ОБРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ГЁЛЬДЕРА В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ С АНИЗОТРОПНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ ДАННЫХ

А. А. Архипова

При исследовании регулярности обобщенных решений квазилинейных эллиптических и параболических краевых задач теоремы об обратных неравенствах Гёльдера позволяют установить повышение степени суммируемости производных решений. Сформулируем теорему об обратных неравенствах в той форме, в которой ее можно применять для изучения локальных свойств решений уравнений и систем.

Теорема А. *Пусть Q — n-мерный куб, g и f — неотрицательные функции из $L_q(Q)$, $q>1$, и справедливы неравенства*

$$\fint\limits_{Q_R(x^0)} g^q\,dx \leqslant b\Big(\fint\limits_{Q_{2R}(x^0)} g\,dx\Big)^q + \fint\limits_{Q_{2R}(x^0)} f^q\,dx + \theta\fint\limits_{Q_{2R}(x^0)} g^q\,dx \tag{A}$$

для почти всех $x^0\in Q$, $R<\min\{R_0,\frac12\operatorname{dist}(x^0,\partial Q)\}$, где $R_0>0$, $b>1$, $\theta\in[0,1)$. Тогда существуют постоянные $p_0>q$ и $c>0$ такие, что $g\in L_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ для $p\in[q,p_0)$ и

$$\Big(\fint\limits_{Q_R} g^p\,dx\Big)^{1/p} \leqslant c\Big[\Big(\fint\limits_{Q_{2R}} g^q\,dx\Big)^{1/q} + \Big(\fint\limits_{Q_{2R}} f^p\,dx\Big)^{1/p}\Big]$$

для $Q_{2R}\subset Q$, $R<R_0$, постоянные p_0 и c зависят от b, θ, q, n; здесь

$$Q_R(x^0)=\{x\in\mathbb{R}^n\colon |x_i-x_i^0|<R,\quad i=1,\dots,n\},$$

$$\fint\limits_{Q_R} = \frac{1}{|Q_R|}\int\limits_{Q_R} g\,dx.$$

Впервые эта теорема при $\theta\ll1$ была доказана в [1] и для $\theta\in[0,1)$ — в [2]. Неравенства (А) получили название *обратных неравенств Гёльдера с разными носителями.* В приложениях роль функции g выполняет некоторая степень модуля градиента обобщенного решения. С помощью теоремы А установлены L_p-оценки градиентов решений эллиптических квазилинейных систем различных классов (с контролируемыми и неконтролируемыми порядками роста образующих систему функций, см. [3]). При этом L_p-суммируемость градиентов установлена строго внутри области рассмотрения, а для задачи Дирихле — вплоть до границы области.

В краевой задаче с негладким условием на конормальную производную обратные неравенства для градиента решения содержат слагаемые, представляемые поверхностными интегралами. В связи с этим автором было доказано такое обобщение теоремы А об обратных неравенствах, которое позволило включать в качестве дополнительных слагаемых в неравенство (А) интегралы по многообразиям меньшей размерности [4]. Приложение результатов [4] к исследованию задачи Неймана для квазилинейной эллиптической системы, а также к изучению неоднородной задачи Синьорини содержится в [5]. Следует отметить, что, в отличие от известных автору доказательств теорем об обратных неравенствах, доказательство теоремы в [4] не опирается на понятие и свойства максимальной функции, хотя при этом существенно используются идеи работы [1]. Этот подход оказался плодотворным и позволил автору сделать дальнейшее обобщение теоремы А, установив повышение степени суммируемости функции, которая удовлетворяет обратным неравенствам с дополнительными слагаемыми, суммируемыми с разными степенями по различным группам аргументов.

В п. 1 данной работы доказана теорема об обратных неравенствах с дополнительными анизотропными слагаемыми (теорема 1). Она сформулирована таким образом, чтобы сделать удобным ее применение к изучению параболических задач. Обратные неравенства в теореме 1 содержат дополнительные слагаемые из $L_{m,r}$-пространств (пространства функций, суммируемых по пространственным переменным со степенью m, а по временной переменной — со степенью r). Отметим, что $L_{m,r}$-пространства естественно возникают как пространства данных даже в линейных параболических задачах [6].

В п. 2 работы показано, как выводятся обратные неравенства с анизотропными дополнительными слагаемыми для градиентов обобщенных решений квазилинейных параболических задач с негладким условием на конормальную производную. Результат о повышении степени суммируемости градиентов решений в приграничных областях содержится в теореме 2. Эта теорема доказана для модельного случая. Возможные обобщения на другие классы систем обсуждаются в замечании 5. Ранее в [7, 8] были установлены внутренние L_p-оценки градиентов решений различных классов квазилинейных параболических систем на основе параболического аналога теоремы А. В работе автора [9] для систем, рассмотренных в [7], с помощью теоремы 1 данной работы получена L_p-суммируемость градиента решения вплоть до границы области как при первом, так и при втором краевом условии.

1. Введем следующие обозначения:

$$P_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ |x_i| < R,\ i = 1, \dots, n\}, \qquad n \geqslant 2;$$

$$Q = P_{3/2}(0) \times (-5/4, 5/4);$$

$$L_{m,r}(Q) = \left\{ f\colon\ \|f\|_{m,r,Q} = \left[\ \int\limits_{-5/4}^{5/4} \|f(\cdot,t\|^r_{m,P_{3/2}(0)}\,dt\right]^{1/r} < +\infty \right\};$$

$$C_0 = P_{1/2}(0) \times (-1/4, 1/4), \qquad z = (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1};$$

$$C_k = \{z \in Q\colon\ 1/2^k < \delta(z, \partial Q) \leqslant 1/2^{k-1}\}, \quad k \in \mathbf{N};$$

здесь $\delta(z^1, z^2) = \max\{|x^1 - x^2|, |t^1 - t^2|^{1/2}\}$ — параболическое расстояние в $\mathbb{R}^{n+1}$. Таким образом, $Q = \cup_{k\geqslant 0} C_k$.

Кроме того, обозначим через $B_R(x^0)$ шар с радиусом R и центром в точке x^0 в $\mathbb{R}^n$, а через $Q_R(z^0)$ — параболический цилиндр в $\mathbb{R}^{n+1}$ с радиусом R и центром в точке z^0, т. е.

$$Q_R(z^0) = B_R(x^0) \times \Lambda_R(t^0), \quad \Lambda_R(t^0) = (t^0 - R^2, t^0 + R^2);$$
$$|Q_R| = \mathrm{mes}_n B_R(x^0) \cdot 2R^2 = O(R^{n+2});$$
$$\fint\limits_{Q_r(z^0)} g\,dQ = \frac{1}{|Q_r|} \int\limits_{Q_r(z^0)} g\,dQ, \quad dQ = dx\,dt.$$

Пусть множество γ принадлежит $P_{3/2}(0)$, хаусдорфова мера множества γ размерности k конечна, т. е. $H_k(\gamma) < +\infty$ (условие на размерность k оговорено ниже в теореме 1). Будем считать, что γ удовлетворяет следующему (L, ρ)-условию:

$$H_k(\gamma \cap B_r(x)) \leqslant L r^k \ \text{ для всех } x \in \gamma,\ r \leqslant \rho.$$

Далее пишем $\gamma_r(x^0) = \gamma \cap B_r(x^0)$, $\Gamma = \gamma \times (-5/4, 5/4)$.

Теорема 1. *Пусть множества Q, C_0, Γ такие, как указано выше. Предположим, что для неотрицательных функций $g \in L_q(Q)$, $q > 1$, $f \in L_{m_1,m_2}(Q)$, $\varphi \in L_{l_1,l_2}(\Gamma)$ для почти всех $z^0 \in Q$ выполнены неравенства*

$$\fint\limits_{Q_R(z^0)} g^q\,dQ \leqslant \theta \fint\limits_{Q_{aR}(z^0)} g^q\,dQ + c_0\Biggl\{\Bigl(\fint\limits_{Q_{aR}(z^0)} g\,dQ\Bigr)^q + R^{-(n+2)}\Biggl[\int\limits_{\Lambda_{aR}(t^0)}\Bigl(\int\limits_{B_{aR}(x^0)} f^{m_1}\,dx\Bigr)^{m_2/m_1} dt\Biggr]^{r/m_2} + R^{-(n+2)}\Biggl[\int\limits_{\Lambda_{aR}(t^0)}\Bigl(\int\limits_{\gamma_{aR}(x^0)} \varphi^{l_1}\,dH_k\Bigr)^{l_2/l_1} dt\Biggr]^{s/l_2}\Biggr\},$$
$$aR < \delta(z^0, \partial Q) \tag{1}$$

с некоторыми параметрами $\theta \in [0, 1)$, $a > 1$, $c_0 > 0$, и при этом справедливы соотношения

$$\frac{n}{2m_1} + \frac{1}{m_2} \geqslant \frac{n+2}{2r}, \quad r \geqslant m_2 \geqslant m_1; \tag{2}$$

$$\frac{k}{2l_1} + \frac{1}{l_2} \geqslant \frac{n+2}{2s}, \quad s \geqslant l_2 \geqslant l_1. \tag{3}$$

Тогда если дополнительно известно, что

$$f \in L_{m_1+\delta, m_2+\delta}(Q), \quad \varphi \in L_{l_1+\delta, l_2+\delta}(\Gamma)$$

с каким-либо $\delta > 0$, то существуют числа $p_0 > q$ и $b > 0$, зависящие от q, n, k, a, c_0, θ, m_i, l_i, r, s, и параметров L, ρ из условия на γ, такие, что $g \in L_p(C_0)$ для всех $p \in [q, p_0)$ и справедлива оценка

$$\|g\|_{p,C_0} \leqslant b\,\{\,\|g\|_{q,Q} + \|f\|^{r/q}_{m_1+\delta_1,m_2+\delta_1,Q} + \|\varphi\|^{s/q}_{l_1+\delta_2,l_2+\delta_2,\Gamma}\}, \tag{4}$$

где $\delta_1 = r(p-q)/q$, $\delta_2 = s(p-q)/q$.

Замечание 1. Очевидно, что $\delta_i \leqslant \delta$, $i = 1,2$, но даже если считать, что в предположениях на f и φ число δ стремится к $+\infty$, разность $p - q$ может быть достаточно мала.

Замечание 2. Предположения относительно структуры Γ в теореме 1 продиктованы простейшими приложениями к краевым параболическим задачам. Эти предположения могут быть более общими. Например, можно считать, что $\Gamma = \{\gamma(t), t\}$, $t \in (-5/4, 5/4)$, где $\gamma(t)$ удовлетворяет (L,ρ)-условию равномерно по $t \in (-5/4, 5/4)$. Можно рассматривать многообразия $\Gamma \subset Q$ с конечной хаусдорфовой m-мерой относительно параболической метрики, т. е. $H_m(\Gamma, \delta) < +\infty$. В этом случае последнее слагаемое в (1) имеет вид

$$R^{-(n+2)}\Bigg(\int\limits_{\Gamma_{aR}(z^0)} \varphi\, dH_m(\delta)\Bigg)^s, \quad \Gamma_r(z^0) = Q_r(z^0) \cap \Gamma,$$

и выполнено следующее (L,ρ)-условие:

$$H_m(\Gamma_r(z^0), \delta) \leqslant Lr^m \quad \text{для всех } z^0 \in \Gamma,\ r \leqslant \rho$$

при таком соотношении параметров: $ms \geqslant n + 2$.

Замечание 3. Анализируя доказательство теоремы 1, нетрудно сформулировать аналог теоремы для функций $g \in L_q(P \times T)$, $q > 1$, допускающий дополнительные слагаемые с функциями f из пространств вида $L_{m,r}(P \times T)$, где P и T — некоторые кубы из пространств $\mathbb{R}^s$ и $\mathbb{R}^k$ соответственно, $s + k = n$.

При доказательстве теоремы 1 будут использованы две леммы, которые являются модификациями хорошо известных результатов (см., например, [3, гл. 5]). Сформулируем их.

Лемма 1. *Пусть $v \in L_1(Q)$, $v \geqslant 0$ и*

$$\int\limits_Q v\, dQ < \xi,$$

ξ — фиксированное число. Тогда для любых $\sigma \geqslant 3$ и $k = 0, 1, \ldots$ существует последовательность параболических кубов $Q_j^{(k)}$ со сторонами, параллельными осям координат, таких, что

- *$Q_j^{(k)} \subset C_k$ для всех $j \in \mathbb{N}$,*
- *$v(z) \leqslant \sigma^{n+2} 2^{(n+2)k} \xi$ п. в. на $C_k \setminus \bigcup\limits_j Q_j^{(k)}$,*

- $\sigma^{n+2}2^{(n+2)k}\xi < \displaystyle\fint_{Q_j^{(k)}} v\,dQ \leqslant 2\cdot 3^{n+2}\sigma^{n+2}2^{(n+2)k}\xi.$

Кроме того, для стороны a_j^k куба $Q_j^{(k)}$ справедлива оценка $a_j^k < 3/\sigma 2^k$, $|Q_j^{(k)}| = (a_j^{(k)})^{n+2}$.

Лемма 2. *Пусть $h(\tau)$, $H_k(\tau)$: $[1,\infty) \to [0,\infty)$ — невозрастающие функции и*

$$\lim_{\tau\to+\infty} h(\tau) = \lim_{\tau\to+\infty} H_k(\tau) = 0, \qquad k = 1,\dots,M.$$

Кроме того, для некоторых $\beta > 0$, $c_0 > 1$ и $\gamma_k \geqslant 1$ справедливы неравенства

$$-\int_\tau^\infty \xi^\beta\,dh(\xi) \leqslant c_0\left[\tau^\beta h(\tau) + \sum_{k=1}^M H_k^{\gamma_k}(\tau)\right]$$

для всех $\tau \geqslant 1$. Тогда для $\alpha \in [\beta, c_0\beta/(c_0-1))$ выполняется неравенство

$$-\int_1^\infty \tau^\alpha\,dh(\tau) \leqslant \frac{\beta}{c_0\beta-(c_0-1)\alpha}\left(-\int_1^\infty \tau^\beta\,dh(\tau)\right)$$
$$+\frac{c_0\alpha}{c_0\beta-(c_0-1)\alpha}\sum_{k=1}^M\left(-\int_1^\infty \tau^{\alpha-\beta}\,dH_k(\tau)\right)H_k^{\gamma_k-1}(1).$$

Доказательство теоремы 1. Проведем нормировку неравенств (1). Положим

$$M = \|g\|_{q,Q} + \|f\|_{m_1,m_2,Q}^{r/q} + \|\varphi\|_{l_1,l_2,\Gamma}^{s/q}.$$

Далее, если $\theta > 0$, то обозначим

$$G = \frac{\theta^{1/2q}g}{M}, \quad F = \frac{\theta^{1/2r}f}{M^{q/r}}, \quad \Phi = \frac{\theta^{1/2s}\varphi}{M^{q/s}};$$

если же $\theta = 0$, то

$$G = \frac{g}{M}, \quad F = \frac{f}{M^{q/r}}, \quad \Phi = \frac{\varphi}{M^{q/s}}.$$

В первом случае

$$A \equiv \max\{\|G\|_{q,Q}^q, \|F\|_{m_1,m_2,Q}^r, \|\Phi\|_{l_1,l_2,\Gamma}^s\} \leqslant \sqrt{\theta},$$

во втором — $A \leqslant 1$. При любом $\theta \in [0,1)$ из (1) следуют неравенства

$$\fint_{Q_R(z^0)} G^q\,dQ \leqslant \theta \fint_{Q_{aR}(z^0)} G^q\,dQ + c_0\Bigg\{\bigg(\fint_{Q_{aR}(z^0)} G\,dQ\bigg)^q$$
$$+R^{-(n+2)}\left[\int_{\Lambda_{aR}(t^0)}\bigg(\int_{B_{aR}(x^0)} F^{m_1}\,dx\bigg)^{m_2/m_1}dt\right]^{r/m_2}$$
$$+R^{-(n+2)}\left[\int_{\Lambda_{aR}(t^0)}\bigg(\int_{\gamma_{aR}(x^0)} \Phi^{l_1}\,dH_k\bigg)^{l_2/l_1}dt\right]^{s/l_2}\Bigg\}. \quad (5)$$

Положим $\alpha_k = (\sigma^{n+2} \cdot 2^{(n+2)k})^{1/q}$. Число $\sigma \geqslant 3$ фиксируем пока произвольно. Рассмотрим функции

$$G_0 = \sum_{k\geqslant 0} \frac{G}{\alpha_k}\chi_{C_k}, \quad F_0 = \sum_{k\geqslant 0} \frac{F}{\alpha_k^{q/r}}\chi_{C_k}, \quad \Phi_0 = \sum_{k\geqslant 0} \frac{\Phi}{\alpha_k^{q/s}}\chi_{C_k\cap\Gamma},$$

где χ_A — характеристическая функция множества A.

Пусть $r \in [1,\infty)$, $s = \lambda r$, параметр $\lambda > 1$ выберем ниже. Положим в условиях леммы 1 $v = G^q$, $\xi = s^q$. Тогда существует последовательность параболических кубов $\{Q_j^{(k)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ со сторонами, параллельными осям координат, такая, что

$$Q_j^{(k)} \subset C_k, \quad j \in \mathbf{N}, G(z) \leqslant \alpha_k s \quad \text{п. в. на} \quad C_k \setminus \bigcup_j Q_j^{(k)},$$

$$\alpha_k^q s^q < \fint_{Q_j^{(k)}} G^q\, dQ \leqslant 2 \cdot 3^{n+2} \alpha_k^q s^q. \tag{6}$$

Поэтому

$$G_0(z) \leqslant s \quad \text{п. в. на} \quad C_k \setminus \bigcup_j Q_j^{(k)},$$

$$s^q < \fint_{Q_j^{(k)}} G_0^q\, dQ \leqslant 2 \cdot 3^{n+2} s^q.$$

Обозначив $E(G_0, s) = \{z \in Q : G_0(z) > s\}$, выводим, что

$$\int_{E(G_0,s)} G_0^q\, dQ \leqslant \sum_{k,j} \fint_{Q_j(k)} G_0^q\, dQ |Q_j^{(k)}| \leqslant 2 \cdot 3^{n+2} s^q \sum_{k,j} |Q_j^{(k)}|. \tag{7}$$

Зафиксируем произвольную точку $z^0 \in Q_j^{(k)}$ и рассмотрим $Q_{r_0}(z^0) \supset Q_j^{(k)}$, $r_0 \leqslant a_j^k \sqrt{n}$. Так как по лемме 1 $a_j^k < 3/(\sigma \cdot 2^k)$, выбирая число σ достаточно большим, получим, что $r_0 < 1/(a \cdot 2^k)$ и тем более $r_0 < \delta(z^0, \partial Q)/a$. Используя условие (6), получаем

$$\alpha_k^q s^q < \fint_{Q_j^{(k)}} G^q\, dQ < \frac{|Q_{r_0}|}{|Q_j^{(k)}|} \fint_{Q_{r_0}(z^0)} G^q\, dQ \leqslant c(n) \fint_{Q_{r_0}(z^0)} G^q\, dQ. \tag{8}$$

Домножим неравенства (8) на $\sqrt{\theta}$:

$$\frac{\alpha_k^q s^q \sqrt{\theta}}{c(n)} < \sqrt{\theta} \fint_{Q_{r_0}(z^0)} G^q\, dQ \leqslant \sqrt{\theta} \sup_R \fint_{Q_R(z^0)} G^q\, dQ < \sup_R \fint_{Q_R(z^0)} G^q\, dQ.$$

Из последнего неравенства следует существование R_0 такого, что

$$\sqrt{\theta} \sup_R \fint_{Q_R(z^0)} G^q\, dQ < \fint_{Q_{R_0}(z^0)} G^q\, dQ.$$

Таким образом,

$$\frac{\alpha_k^q s^q \sqrt{\theta}}{c(n)} < \fint_{Q_{R_0}(z^0)} G^q\,dQ.$$

С помощью последнего неравенства выводим оценку

$$|Q_{R_0}| < \frac{c(n)}{\alpha_k^q s^q \sqrt{\theta}} \int_{Q_{R_0}(z^0)} G^q\,dQ \leqslant \frac{c(n)}{\sigma^{n+2} 2^{(n+2)k} s^q},$$

откуда следует, что если σ достаточно велико, то $R_0 < 1/(a \cdot 2^k)$ и тогда

$$\sqrt{\theta} \sup_R \fint_{Q_R(z^0)} G^q\,dQ < \sup_{R \leqslant \frac{\delta(z^0, \partial Q)}{a}} \fint_{Q_R(z^0)} G^q\,dQ. \qquad (9)$$

Из неравенств (5) и (9) ($\delta = \delta(z^0, \partial Q)$) получаем

$$\sup_{R \leqslant \delta/a} \fint_{Q_R(z^0)} G^q\,dQ \leqslant \sqrt{\theta} \sup_{R \leqslant \delta/a} \fint_{Q_R(z^0)} G^q\,dQ + c_0 \sup_R \{\ldots\}$$

(выражение $\{\ldots\}$ совпадает с выражением в фигурных скобках неравенства (5)), откуда следует, что

$$\sup_{R \leqslant \delta/a} \fint_{Q_R(z^0)} G^q\,dQ \leqslant \frac{c_0}{1 - \sqrt{\theta}} \sup_R \{\ldots\}.$$

Обращаясь теперь к соотношению (8), выводим неравенство

$$\alpha_k^q s^q < b \sup_R \{\ldots\}.$$

Здесь и далее через b и c обозначены различные постоянные, зависящие от указанных в теореме параметров. Согласно последнему неравенству существует $R > 0$ такое, что

$$\alpha_k^q s^q < b\Big[\Big(\fint_{Q_R(z^0)} G\,dQ\Big)^q + R^{-(n+2)}(\ldots)^{r/m_2} + R^{-(n+2)}(\ldots)^{s/l_2}\Big], \qquad (10)$$

причем из (10) следует, что

$$R^{n+2} < \frac{b}{\sigma^{n+2} \cdot 2^{(n+2)k} \lambda^q}$$

и $R < 1/2^{k+1}$ при $\lambda \gg 1$. Это означает, что $Q_R(z^0)$ может пересекать лишь множества C_k, C_{k-1}, C_{k+1}. В результате деления неравенства (10) на α_k^q для функций G_0, F_0 и Φ_0 выводим соотношение

$$s^q < b\Big\{\Big(\fint_{Q_R(z^0)} G_0\,dQ\Big)^q + R^{-(n+2)}\Big[\int_{\Lambda_R(t^0)} \Big(\int_{B_R(x^0)} F_0^{m_1}\,dx\Big)^{\frac{m_2}{m_1}} dt\Big]^{\frac{r}{m_2}}$$

$$+ R^{-(n+2)}\Big[\int_{\Lambda_R(t^0)} \Big(\int_{\gamma_R(x^0)} \Phi_0^{l_1}\,dH_k\Big)^{l_2/l_1} dt\Big]^{s/l_2}\Big\}.$$

Извлекая из него корень q-й степени и домножая на $|Q_R|$, получаем

$$s|Q_R| < b\Bigg\{ \int\limits_{Q_R(z^0)} G_0\,dQ + R^{(n+2)(1-1/q)}\Bigg[\int\limits_{\Lambda_R(t^0)} \Bigg(\int\limits_{B_R(x^0)} F_0^{m_1}\,dx\Bigg)^{m_2/m_1} dt\Bigg]^{r/(qm_2)} + R^{(n+2)(1-1/q)}\Bigg[\int\limits_{\Lambda_R(t^0)} \Bigg(\int\limits_{\gamma_R(x^0)} \Phi_0^{l_1}\,dH_k\Bigg)^{l_2/l_1} dt\Bigg]^{s/(l_2q)}\Bigg\}. \quad (11)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} &E_R(G_0,\tau) = \{z \in Q_R(z^0)\colon G_0(z) > \tau\},\\ &E_R^t(u,\xi) = \{(x,t),\ x \in B_R(x^0)\colon\ u(x,t) > \xi\},\\ &E^t(u,\xi) = \{(x,t),\ x \in P_{3/2}(0)\colon\ u(x,t) > \xi\},\\ &e_R^t(v,\xi) = \{(x,t),\ x \in \gamma_R(x^0)\colon\ v(x,t) > \xi\},\\ &e^t(v,\xi) = \{(x,t),\ x \in \gamma\colon\ v(x,t) > \xi\}. \end{aligned}$$

Тогда из (11) следует неравенство

$$\lambda\tau|Q_R| < b\Bigg\{c\tau|Q_R| + \int\limits_{E_R(G_0,\tau)} G_0\,dQ + R^{(n+2)(1-1/q)}\Bigg[\int\limits_{\Lambda_R(t^0)} \Bigg(\int\limits_{E_R^t(F_0,\tau^{q/r})} F_0^{m_1}\,dx\Bigg)^{m_2/m_1} dt\Bigg]^{r/qm_2} + R^{(n+2)(1-1/q)}\Bigg[\int\limits_{\Lambda_R(t^0)} \Bigg(\int \int\limits_{e_R^t(\Phi_0,\tau^{q/s})} \Phi_0^{l_1}\,dH_k\Bigg)^{l_2/l_1} dt\Bigg]^{s/l_2q}\Bigg\}.$$

В полученном неравенстве слагаемые с функциями F_0 и Φ_0 оцениваем по неравенству Коши с показателями q, $q/(q-1)$ так, чтобы множитель, возведенный в степень $q/(q-1)$ имел вид $c\tau|Q_R|$. Так как постоянные c и b не зависят от λ, при $\lambda \gg 1$ имеем

$$\frac{\lambda}{2}\tau|Q_R| < b\Bigg\{\frac{1}{\tau^{q-1}}\Bigg[\int\limits_{\Lambda_R(t^0)} \Bigg(\int\limits_{E_R^t(F_0,\tau^{q/r})} F_0^{m_1}\,dx\Bigg)^{m_2/m_1} dt\Bigg]^{r/m_2} + \frac{1}{\tau^{q-1}}\Bigg[\int\limits_{\Lambda_R(t^0)} \Bigg(\int\limits_{e_R^t(\Phi_0,\tau^{q/s})} \Phi_0^{l_1}\,dH_k\Bigg)^{l_2/l_1} dt\Bigg]^{s/l_2} + \int\limits_{E_R(G_0,\tau)} G_0\,dQ\Bigg\},$$

откуда следует

$$|Q_R| < b\left\{\frac{1}{\tau^q}\left[\int\limits_{\Lambda_R(t^0)}\left(\int\limits_{E_R^t(F_0,\tau^{q/r})} F_0^{m_1}\,dx\right)^{m_2/m_1} dt\right]^{r/m_2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\tau^q}\left[\int\limits_{\Lambda_R(t^0)}\left(\int\limits_{e_R^t(\Phi_0,\tau^{q/s})} \Phi_0^{l_1}\,dH_k\right)^{l_2/l_1} dt\right]^{s/l_2} + \frac{1}{\tau}\int\limits_{E_R(G_0,\tau)} G_0\,dQ\right\}. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь множество

$$T = \bigcup_{z\in\bigcup\limits_{k,j} Q_j^{(k)}} Q_R(z),$$

где множества $Q_R(z)$ построены как указано выше и удовлетворяют неравенствам (12). Очевидно, что $\bigcup\limits_{k,j} Q_j^{(k)} \subset T$. Существует счетное покрытие непересекающимися параболическими цилиндрами $Q_{R_i}(z^i)$ из семейства T множества $\bigcup\limits_{k,j} Q_j^{(k)}$, причем

$$\sum_{k,j} |Q_j^{(k)}| \leqslant c(n)\sum_i |Q_{R_i}(z^i)|.$$

Учитывая необходимость проектировать параболический цилиндр на ось t и плоскость $\mathbf{R}^n$, перенумеруем цилиндры Q_{R_i} двойным индексом:

$$z^{ij} = (x^i, t^j), \quad Q_{R_{ij}}(z^{ij}) = B_{R_{ij}}(x^i)\times\Lambda_{R_{ij}}(t^j).$$

Таким образом,

$$\sum_{k,j} |Q_j^{(k)}| \leqslant c(n)\sum_{i,j} |Q_{R_{ij}}(z^{ij})|. \tag{13}$$

Суммирование в (13) проведем с помощью неравенства (12):

$$\sum_{i,j} |Q_{R_{ij}}| \leqslant b\left\{\frac{1}{\tau}\int\limits_{E(G_0,\tau)} G_0\,dQ + \frac{1}{\tau^q}(A+B)\right\}; \tag{14}$$

здесь

$$A = \sum_{i,j}\left[\int\limits_{\Lambda_{R_{ij}}(t^j)}\left(\int\limits_{E_{R_{ij}}^t(F_0,\tau^{q/r})} F_0^{m_1}\,dx\right)^{m_2/m_1} dt\right]^{r/m_2},$$

$$B = \sum_{i,j}\left[\int\limits_{\Lambda_{R_{ij}}(t^j)}\left(\int\limits_{e_{R_{ij}}^t(\Phi_0,\tau^{q/s})} \Phi_0^{l_1}\,dH_k\right)^{l_2/l_1} dt\right]^{s/l_2}.$$

Положим

$$\mu(t) = \int\limits_{E^t(F_0,\tau^{q/r})} F_0^{m_1}\,dx.$$

Тогда

$$A \leqslant \Bigg(\sum_{i,j} \int\limits_{\Lambda_{R_{ij}}(t^j)} \int\limits_{E^t_{R_{ij}}} \mu(t)^{m_2/m_1-1} F_0^{m_1}(x,t)\,dx\,dt\Bigg)^{r/m_2}$$

$$\leqslant \Bigg(\int\limits_{E(F_0,\tau^{q/r})} \mu(t)^{m_2/m_1-1} F_0^{m_1}(z)\,dQ\Bigg)^{r/m_2}$$

$$= \Bigg[\int\limits_{(-5/4)}^{(5/4)} \Bigg(\int\limits_{E^t(F_0,\tau^{q/r})} F_0^{m_1}\,dx\Bigg)^{m_2/m_1} dt\Bigg]^{r/m_2}.$$

Аналогично выводим оценку

$$B \leqslant \Bigg[\int\limits_{-5/4}^{5/4} \Bigg(\int\limits_{e^t(\Phi_0,\tau_{q/s})} \Phi_0^{l_1}\,dH_k\Bigg)^{l_2/l_1} dt\Bigg]^{s/l_2}.$$

Теперь из неравенств (7), (13) и (14) получаем

$$\int\limits_{E(G_0,s)} G_0^q\,dQ \leqslant c\tau^q \Bigg\{ \frac{1}{\tau^q} \Bigg[\int\limits_{-5/4}^{5/4} \Bigg(\int\limits_{E^t(F_0,\tau^{q/r})} F_0^{m_1}\,dx\Bigg)^{m_2/m_1} dt\Bigg]^{r/m_2}$$

$$+ \frac{1}{\tau^q} \Bigg[\int\limits_{-5/4}^{5/4} \Bigg(\int\limits_{e^t(\Phi_0,\tau^{q/s})} \Phi_0^{l_1}\,dH_k\Bigg)^{l_2/l_1} dt\Bigg]^{s/l_2} + \frac{1}{\tau} \int\limits_{E(G_0,\tau)} G_0\,dQ\Bigg\}.$$

Так как

$$\int\limits_{E(G_0,\tau)} G_0^q\,dQ \leqslant s^{q-1} \int\limits_{E(G_0,\tau)} G_0\,dQ + \int\limits_{E(G_0,s)} G_0^q\,dQ,$$

справедливо неравенство

$$\int\limits_{E(G_0,\tau)} G_0^q\,dQ \leqslant c\,\Bigg\{ \Bigg[\int\limits_{-5/4}^{5/4} \Bigg(\int\limits_{E^t(F_0,\tau^{q/r})} F_0^{m_1}\,dx\Bigg)^{m_2/m_1} dt\Bigg]^{r/m_2}$$

$$+ \Bigg[\int\limits_{-5/4}^{5/4} \Bigg(\int\limits_{e^t(\Phi_0,\tau^{q/s})} \Phi_0^{l_1}\,dH_k\Bigg)^{l_2/l_1} dt\Bigg]^{s/l_2} + \tau^{q-1} \int\limits_{E(G_0,\tau)} G_0\,dQ\Bigg\}, \quad \tau \geqslant 1. \tag{15}$$

Положим

$$h(\tau) = \int\limits_{E(G_0,\tau)} G_0\,dQ.$$

Функция h невозрастающая, $\lim\limits_{\tau\to+\infty} h(\tau) = 0$; при этом

$$\int\limits_{E(G_0,\tau)} G_0^q\,dQ = -\int\limits_{\tau}^{\infty} \xi^{q-1}\,dh(\xi).$$

Пусть, кроме того,

$$H_1(\tau) = \int\limits_{-5/4}^{5/4} \biggl(\int\limits_{E^t(F_0,\tau^{q/r})} F_0^{m_1}\,dx \biggr)^{m_2/m_1} dt,$$

$$H_2(\tau) = \int\limits_{-5/4}^{5/4} \biggl(\int\limits_{e^t(\Phi_0,\tau^{q/s})} \Phi_0^{l_1}\,dH_k \biggr)^{l_2/l_1} dt.$$

Очевидно, что H_1, H_2 не возрастают и стремятся к нулю при $\tau\to+\infty$. Теперь неравенства (15) приобретают вид

$$-\int\limits_{\tau}^{\infty} \xi^{\beta}\,dh(\xi) \leqslant c\,[\tau^{\beta}h(\tau) + H_1(\tau)^{\gamma_1} + H_2(\tau)^{\gamma_2}], \qquad \tau\geqslant 1,$$

где $\beta = q-1$, $\gamma_1 = r/m_2 \geqslant 1$, $\gamma_2 = s/l \geqslant 1$.

Таким образом, для функций h, H_1, и H_2 выполнены условия леммы 2 и, следовательно, для $\alpha\in[\beta,\alpha_0)$, $\alpha_0 = c\beta/(c-1)$, справедливо неравенство

$$-\int\limits_{1}^{\infty} \tau^{\alpha}\,dh(\tau) \leqslant c_1 \biggl[\biggl(-\int\limits_{1}^{\infty} \tau^{\beta}\,dh(\tau) \biggr) + H_1^{\gamma_1-1}(1) \biggl(-\int\limits_{1}^{\infty} \tau^{\alpha-\beta}\,dH_1(\tau) \biggr)$$
$$+ H_2^{\gamma_2-1}(1) \biggl(-\int\limits_{1}^{\infty} \tau^{\alpha-\beta}\,dH_2(\tau) \biggr) \biggr]. \quad (16)$$

Из определения функций $H_i(\tau)$ и свойств интеграла Лебега следует, что

$$-\int\limits_{1}^{\infty} \tau^{\alpha-\beta}\,dH_1(\tau) \leqslant c\|F_0\|^{m_2+\delta_1}_{m_1+\delta_1,m_2+\delta_1,Q}, \qquad \delta_1 = \frac{r}{q}(\alpha-\beta);$$

$$-\int\limits_{1}^{\infty} \tau^{\alpha-\beta}\,dH_2(\tau) \leqslant c\|\Phi_0\|^{l_2+\delta_2}_{l_1+\delta_2,l_2+\delta_2,\Gamma}, \qquad \delta_2 = \frac{s}{q}(\alpha-\beta).$$

Кроме того,

$$H_1(1) \leqslant c\|F_0\|^{m_2}_{m_1+\delta_1,m_2+\delta_1,Q}, \quad H_2(1) \leqslant c\|\Phi_0\|^{l_2}_{l_1+\delta_2,l_2+\delta_2,\Gamma}.$$

Теперь из (16) получаем неравенство

$$\|G_0\|^p_{p,Q} \leqslant c\,\{\|G_0\|^q_{q,Q} + \|F_0\|^{rp/q}_{m_1+\delta_1,m_2+\delta_1,Q} + \|\Phi_0\|^{sp/q}_{l_1+\delta_2,l_2+\delta_2,\Gamma}\}, \tag{17}$$

справедливое для всех $p \in [q, p_0)$ (число p_0 определяется значением α_0 согласно лемме 2).

Из (17) следует неравенство

$$\|G\|^p_{p,C_0} \leqslant c\,\{\|G\|^q_{q,Q} + \|F\|^{rp/q}_{m_1+\delta_1,m_2+\delta_1,Q} + \|\Phi\|^{sp/q}_{l_1+\delta_2,l_2+\delta_2,\Gamma}\}. \tag{18}$$

Возвращаясь от нормированных функций к функциям g, f и φ, из (18) выводим неравенство (4). Теорема 1 доказана.

2. Чтобы показать, как применяется результат теоремы 1 к исследованию регулярности обобщенных решений параболических задач, рассмотрим модельную задачу.

Пусть $u(z)$, $u = (u^1, \dots, u^N)$, — решение задачи

$$\begin{gathered} u^k_t - \frac{d}{dx_i} a^k_i(z, u_x) + b^k(z, u_x) = 0, \qquad z = (x,t) \in \Omega \times (0,T) = Q_T, \\ a^k_i(z, u_x)\cos(\nu, x_i)_{|\Gamma_T} = \varphi^k, \quad \Gamma_T = \gamma \times (0,T), \quad k = 1, \dots, N. \end{gathered} \tag{19}$$

Область Ω принадлежит $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $\nu = \nu(x)$ — внешняя к области Ω нормаль в точке x липшицевой поверхности $\gamma \subset \partial\Omega$. Рассмотрим Ω' — ограниченную подобласть в Ω, $\overline{\Omega'} \subset \Omega \cup \gamma$, $\gamma' = \overline{\Omega'} \cap \gamma$, $Q' = \Omega' \times (t_1, t_2) \subset Q_T$, $\Gamma' = \gamma' \times (t_1, t_2)$, $(t_1, t_2) \subset (0, T)$. Пусть при почти всех $z \in Q'$ и всех $p \in \mathbb{R}^{nN}$ функции $a^k_i(z,p)$ и $b^k(z,p)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &a^k_i(z,p)p^k_i \geqslant \nu|p|^2 - \Phi_1(z), \\ &|a^k_i(z,p)| \leqslant \mu_1|p| + \Phi_2(z), \\ &|b^k(z,p)| \leqslant \mu_2|p|^\beta + \Phi_3(z), \end{aligned} \tag{20}$$

где $\nu > 0$, $\mu_i \geqslant 0$, $\beta \leqslant (n+4)/(n+2)$, $\Phi_1, \Phi_2^2 \in L_1(Q')$, $\Phi_3 \in L_{m,r}(Q')$, причем

$$\begin{gathered} \frac{1}{r} + \frac{n}{2m} = 1 + \frac{n}{4}, \quad m \in [2n/(n+2), 2), \quad r \in [1,2] \quad \text{при} \quad n \geqslant 3, \\ m \in (1,2], \quad r \in [1,2) \quad \text{при} \quad n = 2. \end{gathered} \tag{21}$$

Функции φ^k, определяющие значение конормальной производной, являются функциями пространства $L_{s,l}(\Gamma')$, где

$$\begin{gathered} \frac{1}{l} + \frac{n-1}{2s} = \frac{1}{2} + \frac{n}{4}, \quad s \in \left[\frac{2(n-1)}{n}, \frac{2(n-1)}{n-2)}\right], \quad l \in [1,2] \quad \text{при} \quad n \geqslant 3, \\ s \in (1, \infty], \quad l \in [1,2) \quad \text{при} \quad n = 2. \end{gathered} \tag{22}$$

Обозначим через $V(Q')$ пространство функций, состоящих из элементов пространства $W_2^{1,0}(Q')$, имеющих конечную норму

$$\|v\|_{Q'} = \operatorname*{vrai\,max}_{(t_1,t_2)} \|u(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega')} + \|u_x\|_{L_2(Q')}.$$

Пусть $\widetilde{V}(Q')$ — пространство функций из $V(Q')$, непрерывных по t в норме пространства $L_2(\Omega')$. Относительно данных задачи сделаны предположения, позволяющие рассматривать обобщенное решение задачи (19) из пространств $V(Q')$ и $\widetilde{V}(Q')$.

Для $u \in \widetilde{V}(Q')$ справедливо интегральное равенство

$$-\int\limits_{Q'} u^k h_t^k\,dQ + \int\limits_{Q'} (a_i^k(z,u_x)h_{x_i}^k + b^k(z,u_x)h^k)\,dQ$$
$$= \int\limits_{\Gamma'} \varphi^k h^k\,d\Gamma \quad \forall h^k \in W_2^{1,1}(Q'), \quad \operatorname{spt} h^k \in Q' \cup \Gamma'. \tag{23}$$

Не умаляя общности, можно считать, что $Q' = Q \cap Q_T$, $Q = P_{3/2}(0) \times (-5/4, 5/4)$ (см. обозначения в п. 1).

Фиксируем точку $z^0 \in Q' \cup \Gamma'$ и $R \leqslant R_\delta = \delta(z^0, \partial Q' \backslash \Gamma')/2$. Пусть $\zeta = \zeta_r(x)$ — срезающая для $B_r(x^0)$ функция, $\xi_r = 1$ в $B_{r/2}(x^0)$; $\tau = \tau_r(t)$ — гладкая функция, $\tau' \geqslant 0$, $\tau = 1$ при $t \geqslant t^0 - (r/2)^2$, $\tau = 0$ при $t \leqslant t^0 - r^2$. Из равенства (23) с $h^k(x,t) = (u^k(x,t) - \widetilde{u}_{2R}^k(t))\xi_{2R}^2(x)\tau_{2R}^2(t)$, где $\Omega_r(x^0) = \Omega' \cap B_r(x^0)$, $Q_r(z^0) = \Omega_r(x^0) \times \Lambda_r(t^0)$,

$$\widetilde{u}_r(t) = \int\limits_{\Omega_r(x^0)} u(x,t)\xi_r^2(x)\,dx \Big/ \int\limits_{\Omega_r(x^0)} \xi_r^2\,dx,$$

стандартным образом выводятся неравенства Качополли и Пуанкаре:

$$\int\limits_{Q_R(z^0)} |u_x|^2\,dQ \leqslant cR^{-2} \int\limits_{Q_{2R}(z^0)} |u - \widetilde{u}_{2R}(t)|^2\,dQ$$
$$+\,\omega(R) \int\limits_{Q_{2R}(z^0)} |u_x|^2\,dQ + A_{2R}(z^0), \tag{24}$$

$$\max_{\Lambda_R(t^0)} \int\limits_{\Omega_R(x^0)} |u - \widetilde{u}_{2R}|^2\,dx \leqslant c \int\limits_{Q_{2R}(z^0)} |u_x|^2\,dQ + A_{2R}(z^0); \tag{25}$$

здесь

$$A_{2R}(z^0) = c(\|\varphi\|^2_{s,l,\Gamma_{2R}(z^0)} + \|\Phi_1 + \Phi_2^2\|_{1,Q_{2R}(z^0)} + \|\Phi_3\|^2_{m,r,Q_{2R}(z^0)});$$

$$\omega(R) = \Bigg(\int\limits_{Q_{2R}(z^0)} |u_x|^2\,dQ\Bigg)^{2/n} \to 0 \quad \text{при} \quad R \to 0.$$

При выводе неравенств (24) и (25) используются соотношения (20) и теоремы вложения пространств $L_{m',r'}(Q_{2R})$, $L_{s',l'}(\Gamma_{2R})$ в $V(Q_{2R})$ для показателей m', r' и s', l', сопряженных к m, r и s, l соответственно. Интеграл

$$B = \int\limits_{Q_{2R}(z^0)} |u_x|^{\frac{n+4}{n+2}} |u - \widetilde{u}_{2R}| \xi^2 \tau^2 \, dQ$$

оценивается следующим образом:

$$B \leqslant \|u_x\|_{2,Q_{2R}}^{(n+4)/(n+2)} \|(u - \widetilde{u}_{2R})\zeta\tau\|_{2(n+2)/n, Q_{2R}}$$

$$\leqslant c\,\|u_x\|_{2,Q_{2R}}^{(n+4)/(n+2)} \|(u - \widetilde{u}_{2R})\zeta\tau\|_{Q_{2R}}$$

$$\leqslant \varepsilon |(u - \widetilde{u}_{2R})\zeta\tau|_{Q_{2R}}^2 + c_\varepsilon \|u_x\|_{2,Q_{2R}}^{2(n+4)/(n+2)}.$$

Покажем, что для $|u_x|$ справедливы обратные неравенства

$$\fint\limits_{Q_R} |u_x|^2 \, dQ \leqslant \theta_0 \fint\limits_{Q_{4R}(z^0)} |u_x|^2 \, dQ + c_0 \Bigg(\fint\limits_{Q_{4R}(z^0)} |u_x|^{\frac{2n}{n+2}} \, dQ \Bigg)^{\frac{n+2}{n}}$$

$$+ c_1 \fint\limits_{Q_{4R}(z^0)} (\Phi_1 + \Phi_2^2) \, dQ + c_2 R^{-(n+2)} \Bigg[\int\limits_{\Lambda_{4R}(t^0)} \Bigg(\int\limits_{\Omega_{4R}(x^0)} \Phi_3^m \, dx \Bigg)^{r/m} dt \Bigg]^{2/r}$$

$$+ c_3 R^{-(n+2)} \Bigg[\int\limits_{\Lambda_{4R}(t^0)} \Bigg(\int\limits_{\gamma_{4R}(x^0)} |\varphi|^s \, d\gamma \Bigg)^{l/s} dt \Bigg]^{2/l}, \qquad Q_R = Q_R(z^0), \tag{26}$$

причем существует $R_0 > 0$ такое, что для всех $R \leqslant \min\{R_0, R_\delta\}$ коэффициент θ_0 — число из интервала $(0, 1)$. Действительно,

$$I_R(z^0) = R^{-2} \int\limits_{Q_{2R}(z^0)} |u - \widetilde{u}_{2R}|^2 \, dQ$$

$$\leqslant R^{-2} \max_{\Lambda_{2R}(t^0)} \Bigg(\int\limits_{\Omega_{2R}(z^0)} |u - \widetilde{u}_{2R}|^2 \, dx \Bigg)^{2/(n+2)} \int\limits_{\Lambda_{2R}(t^0)} \|u - \widetilde{u}_{2R}\|_{2,\Omega_{2R}(x^0)}^{2n/(n+2)} \, dt$$

$$\leqslant cR^{-2} \Bigg(\int\limits_{Q_{4R}(z^0)} |u_x|^2 \, dQ + A_{4R}(z^0) \Bigg)^{2/(n+2)} \int\limits_{\Lambda_{2R}(t^0)} \|u_x\|_{\frac{2n}{n+2}, \Omega_{2R}}^{2n(n+2)} \, dt$$

$$\leqslant \varepsilon \{\ldots\} + c_\varepsilon R^{-\frac{2(n+2)}{n}} \Bigg(\int\limits_{Q_{2R}(z^0)} |u_x|^{2n/(n+2)} \, dQ \Bigg)^{(n+2)/n}.$$

При оценке выражения $I_R(z^0)$ использованы теорема вложения пространства $W^1_{2n/(n+2)}(\Omega_{2R})$ в $L_2(\Omega_{2R})$, неравенство (25) с заменой R на $2R$, а также неравенство Коши с произвольным параметром $\varepsilon > 0$.

Из неравенства Качополли (24) получаем

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_R(z^0)} |u_x|^2\,dQ \leqslant cI_R(z^0)\\ + \omega(R) \int\limits_{Q_{2R}(z^0)} |u_x|^2\,dQ + A_{2R}(z^0) \leqslant (\varepsilon + \omega(R)) \int\limits_{Q_{4R}(z^0)} |u_x|^2\,dQ\\ + c_\varepsilon R^{-\frac{2(n+2)}{n}} \Bigg(\int\limits_{Q_{4R}(z^0)} |u_x|^{\frac{2n}{n+2}}\,dQ \Bigg)^{(n+2)/n} + A_{4R}(z^0). \quad (27)\end{aligned}$$

Зафиксируем ε и R_0 так, чтобы выполнялось условие $\varepsilon + \omega(R_0) \ll 1$. Переходя в неравенстве (27) к интегралам «в среднем», получаем соотношение (26). Если положить $g(z) = |u_x|^{\frac{2n}{n+2}}$, $q = (n+2)/n$, то неравенства (26) приобретают вид

$$\fint\limits_{Q_R(z^0)} g^q\,dQ \leqslant \theta_0 \fint\limits_{Q_{4R}(z^0)} g^q\,dQ + c_0 \Bigg(\fint\limits_{Q_{4R}(z^0)} g\,dQ \Bigg)^q + D(z^0, 4R), \qquad (28)$$

где $D(z^0, 4R)$ — сумма трех последних слагаемых; можно считать, что $\theta_0 \ll 1$. Продолжим функции g и Φ_i нулем в $Q\backslash Q'$ и обозначим продолженные функции через $\widetilde{g}$ и $\widetilde{\Phi}_i$. Тогда для $a = 9$ и всех $z^0 \in Q$, $R \leqslant \min\{R_0, \delta(z^0, \partial Q)/a\}$ из неравенства (28) следуют неравенства

$$\begin{aligned}\fint\limits_{Q_R(z^0)} \widetilde{g}^q\,dQ \leqslant \theta \fint\limits_{Q_{aR}(z^0)} \widetilde{g}^q\,dQ + c \Bigg\{ \Bigg(\fint\limits_{Q_{aR}(z^0)} \widetilde{g}\,dQ \Bigg)^q\\ + \fint\limits_{Q_{aR}(z^0)} (\widetilde{\Phi}_1 + \widetilde{\Phi}_2)^2\,dQ + R^{-(n+2)} \Bigg[\int\limits_{\Lambda_{aR}(t^0)} \Bigg(\int\limits_{B_{aR}(x^0)} \widetilde{\Phi}_3^m\,dx \Bigg)^{r/m} dt \Bigg]^{2/r}\\ + R^{-(n+2)} \Bigg[\int\limits_{\Lambda_{aR}(t^0)} \Bigg(\int\limits_{\gamma_{aR}(x^0)} |\varphi|^s\,d\gamma \Bigg)^{l/s} dt \Bigg]^{2/l}; \quad (29)\end{aligned}$$

здесь $Q_r(z^0) = B_r(x^0) \times \Lambda_r(t^0)$ и $\theta \in (0,1)$, если в (28) θ_0 фиксировать достаточно малым.

Нетрудно видеть, что если в условиях (21) и (22) дополнительно считать, что $r \geqslant m$ и $l \geqslant s$, то для показателей выполняются условия (2) и (3). Таким образом, если считать, что функции Φ_i и φ суммируемы со степенями бо́льшими, чем в условиях (20)–(22), то для функции $\widetilde{g}$, удовлетворяющей обратным неравенствам (29), выполнены условия теоремы 1 и, следовательно, $\widetilde{g} \in L_{p,\mathrm{loc}}(Q)$ с некоторым $p > q$. Отсюда следует справедливость следующего результата.

Теорема 2. *Пусть $u \in \widetilde{V}(Q')$ — обобщенное решение задачи* (19) *и выполнены условия* (20), Φ_1, $\Phi_2^2 \in L_{1+\delta}(Q')$, $\Phi_3 \in L_{m+\delta,r+\delta}(Q')$, $\varphi^k \in L_{s+\delta,l+\delta}(\Gamma')$ *для всех $k \leqslant N$, где m, r, s, l удовлетворяют условиям* (21) *и* (22) *и неравенствам $r \geqslant m$, $l \geqslant s$, а $\delta > 0$ фиксировано произвольно. Тогда существует число $p_0 > 2$ такое, что $u_x \in L_p(Q'')$ для любого Q'', $\overline{Q''} \subset Q' \cup \Gamma'$, и всех $p \in [2, p_0)$.*

Замечание 4. Важным частным случаем задачи (19) является линейная задача

$$u_t - (a_{ij}(z)u_{x_i})_{x_j} = f(z), \quad z = (x,t) \in Q_T,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = a_{ij}(z)u_{x_i}\cos(\nu, x_j)|_{\Gamma_T} = \varphi(z)$$

при $a_{ij} \in L_\infty(Q_T)$ и выполнении условия параболичности в Q_T. Если $f \in L_{m,r}(Q')$ и $\varphi \in L_{s,l}(\Gamma')$, где m, r и s, l удовлетворяют условиям (21) и (22) соответственно, то можно рассмотреть обобщенное решение $u \in V(Q')$ и доказать, что при сделанных предположениях $u \in \widetilde{V}(Q')$ [6, § 4, гл. 3]. Так как ограничения (21) и (22) на f и φ являются точными для определения решения линейной задачи в $V(Q')$, то ограничения на Φ_i и φ^k в теореме 2 являются оптимальными условиями, гарантирующими повышение степени суммируемости градиента решения.

Замечание 5. Утверждение теоремы 2 останется справедливым и в случае, когда функции a_i^k и b^k зависят от аргумента u и допускают некоторый степенной рост по этому аргументу. Если в условиях (20) считать, что a_i^k и b^k зависят от u и $\nu = \nu(|u|) > 0$, $\mu_i = \mu_i(|u|) \geqslant 0$, $\nu(t) \searrow$, $\mu \nearrow$ при $t \geqslant 0$, то обобщенное решение задачи (19) определяется в классе $V(Q') \cap L_\infty(Q')$ и функции $b^k(z,u,p)$ могут иметь в (20) порядок роста по p, равный $\beta = 2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Если же допустить для b^k предельный порядок роста $\beta = 2$, то, как известно, при доказательстве регулярности решения необходимо предположить, что $\mu_2(M)M < \nu(M)$, где $M = \operatorname{vrai}\max\limits_{Q'} |u|$.

Доказательству L_p-суммируемости градиента решения начально-краевой задачи для параболической квазилинейной системы с предельным порядком нелинейности по градиенту ($\beta = 2$) посвящена работа автора [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Giaquinta M.,Modica G.** Regulalrity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems // J. Reine Angew. Math. 1979. V. 311/312. P. 145–169.
2. **Stredulinsky E.** Higher integrability from reverse Hölder inequalities // Indiana Univ. Math. J. 1980. V. 29, N 3. P. 408–417.
3. **Giaquinta M.** Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems // Ann. of Math. Stud. (Princenton Univ. Press) 1983. N 105.
4. **Архипова А. А.** Обратные неравенства Гёльдера с граничным интегралом и L_p-оценки в задачах с условием Неймана // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. С. 3–17.
5. **Архипова А. А.** Некоторые приложения обратных неравенств Гёльдера с граничным интегралом // Проблемы математического анализа. С.-Пб., 1992. Вып. 12. С. 13–29.
6. **Ладыженская О. А., Солонников В. А.,** Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
7. **Giaquinta M., Struwe M.** On the partial regularity of weak solutions of nonlinear parabolic systems // Math. Z. 1982. Bd 179. S 437–451.
8. **Campanato S.** L_p-regularity for weak solutions of parabolic systems // Ann. Sup. Pisa. 1980. V. 7, Ser. 4. P. 65–85.
9. **Архипова А. А.** L_p-оценки градиентов решений начально-краевых задач для квазилинейных параболических систем // Проблемы математического анализа. С.-Пб., 1992. Вып. 13. С. 5–18.