 не пересекает луч OG.

Так же, как и в предыдущем случае, для построения четырехугольника с заданными углами φ, ψ, τ, θ нужно так выбрать точку D на луче OG, чтобы прямая, проведенная через точку D под углом θ к OG, пересекала бы луч AB_1 в некоторой точке B, и площадь полученного четырехугольника $OABD$ равнялась бы $S=R^2[2\pi-(\varphi+\psi+\tau+\theta)]$. Очевидно, что при вариации точки D площадь четырехугольника $OABD$ изменяется монотонно. На луче OG найдется единственная точка D_1 такая, что прямая, проведенная под углом θ к лучу OG, является параллельной AB_1. Площадь четырехугольника OAB_0D_0 меньше S, так как OAB_0D_0 — часть треугольника OA_1D_0. Площадь «четырехугольника» OAB_1D_1 равна $R^2[2\pi-(\varphi+\psi+\theta)]$, что больше S. Поэтому между точками D_0 и D найдется единственная точка D такая, что площадь четырехугольника $OABD$ будет равна S. Четырехугольник $OABD$ — искомый.

Таким образом, мы показали, что во втором случае, если $a\in(0,a_1)$, существует единственный четырехугольник с углами φ, ψ, τ, θ. В случае если $\psi+\tau>\pi$, величина a_1 конечна и нужно показать, что при $a>a_1$ четырехугольника с углами φ, ψ, τ, θ не существует. Это легко сделать, в самом деле, если бы такой четырехугольник существовал, то его площадь равнялась бы S. В то же время в этот четырехугольник можно было бы вложить треугольник OA_1D_0 площадью S, противоречие.

Итак, мы доказали следующую лемму.

Лемма 8. *Если для углов φ, ψ, τ, θ выполнены неравенства*

$$0<\varphi,\ \psi,\ \tau,\ \theta<\pi;\quad \varphi+\psi+\tau+\theta<2\pi,$$

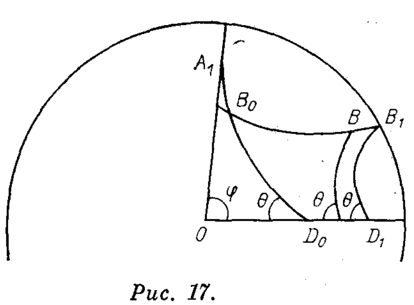

Рис. 17.

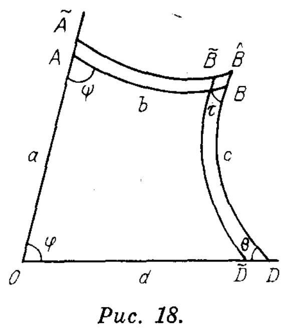

Рис. 18.

то существует однопараметрическое семейство четырехугольников с углами φ, ψ, τ, θ. В качестве параметра семейства можно взять длину стороны a. При этом a изменяется в пределах от a_0 до a_1.

Установим монотонную зависимость других сторон b, c и d от a. Покажем, что $d=d(a)$ — монотонно убывающая функция от a. В самом деле, если a увеличить, то d необходимо уменьшить, иначе новый четырехугольник будет содержать старый и, следовательно, будет иметь большую площадь (рис. 18). Аналогично показывается, что $b=b(a)$ — убывающая функция. Используя переобозначения сторон, можно утверждать, что c — монотонно убывающая функция от b, а значит, $c=c(a)$ — монотонно возрастающая.

Итак, при увеличении a сторона c тоже увеличивается, а стороны b и d уменьшаются. Отсюда, в частности, следует, что параметр $k=\frac{ac}{bd}$ есть монотонно возрастающая функция от a. Причем когда величина a пробегает весь отрезок возможных для нее значений, параметр k пробегает значения от 0 до ∞.

Переходим к доказательству теоремы 3. Как и в § 2, обозначим через $m(a)$ модуль четырехугольника с углами φ, ψ, τ, θ и стороной a. При этом будем считать, что сторона a принадлежит ко второй паре противоположных сторон. Из свойств конформного отображения следует, что $m(a)$ — непрерывная функция, $m(a)\to 0$ при $a\to a_0$, $m(a)\to\infty$ при $a\to a_1$. Значит, когда a пробегает отрезок от a_0 до a_1, величина модуля $m(a)$ принимает все значения от 0 до ∞. В отличие от § 2 здесь мы можем еще доказать и монотонность функции $m(a)$. В самом деле, используя обозначения на рис. 18, монотонность $d(a)$ и утверждения 1 и 2 из § 1, мы имеем при $a<\tilde a$

$$m(a)=\operatorname{mod} OABD<\operatorname{mod} O\tilde A\widehat{B}D<\operatorname{mod} O\tilde A\tilde B\tilde D=m(\tilde a).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чумаков Г. А.** Риманова метрика гармонической параметризации геодезических четырехугольников на поверхностях постоянной кривизны.
2. **Волковыский Л. И.** Квазиконформные отображения.— Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1954.— 156 с.
3. **Погорелов А. В.** Геометрия.— М.: Наука, 1983.— 288 с.
4. **Ефимов Н. В.** Высшая геометрия.— М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1961.— 580 с.

Г. А. ЧУМАКОВ

РИМАНОВА МЕТРИКА ГАРМОНИЧЕСКОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена параметризации геодезических четырехугольников на поверхностях постоянной кривизны и использованию ее для конформной параметризации криволинейных четырехугольников. Она является обобщением хорошо известного способа построения разностных сеток путем отыскания квазиконформного отображения данной области на квадрат [1], а также методики [2] построения разностных сеток в сложных областях, основанной на отыскании квазиконформного отображения физической области на каноническую область на плоско-