

где

$$\begin{aligned} a(\eta) &= s\gamma \cos \varphi \frac{\sin(\eta\omega)}{\sin \omega} + r \cos \psi \cos(\theta - \eta\omega) \frac{\gamma}{\sin \gamma}, \\ b(\xi) &= s \cos \varphi \cos(\theta - \xi\gamma) \frac{\omega}{\sin \omega} + r\omega \cos \psi \frac{\sin(\xi\gamma)}{\sin \gamma}, \\ c(\xi, \eta) &= \cos(\theta - \xi\gamma - \eta\omega). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Нетрудно показать, что $a(\eta) > 0$ и $b(\xi) > 0$. Таким образом, отображение (4.6) является взаимно однозначным отображением квадрата D в плоскости (ξ, η) на канонический четырехугольник P в плоскости (x, y) . Это отображение порождает метрику

$$dx^2 + dy^2 = g_{11} d\xi^2 + 2g_{12} d\xi d\eta + g_{22} d\eta^2,$$

где $g_{11} = x_\xi^2 + y_\xi^2$, $g_{12} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$, $g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2$. Отсюда и из (4.7) получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{g_{11}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} &= \frac{a(\eta)}{b(\xi)c(\xi, \eta)}, \quad \frac{g_{22}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = \frac{b(\xi)}{a(\eta)c(\xi, \eta)}, \\ \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} &= -\operatorname{tg}(\theta - \xi\gamma - \eta\omega). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Отметим, что эти метрические параметры зависят от ξ , η и отношения r/s .

Я сердечно благодарен Сергею Константиновичу Годунову, который поставил мне эту задачу и оказывал постоянную поддержку при выполнении работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Численное решение многомерных задач газовой динамики/С. К. Годунов, Л. В. Забродин, М. Я. Иванов и др.— М.: Наука, 1976.— 400 с.
2. Годунов С. К., Роменский Е. И., Чумаков Г. А. Построение разностных сеток в сложных областях с помощью квазиконформных отображений // Вычислительные проблемы в задачах математической физики.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990.— (Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; Т. 18).— С. 75—84.
3. Берге М. Геометрия.— М.: Мир, 1984.— Т. 2.— 366 с.

Л. А. МЕРЖИЕВСКИЙ, А. Д. РЕСНЯНСКИЙ, Е. И. РОМЕНСКИЙ

МОДЕЛЬ ВЯЗКОУПРУГОГО КОМПОЗИТА С МИКРОНАПРЯЖЕНИЯМИ

ВВЕДЕНИЕ

В работе предложена вязкоупругая модель для описания динамического поведения двухкомпонентных композитов — волокнистых и слоистых. В основе построения модели лежит метод феноменологического усреднения для определения эффективных характеристик композита. Хорошо разработанные математические методы осреднения для сред с периодической структурой [1, 2] в ряде случаев приводят к алгоритмически трудноразрешимым задачам, связанным с необходимостью решения вспомогательных задач на ячейке периодичности. Предлагаемый метод феноменологического усреднения не предполагает периодичности структуры. Он заключается в использовании гипотез однородности поля скоростей внутри элемента среды и в однородности компонент напря-

жений, действующих поперек волокон или слоев. Вводится новая феноменологическая характеристика материала (в общем случае тензорная), связанная с наличием неоднородности компонент напряжений, действующих вдоль волокон или слоев. Возникающие при этом параметры Δ_{ij} состояния элемента среды выражаются через разности упругих деформаций компонент композита, направленных вдоль волокон или слоев. Элементы тензора Δ_{ij} являются по сути кинетическими параметрами для описания композиционного материала. Кроме того, Δ_{ij} входят в уравнение состояния (упругая энергия) композита, но не входят в формулы закона Гука, связывающие макронапряжения и макродеформации. Наличие Δ_{ij} приводит к неупругому изменению плотности композита, что обусловлено неустранимой разницей микронапряжений, действующих вдоль волокон (слоев). Оказывается, что полученные модели являются термодинамически корректными, т. е. для них выполнено условие диссипации энергии. Для проверки применимости модели проведена серия модельных расчетов по деформированию волокнистых композитов и сравнение с экспериментальными данными. Показано вполне удовлетворительное соответствие. При этом отмечено существенное влияние внутренних микронапряжений на диаграмму деформирования $\sigma(\epsilon)$. Характерной особенностью построенных диаграмм является наличие двух точек излома (вместо одной для изотропного упругопластического материала).

Данная статья — результат совместной работы сотрудников ИМ СО АН СССР и ИГИЛ СО АН СССР.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем изучать два типа двухкомпонентных композитов — однонаправленные волокнистые и слоистые. Среду рассматриваем феноменологически, т. е. каждый ее элемент должен быть представительным, содержать большое число волокон или слоев. Об относительном их расположении, кроме взаимной параллельности, не делается никаких предположений. Считаем, что известны объемные концентрации и все необходимые механические свойства каждой компоненты.

Предположим, что составляющие композита описываются вязкоупругой моделью Максвелла для малых упругих деформаций [3]. Отметим, что время релаксации касательных напряжений τ , входящее в эту модель, может быть функцией состояния среды. Таким образом, каждая из компонент композита ($\alpha = 1, 2$ — номер компоненты) описывается системой уравнений:

$$\rho_{\alpha} \frac{\partial u_i^{(\alpha)}}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}^{(\alpha)}}{\partial x_j} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{ij}^{(\alpha)}}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(\alpha)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(\alpha)}}{\partial x_i} \right) = - \frac{\sigma_{ij}^{(\alpha)} - \frac{1}{3} (\sigma_{11}^{(\alpha)} + \sigma_{22}^{(\alpha)} + \sigma_{33}^{(\alpha)}) \delta_{ij}}{2\mu_{\alpha}\tau_{\alpha}}.$$

Здесь $\rho_{\alpha} = \text{const}$ — плотность; $u_i^{(\alpha)}$ — вектор скорости, $\sigma_{ij}^{(\alpha)}$ — тензор напряжений; $\epsilon_{ij}^{(\alpha)}$ — тензор упругих деформаций; τ_{α} — время релаксации; μ_{α} — модуль сдвига. Напряжения связаны с деформациями законом Гука:

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)} = \lambda_{\alpha} (\epsilon_{11}^{(\alpha)} + \epsilon_{22}^{(\alpha)} + \epsilon_{33}^{(\alpha)}) \delta_{ij} + 2\mu_{\alpha} \epsilon_{ij}^{(\alpha)} \quad (1.2)$$

и могут быть вычислены по упругому потенциалу при помощи соотношений:

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)} = \rho_{\alpha} \frac{\partial U^{(\alpha)}}{\partial \epsilon_{ij}^{(\alpha)}}, \quad (1.3)$$

где

$$\rho_{\alpha} U^{(\alpha)} = \frac{\lambda_{\alpha}}{2} (\varepsilon_{11}^{(\alpha)} + \varepsilon_{22}^{(\alpha)} + \varepsilon_{33}^{(\alpha)})^2 + \mu_{\alpha} ((\varepsilon_{11}^{(\alpha)})^2 + (\varepsilon_{22}^{(\alpha)})^2 + (\varepsilon_{33}^{(\alpha)})^2 + 2\varepsilon_{12}^{(\alpha)}\varepsilon_{21}^{(\alpha)} + 2\varepsilon_{23}^{(\alpha)}\varepsilon_{32}^{(\alpha)} + 2\varepsilon_{31}^{(\alpha)}\varepsilon_{13}^{(\alpha)}). \quad (1.4)$$

Задача состоит в том, чтобы получить эволюционные уравнения, аналогичные (1.1), для параметров, характеризующих композит. Для определения таких параметров будем использовать «средние» эффективные характеристики элемента композита. Ясно, что «средние» макроскопические напряжения недостаточны для удовлетворительного описания напряженно-деформированного состояния среды. Так, даже когда на элемент композита не действуют внешние силы и макронапряжения отсутствуют, внутри элемента могут существовать неустраняемые микронапряжения, направленные, например, вдоль волокон (слоев) и не приводящие к макроскопическому движению. Тем не менее, как будет видно, эти микронапряжения играют существенную роль в поведении композита.

При построении феноменологической модели будем использовать односкоростное приближение, т. е. будем предполагать однородность поля скоростей внутри элемента композита $u_i = u_i^{(\alpha)}$. Это предположение оправдано для достаточно длинных волн.

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных композитов. Всюду далее будем использовать общепринятое обозначение [1, 2] для «средних» величин

$$\langle a \rangle = ca_1 + (1 - c)a_2,$$

где c и $1 - c$ — объемные концентрации первой и второй компонент композита; a_i — величины, характеризующие свойства компонент. Будем использовать также обозначение

$$\tilde{a} = (1 - c)a_1 + ca_2 = a_1 a_2 \langle a^{-1} \rangle.$$

§ 2. МОДЕЛЬ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА

Пусть имеется композит, состоящий из параллельных волокон одного материала, направленных вдоль оси x_1 и расположенных в матрице из другого материала. Пусть c — объемная концентрация волокон, $1 - c$ — объемная концентрация вещества матрицы. Сформулируем постулаты, на основе которых будет получена феноменологическая модель композита. Пусть поведение каждой компоненты описывается уравнениями (1.1) — (1.4).

Предположим, что

$$u_i^{(\alpha)} = u_i, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}, \quad (ij) \neq (11), \quad (2.2)$$

$$\sigma_{11} = c\sigma_{11}^{(1)} + (1 - c)\sigma_{11}^{(2)}, \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_{ij} = c(\varepsilon_{ij}^{(1)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^{(1)}) + (1 - c)(\varepsilon_{ij}^{(2)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^{(2)}), \quad (ij) \neq (11), \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^{(1)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{11}^{(2)}. \quad (2.5)$$

Поясним суть гипотез (2.1) — (2.5). Предположение (2.1), как уже говорилось, постулирует однородность вектора скорости внутри элемента композита. Гипотеза (2.2) означает, что напряжения, действующие поперек волокон, одинаковы в волокнах и матрице. Эти предположения выполнены в длинноволновом приближении. Гипотеза (2.3) означает, что сила, действующая на элемент композита вдоль волокон, является

суммой сил, действующих на каждую компоненту. Предположения (2.4) и (2.5) базируются на том факте, что в элементе композита без макронапряжений ($\sigma_{ij} = 0$) могут существовать неустранимые микродеформации $\epsilon_{ij}^{(\alpha)}$, создающие ненулевые микронапряжения $\sigma_{11}^{(1)} \neq \sigma_{11}^{(2)}$. Гипотеза (2.4) предполагает, что сдвиговые деформации и деформации поперек волокон являются суммой соответствующих упругих деформаций компонент, отсчитываемых от макронапряженного состояния. Гипотеза (2.5) означает, что упругая деформация $\epsilon_{11}^{(\alpha)}$ каждой компоненты складывается из неустранимой деформации $\epsilon_{11}^{(\alpha)}$, определенной при $\sigma_{ij} = 0$ и общей для обоих материалов деформации ϵ_{11} .

Оказывается, совокупность гипотез (2.1)–(2.5) позволяет построить замкнутую феноменологическую модель однонаправленного композита с макроскопическими характеристиками u_i , σ_{ij} , ϵ_{ij} , $\Delta = \epsilon_{11}^{(1)} - \epsilon_{11}^{(2)}$. Здесь, как мы видим, параметр Δ характеризует неравновесность композита, состоящую в наличии разности упругих деформаций компонент вдоль направления волокон. Δ естественным образом учитывает то, что в состоянии с нулевыми макроскопическими напряжениями σ_{ij} могут существовать ненулевые микронапряжения $\sigma_{11}^{(\alpha)} \neq 0$, действующие по направлению армирования.

Совокупность уравнений (2.2)–(2.5) позволяет выразить $\epsilon_{ij}^{(\alpha)}$ через макродеформации ϵ_{ij} и параметр Δ , а также получить формулы закона Гука связи макронапряжений σ_{ij} с ϵ_{ij} . Кроме того, можно получить динамические уравнения для скоростей u_i , деформаций ϵ_{ij} и параметра Δ .

Начнем с вычисления деформаций $\epsilon_{ij}^{(\alpha)}$, соответствующих макроскопически ненапряженному состоянию $\sigma_{ij} = 0$. Для $i \neq j$ из закона Гука (1.2) и гипотезы однородности (2.2) следует, что при $\sigma_{ij} = 0$ ($i \neq j$)

$$\epsilon_{ij}^{(\alpha)} = 0, \quad i \neq j, \quad \alpha = 1, 2.$$

Далее, из системы уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c\sigma_{11}^{(1)} + (1-c)\sigma_{11}^{(2)} = 0, \\ \sigma_{22}^{(1)} &= 0, \quad \sigma_{22}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(2)} = 0, \\ \epsilon_{11}^{(1)} - \epsilon_{11}^{(2)} &= \Delta, \end{aligned}$$

а также закона Гука (1.2) вытекает

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^{(1)} &= \frac{(1-c)E_2}{\langle E \rangle} \Delta, \quad \epsilon_{11}^{(2)} = -\frac{cE_1}{\langle E \rangle} \Delta, \\ \epsilon_{kk}^{(1)} &= -\frac{(1-c)\lambda_1 E_2}{2\langle E \rangle(\lambda_1 + \mu_1)} \Delta, \quad \epsilon_{kk}^{(2)} = \frac{c\lambda_2 E_1}{2\langle E \rangle(\lambda_2 + \mu_2)} \Delta, \quad k = 2, 3. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь $E_\alpha = \frac{\mu_\alpha(3\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha)}{\lambda_\alpha + \mu_\alpha}$ — модуль Юнга; $\langle E \rangle = cE_1 + (1-c)E_2$ — «средний» модуль Юнга композита. Итак, получены формулы, которые в макроскопически ненапряженном состоянии связывают деформации каждой компоненты с параметром неравновесности Δ , который, вообще говоря, может быть отличен от нуля.

Теперь можно определить $\epsilon_{ij}^{(\alpha)}$ через ϵ_{ij} и Δ . Для касательных деформаций $\epsilon_{ij}^{(\alpha)}$, используя (2.4), (2.2), (1.2) и то, что $\epsilon_{ij}^{(\alpha)} = 0$ при $i \neq j$, получим систему

$$c\epsilon_{ij}^{(1)} + (1-c)\epsilon_{ij}^{(2)} = \epsilon_{ij}, \quad \mu_1\epsilon_{ij}^{(1)} = \mu_2\epsilon_{ij}^{(2)}.$$

Отсюда следует

$$\epsilon_{ij}^{(1)} = \frac{\langle \mu^{-1} \rangle^{-1}}{\mu_1} \epsilon_{ij}, \quad \epsilon_{ij}^{(2)} = \frac{\langle \mu^{-1} \rangle^{-1}}{\mu_2} \epsilon_{ij}, \quad i \neq j. \quad (2.7)$$

Для деформаций, направленных вдоль осей, из (2.6), (2.4), (2.5), (2.2), (1.2) получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^{(1)} &= \varepsilon_{11} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{11}^{(1)}, \quad \varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_{11} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{11}^{(2)}, \\ c\varepsilon_{22}^{(1)} + (1-c)\varepsilon_{22}^{(2)} &= \varepsilon_{22} + c\overset{\circ}{\varepsilon}_{22}^{(1)} + (1-c)\overset{\circ}{\varepsilon}_{22}^{(2)}, \\ c\varepsilon_{33}^{(1)} + (1-c)\varepsilon_{33}^{(2)} &= \varepsilon_{33} + c\overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^{(1)} + (1-c)\overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^{(2)}, \\ \lambda_1(\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{22}^{(1)} + \varepsilon_{33}^{(1)}) + 2\mu_1\varepsilon_{22}^{(1)} - \lambda_2(\varepsilon_{11}^{(2)} + \varepsilon_{22}^{(2)} + \varepsilon_{33}^{(2)}) - 2\mu_2\varepsilon_{22}^{(2)} &= 0, \\ \lambda_1(\varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{22}^{(1)} + \varepsilon_{33}^{(1)}) + 2\mu_1\varepsilon_{33}^{(1)} - \lambda_2(\varepsilon_{11}^{(2)} + \varepsilon_{22}^{(2)} + \varepsilon_{33}^{(2)}) - 2\mu_2\varepsilon_{33}^{(2)} &= 0.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Решение этой системы дает формулы для вычисления $\varepsilon_{kk}^{(\alpha)}$ через ε_{kk} и Δ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^{(1)} &= \varepsilon_{11} + \frac{(1-c)E_2}{\langle E \rangle} \Delta, \quad \varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_{11} - \frac{cE_1}{\langle E \rangle} \Delta, \\ \varepsilon_{22}^{(1)} &= \frac{(1-c)(\lambda_2 - \lambda_1)}{2(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})} \varepsilon_{11} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2 + \mu_2}{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}} + \frac{\mu_2}{\tilde{\mu}} \right) \varepsilon_{22} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2 + \mu_2}{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}} - \frac{\mu_2}{\tilde{\mu}} \right) \varepsilon_{33} - \frac{(1-c)\lambda_1 E_2}{2(\lambda_1 + \mu_1)\langle E \rangle} \Delta, \\ \varepsilon_{22}^{(2)} &= -\frac{c(\lambda_2 - \lambda_1)}{2(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})} \varepsilon_{11} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1 + \mu_1}{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}} + \frac{\mu_1}{\tilde{\mu}} \right) \varepsilon_{22} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1 + \mu_1}{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}} - \frac{\mu_1}{\tilde{\mu}} \right) \varepsilon_{33} + \\ &+ \frac{c\lambda_2 E_1}{2(\lambda_2 + \mu_2)\langle E \rangle} \Delta, \\ \varepsilon_{33}^{(1)} &= \frac{(1-c)(\lambda_2 - \lambda_1)}{2(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})} \varepsilon_{11} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2 + \mu_2}{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}} - \frac{\mu_2}{\tilde{\mu}} \right) \varepsilon_{22} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2 + \mu_2}{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}} + \frac{\mu_2}{\tilde{\mu}} \right) \varepsilon_{33} - \\ &- \frac{(1-c)\lambda_1 E_2}{2(\lambda_1 + \mu_1)\langle E \rangle} \Delta, \\ \varepsilon_{33}^{(2)} &= -\frac{c(\lambda_2 - \lambda_1)}{2(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})} \varepsilon_{11} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1 + \mu_1}{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}} - \frac{\mu_1}{\tilde{\mu}} \right) \varepsilon_{22} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1 + \mu_1}{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}} + \frac{\mu_1}{\tilde{\mu}} \right) \varepsilon_{33} + \\ &+ \frac{c\lambda_2 E_1}{2(\lambda_2 + \mu_2)\langle E \rangle} \Delta.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Используя теперь формулы (2.8), можно получить закон Гука, связывающий макронапряжения σ_{ij} и макродеформации ε_{ij} . Для этого нужно выражения для $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}$ подставить в (1.2) с учетом (2.2), (2.3).

Следуя принятым в [4] обозначениям для упругих модулей трансверсально-изотропной среды, получим

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{12}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{22} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{23}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{23}\varepsilon_{22} + C_{22}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{12} &= C_{66}\varepsilon_{12}, \\ \sigma_{13} &= C_{66}\varepsilon_{13}, \\ \sigma_{23} &= \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23})\varepsilon_{23},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}C_{11} &= \langle \lambda + 2\mu \rangle - \frac{c(1-c)(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}}, \\ C_{12} &= \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\lambda + \mu} \right\rangle^{-1}, \quad C_{22} = \left\langle \frac{1}{\lambda + \mu} \right\rangle^{-1} + \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1},\end{aligned}\quad (2.10)$$

$$C_{23} = \left\langle \frac{1}{\lambda + \mu} \right\rangle^{-1} - \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1},$$

$$C_{66} = \frac{1}{2} (C_{22} - C_{23}) = \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1}.$$

Для определения упругого потенциала естественно использовать предположение об аддитивности внутренней энергии:

$$\rho U = c\rho_1 U^{(1)} + (1-c)\rho_2 U^{(2)}, \quad (2.11)$$

где $\rho = c\rho_1 + (1-c)\rho_2$ — плотность композита; $U(\alpha)$ вычисляются по формуле (1.3). Подставляя формулы для $\epsilon_{ij}^{(\alpha)}$ в (2.11), получим для внутренней энергии композита формулу

$$\rho U = \frac{1}{2} C_{11} \epsilon_{11}^2 + \frac{1}{2} C_{22} (\epsilon_{22}^2 + \epsilon_{33}^2) + C_{12} \epsilon_{11} (\epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + C_{23} \epsilon_{22} \epsilon_{33} +$$

$$+ 2C_{66} (\epsilon_{12} \epsilon_{21} + \epsilon_{23} \epsilon_{32} + \epsilon_{31} \epsilon_{13}) + \frac{1}{2} B \Delta^2, \quad (2.12)$$

где C_{ij} вычисляются по (2.10), а

$$B = \frac{c(1-c)E_1 E_2}{\langle E \rangle}.$$

Легко убедиться, что выполнен аналог формул Мурнагана [3]; макронапряжения (2.9) вычисляются как производные упругого потенциала (2.12) по упругим макродеформациям ϵ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}}.$$

Отметим, что в упругой энергии появилось слагаемое $\frac{1}{2} B \Delta^2$, характеризующее вклад неравновесных микронапряжений в энергетику процесса. Это слагаемое может быть весьма значительным.

Перейдем теперь к выводу эволюционных уравнений для параметров композита. Используя гипотезы об однородности скоростей (2.1) и макронапряжений (2.2), а также (2.3), получим из (1.1) уравнения

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (2.13)$$

где $\rho = c\rho_1 + (1-c)\rho_2$, а σ_{ij} вычисляются по закону Гука (2.9).

Для вывода уравнений эволюции макродеформаций используем их определение (2.4), (2.5), выражения (2.6) для $\epsilon_{ij}^{(\alpha)}$, а также уравнения (1.1) для $\epsilon_{ij}^{(\alpha)}$ и определение Δ . После громоздких преобразований получим уравнения

$$\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = -\varphi_{ij}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = -\psi.$$

Используя обозначение $q = \rho U_{\Delta}$, скорости изменения неупругих деформаций φ_{ij} и ψ вычислим по формулам

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= \alpha_{11}\sigma_{11} + \alpha_{12}\sigma_{22} + \alpha_{13}\sigma_{33} + \beta_1 q, \\ \varphi_{22} &= \alpha_{12}\sigma_{11} + \alpha_{22}\sigma_{22} + \alpha_{23}\sigma_{33} + \beta_2 q, \\ \varphi_{33} &= \alpha_{12}\sigma_{11} + \alpha_{23}\sigma_{22} + \alpha_{33}\sigma_{33} + \beta_2 q, \\ \psi &= \beta_1\sigma_{11} + \beta_2\sigma_{22} + \beta_2\sigma_{33} + \gamma q, \\ \varphi_{12} &= \alpha_{66}\sigma_{12}, \quad \varphi_{13} = \alpha_{66}\sigma_{13}, \quad \varphi_{23} = \alpha_{66}\sigma_{23}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} &= \frac{1}{3} \langle E \rangle^{-2} \left\langle \frac{E^2}{\mu \tau} \right\rangle, \\
 \alpha_{12} &= -\frac{1}{6} \langle E \rangle^{-2} \left\langle \frac{E}{\mu \tau} \right\rangle \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right\rangle - \frac{1}{6} \langle E \rangle^{-1} \left\langle \frac{E}{(\lambda + \mu) \tau} \right\rangle, \\
 \alpha_{22} &= \frac{1}{12} \langle E \rangle^{-2} \left\langle \frac{E^2}{\mu \tau} \right\rangle \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right\rangle^2 + \frac{1}{12} \left\langle \frac{\mu}{(\lambda + \mu)^2 \tau} \right\rangle + \\
 &\quad + \frac{1}{6} \langle E \rangle^{-1} \left\langle \frac{E}{(\lambda + \mu) \tau} \right\rangle \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right\rangle + \frac{1}{4} \left\langle \frac{1}{\mu \tau} \right\rangle, \\
 \alpha_{23} &= \frac{1}{12} \langle E \rangle^{-2} \left\langle \frac{E^2}{\mu \tau} \right\rangle \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right\rangle^2 + \frac{1}{12} \left\langle \frac{\mu}{(\lambda + \mu)^2 \tau} \right\rangle + \\
 &\quad + \frac{1}{16} \langle E \rangle^{-1} \left\langle \frac{E}{(\lambda + \mu) \tau} \right\rangle \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right\rangle - \frac{1}{4} \left\langle \frac{1}{\mu \tau} \right\rangle, \\
 \alpha_{33} &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{\mu \tau} \right\rangle, \quad \gamma = \frac{1}{3c(1-c)} \left(\frac{1-c}{\mu_1 \tau_1} + \frac{c}{\mu_2 \tau_2} \right), \\
 \beta_1 &= \frac{1}{3} \langle E \rangle^{-1} \left(\frac{E_1}{\mu_1 \tau_1} - \frac{E_2}{\mu_2 \tau_2} \right), \\
 \beta_2 &= -\frac{1}{6} \langle E \rangle^{-1} \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right\rangle \left(\frac{E_1}{\mu_1 \tau_1} - \frac{E_2}{\mu_2 \tau_2} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{(\lambda_1 + \mu_1) \tau_1} - \frac{1}{(\lambda_2 + \mu_2) \tau_2} \right).
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Итак, получена замкнутая система эволюционных уравнений для скоростей u_i , упругих макродеформаций ε_{ij} и параметра неравновесности Δ .

Изучим некоторые свойства этой системы. Во-первых, элементы матрицы α_{ij} обладают теми же свойствами симметрии трансверсально-изотропного материала, что и матрица C_{ij} упругих модулей. Более того, легко видеть, что кинетические члены φ_{ij} , ψ симметричны относительно переменных σ_{ij} , q . Можно убедиться, что если в φ_{ij} , ψ перейти к переменным ε_{ij} , Δ , то свойства симметрии теряются.

Интересно отметить, что на уровне макродеформаций в данной модели имеет место неупругое изменение плотности. Действительно, из (2.14) можно получить, что

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = -\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33}.$$

Это объясняется наличием микронапряжений, характеризующихся параметром неравновесности Δ . Можно показать, что имеет место уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} + \frac{c(1-c)E_1E_2}{\langle E \rangle} \left(\frac{1}{3\lambda_1 + 2\mu_1} - \frac{1}{3\lambda_2 + 2\mu_2} \right) \Delta] = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3},$$

которое является аналогом уравнения неразрывности для среды с микронапряжениями. Из последнего уравнения следует, что объемная деформация композита является неупругой и имеет дефект необратимости, связанный с неравновесными микронапряжениями.

Выпишем еще условия кинетического равновесия неупругих деформаций или, другими словами, определим состояние, к которому релаксирует композит (в изотропной среде напряжения релаксируют к шаровому тензору). Эти условия можно вывести, требуя равенства нулю скоростей изменения неупругих деформаций $\varphi_{ij} = 0$ и $\psi = 0$, и это состояние является следующим:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} &= \frac{\langle E \rangle}{c(1-c)E_1E_2} \frac{1}{\left(\frac{1}{3\lambda_1 + 2\mu_1} - \frac{1}{3\lambda_2 + 2\mu_2} \right)} q, \\
 \sigma_{ij} &= 0, \quad i \neq j, \quad q = \rho U \Delta.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Таким образом, в состоянии кинетического равновесия тензор напряжений является шаровым и связан с параметром неравновесности Δ формулами (2.17).

Выясним теперь, выполнены ли условия диссипации энергии в полученной феноменологической модели композита. Используя формулу для внутренней энергии (2.12), уравнения эволюции тензора деформаций и параметра Δ (2.14), а также формулы закона Гука (2.9), можно получить уравнение баланса энергии

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\sigma_{ij} \dot{\varphi}_{ij} - q\dot{\psi} = -\kappa. \quad (2.18)$$

Для термодинамической корректности модели должно быть выполнено условие диссипации энергии $\kappa \geq 0$. Докажем это неравенство. Используя (2.14), получим

$$\begin{aligned} \kappa = \sigma_{ij} \dot{\varphi}_{ij} + q\dot{\psi} = & \alpha_{11} \sigma_{11}^2 + 2\alpha_{12} \sigma_{11} (\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \alpha_{22} (\sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) + \\ & + 2\alpha_{23} \sigma_{22} \sigma_{33} + 2\beta_1 \sigma_{11} q + 2\beta_2 (\sigma_{22} + \sigma_{33}) q + \gamma q^2 + 2\alpha_{66} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2). \end{aligned}$$

Производя замену переменных $\sigma_{22} = \frac{l+m}{2}$, $\sigma_{33} = \frac{l-m}{2}$, квадратичную форму κ приведем к виду

$$\begin{aligned} \kappa = & \alpha_{11} \sigma_{11}^2 + 2\alpha_{12} \sigma_{11} l + \frac{1}{2} (\alpha_{22} + \alpha_{23}) l^2 + 2\beta_1 \sigma_{11} q + 2\beta_2 l q + \gamma q^2 + \\ & + \frac{1}{2} (\alpha_{22} - \alpha_{23}) m^2 + 2\alpha_{66} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2). \end{aligned}$$

Учитывая теперь, что

$$\alpha_{22} - \alpha_{23} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{\mu\tau} \right\rangle > 0, \quad \alpha_{66} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{\mu\tau} \right\rangle > 0,$$

достаточно доказать неотрицательную определенность формы

$$\kappa' = \alpha_{11} \sigma_{11}^2 + 2\alpha_{12} \sigma_{11} l + \frac{1}{2} (\alpha_{22} + \alpha_{23}) l^2 + 2\beta_1 \sigma_{11} q + 2\beta_2 l q + \gamma q^2.$$

Это легко сделать, если использовать следующие тождества:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} - \frac{\beta_1^2}{\gamma} &= \frac{1}{3 \langle \mu\tau \rangle}, \quad \frac{\alpha_{22} + \alpha_{23}}{2} - \frac{\beta_2^2}{\gamma} = \frac{1}{12 \langle \mu\tau \rangle}, \\ \alpha_{12} - \frac{\beta_1 \beta_2}{\gamma} &= -\frac{1}{6 \langle \mu\tau \rangle}. \end{aligned}$$

С учетом этих формул κ' приводится к виду

$$\kappa' = \frac{1}{3 \langle \mu\tau \rangle} \left(\sigma_{11} - \frac{1}{2} l \right)^2 + \gamma \left(q + \frac{\beta_1}{\gamma} \sigma_{11} + \frac{\beta_2}{\gamma} l \right)^2 \geq 0.$$

Таким образом, мы доказали, что условие диссипации энергии $\kappa \geq 0$ в построенной модели композита выполнено.

Итак, для описания макродеформаций волокнистого композита получена система уравнений (2.12), (2.13), (2.14), следствием которой является уравнение баланса энергии (2.18).

§ 3. МОДЕЛЬ СЛОИСТОГО КОМПОЗИТА

Рассмотрим теперь композит, составленный из плоскопараллельных слоев двух материалов с направлением укладки слоев вдоль оси x_1 . Пусть s и $1-s$ — объемные концентрации каждого из материалов. Так же, как и в предыдущем параграфе, сформулируем предположения, с помощью которых получим замкнутую систему уравнений макроскопическо-

го описания композита. Предположим, что

$$u_i^{(\alpha)} = u_i, \quad \alpha = 1, 2, \quad (3.1)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}, \quad (ij) = (11), (12), (13), \quad (3.2)$$

$$\sigma_{ij} = c\sigma_{ij}^{(1)} + (1-c)\sigma_{ij}^{(2)}, \quad (ij) = (22), (23), (33), \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_{ij} = c(\varepsilon_{ij}^{(1)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^{(1)}) + (1-c)(\varepsilon_{ij}^{(2)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^{(2)}), \quad (ij) = (11), (12), (13), \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(2)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^{(2)}, \quad (ij) = (22), (23), (33). \quad (3.5)$$

Смысл гипотез (3.1)–(3.5) таков же, что и у аналогичных предположений (2.1)–(2.5) для волокнистого композита. Напомним только, что $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^{(\alpha)}$ — неустраняемые упругие деформации компонент, которые могут существовать даже при нулевом тензоре макронапряжений $\sigma_{ij} = 0$. Как видим, здесь появляется уже три параметра, характеризующих неравновесность композита относительно взаимных деформаций вдоль слоев:

$$\Delta_{22} = \varepsilon_{22}^{(1)} - \varepsilon_{22}^{(2)}, \quad \Delta_{23} = \varepsilon_{23}^{(1)} - \varepsilon_{23}^{(2)}, \quad \Delta_{33} = \varepsilon_{33}^{(1)} - \varepsilon_{33}^{(2)}. \quad (3.6)$$

Построим замкнутую модель композита с макроскопическими характеристиками u_i , σ_{ij} , ε_{ij} , Δ_{ij} . Определим вначале деформации $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^{(\alpha)}$ каждой компоненты композита в макроскопически ненапряженном состоянии $\sigma_{ij} = 0$. Из закона Гука (1.2) и гипотезы однородности (3.2) следует, что при $\sigma_{ij} = 0$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^{(\alpha)} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (ij) = (12), (13).$$

Из уравнений

$$\sigma_{22} = c\sigma_{22}^{(1)} + (1-c)\sigma_{22}^{(2)} = 0,$$

$$\sigma_{23} = c\sigma_{23}^{(1)} + (1-c)\sigma_{23}^{(2)} = 0,$$

$$\sigma_{33} = c\sigma_{33}^{(1)} + (1-c)\sigma_{33}^{(2)} = 0,$$

$$\sigma_{11}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{11}^{(2)} = 0,$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{22}^{(1)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{22}^{(2)} = \Delta_{22}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{23}^{(1)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{23}^{(2)} = \Delta_{23}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^{(1)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^{(2)} = \Delta_{33}$$

и закона Гука (1.2) получим

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{22}^{(1)} &= \frac{1-c}{2} \left(\frac{D_2}{\langle D \rangle} + \frac{\mu_2}{\langle \mu \rangle} \right) \Delta_{22} + \frac{1-c}{2} \left(\frac{D_2}{\langle D \rangle} - \frac{\mu_2}{\langle \mu \rangle} \right) \Delta_{33}, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^{(1)} &= \frac{1-c}{2} \left(\frac{D_2}{\langle D \rangle} - \frac{\mu_2}{\langle \mu \rangle} \right) \Delta_{22} + \frac{1-c}{2} \left(\frac{D_2}{\langle D \rangle} + \frac{\mu_2}{\langle \mu \rangle} \right) \Delta_{33}, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22}^{(2)} &= -\frac{c}{2} \left(\frac{D_1}{\langle D \rangle} + \frac{\mu_1}{\langle \mu \rangle} \right) \Delta_{22} - \frac{c}{2} \left(\frac{D_1}{\langle D \rangle} - \frac{\mu_1}{\langle \mu \rangle} \right) \Delta_{33}, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^{(2)} &= -\frac{c}{2} \left(\frac{D_1}{\langle D \rangle} - \frac{\mu_1}{\langle \mu \rangle} \right) \Delta_{22} - \frac{c}{2} \left(\frac{D_1}{\langle D \rangle} + \frac{\mu_1}{\langle \mu \rangle} \right) \Delta_{33}, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{23}^{(1)} &= \frac{(1-c)\mu_2}{\langle \mu \rangle} \Delta_{23}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{23}^{(2)} = -\frac{c\mu_1}{\langle \mu \rangle} \Delta_{23}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{11}^{(1)} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} (\overset{\circ}{\varepsilon}_{22}^{(1)} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^{(1)}), \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{11}^{(2)} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} (\overset{\circ}{\varepsilon}_{22}^{(2)} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^{(2)}).$$

Здесь

$$D_\alpha = \frac{\mu_\alpha(3\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha)}{\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha}.$$

Из (3.7) очевидно, что удобнее ввести новые переменные, характеризующие неравновесность

$$\Delta_+ = \frac{\Delta_{22} + \Delta_{33}}{2}, \quad \Delta_- = \frac{\Delta_{22} - \Delta_{33}}{2}. \quad (3.8)$$

Определим теперь $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}$ через ε_{ij} и Δ_+ , Δ_- , Δ_{23} . Используя совокупность гипотез (3.2) — (3.5), а также закон Гука (1.2) и формулы (3.7), (3.8), путем громоздких выкладок получим формулы:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^{(1)} &= \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \varepsilon_{11} + \frac{(1-c)(\lambda_2 - \lambda_1)}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) - \frac{(1-c)D_2}{\langle D \rangle} \cdot \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \Delta_+, \\ \varepsilon_{11}^{(2)} &= \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \varepsilon_{11} + \frac{c(\lambda_1 - \lambda_2)}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + \frac{cD_1}{\langle D \rangle} \cdot \frac{2\lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \Delta_+, \\ \varepsilon_{22}^{(1)} &= \varepsilon_{22} + \frac{(1-c)D_2}{\langle D \rangle} \Delta_+ + \frac{(1-c)\mu_2}{\langle \mu \rangle} \Delta_-, \\ \varepsilon_{22}^{(2)} &= \varepsilon_{22} - \frac{cD_1}{\langle D \rangle} \Delta_+ - \frac{c\mu_1}{\langle \mu \rangle} \Delta_-, \\ \varepsilon_{33}^{(1)} &= \varepsilon_{33} + \frac{(1-c)D_2}{\langle D \rangle} \Delta_+ - \frac{(1-c)\mu_2}{\langle \mu \rangle} \Delta_-, \\ \varepsilon_{33}^{(2)} &= \varepsilon_{33} - \frac{cD_1}{\langle D \rangle} \Delta_+ + \frac{c\mu_1}{\langle \mu \rangle} \Delta_-, \\ \varepsilon_{12}^{(1)} &= \frac{\langle \mu^{-1} \rangle^{-1}}{\mu_1} \varepsilon_{12}, \quad \varepsilon_{12}^{(2)} = \frac{\langle \mu^{-1} \rangle^{-1}}{\mu_2} \varepsilon_{12}, \\ \varepsilon_{13}^{(1)} &= \frac{\langle \mu^{-1} \rangle^{-1}}{\mu_1} \varepsilon_{13}, \quad \varepsilon_{13}^{(2)} = \frac{\langle \mu^{-1} \rangle^{-1}}{\mu_2} \varepsilon_{13}, \\ \varepsilon_{23}^{(1)} &= \varepsilon_{23} + \frac{(1-c)\mu_2}{\langle \mu \rangle} \Delta_{23}, \quad \varepsilon_{23}^{(2)} = \varepsilon_{23} - \frac{c\mu_1}{\langle \mu \rangle} \Delta_{23}.\end{aligned}$$

Теперь из (3.9) следуют соотношения закона Гука — для этого нужно выражения (3.9) подставить, с учетом (3.2), (3.3), в формулы (1.2). Получим соотношения (2.9) для трансверсально-изотропного материала, где

$$\begin{aligned}C_{11} &= \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1}, \\ C_{12} &= \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1}, \\ C_{22} &= \langle \lambda + 2\mu \rangle - \frac{c(1-c)(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}, \\ C_{23} &= \frac{\lambda_1\lambda_2 + 2\tilde{\mu}\langle \lambda \rangle}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}, \\ C_{66} &= \langle \mu^{-1} \rangle^{-1}, \\ C_{22} - C_{23} &= 2\langle \mu \rangle.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Формулы (3.10) совпадают с приведенными в [1, 4] формулами для C_{ij} , полученными для периодической слоистой среды.

Упругий потенциал вычислим по формуле

$$\rho U = c\rho_1 U^{(1)} + (1-c)\rho_2 U^{(2)},\tag{3.11}$$

где $\rho = c\rho_1 + (1-c)\rho_2$, $\rho_\alpha U^{(\alpha)}$ определяются из (1.3). Подставляя формулы (3.9) для $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}$ в (3.11), получим

$$\begin{aligned}\rho U &= \frac{1}{2} C_{11} \varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{2} C_{22} (\varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) + C_{12} \varepsilon_{11} (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + C_{23} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + \\ &+ 2C_{66} (\varepsilon_{12} \varepsilon_{21} + \varepsilon_{13} \varepsilon_{31}) + 2(C_{22} - C_{23}) \varepsilon_{23} \varepsilon_{32} + \frac{1}{2} B_+ \Delta_+^2 + \frac{1}{2} B_- \Delta_-^2 + B_{23} \Delta_{23} \Delta_{32}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

где C_{ij} — коэффициенты (3.10) в законе Гука, а

$$B_+ = 4c(1-c) \frac{D_1 D_2}{\langle D \rangle}, \quad B_- = 4c(1-c) \frac{\mu_1 \mu_2}{\langle \mu \rangle}, \quad B_{23} = 2c(1-c) \frac{\mu_1 \mu_2}{\langle \mu \rangle}.$$

Здесь так же, как и для волокнистого композита, справедливы формулы

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}.$$

Далее, легко убедиться, что для скоростей имеет место уравнение

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (3.13)$$

Уравнения для макродеформации ε_{ij} и параметров неравновесности Δ_+ , Δ_- , Δ_{23} вытекают из их определений (3.4)–(3.6) и выражений (3.9) для $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) &= -\varphi_{ij}, \\ \frac{\partial \Delta_+}{\partial t} &= -\psi_+, \\ \frac{\partial \Delta_-}{\partial t} &= -\psi_-, \\ \frac{\partial \Delta_{23}}{\partial t} &= -\psi_{23}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= \alpha_{11}\sigma_{11} + \alpha_{12}\sigma_{22} + \alpha_{12}\sigma_{33} + \beta_1^+ q_+, \\ \varphi_{22} &= \alpha_{12}\sigma_{11} + \alpha_{22}\sigma_{22} + \alpha_{23}\sigma_{33} + \beta_2^+ q_+ + \beta_2^- q_-, \\ \varphi_{33} &= \alpha_{12}\sigma_{11} + \alpha_{23}\sigma_{22} + \alpha_{22}\sigma_{33} + \beta_2^+ q_+ - \beta_2^- q_-, \\ \psi_+ &= \beta_1^+ \sigma_{11} + \beta_2^+ \sigma_{22} + \beta_2^+ \sigma_{33} + \gamma^+ q_+, \\ \psi_- &= \beta_2^- \sigma_{22} - \beta_2^- \sigma_{33} + \gamma^- q_-, \\ \varphi_{23} &= (\alpha_{22} - \alpha_{23})\sigma_{23} + \beta_{23} q_{23}, \\ \psi_{23} &= \beta_{23}\sigma_{23} + \gamma_{23} q_{23}, \\ \varphi_{12} &= \alpha_{66}\sigma_{12}, \\ \varphi_{13} &= \alpha_{66}\sigma_{13}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Здесь $q_+ = \rho U_{\Delta_+}$, $q_- = \rho U_{\Delta_-}$, $q_{23} = \rho U_{\Delta_{23}}$. Обозначив

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{2}{3(\lambda_1 + 2\mu_1)} + \frac{1}{3\mu_1} \cdot \frac{D_1}{\langle D \rangle} \cdot \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle, \\ \Lambda_2 &= \frac{2}{3(\lambda_1 + 2\mu_1)} + \frac{1}{3\mu_2} \cdot \frac{D_2}{\langle D \rangle} \cdot \left\langle \frac{2}{\lambda + 2\mu} \right\rangle, \end{aligned}$$

получим для α , β , γ следующие формулы:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= 3 \left\langle \frac{\mu \Lambda^2}{\tau} \right\rangle, \quad \alpha_{12} = -\frac{1}{2 \langle D \rangle} \left\langle \frac{D \Lambda}{\tau} \right\rangle, \\ \alpha_{22} &= \frac{1}{12 \langle D \rangle^2} \left\langle \frac{D^2}{\mu \tau} \right\rangle + \frac{1}{4 \langle \mu \rangle^2} \left\langle \frac{\mu}{\tau} \right\rangle, \\ \alpha_{23} &= \frac{1}{12 \langle D \rangle^2} \left\langle \frac{D^2}{\mu \tau} \right\rangle - \frac{1}{4 \langle \mu \rangle^2} \left\langle \frac{\mu}{\tau} \right\rangle, \\ \alpha_{66} &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{\mu \tau} \right\rangle, \\ \beta_1^+ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda_2}{\tau_2} - \frac{\Lambda_1}{\tau_1} \right), \\ \beta_2^+ &= \frac{1}{12 \langle D \rangle} \left(\frac{D_1}{\mu_1 \tau_1} - \frac{D_2}{\mu_2 \tau_2} \right), \quad \beta_2^- = \frac{1}{4 \langle \mu \rangle} \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} \right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\beta_{23} = \frac{1}{2\langle\mu\rangle} \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} \right),$$

$$\gamma_+ = \frac{1}{12c(1-c)} \left(\frac{1-c}{\mu_1\tau_1} + \frac{c}{\mu_2\tau_2} \right), \quad \gamma_- = \frac{1}{4c(1-c)} \left(\frac{1-c}{\mu_1\tau_1} + \frac{c}{\mu_2\tau_2} \right),$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{2c(1-c)} \left(\frac{1-c}{\mu_1\tau_1} + \frac{c}{\mu_2\tau_2} \right).$$

Аналог уравнения неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} + 4 \frac{c(1-c) D_1 D_2}{\langle D \rangle} \left(\frac{1}{3\lambda_1 + 2\mu_1} - \frac{1}{3\lambda_2 + 2\mu_2} \right) \Delta_+ \right] =$$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

Как и для волокнистого композита, имеет место неупругое изменение плотности за счет возникновения неравновесных микронапряжений, определяющих Δ_+ .

Условия кинетического равновесия находим из уравнений $\varphi_{ij} = 0$, $\psi_+ = 0$, $\psi_- = 0$, $\psi_{23} = 0$. Они имеют вид

$$\sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \Delta_{23} = 0, \quad \Delta_- = 0,$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{\langle D \rangle}{4c(1-c) D_1 D_2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{3\lambda_1 + 2\mu_1} - \frac{1}{3\lambda_2 + 2\mu_2} \right)} \rho U_{\Delta_+}.$$

Перейдем теперь к анализу выполнения условий диссипации энергии. Следствием уравнений эволюции деформаций (3.14) и формулы для упругого потенциала (3.12) является уравнение баланса энергии

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\kappa = -\sigma_{ij} \varphi_{ij} - \rho U_{\Delta_+} \psi_+ - \rho U_{\Delta_-} \psi_- - \rho U_{\Delta_{23}} \psi_{23}.$$

Для выполнения условия диссипации энергии необходимо, чтобы $\kappa \geq 0$. Используя (3.15), получим для κ выражение

$$\kappa = \alpha_{11} \sigma_{11}^2 + 2\alpha_{12} (\sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{11} \sigma_{33}) + \alpha_{22} (\sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) +$$

$$+ 2\alpha_{23} \sigma_{22} \sigma_{33} + 2\beta_1^+ \sigma_{11} q_+ + 2\beta_2^+ (\sigma_{22} + \sigma_{33}) q_+ + 2\beta_2^- (\sigma_{22} - \sigma_{33}) q_- + \gamma_+ q_+^2 +$$

$$+ \gamma_- q_-^2 + (\alpha_{22} - \alpha_{23}) \sigma_{23}^2 + 2\beta_{23} \sigma_{23} q_{23} + \gamma_{23} q_{23}^2 + \alpha_{66} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2),$$

где $q_+ = \rho U_{\Delta_+}$, $q_- = \rho U_{\Delta_-}$, $q_{23} = \rho U_{\Delta_{23}}$. Произведя замену $\sigma_{22} = \frac{l+m}{2}$, $\sigma_{33} = \frac{l-m}{2}$, получим

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \alpha_{66} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2),$$

где

$$\kappa_1 = \alpha_{11} \sigma_{11}^2 + 2\alpha_{12} \sigma_{11} l + \frac{\alpha_{22} + \alpha_{23}}{2} l^2 + 2\beta_1^+ \sigma_{11} q_+ + 2\beta_2^+ l q_+ + \gamma_+ q_+^2,$$

$$\kappa_2 = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{23}}{2} m^2 + 2\beta_2^- m q_- + \gamma_- q_-^2,$$

$$\kappa_3 = (\alpha_{22} - \alpha_{23}) \sigma_{23}^2 + 2\beta_{23} \sigma_{23} q_{23} + \gamma_{23} q_{23}^2.$$

Из (3.16) следуют тождества $\alpha_{11} - \frac{(\beta_1^+)^2}{\gamma_+} = \frac{1}{3\langle\mu\tau\rangle}$,

$$\frac{\alpha_{22} + \alpha_{23}}{2} - \frac{(\beta_2^+)^2}{\gamma_+} = \frac{1}{12\langle\mu\tau\rangle}, \quad \alpha_{12} - \frac{\beta_1^+ \beta_2^+}{\gamma_+} = -\frac{1}{6\langle\mu\tau\rangle}.$$

Это дает для первой формы выражение

$$\kappa_1 = \frac{1}{3 \langle \mu \tau \rangle} \left(\sigma_{11} - \frac{1}{2} l \right)^2 + \gamma_+ \left(q_+ + \frac{\beta_1^+}{\gamma_+} \sigma_{11} + \frac{\beta_2^+}{\gamma_+} l \right)^2 \geq 0.$$

Неотрицательность второй и третьей форм следует из положительности выражений

$$\frac{\alpha_{22} - \alpha_{23}}{2} - \frac{(\beta_2^-)^2}{\gamma_-} = \frac{1}{4 \langle \mu \tau \rangle} > 0,$$

$$\alpha_{22} - \alpha_{23} - \frac{\beta_{23}^2}{\gamma_{23}} = \frac{1}{2 \langle \mu \tau \rangle} > 0.$$

Положительность α_{66} влечет неотрицательность формы κ .

Таким образом, для слоистого композита получена система (3.13), (3.14), удовлетворяющая условию диссипации энергии.

Для композитов произвольной структуры также может быть определен тензор параметров неравновесности Δ_{ij} , характеризующий разность неустранимых упругих деформаций компонент композита. Общий вид уравнений эволюции тензора деформаций ϵ_{ij} и тензора неравновесности деформаций Δ_{ij} будет следующим:

$$\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = -\alpha_{ijmn} \sigma_{mn} - \beta_{ijkl} q_{kl},$$

$$\frac{\partial \Delta_{kl}}{\partial t} = -\beta_{klij} \sigma_{ij} - \gamma_{klpr} q_{pr},$$

где

$$q_{kl} = \rho U_{\Delta_{kl}}.$$

Эти уравнения, дополненные уравнениями для скоростей

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0,$$

должны замыкаться уравнением состояния вида

$$\rho U = \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} + \frac{1}{2} B_{ijkl} \Delta_{ij} \Delta_{kl},$$

по которому вычисляются напряжения

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}.$$

Тензоры коэффициентов C_{ijkl} , B_{ijkl} , α_{ijkl} , β_{ijkl} , γ_{ijkl} могут быть определены, исходя из структуры композита по характеристикам его компонент. Это достигается применением методики феноменологического усреднения аналогично тому, как она использовалась в данной работе для описания поведения волокнистого и слоистого композитов.

§ 4. ЗАДАЧА О ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЯ ИЗ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА

Рассмотрим задачу о высокоскоростном однородном деформировании стержня из волокнистого композита вдоль направления волокон. Численный анализ задачи проведем в нульмерной постановке (процесс моделируется обыкновенными дифференциальными уравнениями). Результатом решения нульмерной задачи является расчет диаграммы $\sigma(\epsilon)$ деформирования стержня. Для проверки применимости модели проведено сравнение рассчитанных диаграмм с экспериментальными.

Уравнения деформирования стержня из волокнистого композита, направленного вдоль оси x_1 , следуют из уравнений (2.14), (2.15) при следующих предположениях:

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \quad u_2 = u_3 = 0,$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{23}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \dot{\varepsilon}(t).$$

Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_{11}}{dt} &= \dot{\varepsilon} - \alpha_{11}\sigma_{11} - \beta_1 q, \\ \frac{d\Delta}{dt} &= -\beta_1\sigma_{11} - \gamma q, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{1}{3} \langle E \rangle^{-2} \left\langle \frac{E^2}{\mu\tau} \right\rangle, \\ \beta_1 &= \frac{1}{3} \langle E \rangle^{-1} \left(\frac{E_1}{\mu_1\tau_1} - \frac{E_2}{\mu_2\tau_2} \right), \quad \gamma = \frac{1}{3c(1-c)} \left(\frac{1-c}{\mu_1\tau_1} + \frac{c}{\mu_2\tau_2} \right). \end{aligned}$$

Для замыкания системы (4.1) привлекаются уравнения

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + 2C_{12}\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{22} &= C_{12}\varepsilon_{11} + (C_{22} + C_{23})\varepsilon_{22} = 0, \end{aligned}$$

откуда получаем связь $\sigma_{11}(\varepsilon_{11})$ в виде закона Гука

$$\sigma_{11} = \langle E \rangle \varepsilon_{11}. \quad (4.2)$$

Кроме того, имеем связь

$$q = \rho U_{\Delta} = B\Delta = \frac{c(1-c)E_1E_2}{\langle E \rangle} \Delta. \quad (4.3)$$

Итак, система уравнений (4.1) замыкается соотношениями (4.2) и (4.3). Полная деформация вычисляется по формуле

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \dot{\varepsilon}(t) dt.$$

Приведем результаты серии модельных расчетов, выполненных для композита, изготовленного из меди (армирующие волокна) и эпоксидной смолы (связующее). Материальные константы и функциональная зависимость τ для меди взяты из [5], а для эпоксидной смолы аналогичным [5] способом обработаны данные из [6]. На рис. 1—3 приведены диаграммы $\sigma_{11}(\varepsilon)$, рассчитанные для $\varepsilon = 10^3 c^{-1}$. Концентрация медных волокон на рис. 1—3 соответственно $c = 0,25; 0,5; 0,75$. Кривые 1—5 на каждом рисунке получены соответственно при начальных значениях $\Delta = \Delta_0 = 0,01; 0,005; 0; -0,005; -0,01$. Начальное значение $\varepsilon_{11} = 0$. Отметим, что начальное значение $\Delta_0 \neq 0$ имеет смысл для квазиравновесного состояния композита, т. е. тогда, когда имеющиеся напряжения каждой компоненты дают достаточно большие времена релаксации τ_1 и τ_2 (материал «почти унругий»). Существенная особенность диаграмм $\sigma_{11}(\varepsilon)$ — наличие трех характерных участков вместо двух, присущих изотропному однородному идеально упругопластическому материалу. Первый линейный участок соответствует упругому деформированию обеих компонент композита. Второй линейный участок соответствует упругому деформированию более прочной компоненты (медь), другая компонента (смола) деформируется пластически. Третий участок — пластически деформируются обе компоненты композита. Как видим, наличие остаточных микронапряжений, характеризуемых параметром Δ , существенно меняет диаграмму $\sigma_{11}(\varepsilon)$.

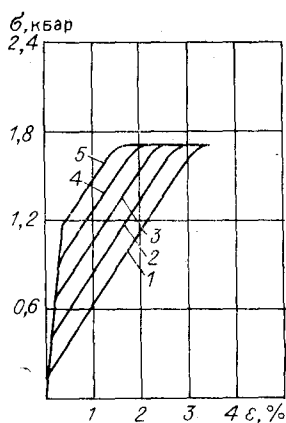


Рис. 1.

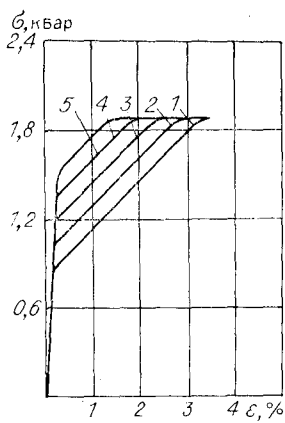


Рис. 2.

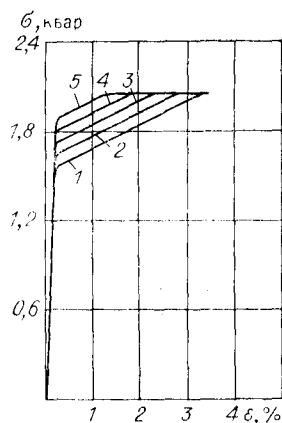


Рис. 3.

Интересно отметить, что предел текучести композита $\sigma_*(\dot{\epsilon})$, получающийся как стационарная точка системы (4.1), является «средним» пределов текучести каждой компоненты. Действительно, приравнявая нулю правые части уравнений (4.1), имеем

$$\left(\alpha_{11} - \frac{\beta_1^2}{\gamma} \right) \sigma_{11} = \dot{\epsilon}.$$

Используя выражения для α_{11} , β_1 , γ , получим

$$\sigma_*(\dot{\epsilon}) = \sigma_{11} = 3(c\mu_1\tau_1 + (1-c)\mu_2\tau_2)\dot{\epsilon} = 3\langle\mu\tau\rangle\dot{\epsilon}.$$

В то же время нетрудно проверить, что уравнения деформирования стержней для каждой компоненты дают значение предела текучести

$$\sigma_{*11}^{(i)} = 3\mu_i\tau_i\dot{\epsilon}.$$

Опишем теперь некоторые экспериментальные факты по динамическому деформированию модельного композита и проведем сравнение с расчетами. Построение диаграмм $\sigma(\epsilon)$ при высоких скоростях деформи-

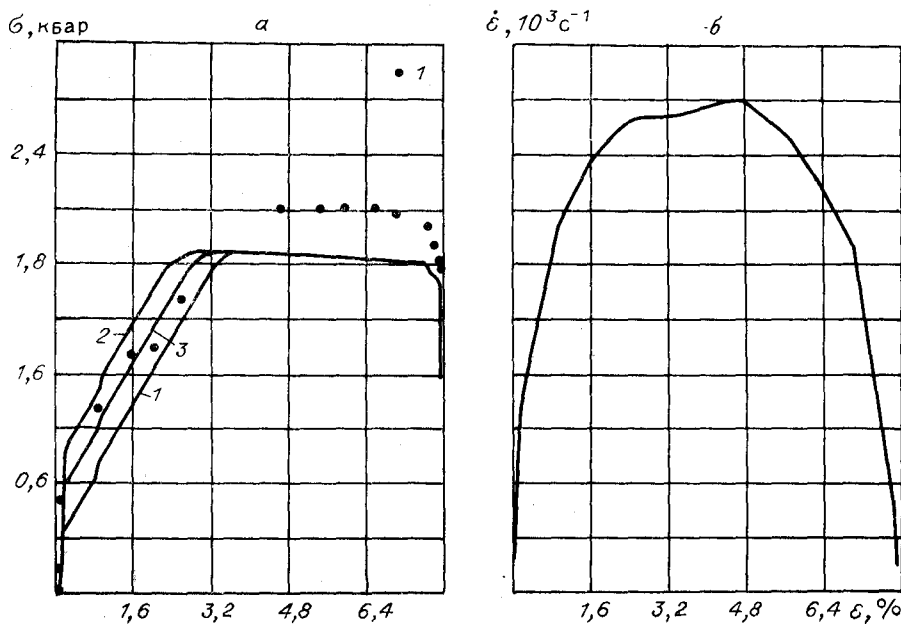


Рис. 4.

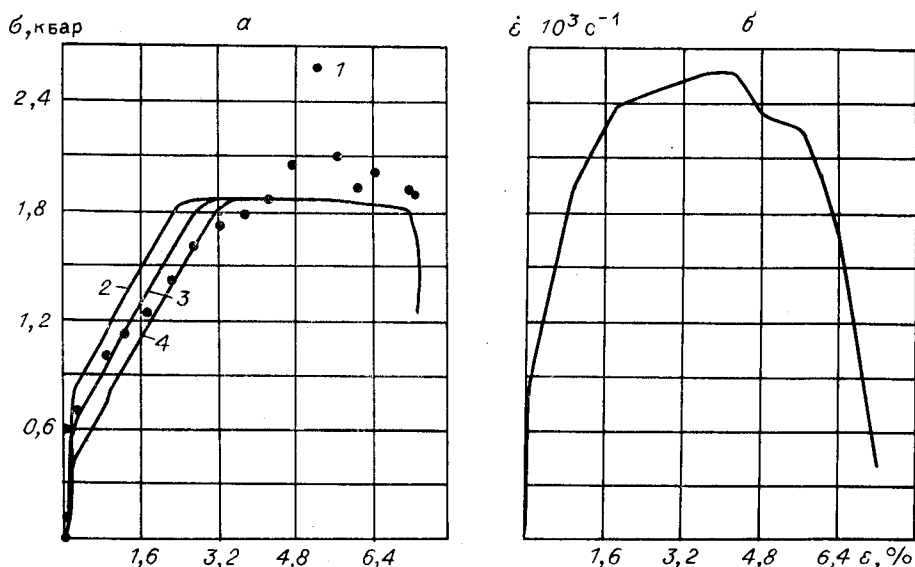


Рис. 5.

рования представляет собой непростую самостоятельную задачу, при решении которой необходимо преодолеть трудности создания интенсивных динамических нагрузок и интерпретации полученных результатов. В описанных ниже экспериментах выбран один из наиболее распространенных методов динамического испытания материалов — метод разрезного стержня Гопкинсона [7, 8]. Не останавливаясь на хорошо известных достоинствах и недостатках метода, укажем, что с его помощью можно получить $\sigma(\epsilon)$ диаграммы при скоростях деформирования $\dot{\epsilon} \leq 10^4 \text{с}^{-1}$. При этом можно одновременно регистрировать $\sigma(t)$, $\epsilon(t)$, $\dot{\epsilon}(t)$.

Были изготовлены цилиндрические образцы однонаправленного композитного материала. В качестве армирующих волокон использовались тонкие медные проволоочки толщиной 0,4—1,2 мм, в качестве связующего — эпоксидная смола.

Сравнение расчетных и экспериментальных диаграмм $\sigma(\epsilon)$ проведено на рис. 4, 5. Реализованные в экспериментах зависимости $\epsilon(t)$ приведены на рис. 4, 6, 5, 6. Эти зависимости использовались для численного решения нульмерной задачи. Экспериментальные точки $\sigma(\epsilon)$ на рис. 4, а, концентрация меди $c = 0,303$ и на рис. 5, а ($c = 0,322$) помечены цифрой 1. Рассчитанные диаграммы на рис. 4, а, 5, а соответствуют: 2 — $\Delta_0 = 0$; 3 — $\Delta_0 = 0,05$; 4 — $\Delta_0 = 0,01$. Сравнение экспериментальных и расчетных диаграмм показывает, что предлагаемая модель достаточно хорошо передает диаграммы деформирования, особенно если учесть наличие в композите внутренних микронапряжений. Эти напряжения могут возникнуть, например, при изготовлении композита, из-за различия коэффициентов теплового расширения компонент.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Победя Б. Е. Механика композиционных материалов.— М.: Изд-во МГУ, 1984.— 336 с.
2. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах.— М.: Наука, 1984.— 352 с.
3. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды.— М.: Наука, 1978.— 304 с.
4. Кристенсен Р. Введение в механику композитов.— М.: Мир, 1982.— 334 с.
5. Мерзиевский Л. А., Шамонин С. А. Построение зависимости времени релаксации касательных напряжений от параметров состояния среды // Журн. прикл. механики и техн. физики.— 1980.— № 5.— С. 170—179.

6. Van Thiel M. Compendium of Shock Wave Data // Lawrence Livermore Laboratory.— 1977.— UCRL-50108.— Vol. 3.
7. Follasbee P. S., Frantz C. E. Wave Propagation in the Split Hopkinson Pressure Bar // J. Eng. Mater. and Technol.— 1983.— Vol. 105.— P. 61—65.
8. Davies E. D. H., Hunter S. C. The Dynamic Compression Testing of Solids by the Method of the Split Hopkinson Pressure Bar // J. Mech. Phys. of Solids.— 1963.— Vol. 11.— P. 155—178.

А. В. ТЫЩЕНКО

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе проведено исследование предложенного В. Л. Васкевичем в работе [1] численного алгоритма решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в осесимметричных областях. Такого рода задачи часто возникают при расчете электронно-оптических систем, причем в этом случае основной акцент делается на вычислении потенциала и его нескольких производных на оси. В качестве тестовой рассматривается задача расчета потенциала в цилиндрической области со специальным выбором граничных условий.

Основная идея используемого метода восходит к идее знаменитого метода Шварца и заключается в том, что область, в которой решается задача, разбивается на подобласти, в каждой из которых ищется некоторое локальное представление искомого решения. Аналогичный подход использовался ранее в работе А. Г. Власова и Ю. А. Шапиро [2], В. Е. Шаманского [3], В. В. Курзина [4], В. В. Смелова [5], Л. Э. Цирлина [6] и т. д., в которых авторы предлагали различные способы согласования локальных представлений решения.

Метод согласования локальных разложений, используемый в данной работе, предложен и обоснован в [1]. Численная реализация этого метода для задач в областях типа микроканала изложена в [7]. К преимуществам метода следует отнести:

- а) точное выполнение граничных условий, причем в каждой из подобластей разность между полученным и точным решениями гармонична;
- б) возможность аналитического дифференцирования полученного решения;
- в) учет априорной аналитической информации о задаче, в частности, особенности искомого решения в окрестности некоторых угловых точек границы;
- г) высокая гладкость полученного осевого распределения потенциала и его производных.

Наметим, следуя [1], схему метода. Итак, требуется найти функцию $U(\rho, z) = U(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$ и осевое распределение ее нескольких производных, если

$$\Delta U(\rho, z) = 0, (\rho, z) \in \Omega, \quad (1)$$

$$U(\rho, z) = f(\rho, z), (\rho, z) \in \partial\Omega,$$

где Ω — осесимметричная область в $\mathbb{R}^3$. Предполагается, что эта область допускает разбиение на L осесимметричных подобластей $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_L$ и:

- а) для любого $j = 1, 2, \dots, L-1$ существуют числа z_j, α_j такие, что шар

$$B(z_j, \alpha_j) = \{(\rho, z) / \rho^2 + (z - z_j)^2 \leq \alpha_j^2\}$$

лежит внутри области $\Omega_j \cap \Omega_{j+1}$;