СИЛЬНЫЕ РАЗРЫВЫ В СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ

А. М. Блохин, Д. А. Крымских

При температуре ниже 2.19 K жидкий гелий (в этой фазе его называют гелий II) обладает свойством сверхтекучести. Сверхтекучестью называют способность жидкого гелия II протекать без трения через узкие капилляры и щели. Явление сверхтекучести было открыто П. Л. Капицей [1–3]. Теория этого явления развита Л. Д. Ландау. В работе [4] им выведена система гидродинамических уравнений, описывающая макроскопическим образом движение гелия II. С помощью этих уравнений исследовано распространение звука и показано, что в сверхтекучем гелии должны существовать две скорости звука. Система гидродинамических уравнений, описывающая движения гелия II, называется системой уравнений Ландау. Явление образования разрывов в гелии II рассмотрено И. М. Халатниковым в [5] (см. также [6, § 26–29]). Показано, что в гелии II существуют разрыв давления (ударная волна) и разрыв температуры (температурный разрыв). В [6] исследованы разрывы небольшой интенсивности. Показано, что в первом приближении разрыв давления распространяется со скоростью, равной скорости первого звука. Разрыву давления соответствуют скачки температуры T и относительной скорости w выше второго порядка малости относительно величины скачка давления $[p] = \Delta$, где Δ — малый параметр. Таким образом, разрывы давления в гелии II полностью аналогичны ударным волнам в обычной гидродинамике. Как и в обычных средах, разрывы этого типа могут быть только волнами сжатия. Температурный разрыв — специфическое явление, характерное только для сверхтекучей жидкости. В первом приближении температурный разрыв движется со скоростью, равной скорости второго звука. Скачку температуры и относительной скорости w соответствует скачок давления p второго порядка малости относительно величины скачка температуры $[T] = \Delta$ (или величины скачка относительной скорости $[w] = \Delta$). Вопрос об устойчивости разрыва давления исследован в [7] (см. также [8]), где задача решена в так называемых гамильтоновских переменных.

В данной работе изучаются смешанные задачи об устойчивости сильных разрывов (разрыв давления или температурный разрыв) в гелии II. Исследование этих задач было начато в монографии [9], и данная работа является естественным ее продолжением.

§ 1. Краткое описание метода

Кратко изложим применяемый в этой работе подход к исследованию устойчивости сильных разрывов в сверхтекучем гелии. Важным моментом в изучении этой проблемы является существование симметрической формы записи гидродинамических уравнений гелия II. Симметрическая форма уравнений Ландау была получена А. М. Блохиным [9, гл. II].

- Система n уравнений первого порядка с вещественными коэффициентами
$$A_0\mathbf{U}_t + \sum_{k=1}^{3} A_k \mathbf{U}_{x_k} = 0, \tag{1.1}$$
где A_α — квадратные матрицы порядка n, $\alpha = \overline{0,3}$, $\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_n)^*$, называется *симметрической t-гиперболической* (*по Фридрихсу*), если матрицы A_α ($\alpha = \overline{0,3}$) симметрические, а матрица A_0 положительно определенная ($A_0 > 0$).

Проблема устойчивости сильных разрывов в сплошной среде (в частности, в гелии II) заключается в следующем. Рассматривается фронт разрыва, отделяющий два стационарных потока жидкости. Пусть в начальный момент времени на фронт разрыва накладывается малое возмущение. Спрашивается, как ведет себя это возмущение со временем?

Перейдем к обсуждению математической постановки общей смешанной задачи об устойчивости сильных разрывов в сплошной среде. Пусть некоторая система уравнений, основанная на законах сохранения и описывающая движение сплошной среды, представима в виде
$$(\mathbf{P}_i^0)_t + \operatorname{div}\mathbf{P}_i = 0, \quad i = \overline{0,n}, \tag{1.2}$$
где $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^0\Psi_i + \Phi_i$, $\mathbf{P}_i = (\mathbf{P}_i^1, \mathbf{P}_i^2, \mathbf{P}_i^3)^*$, $\Psi_i = (\Psi_i^1, \Psi_i^2, \Psi_i^3)^*$, $\Phi_i = (\Phi_i^1, \Phi_i^2, \Phi_i^3)^*$, $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i(\mathbf{U})$, $\Psi_i = \Psi_i(\mathbf{U})$, $\Phi_i = \Phi_i(\mathbf{U})$, $\mathbf{P}_i^0 = \mathbf{P}_i^0(\mathbf{U})$, $\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_n)^*$. Предположим, что для (1.2) известна симметрическая форма записи (1.1) с матрицами $A_\alpha = A_\alpha(\mathbf{U})$, $\alpha = \overline{0,3}$. Так как $A_0 > 0$ на гладком решении $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, существует обратная матрица A_0^{-1}. Умножая систему (1.1) слева на A_0^{-1}, получим
$$I_n\mathbf{U}_t + \sum_{k=1}^{3} B_k \mathbf{U}_{x_k} = 0, \tag{1.3}$$
где $B_k = B_k(\mathbf{U}) = A_0^{-1}A_k$, I_n — единичная матрица порядка n.

Будем рассматривать кусочно-гладкие решения системы (1.2). Области гладкости вектора $\mathbf{U}$ разделены поверхностью сильного разрыва, на которой выполнены следующие условия:
$$[\mathbf{P}_i^0(\Psi_{iN} - D_N) + \Phi_{iN}] = 0, \quad i = \overline{0,n}; \tag{1.4}$$
здесь

$\Psi_{iN} = (\Psi_i, \mathbf{N})$, $\Phi_{iN} = (\Phi_i, \mathbf{N})$,

$\mathbf{N} = \frac{1}{|\nabla\tilde{f}|}(-1, f_{x_2}, f_{x_3})$ — нормаль к поверхности сильного разрыва,

$D_N = -\frac{f_t}{|\nabla\tilde{f}|}$, $|\nabla\tilde{f}| = \sqrt{1 + f_{x_2}^2 + f_{x_3}^2}$,

$\tilde{f}(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}') - x_1 = 0$ — уравнение поверхности сильного разрыва, $\mathbf{x}' = (x_2, x_3)$,

$[F] = F - F_\infty$, где F_∞ — значение величины слева от фронта сильного разрыва ($\tilde{f} \to +0$),

F — значение величины справа от фронта сильного разрыва ($\tilde{f} \to -0$).

Условия (1.4) на поверхности сильного разрыва получены из системы (1.2). Процесс получения (1.4) подробно описан в [10, § 4] (см. также [11]).

Рассмотрим кусочно-постоянное решение системы (1.2) (или систем уравнений (1.1), (1.3)):

$$\mathbf{U} = \begin{cases} \widehat{\mathbf{U}}_\infty, & x_1 < 0, \\ \widehat{\mathbf{U}}, & x_1 > 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

которое удовлетворяет следующим условиям на поверхности сильного разрыва с уравнением $x_1 = 0$:

$$[\widehat{\mathbf{P}}_i^0 \widehat{\Psi}_i^1 + \widehat{\Phi}_i^1] = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.6}$$

где $\widehat{\mathbf{P}}_{i\infty}^0 = \mathbf{P}_i^0(\widehat{\mathbf{U}}_\infty)$, $\widehat{\Psi}_{i\infty}^1 = \Psi_i^1(\widehat{\mathbf{U}}_\infty)$, $\widehat{\Phi}_{i\infty}^1 = \Phi_i^1(\widehat{\mathbf{U}}_\infty)$, $\widehat{\mathbf{P}}_i^0 = \mathbf{P}_i^0(\widehat{\mathbf{U}})$, $\widehat{\Psi}_i^1 = \Psi_i^1(\widehat{\mathbf{U}})$, $\widehat{\Phi}_i^1 = \Phi_i^1(\widehat{\mathbf{U}})$. Соотношения (1.6) на поверхности сильного разрыва получены из (1.4) при условии, что фронт разрыва неподвижен и описывается уравнением $x_1 = 0$.

Линеаризуя систему уравнений (1.1) и условия на поверхности сильного разрыва (1.4) относительно кусочно-постоянного решения (1.5), мы получим следующую смешанную задачу об устойчивости сильного разрыва (рассматривается случай двух пространственных переменных).

Задача 1. Найти решения систем уравнений

$$\widehat{A}_{0\infty}\mathbf{U}_t + \widehat{A}_{1\infty}\mathbf{U}_{x_1}^{+}\widehat{A}_{2\infty}\mathbf{U}_{x_2} = 0, \quad t > 0,\ \mathbf{x} \in R_-^2, \tag{1.1$'$}$$

$$\widehat{A}_0\mathbf{U}_t + \widehat{A}_1\mathbf{U}_{x_1}^{+}\widehat{A}_2\mathbf{U}_{x_2} = 0, \quad t > 0,\ \mathbf{x} \in R_+^2, \tag{1.1$''$}$$

которые удовлетворяют при $x_1 = 0$, $t > 0$, $x_2 \in \mathbb{R}$ граничным условиям, полученным линеаризацией соотношений (1.4), и начальным условиям

$$\mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R_\pm^2,$$
$$F|_{t=0} = F_0(x_2), \quad x_2 \in \mathbb{R};$$

здесь $\widehat{A}_{\alpha\infty} = A_\alpha(\widehat{\mathbf{U}}_\infty)$, $\widehat{A}_\alpha = A_\alpha(\widehat{\mathbf{U}})$, $\alpha = \overline{0,2}$, $\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_n)^*$ — вектор малых смещений, $F = F(t, x_2)$ — малое смещение фронта разрыва, $R_\pm^2 = \{\mathbf{x} \mid x_1 \gtrless 0,\ x_2 \in \mathbb{R}\}$.

Вместо систем (1.1$'$), (1.1$''$) иногда будем рассматривать уравнения, полученные линеаризацией системы (1.3) относительно кусочно-постоянного решения (1.5), именно:

$$I_n\mathbf{U}_t + \widehat{B}_{1\infty}\mathbf{U}_{x_1} + \widehat{B}_{2\infty}\mathbf{U}_{x_2} = 0, \quad t > 0,\ \mathbf{x} \in R_-^2, \tag{1.3$'$}$$

$$I_n\mathbf{U}_t + \widehat{B}_1\mathbf{U}_{x_1} + \widehat{B}_2\mathbf{U}_{x_2} = 0, \quad t > 0,\ \mathbf{x} \in R_+^2, \tag{1.3$''$}$$

где $\widehat{B}_{k\infty} = B_k(\widehat{\mathbf{U}}_\infty)$, $\widehat{B}_k = B_k(\widehat{\mathbf{U}})$, $k = 1, 2$. Важен вопрос о числе граничных условий в задаче 1. Так как в задаче 1 требуется определить также малое смещение фронта сильного разрыва, одно граничное условие необходимо рассматривать как уравнение для определения функции $F(t, x_2)$.

В силу этого число граничных условий при $x_1 = 0$ будем определять следующим образом (см. [12, § 15]):

$$
\begin{aligned}
\text{число граничных условий} = {} & \text{число отрицательных собственных значений матрицы } \widehat{A}_{1\infty} \\
& (\text{или матрицы } \widehat{B}_{1\infty}) \\
& + \text{число положительных собственных значений матрицы } \widehat{A}_1 \\
& (\text{или матрицы } \widehat{B}_1) \\
& + 1.
\end{aligned}
$$

Если все собственные значения матрицы $\widehat{A}_{1\infty}$ (или $\widehat{B}_{1\infty}$) неотрицательны, то решение задачи 1 в области R^2_- полностью определяется заданием только начальных данных. В этом случае, не нарушая общности, полагаем $\mathbf{U} \equiv 0$ в R^2_-. С учетом этого замечания вместо задачи 1 будем рассматривать следующую задачу.

Задача 2. При $\mathbf{x} \in R^2_+$, $t > 0$ найти решение системы уравнений (1.1″), которое удовлетворяет при $x_1 = 0$, $t > 0$, $x_2 \in \mathbb{R}$ граничным условиям, полученным линеаризацией (1.4), и начальным условиям

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U}|_{t=0} &= \mathbf{U}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^2_+, \\
F|_{t=0} &= F_0(x_2), \quad x_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Устойчивость разрыва в гелии II исследуется методом диссипативных интегралов энергии. Кратко изложим идею этого метода. В силу симметричности матриц A_α ($\alpha = \overline{0,2}$) справедливы соотношения

$$
\begin{aligned}
(\widehat{A}_\alpha \mathbf{U}, \mathbf{U})_t &= 2(\widehat{A}_\alpha \mathbf{U}_t, \mathbf{U}), \\
(\widehat{A}_\alpha \mathbf{U}, \mathbf{U})_{x_k} &= 2(\widehat{A}_\alpha \mathbf{U}_{x_k}, \mathbf{U}), \qquad \alpha = \overline{0,2},\ k = 1,2.
\end{aligned}
$$

Поэтому умножая скалярно (1.1″) на $2\mathbf{U}$ (для определенности рассматриваем задачу 2), получаем интеграл энергии в дифференциальной форме

$$
(\widehat{A}_0 \mathbf{U}, \mathbf{U})_t + (\widehat{A}_1 \mathbf{U}, \mathbf{U})_{x_1} + (\widehat{A}_2 \mathbf{U}, \mathbf{U})_{x_2} = 0.
$$

Интегрируя последнее соотношение по области R^2_+ и используя формулу Гаусса — Остроградского, приходим к равенству

$$
\frac{d}{dt} I(t) - \int\limits_{\mathbb{R}} (\widehat{A}_1 \mathbf{U}, \mathbf{U})\Big|_{x_1=0}\, dx_2 = 0, \tag{1.7}
$$

где $I(t) = \int\limits_{R^2_+} (\widehat{A}_0 \mathbf{U}, \mathbf{U})\, d\mathbf{x}$ (при выводе (1.7) мы полагали, что $|\mathbf{U}| = (\mathbf{U}, \mathbf{U})^{1/2} \to 0$ при $x_1 \to \infty$ или $|x_2| \to \infty$).

- Граничные условия для симметрической системы (1.1″) при $x_1 = 0$ называются *диссипативными*, если для всех ненулевых векторов $\mathbf{U}$, удовлетворяющих граничным условиям, выполнено неравенство

$$
-(\widehat{A}_1 \mathbf{U}, \mathbf{U})\Big|_{x_1=0} \geqslant 0. \tag{1.8}
$$

- Интеграл энергии (1.7) при выполнении неравенства (1.8) называется *диссипативным интегралом энергии.*

Предположим, что граничные условия в задаче 2 диссипативны. Диссипативный интеграл энергии (1.7) можно заменить интегральным неравенством $I(t) \leqslant I(0)$. Следовательно, имеет место априорная оценка

$$\|\mathbf{U}(t)\|_{L_2(R^2_+)} \leqslant C\|\mathbf{U}(0)\|_{L_2(R^2_+)}, \tag{1.9}$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от вектора $\mathbf{U}$,

$$\|\mathbf{U}(t)\|_{L_2(R^2_+)} = \Big(\int\limits_{R^2_+} |\mathbf{U}(t)|^2\, d\mathbf{x}\Big)^{1/2}, \qquad |\mathbf{U}(t)|^2 = (\mathbf{U}(t), \mathbf{U}(t).$$

Ввиду оценки (1.9) решение задачи 2 единственно и непрерывно зависит от начальных данных. Однако на практике граничные условия в задаче 2, вообще говоря, не диссипативны. Поэтому можно попытаться построить так называемую расширенную систему, граничные условия которой уже будут диссипативны. *Расширенная система* — это система для вектора $\mathbf{U}$ и его производных, полученная дифференцированием симметрической системы (1.1$''$).

При построении расширенной системы часто пользуются тем фактом, что в ряде случаев задачу 2 можно свести к смешанной задаче для волнового уравнения.

Задача 3. Найти решение волнового уравнения

$$aL^2 u_l - \widetilde{\Delta} u_l = 0, \quad x \in R^2_+,\ t > 0, \tag{1.10}$$

удовлетворяющее при $x_1 = 0$, $t > 0$, $x_2 \in \mathbb{R}$ граничному условию

$$b\tau^2 u_l - c\tau\xi_1 u_l + d\xi_2^2 u_l = 0 \tag{1.11}$$

и при $t = 0$ начальным условиям

$$u_l|_{t=0} = u_l^0(\mathbf{x}),$$
$$(u_l)_t|_{t=0} = -\sum_{i=1}^{n} (b^1_{li}(u^0_i(\mathbf{x}))_{x_1} + b^2_{li}(u^0_i(\mathbf{x}))_{x_2}),$$

здесь $L = \tau + \xi_1$, $\widetilde{\Delta} = \xi_1^2 + \xi_2^2$, $\tau = \frac{\partial}{\partial t}$, $\xi_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k = 1, 2)$, a, b, c, d — некоторые вещественные постоянные, b^k_{li} $(i = \overline{1, n})$ — компоненты l-й строки матрицы B_k $(k = 1, 2)$, u_l — l-я компонента вектора $\mathbf{U}$.

Далее уравнение (1.10) переписывается в виде эквивалентной симметрической системы (см. [9])

$$D_0\tau\mathbf{W} + D_1\xi_1\mathbf{W} + D_2\xi_2\mathbf{W} = 0, \tag{1.12}$$

где D_α $(\alpha = \overline{0, 2})$ — эрмитовы матрицы порядка m с постоянными элементами; причем компонентами вектора $\mathbf{W} = (w_1, \ldots, w_m)^*$ являются линейные комбинации вида $w_j = \alpha_j\tau u_l + \beta_j\xi_1 u_l + \gamma_j\xi_2 u_l$, где α_j, β_j, γ_j $(j = \overline{1, m})$ — некоторые вещественные постоянные.

При выполнении некоторых требований (см. (1.11)) граничные условия при $x_1 = 0$ для симметрической системы (1.12) будут диссипативными, т. е. для любого ненулевого вектора $\mathbf{W}$ выполняется условие

$$-(D_1\mathbf{W}, \mathbf{W})|_{x_1=0} \geqslant 0.$$

Несколько способов приведения волнового уравнения (1.10) к эквивалентной симметрической системе (1.12) с диссипативными граничными условиями изложены в [9, гл. III].

Составим расширенную систему

$$\widehat{A}_{0p}(\mathbf{U}_p)_t + \widehat{A}_{1p}(\mathbf{U}_p)_{x_1} + \widehat{A}_{2p}(\mathbf{U}_p)_{x_2} = 0, \tag{1.13}$$

где

$$\mathbf{U}_p = (\mathbf{U}^*, \mathbf{U}^*_t, \mathbf{U}^*_{x_1}, \mathbf{U}^*_{x_2}, \mathbf{U}^*_{tt}, \mathbf{U}^*_{tx_1}, \mathbf{U}^*_{tx_2}, \mathbf{U}^*_{x_1x_1}, \mathbf{U}^*_{x_1x_2}, \mathbf{U}^*_{x_2x_2}, \mathbf{W}^*)^*,$$

матрицы

$$\widehat{A}_{\alpha p} = (\widehat{A}_\alpha, \widehat{A}_\alpha, \widehat{A}_\alpha, \widehat{A}_\alpha, \widehat{A}_\alpha, \widehat{A}_\alpha, \widehat{A}_\alpha, \widehat{A}_\alpha, \widehat{A}_\alpha, \widehat{A}_\alpha, D_\alpha), \quad \alpha = \overline{0,2},$$

клеточно-диагональные. Умножая (1.13) скалярно на $2\mathbf{U}_p$, получаем интеграл энергии в дифференциальной форме

$$(\widehat{A}_{0p}\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p)_t + (\widehat{A}_{1p}\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p)_{x_1} + (\widehat{A}_{2p}\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p)_{x_2} = 0, \tag{1.14}$$

где $(\widehat{A}_{\alpha p}\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p) = (\widehat{A}_\alpha \mathbf{U}, \mathbf{U}) + (\widehat{A}_\alpha \mathbf{U}_t, \mathbf{U}_t) + \ldots + (\widehat{A}_\alpha \mathbf{U}_{x_1x_2}, \mathbf{U}_{x_1x_2}) + (D_\alpha \mathbf{W}, \mathbf{W})$, $\alpha = \overline{0,2}$. Интегрируя соотношение (1.14) по области R^2_+ и используя формулу Гаусса — Остроградского, приходим к следующему интегралу энергии:

$$\frac{d}{dt}I_p(t) - \int\limits_{\mathbb{R}} (\widehat{A}_{1p}\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p)\Big|_{x_1=0} dx_2 = 0, \tag{1.15}$$

где $I_p(t) = \int\limits_{R^2_+} (\widehat{A}_{0p}\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p)\, d\mathbf{x}$. При выводе (1.15) мы полагали, что $|\mathbf{U}_p| = (\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p)^{1/2} \to 0$ при $x_1 \to \infty$ или $|x_2| \to \infty$. Ввиду диссипативности граничных условий можно добиться положительной определенности формы

$$-(\widehat{A}_1\mathbf{U}_{tt}, \mathbf{U}_{tt}) + (\widehat{A}_1\mathbf{U}_{tx_1}, \mathbf{U}_{tx_1}) + \ldots$$
$$+ (\widehat{A}_1\mathbf{U}_{x_1x_2}, \mathbf{U}_{x_1x_2}) + (D_1\mathbf{W}, \mathbf{W})\}\Big|_{x_1=0},$$

вследствие чего из (1.15) получим интегральное неравенство

$$\frac{d}{dt}I_p(t) - \int\limits_{\mathbb{R}} \{(\widehat{A}_1\mathbf{U}, \mathbf{U}) + (\widehat{A}_1\mathbf{U}_t, \mathbf{U}_t)$$
$$+ (\widehat{A}_1\mathbf{U}_{x_1}, \mathbf{U}_{x_1}) + (\widehat{A}_1\mathbf{U}_{x_2}, \mathbf{U}_{x_2})\Big|_{x_1=0} dx_2 \leqslant 0. \tag{1.16}$$

Теперь воспользуемся свойством следа функции из пространства Соболева $W^1_2(R^2_+)$ при $x_1 = 0$ (см. [13]).

Из (1.16) вытекает неравенство

$$\frac{d}{dt}I_p(t) - cI_p(t) \leqslant 0, \tag{1.17}$$

где c — некоторая положительная постоянная, не зависящая от $\mathbf{U}_p$. Из (1.17) получаем требуемую априорную оценку $I_p(t) \leqslant e^{cT}I_p(0)$, $0 < t \leqslant T$, которую перепишем в стандартном виде

$$\|\mathbf{U}(t)\|_{W^2_2(R^2_+)} \leqslant \tilde{c}(T)\|\mathbf{U}(0)\|_{W^2_2(R^2_+)}, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{1.18}$$

где постоянная $\tilde{c}(T)$ не зависит от вектора $\mathbf{U}$.

Наличие априорной оценки (1.18) обеспечивает корректную постановку задачи 2. Эта же оценка позволяет перенести результаты, полученные для задачи 2 с постоянными коэффициентами, на случай переменных коэффициентов (см. [9]). В данной работе основной акцент сделан на получении априорных оценок вида (1.18) при изучении, например, устойчивости разрыва давления в гелии II.

Для доказательства некорректности задачи 1 (или задачи 2) достаточно сконструировать пример некорректности типа примера Адамара (о построении таких примеров см. [12, § 8]). Для задачи 1 ищем решения вида

$$\mathbf{U} = \begin{cases} \mathbf{U}_\infty = \mathbf{U}^0_\infty \exp\{n(\widehat{\tau}t + \widehat{\xi}_\infty x_1 + ix_2)\}, & x_1 < 0, \\ \mathbf{U} = \mathbf{U}^0 \exp\{n(\widehat{\tau}t + \widehat{\xi}x_1 + ix_2)\}, & x_1 > 0, \end{cases} \tag{1.19}$$

где $\mathbf{U}^0_\infty$, $\mathbf{U}^0$ — постоянные векторы; $\widehat{\tau}(\mathrm{Re}\,\widehat{\tau} > 0)$, $\widehat{\xi}_\infty(\mathrm{Re}\,\widehat{\xi}_\infty > 0)$, $\widehat{\xi}(\mathrm{Re}\,\widehat{\xi} < 0)$ — постоянные, $n = 1, 2 \ldots$. Наличие решений вида (1.19) означает что задача 1 некорректна (нет непрерывной зависимости решения от начальных данных). Действительно, если решения (1.19) для задачи 1 построены, то два решения вида (1.19)

$$\mathbf{U}_k = \begin{cases} \mathbf{U}^{(k)}_\infty = \mathbf{U}^0_\infty \exp\{n_k(\widehat{\tau}t + \widehat{\xi}_\infty x_1 + ix_2)\}, & x_1 < 0, \\ \mathbf{U}^{(k)} = \mathbf{U}^0 \exp\{n_k(\widehat{\tau}t + \widehat{\xi}x_1 + ix_2)\}, & x_1 > 0, \end{cases} \qquad k = 1, 2,$$

при $t = 0$ мало отличаются друг от друга, если n_1, n_2 достаточно большие (так как в этом случае $\mathrm{Re}\,\xi_\infty > 0$, $\mathrm{Re}\,\xi < 0$). Однако при $t > 0$ эти решения сильно отличаются друг от друга (так как $\mathrm{Re}\,\widehat{\tau} > 0$). Следовательно, невозможно подобрать такую норму, чтобы в ней выполнялась оценка вида (1.18).

Кратко изложим способ построения примера решения вида (1.19), демонстрирующего некорректность задачи 1. Вначале преобразовываем граничные условия задачи 1, исключив малое смещение фронта разрыва $F(x_2)$ (обычно это делается перекрестным дифференцированием). В результате число граничных условий уменьшится на одно. Подставив (1.19) в (1.3′), (1.3″), получим алгебраические системы

$$\mathcal{A}_\infty(\widehat{\tau}, \widehat{\xi}_\infty)\mathbf{U}^0_\infty = 0, \tag{1.20′}$$

$$\mathcal{A}(\widehat{\tau}, \widehat{\xi})\mathbf{U}^0 = 0, \tag{1.20″}$$

где $\mathcal{A}_\infty(\widehat{\tau}, \widehat{\xi}_\infty) = \widehat{\tau}I_n + \widehat{\xi}_\infty \widehat{B}_{1\infty} + i\widehat{B}_{2\infty}$, $\mathcal{A}(\widehat{\tau}, \widehat{\xi}) = \widehat{\tau}I_n + \widehat{\xi}\widehat{B}_1 + i\widehat{B}_2$. Алгебраические системы (1.20′), (1.20″) имеют нетривиальные решения, если их определители равны нулю, т. е.

$$\det \mathcal{A}_\infty(\widehat{\tau}, \widehat{\xi}_\infty) = a^0_\infty(\widehat{\tau})\widehat{\xi}^n_\infty + a^1_\infty(\widehat{\tau})\widehat{\xi}^{n-1}_\infty + \ldots + a^{n-1}_\infty(\widehat{\tau})\widehat{\xi}_\infty + a^n_\infty(\widehat{\tau}) = 0, \tag{1.21′}$$

$$\det \mathcal{A}(\widehat{\tau}, \widehat{\xi}) = a^0(\widehat{\tau})\widehat{\xi}^n + a^1(\widehat{\tau})\widehat{\xi}^{n-1} + \ldots + a^{n-1}(\widehat{\tau})\widehat{\xi} + a^n(\widehat{\tau}) = 0, \tag{1.21″}$$

где коэффициенты $a^i_\infty(\widehat{\tau})$, $a^i(\widehat{\tau})$ $(i = \overline{0, n})$ определяются через элементы матриц $\widehat{B}_{k\infty}$, $\widehat{B}_k$ $(k = 1, 2)$ и $\widehat{\tau}$. Решая эти уравнения относительно величин $\widehat{\xi}_\infty$, $\widehat{\xi}$ соответственно, находим их корни как функции от $\widehat{\tau}$ ($\widehat{\xi}_{i\infty} = \widehat{\xi}_{i\infty}(\widehat{\tau})$,

$\widehat{\xi}_i = \widehat{\xi}_i(\widehat{\tau})$, $i = \overline{1,n}$). Выбираем корни $\widehat{\xi}_{i\infty}$, $\widehat{\xi}_i$ с нужным для нас свойством $\mathrm{Re}\ \widehat{\xi}_{i\infty} > 0$, $\mathrm{Re}\ \widehat{\xi}_i < 0$ (при этом величина $\widehat{\tau}$ должна быть такой, что $\mathrm{Re}\ \widehat{\tau} > 0$). Пусть число корней $\widehat{\xi}_{i\infty}$ равно s ($s \leqslant n$), число корней $\widehat{\xi}_i$ равно r ($r \leqslant n$) и сумма $s + r$ всех корней $\widehat{\xi}_{j\infty}$ ($j = \overline{1,s}$), $\widehat{\xi}_k$ ($k = \overline{1,r}$) равна числу преобразованных граничных условий задачи 1. Предположим, что все выбранные корни $\widehat{\xi}_{j\infty}$ ($j = \overline{1,s}$), $\widehat{\xi}_k$ ($k = \overline{1,r}$) взаимно простые (это условие не обязательно; оно введено для упрощения изложения). Тогда ранг всех матриц $\mathcal{A}_\infty(\widehat{\tau}, \widehat{\xi}_{j\infty})$ ($j = \overline{1,s}$), $\mathcal{A}(\widehat{\tau}, \widehat{\xi}k)$ ($k = \overline{1,r}$) равен $n - 1$ (здесь $\widehat{\xi}_{j\infty}$ ($j = \overline{1,s}$), $\widehat{\xi}_k$ ($k = \overline{1,r}$) — обладающие указанным выше свойством корни систем (1.21$'$), (1.21$''$)). Следовательно, в матрицах $\mathcal{A}_\infty(\widehat{\tau}, \widehat{\xi}_{j\infty})$ ($j = \overline{1,s}$), $\mathcal{A}(\widehat{\tau}, \widehat{\xi}k)$ ($k = \overline{1,r}$) можно выделить по $n - 1$ линейно независимых строк. Далее, ищем решение задачи 1 в следующем виде:

$$\mathbf{U} = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{s} \mathbf{U}_\infty^{(j)} \exp\{n(\widehat{\tau}t + \widehat{\xi}_{j\infty}x_1 + ix_2)\}, & x_1 < 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{r} \mathbf{U}^{(k)} \exp\{n(\widehat{\tau}t + \widehat{\xi}_k x_1 + ix_2)\}, & x_1 > 0. \end{cases} \tag{1.22}$$

Подставляя это решение в преобразованные граничные условия задачи 1 и учитывая линейную независимость строк матриц $\mathcal{A}_\infty(\widehat{\tau}, \widehat{\xi}_{j\infty})$ ($j = \overline{1,s}$), $\mathcal{A}(\widehat{\tau}, \widehat{\xi}k)$ ($k = \overline{1,r}$), получаем систему алгебраических уравнений

$$\Gamma(\widehat{\tau})\mathbf{W} = 0, \tag{1.23}$$

где $\mathbf{W} = (\mathbf{U}_\infty^{(1)^*}, \ldots, \mathbf{U}_\infty^{(s)^*}, \mathbf{U}^{(1)^*}, \ldots, \mathbf{U}^{(r)^*})^*$.

В матрице $\Gamma(\widehat{\tau})$ верхние строки (их число равно числу преобразованных граничных условий задачи 1) состоят из элементов, которые получаются при подстановке (1.22) в преобразованные граничные условия задачи 1. Каждая из оставшихся строк матрицы $\Gamma(\widehat{\tau})$ содержит в качестве своих элементов элементы одной строки из числа линейно независимых строк матриц $\mathcal{A}_\infty(\widehat{\tau}, \widehat{\xi}_{j\infty})$ ($j = \overline{1,s}$), $\mathcal{A}(\widehat{\tau}, \widehat{\xi}k)$ ($k = \overline{1,r}$) и нули. В силу указанных выше условий матрица $\Gamma(\widehat{\tau})$ будет квадратной, поэтому можно найти определитель матрицы $\Gamma(\widehat{\tau})$. Система (1.23) имеет нетривиальное решение при условии $\det \Gamma(\widehat{\tau}) = 0$. Если у последнего уравнения найдется хотя бы один корень $\widehat{\tau}$ такой, что $\mathrm{Re}\ \widehat{\tau} > 0$, это будет означать, что пример некорректности типа примера Адамара построен.

Заметим, что некоторые детали работы были изложены в [14].

§ 2. Постановка задачи об устойчивости сильных разрывов в сверхтекучем гелии

В данном параграфе выписывается полная система гидродинамических уравнений, описывающая движение гелия II. Вводится уравнение состояния $\mu = \mu(p, T, q)$, которое замыкает систему уравнений Ландау. Указываются условия на функцию μ, необходимые по физическим соображениям, а также приводится симметрическая форма уравнений Ландау и условия ее t-гиперболичности (они не приводят к новым ограничениям на функцию μ). Далее, выписываются условия на поверхности сильного разрыва в гелии II. Рассматривается кусочно-постоянное решение, удовлетворяющее условиям на поверхности сильного разрыва в сверхтекучей жидкости и относительно него проводится линеаризация симметрической системы уравнений и условий на поверхности сильного разрыва. Формулируется линейная смешанная задача об устойчивости сильного разрыва в гелии II (основная задача) и изучаются соотношения на поверхности стационарного разрыва малой интенсивности в сверхтекучем гелии. В результате получены условия эволюционности разрыва давления и температурного разрыва, а также определены собственные значения матриц $\widehat{A}_{0\infty}^{-1}\widehat{A}_{1\infty}$, $\widehat{A}_0^{-1}\widehat{A}_1$, играющих важную роль при математической постановке рассматриваемых задач.

2.1. Предварительные сведения. Выпишем систему гидродинамических уравнений сверхтекучего гелия (см. [6, § 17]):

$$\begin{aligned} &\rho_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \\ &(\rho v_i)_t + \sum_{k=1}^{3} (\Pi_{ik})_{x_k} = 0, \quad i = \overline{1,3}, \\ &(\mathbf{v}_s)_t + \nabla\Big(\mu + \frac{|\mathbf{v}_s|^2}{2}\Big) = 0, \\ &S_t + \operatorname{div}(S\cdot\mathbf{v}_n) = 0; \end{aligned} \tag{2.1}$$

здесь

$\rho = \rho_s + \rho_n$ — плотность, $\rho\mathbf{v} = \rho_n\mathbf{w} + \rho\mathbf{v}_s = \rho\mathbf{v}_n + \rho_s\mathbf{w}$,
$\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ — относительная скорость,
$\Pi_{ik} = \rho_n v_{ni} v_{nk} + \rho_s v_{si} v_{sk} + p\delta_{ik}$ — тензор плотности потока импульса,
$(\ )_n$ — параметры нормальной жидкости,
$(\ )_s$ — параметры сверхтекучей жидкости,
δ_{ik} — символ Кронекера,
S — энтропия единицы объема,
μ — химический потенциал,
p — давление, $p = -E_0 + TS + \mu\rho + \rho_n|\mathbf{w}|^2$,
$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^*$ — среднемассовая скорость жидкости,
E_0 — энергия единицы объема,
T — температура,
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — декартовы координаты.

Имеет место термодинамическое тождество (см. [6, § 17])

$$dE_0 = TdS + \mu d\rho + (\mathbf{w}, d(\rho\mathbf{v}_n)),$$

которое с учетом формулы для давления p, можно переписать в виде

$$d\mu = -\sigma dT + Vdp - \rho_n V dq, \tag{2.2}$$

где $\sigma = VS$, $q = |\mathbf{w}|^2/2$, $V = 1/\rho$. Таким образом, система (2.1), дополненная уравнением состояния

$$\mu = \mu(p, T, q), \tag{2.3}$$

замкнута и ее можно рассматривать как систему для определения, например, вектора неизвестных величин $\mathrm{v} = \begin{pmatrix} p \\ T \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{v}_s \end{pmatrix}$q. При этом справедливы соотношения (см. (2.2)) $\rho = 1/\mu_p$, $S = -\mu_T/\mu_p$, $\rho_n = -\mu_q/\mu_p$. К системе (2.1) следует добавить условие Ландау

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_s = 0, \tag{2.4}$$

которое, по существу, является дополнительным требованием на начальные данные $\mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0(\mathbf{x})$ для системы (2.1). Действительно, считая, что (2.4) выполняется при $t = 0$, и действуя оператором rot на уравнение

$$(\mathbf{v}_s)_t + \nabla(\mu + |\mathbf{v}_s|^2/2) = 0,$$

получим, что (2.4) выполняется также при всех $t > 0$.

Наконец, к системе (2.1) надо добавить закон сохранения энергии

$$E_t + \sum_{k=1}^{3}(E_k)_{x_k} = 0, \tag{2.5}$$

где $E = E_0 + \rho|\mathbf{v}_s|^2/2 + \rho_n(\mathbf{v}_s, \mathbf{w})$ — полная энергия,

$$E_k = (\mu + |\mathbf{v}_s|^2/2)\rho \mathbf{v}_k + ST\mathbf{v}_{nk} + \rho_n \mathbf{v}_{nk}(\mathbf{v}_n, \mathbf{w}).$$

Закон сохранения энергии (2.5) играет важную роль при симметризации системы уравнений (2.1) (см. [9, гл.II]).

Замечание 2.1. Поскольку для гелия II величина ρ_T аномально мала [6, § 20], полагаем

$$\mu(p, T, q) = \mu_1(p, q) + \mu_2(T, q). \tag{2.3*}$$

Замечание 2.2. В сверхтекучем гелии существует две скорости звука. Ввиду замечания 1 они имеют следующий вид:

$$u_1 = (1/\rho_p)^{1/2} \quad \text{— скорость первого звука,}$$

$$u_2 = \left(\frac{\rho_s S^2}{\rho \rho_n S_T}\right)^{1/2} \quad \text{— скорость второго звука,}$$

причем

$$\rho_p = \rho_p(p, q) = -\frac{\mu_{1pp}(p, q)}{(\mu_{1p}(p, q))^2}, \qquad \rho = \rho(p, q) = \frac{1}{\mu_{1p}(p, q)},$$

$$\rho_n = \rho_n(p, T, q) = -\frac{\mu_q(p, T, q)}{\mu_{1p}(p, q)}, \qquad \rho_s = \rho_s(p, T, q) = \frac{1 + \mu_q(p, T, q)}{\mu_{1p}(p, q)},$$

$$S = S(p, T, q) = -\frac{\mu_{2T}(T, q)}{\mu_{1p}(p, q)}, \qquad S_T = S_T(p, T, q) = -\frac{\mu_{2TT}(T, q)}{\mu_{1p}(p, q)}.$$

Скорость звука в гелии II удовлетворяет неравенству [6, § 20]

$$u_1 > \sqrt{3} u_2. \tag{2.6}$$

Замечание 2.3. Из физических соображений ясно, что величины ρ, ρ_n, ρ_s, ρ_p, S_T строго положительны. Поэтому с учетом (2.6) на функции $\mu_1(p, q)$, $\mu_2(T, q)$ должны быть наложены следующие условия:

$$\mu_{1p}(p, q) > 0, \quad \mu_{1pp}(p, q) < 0, \quad \mu_{2TT}(T, q) < 0, \quad -1 < \mu_q(p, T, q) < 0,$$

$$-\frac{(\mu_{1p}(p,q))^2}{\mu_{1pp}(p,q)} > 3\frac{(1+\mu_q(p,T,q))(\mu_{2T}(T,q))^2}{\mu_q(p,T,q)\mu_{2TT}(T,q)}. \tag{2.7}$$

Обозначим через Ω открытое множество векторов $\mathbf{U}$, значения компонент которых соответствуют явлению сверхтекучести гелия в рамках данной модели, т. е. компоненты вектора $\mathbf{U}$ удовлетворяют следующим условиям: для химического потенциала μ выполнены неравенства (2.7), $p > 0$, температура T больше нуля и меньше 2.19 K, величины $|\mathbf{w}|$, $|\mathbf{v}_\mathrm{s}|$ не должны превышать некоторых критических значений [6, § 17].

2.2. Симметрическая форма гидродинамических уравнений сверхтекучего гелия. Симметризация уравнений сверхтекучей жидкости подробно описана в [9, гл.II]. Следуя [9], запишем систему уравнений (2.1) в симметрическом виде (коэффициенты матриц вычисляем для фона $w_2 = w_3 = v_{\mathrm{n}2} = v_{\mathrm{n}3} = v_{\mathrm{s}2} = v_{\mathrm{s}3} = 0$, $w_1 = w$, $v_{\mathrm{n}1} = v$, $v_{\mathrm{s}1} = v - w$):

$$A_0\mathbf{U}_t + \sum_{k=1}^{3} A_k\mathbf{U}_{x_k} = 0; \tag{2.8}$$

здесь

$$A_0 = \begin{bmatrix} V\rho_p & 0 & V\rho_q w & 0 & 0 & -\nu_p w & 0 & 0 \\ 0 & S_T & -\nu_T w & 0 & 0 & -\nu_T w & 0 & 0 \\ \rho_q w & -\nu_T w & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_\mathrm{n} & 0 & 0 & \rho_\mathrm{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_\mathrm{n} & 0 & 0 & \rho_\mathrm{n} \\ -\nu_p w & -\nu_T w & a_2 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_\mathrm{n} & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_\mathrm{n} & 0 & 0 & \rho \end{bmatrix},$$

$$A_1 = vA_0 + \overline{A}_1,$$

$$\overline{A}_1 = \begin{bmatrix} \overline{a}_1 & \overline{a}_2 & \overline{a}_3 & 0 & 0 & \overline{a}_4 & 0 & 0 \\ \overline{a}_2 & \overline{a}_5 & \overline{a}_6 & 0 & 0 & \nu_T w^2 & 0 & 0 \\ \overline{a}_3 & \overline{a}_6 & \overline{a}_7 & 0 & 0 & \nu_q w^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{a}_4 & \nu_T w^2 & \nu_q w^3 & 0 & 0 & -2\rho_\mathrm{s} w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho_n V & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma\rho_\mathrm{s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V\rho_\mathrm{n}\rho_\mathrm{s} w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_n V & \sigma\rho_\mathrm{s} & V\rho_\mathrm{n}\rho_\mathrm{s} w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_\mathrm{s} w & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_\mathrm{s} w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_n V & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma\rho_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V\rho_n\rho_s w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_n V & \sigma\rho_s & V\rho_n\rho_s w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_s w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_s w & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} a_1 &= -\rho(\rho_s/\rho)_q w^2 + \rho_n, & a_2 &= \rho_n - \nu_q w^2, \\ \overline{a}_1 &= -2V\nu_p w, & \overline{a}_2 &= V(\nu_p S - \nu_T)w, \\ \overline{a}_3 &= V(\rho_n + (\rho_n\nu_p - \nu_q)w^2), & \overline{a}_4 &= 1 + \nu_p w^2, \\ \overline{a}_5 &= 2\sigma\nu_T w, & \overline{a}_6 &= \sigma\rho_s + ((\rho_s\sigma)_q + \nu_T)w^2, \\ \overline{a}_7 &= 2V\rho_n(\nu_q w^2 + \rho_s)w, & \rho_s &= \nu = \nu(p,T,q). \end{aligned}$$

Пусть $w = 0$. Тогда условия положительной определенности симметрической матрицы A_0 выглядят так:

$$\begin{aligned} \rho_p^0 &= \rho_p(p,0) > 0 & (\mu_{1pp}^0 &= \mu_{1pp}(p,0) < 0), \\ S_T^0 &= S_T(p,T,0) > 0 & (\mu_{2TT}^0 &= \mu_{2TT}(p,0) < 0). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Условия (2.9) не накладывают новых ограничений на функции $\mu_1(p,q)$, $\mu_2(T,q)$ (см. (2.7)). Поэтому для любого вектора $\mathbf{U} = (p,T,0,0,0,v,0,0)$ множества Ω симметрическая матрица A_0 положительно определена.

2.3. Условия на поверхности сильного разрыва в гелии II. Поверхность сильного разрыва опишем уравнением

$$\widetilde{f}(t,\mathbf{x}) = f(t,\mathbf{x}') - x_1 = 0, \quad \mathbf{x}' = (x_2,x_3).$$

Проводя надлежащим образом специализацию функций P_i^0, Ψ_i, Φ_i в условиях (1.4), приходим к выводу, что на поверхности сильного разрыва в сверхтекучем гелии II должны быть непрерывны следующие величины:

$$\begin{gathered} [j] = 0, \quad j = \rho(v_N - D_N), \quad j^2[V] + [\widetilde{p}] = 0, \\ \widetilde{p} = p + \rho_s\rho_n w_N^2/\rho, \quad [\rho_n(v_{nN} - D_N)w_{\tau_k}] = 0, \quad k = 1,2, \\ [\mu + v_{sN}^2/2] = D_N[v_{sN}], \quad [v_{s\tau_k}] = 0, \quad k = 1,2, \\ [(v_{nN} - D_N)(ST + \rho_n(\mathbf{v}_n,\mathbf{w}))] + D_N([p] + j[v_{sN}]) = 0; \end{gathered} \tag{2.10}$$

здесь

$$\begin{aligned} &v_N = (\mathbf{v},\mathbf{N}), \quad && w_n = (\mathbf{w},\mathbf{N}), \quad && v_{sN} = (\mathbf{v}_s,\mathbf{N}), \\ &w_{\tau_k} = (\mathbf{w},\tau_k), \quad && v_{s\tau_k} = (\mathbf{v}_s,\tau_k), \quad && k = 1,2, \\ &\tau_1 = (f_{x_2},1,0), \quad && \tau_2 = (f_{x_3},0,1). \end{aligned}$$

Другие обозначения пояснены в § 1 (см. соотношения (1.4)).

2.4. Постановка основной линейной смешанной задачи об устойчивости сильных разрывов в гелии II. Рассмотрим кусочно-постоянное решение системы (2.8) следующего вида:

при $x_1 < 0$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{w} = 0, v_{n2} = v_{n3} = v_{s2} = v_{s3} = 0,\\
&v_{n1} = v_{s1} = \widehat{v}_\infty, \quad p = \widehat{p}_\infty, \quad T = \widehat{T}_\infty,\\
&\mu = \widehat{\mu}^0_\infty = \mu(\widehat{p}_\infty, \widehat{T}_\infty, 0),\\
&\rho = \widehat{\rho}^0_\infty = \rho(\widehat{p}_\infty, 0) = 1/\mu_{1p}(\widehat{p}_\infty, 0),\\
&S = \widehat{S}^0_\infty = S(\widehat{p}_\infty, \widehat{T}_\infty, 0) = -\frac{\mu_{2T}(\widehat{T}_\infty, 0)}{\mu_{1p}(\widehat{p}_\infty, 0)},\\
&\rho_n = \widehat{\rho}^0_{n\infty} = \widehat{\rho}_n(\widehat{p}_\infty, \widehat{T}_\infty, 0) = -\frac{\mu_q(\widehat{p}_\infty, \widehat{T}_\infty, 0)}{\mu_{1p}(\widehat{p}_\infty, 0)};
\end{aligned}
$$

при $x_1 > 0$

$$
\begin{aligned}
&w_2 = w_3 = v_{n2} = v_{n3} = v_{s2} = v_{s3} = 0, \quad w_1 = \widehat{w}, \quad v_{n1} = \widehat{v},\\
&v_{s1} = \widehat{v} - \widehat{w}, \quad p = \widehat{p}, \quad T = \widehat{T}, \quad \mu = \widehat{\mu} = \mu(\widehat{p}, \widehat{T}, \widehat{q}), \quad \widehat{q} = \widehat{w}^2/2\\
&\rho = \widehat{\rho} = \rho(\widehat{p}, 0) = 1/\mu_{1p}(\widehat{p}, \widehat{q}),\\
&S = \widehat{S} = S(\widehat{p}, \widehat{T}, \widehat{q}) = -\frac{\mu_{2T}(\widehat{T}, \widehat{q})}{\mu_{1p}(\widehat{p}_\infty, \widehat{q})},\\
&\rho_n = \widehat{\rho}\mathrm{n} = \widehat{\rho}_n(\widehat{p}, \widehat{T}, \widehat{q}) = -\frac{\mu_q(\widehat{p}, \widehat{T}, \widehat{q})}{\mu_{1p}(\widehat{p}, \widehat{q})};
\end{aligned}
$$

а при $x_1 = 0$ выполнены соотношения (2.10) (при условии, что фронт разрыва неподвижен и описывается уравнением $x_1 = 0$):

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\rho}\widehat{v} - \widehat{\rho}_s\widehat{w} = \widehat{\rho}^0_\infty \widehat{v}_\infty,\\
&\widehat{\rho}^0_\infty \widehat{v}_\infty(\widehat{v} - \widehat{\rho}_s w/\widehat{\rho}) + \widehat{p} + \widehat{\rho}_s\widehat{\rho}_n\widehat{w}^2/\widehat{\rho} = \widehat{\rho}^0_\infty \widehat{v}^2_\infty + \widehat{p}_\infty,\\
&\widehat{\mu} + (\widehat{v} - \widehat{w})^2/2 = \widehat{\mu}^0_\infty + \widehat{v}^2_\infty/2,\\
&\widehat{v}(\widehat{S}\widehat{T} + \widehat{\rho}_n\widehat{v}\widehat{w}) = \widehat{v}_\infty \widehat{S}^0_\infty \widehat{T}_\infty.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Линеаризуя симметрическую систему (2.8) и условия на поверхности сильного разрыва (2.10) относительно данного кусочно-постоянного решения, сформулируем математическую постановку задачи об устойчивости сильных разрывов в сверхтекучем гелии.

ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА. Найти решения следующих симметрических систем уравнений:

$$
\widehat{A}_{0\infty}\mathbf{U}_t + \sum_{k=1}^{3} \widehat{A}_{k\infty}\mathbf{U}_{x_k} = 0, \quad t > 0,\ \mathbf{x} \in R^3_-, \tag{2.12$'$}
$$

$$
\widehat{A}_0\mathbf{U}_t + \sum_{k=1}^{3} \widehat{A}_k\mathbf{U}_{x_k} = 0, \qquad t > 0,\ \mathbf{x} \in R^3_+, \tag{2.12$''$}
$$

удовлетворяющие при $x_1 = 0$, $t > 0$, $\mathbf{x}' \in R^2$ граничным условиям, полученным линеаризацией соотношений (2.10):

$$
\begin{aligned}
&[\widehat{\rho}]F_t = [\widehat{\rho}v_{s1} + \widehat{\rho}_n w_1 + \widehat{\rho}_p\widehat{v}p] - \widehat{w}((\widehat{v}_q\widehat{w} - \widehat{\rho}_q\widehat{v})w_1 + \widehat{\nu}_p p + \widehat{\nu}_T T), \widehat{\rho}^0_\infty\widehat{v}_\infty \\
&\qquad \times \{[2v_{s1} + 2\widehat{V}\widehat{\rho}_n w_1 + \widehat{V}\widehat{\rho}_p\widehat{v}p] \\
&\qquad + \widehat{V}\widehat{w}(((\widehat{V}\widehat{\rho}_s\widehat{w} + \widehat{v})\widehat{\rho}_q - 2\widehat{\nu}_q\widehat{w})w_1 + (\widehat{V}\widehat{\rho}_s\widehat{\rho}_p - 2\widehat{\nu}_p)p - 2\widehat{\nu}_T T)\} \\
&\qquad + [p] + \widehat{V}\widehat{w}^2\{((\widehat{\rho}_n - \widehat{\rho}_s)\widehat{\nu}_q + \widehat{V}\widehat{\rho}_s^2\widehat{\rho}_q)\widehat{w}w_1 \\
&\quad + ((\widehat{\rho}_n - \widehat{\rho}_s)\widehat{\nu}_p + \widehat{V}\widehat{\rho}_s^2\widehat{\rho}_p)p + (\widehat{\rho}_n - \widehat{\rho}_s)\widehat{\nu}_T T\} + 2\widehat{V}\widehat{\rho}_n\widehat{\rho}_s\widehat{w}w_1 = 0, \\
&\widehat{\rho}_n\widehat{v}\widehat{w}F_{x_k} + [\widehat{\rho}\widehat{v}w_k] = 0, \quad k = 2,3, \\
&([\widehat{v}] - \widehat{w})F_t = [\widehat{v}v_{s1} + \widehat{V}p - \widehat{\sigma}T] - \widehat{w}(v_{s1} + \widehat{V}\widehat{\rho}_n w_1), \\
&([\widehat{v}] - \widehat{w})F_{x_k} + [v_{sk}] = 0, \quad k = 2,3, \\
&([\widehat{S}\widehat{T}] + 2\widehat{\rho}_n\widehat{v}\widehat{w})F_t \\
&\qquad = [\widehat{S}\widehat{T}v_{s1} + (\widehat{S}\widehat{T} + \widehat{\rho}_n\widehat{v}^2)w_1 + \widehat{\sigma}\widehat{T}\widehat{\rho}_p\widehat{v}p + \widehat{v}(\widehat{S} + \widehat{S}_T\widehat{T})T] \\
&\qquad + \widehat{v}\widehat{w}\{2\widehat{\rho}_n v_{s1} + ((\widehat{\sigma}\widehat{\rho}_q - \widehat{\nu}_T)\widehat{T} + 2\widehat{\rho}_n + (\widehat{\rho}_q - \widehat{\nu}_q)\widehat{v}\widehat{w})w_1 \\
&\qquad + (\widehat{\rho}_p - \widehat{\nu}_p)\widehat{v}p - \widehat{\nu}_T\widehat{v}T\}
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

и начальным условиям при $t = 0$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^2_\pm, \\
&F|_{t=0} = F(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{x}' = (x_2, x_3) \in R^2;
\end{aligned}
$$

здесь $\widehat{A}_{\alpha\infty} = \widehat{A}_\alpha(\widehat{\mathbf{U}}_\infty)$, $\quad \widehat{A}_\alpha = A_\alpha(\widehat{\mathbf{U}})$, $\quad \alpha = \overline{0,3}$,
$\widehat{\mathbf{U}}_\infty = (\widehat{p}_\infty, \widehat{T}_\infty, 0, 0, 0, \widehat{v}_\infty, 0, 0)^*$, $\quad \widehat{\mathbf{U}} = (\widehat{p}, \widehat{T}, \widehat{w}, 0, 0, \widehat{v} = \widehat{w}, 0, 0)^*$,
$\mathbf{U} = (p, T, w_1, w_2, w_3, v_{s1}, v_{s2}, v_{s3})^*$ — вектор малых возмущений,
$F = F(t, \mathbf{x}')$ — малое смещение поверхности сильного разрыва,
$\widehat{\rho} = \widehat{\nu} = \nu(\widehat{p}, \widehat{T}, \widehat{q})$ и т. д., $\quad \widehat{q} = \widehat{w}^2/2$, $\quad \widehat{\sigma} = \widehat{S}\widehat{V}$, $\quad \widehat{V} = 1/\widehat{\rho}$.

Так как матрица $\widehat{A}_{0\infty}$ положительно определена (см. условия (2.9)), существует обратная матрица $\widehat{A}^{-1}_{0\infty}$. Умножая (2.12$'$) слева на $\widehat{A}^{-1}_{0\infty}$, приходим к системе

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\rho}^0_{p\infty}L_\infty p + \widehat{\rho}^0_{n\infty}\operatorname{div}\mathbf{w} + \widehat{\rho}^0_\infty\operatorname{div}\mathbf{v}_s = 0, \\
&\widehat{\rho}^0_\infty\widehat{S}^0_{T\infty}L_\infty T + \widehat{\rho}^0_{s\infty}\widehat{S}^0_\infty\operatorname{div}\mathbf{w} = 0, \\
&\widehat{\rho}^0_{n\infty}L_\infty\mathbf{w} + \widehat{S}^0_\infty\nabla T = 0, \\
&\widehat{\rho}^0_\infty L_\infty\mathbf{v}_s + \nabla p - \widehat{S}^0_\infty\nabla T = 0, \quad t > 0,\ \mathbf{x} \in R^3_-,
\end{aligned}
\tag{2.14$'$}
$$

где $L_\infty = \dfrac{\partial}{\partial t} + \widehat{v}_\infty\dfrac{\partial}{\partial x_1}$.

Матрица A_0 также будет положительно определенной при достаточно малом $\widehat{w}$. Следовательно, существует обратная матрица $\widehat{A}_0^{-1}$. Умножая

(2.12″) на матрицу $\widehat{A}_0^{-1}$, получаем следующую систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&Lp + a_1\xi_1 p + a_2\xi_1 T + a_3\xi_1 w_1 \\
&\qquad + a_4(\xi_2 w_2 + \xi_3 w_3) + a_5\xi_1 v_{s1} + a_6(\xi_2 v_{s2} + \xi_3 v_{s3}) = 0, \\
&LT + b_1\xi_1 p + b_2\xi_1 T + b_3\xi_1 w_1 \\
&\qquad + b_4(\xi_2 w_2 + \xi_3 w_3) + b_5\xi_1 v_{s1} + b_6(\xi_2 v_{s2} + \xi_3 v_{s3}) = 0, \\
&Lw_1 + c_1\xi_1 p + c_2\xi_1 T + c_3\xi_1 w_1 \\
&\qquad + c_4(\xi_2 w_2 + \xi_3 w_3) + c_5\xi_1 v_{s1} + c_6(\xi_2 v_{s2} + \xi_3 v_{s3}) = 0, \\
&Lw_k + \frac{\widehat{S}}{\widehat{\rho}_{\mathrm{n}}}\xi_k T + \widehat{w}\xi_k(w_1 + v_{s1}) = 0, \quad k = 2,3, \\
&L\mathbf{v}_{\mathrm{s}} + \widehat{V}\nabla p - \widehat{\sigma}\nabla T - \widehat{V}\widehat{\rho}_{\mathrm{n}}\widehat{w}\nabla w_1 - \widehat{w}\nabla v_{s1} = 0, \qquad t > 0, \mathbf{x} \in R^3_+,
\end{aligned}
\tag{2.14″}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&L = \tau + \widehat{v}\xi_1, \ \tau = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \xi_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \ k = \overline{1,3}, \\
&a_1 = \frac{1}{\widehat{d}}\widehat{\nu}_p a_1, \quad a_2 = \frac{1}{\widehat{d}}(\widehat{\nu}_T\widehat{a}_1 - \widehat{\rho}_q\widehat{S}\widehat{S}_T\widehat{w}), \quad a_3 = \frac{1}{\widehat{d}}(\widehat{\nu}_q\widehat{w}\widehat{a}_1 - \widehat{\rho}_{\mathrm{n}}\widehat{\rho}_q\widehat{S}_T\widehat{w}^2 + \widehat{a}_2), \\
&a_4 = \frac{\widehat{a}_2}{\widehat{d}}, \quad a_5 = \frac{1}{\widehat{d}}(\widehat{a}_3 - \widehat{\rho}_{\mathrm{n}}\widehat{\rho}_q\widehat{S}_T\widehat{w}^2), \quad a_6 = \frac{\widehat{a}_3}{\widehat{d}}, \\
&b_1 = \frac{\widehat{\nu}_p\widehat{b}_1}{\widehat{d}}, \quad b_2 = \frac{1}{\widehat{d}}(\widehat{\nu}_T\widehat{b}_1 + \widehat{\rho}_p\widehat{\nu}_T\widehat{S}\widehat{w}), \quad b_3 = \frac{1}{\widehat{d}}(\widehat{\nu}_q\widehat{w}\widehat{b}_1 + \widehat{\rho}_{\mathrm{n}}\widehat{\rho}_p\widehat{\nu}_T\widehat{w}^2 + \widehat{b}_2), \\
&b_4 = \frac{\widehat{b}_2}{\widehat{d}}, \quad b_5 = \frac{1}{\widehat{d}}(\widehat{b}_3 + \widehat{\rho}_{\mathrm{n}}\widehat{\rho}_p\widehat{\nu}_T\widehat{w}^2), \quad b_6 = \frac{\widehat{b}_3}{\widehat{d}}, \\
&c_1 = \frac{\widehat{\nu}_p\widehat{c}_1}{\widehat{d}}, \quad c_2 = \frac{1}{\widehat{d}}(\widehat{\nu}_T\widehat{c}_1 + \widehat{\rho}_p\widehat{S}\widehat{S}_T), \quad c_3 = \frac{1}{\widehat{d}}(\widehat{\nu}_q\widehat{w}\widehat{c}_1 + \widehat{\rho}_{\mathrm{n}}\widehat{\rho}_p\widehat{S}_T\widehat{w} + \widehat{c}_2), \\
&c_4 = \frac{\widehat{c}_2}{\widehat{d}}, \quad c_5 = \frac{1}{\widehat{d}}(\widehat{c}_3 + \widehat{\rho}_{\mathrm{n}}\widehat{\rho}_p\widehat{S}_T\widehat{w}), \quad c_6 = \frac{\widehat{c}_3}{\widehat{d}}, \\
&\widehat{a}_1 = -\widehat{\rho}_{\mathrm{n}}\widehat{S}_T\widehat{w} - ((\widehat{\sigma}\widehat{\rho}_q - \widehat{\nu}_T)\widehat{\nu}_T + (\widehat{\rho}_q - \widehat{\nu}_q)\widehat{S}_T)\widehat{w}^3, \\
&\widehat{a}_2 = \widehat{\rho}_{\mathrm{n}}^2\widehat{S}_T - (\widehat{\sigma}\widehat{\rho}_{\mathrm{s}}\widehat{\rho}_q\widehat{\nu}_T + \widehat{\rho}_{\mathrm{n}}\widehat{\nu}_q\widehat{S}_T + \widehat{\rho}_{\mathrm{n}}\widehat{\nu}_T^2)\widehat{w}^2, \\
&\widehat{a}_3 = \widehat{\rho}\widehat{\rho}_{\mathrm{n}}\widehat{S}_T + ((\widehat{\rho}_{\mathrm{s}}\widehat{\rho}_q - \widehat{\rho}\widehat{\nu}_q)\widehat{S}_T - \widehat{\rho}\widehat{\nu}_T^2)\widehat{w}^2, \\
&\widehat{b}_1 = \widehat{\sigma}\widehat{\rho}_{\mathrm{n}}\widehat{\rho}_p\widehat{w} + (\widehat{\sigma}(\widehat{\rho}_q\widehat{\nu}_p - \widehat{\rho}_p\widehat{\nu}_q) + (\widehat{\rho}_p - \widehat{\nu}_p)\widehat{\nu}_T)\widehat{w}^3, \\
&\widehat{b}_2 = \widehat{\sigma}\widehat{\rho}_{\mathrm{n}}\widehat{\rho}_{\mathrm{s}}\widehat{\rho}_p + (\widehat{\rho}_{\mathrm{n}}\widehat{\nu}_p\widehat{\nu}_T + \widehat{\sigma}\widehat{\rho}_{\mathrm{s}}(\widehat{\rho}_q\widehat{\nu}_p - \widehat{\rho}_p\widehat{\nu}_q))\widehat{w}^2, \\
&\widehat{b}_3 = -\widehat{\rho}_q\widehat{\nu}_T\widehat{w}^2, \ \widehat{c}_1 = ((\widehat{\rho}_p - \widehat{\nu}_p)\widehat{S}_T + \widehat{\sigma}\widehat{\rho}_p\widehat{\nu}_T)\widehat{w}^2, \\
&\widehat{c}_2 = (\widehat{\rho}_{\mathrm{n}}\widehat{\nu}_p\widehat{S}_T + \widehat{\sigma}\widehat{\rho}_{\mathrm{s}}\widehat{\rho}_p\widehat{\nu}_T)\widehat{w}, \ \widehat{c}_3 = (\widehat{\rho}\widehat{\nu}_p - \widehat{\rho}_{\mathrm{s}}\widehat{\rho}_p)\widehat{S}_T\widehat{w}, \\
&\widehat{d} = \widehat{\rho}_{\mathrm{n}}\widehat{\rho}_p\widehat{S}_T - ((\widehat{\rho}_p\widehat{\nu}_q - \widehat{\rho}_q\widehat{\nu}_p)\widehat{S}_T + \widehat{\rho}_p\widehat{\nu}_T^2)\widehat{w}^2.
\end{aligned}
$$

Иногда удобно вместо (2.12′), (2.12″) в основной задаче рассматривать системы (2.14′), (2.14″).

Замечание 2.4. **В процессе решения основной задачи находится также и малое смещение поверхности сильного разрыва $F = F(t, \mathbf{x}')$. При этом** одно из граничных условий (2.13) (например, первое) можно рассматривать как уравнение для определения функции F.

Замечание 2.5. Если все собственные значения матрицы $\widehat{A}_{1\infty}$ (или матрицы $\widehat{A}_{0\infty}^{-1}\widehat{A}_{1\infty}$) неотрицательны, то решение основной задачи в области R^3_- полностью определяется заданием начальных данных. Если при этом вектор начальных данных равен нулю при $\mathbf{x} \in R^3_-$, то решение $\mathbf{U}$ тождественно равно нулю $t > 0$, $\mathbf{x} \in R^3_-$.

2.5. Исследование условий (2.11). Вопрос об исследовании условий (2.11) ранее разбирался в [5; 6, § 26–29]. Было показано, что в случае разрывов небольшой интенсивности соотношения (2.11) определяют либо разрыв давления (ударную волну), либо температурный разрыв. Разрывы небольшой интенсивности упоминаются здесь по следующим причинам: во-первых, анализ соотношений (2.11) в этом случае достаточно прост (см. [5; 6, § 27]), во-вторых, по-видимому, в рамках модели сверхтекучего гелия, описываемого уравнениями Ландау, должны рассматриваться только такие разрывы.

Условия (2.11) состоят из четырех уравнений для семи неизвестных величин: $\widehat{p}_\infty$, $\widehat{T}_\infty$, $\widehat{v}_\infty$, $\widehat{p}$, $\widehat{T}$, $\widehat{v}$, $\widehat{w}$. Следовательно, задав произвольно три величины, остальные четыре можно определить из (2.11).

Рассмотрим сначала разрыв давления. Пусть заданы величины $\widehat{p}$, $\widehat{T}$, $\widehat{p}_\infty$ при этом $[\widehat{p}] = \Delta$, где $\Delta > 0$ — малая величина. Остальные параметры, входящие в (2.11), будем искать в виде следующих разложений:

$$\begin{aligned} \widehat{w} &= W_1\Delta + W_2\Delta^2 + O(\Delta^3), & \widehat{T}_\infty &= \widehat{T} + F_1\Delta + F_2\Delta^2 + O(\Delta^3), \\ \widehat{v} &= \widehat{v}^0 + V_1\Delta + V_2\Delta^2 + O(\Delta^3), & \widehat{v}_\infty &= \widehat{v}^0 + U_1\Delta + U_2\Delta^2 + O(\Delta^3). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Так как в первом приближении разрыв давления распространяется со скоростью, равной скорости первого звука (см. [5; 6, § 28]), имеем $\widehat{v}^0 = \widehat{u}_1^0$, т. е. для определенности полагаем $\widehat{v}^0 > 0$. Подставляя разложения (2.15) в (2.11), получим

$$\begin{aligned} &W_1 = W_2 = F_1 = F_2 = 0, \\ &U_1 = \frac{1}{2\widehat{\rho}^0\widehat{u}_1^0} + \frac{\widehat{\rho}_{pp}^0}{4}(\widehat{u}_1^0)^3, \quad V_1 = -\frac{1}{2\widehat{\rho}^0\widehat{u}_1^0} + \frac{\widehat{\rho}_{pp}^0}{4}(\widehat{u}_1^0)^3, \\ &U_2 = \frac{3}{8(\widehat{\rho}^0)^2(\widehat{u}_1^0)^3} - \frac{\widehat{\rho}_{pp}^0\widehat{u}_1^0}{8\widehat{\rho}^0} + \frac{3}{32}(\widehat{\rho}_{pp}^0)^2(\widehat{u}_1^0)^5 - \frac{\widehat{\rho}_{ppp}^0}{12}(\widehat{u}_1^0)^3, \\ &V_2 = -\frac{1}{8(\widehat{\rho}^0)^2(\widehat{u}_1^0)^3} + \frac{\widehat{\rho}_{pp}^0\widehat{u}_1^0}{8\widehat{\rho}^0} + \frac{3}{32}(\widehat{\rho}_{pp}^0)^2(\widehat{u}_1^0)^5 - \frac{\widehat{\rho}_{ppp}^0}{12}(\widehat{u}_1^0)^3; \end{aligned} \tag{2.16}$$

здесь

$$\widehat{u}_1^0 = (1/\widehat{\rho}_p^0)^{1/2}, \quad \widehat{\rho}^0 = \rho(\widehat{p}, 0), \quad \widehat{\rho}_p^0 = \widehat{\rho}_p(\widehat{p}, 0) \quad \text{и т. д.}$$

Покажем, что выполнены условия эволюционности разрыва давления:

$$\widehat{v}_\infty > \widehat{u}_{1\infty}^0, \quad \widehat{u}_1 > \widehat{v} > \widehat{u}_2; \tag{2.17}$$

здесь

$$\widehat{u}^0_{1\infty} = (1/\rho_p(\widehat{p}_\infty, 0))^{1/2}, \widehat{u}_1 = (1/\rho_p(\widehat{p}, \widehat{q}))^{1/2},$$
$$\widehat{u}_2 = \left(\frac{\rho_s(\widehat{p}, \widehat{T}, \widehat{q})(S(\widehat{p}, \widehat{T}, \widehat{q}))^2}{\rho(\widehat{p}, \widehat{q})\rho_n(\widehat{p}, \widehat{T}, \widehat{q})\widehat{S}_T(\widehat{p}, \widehat{T}, \widehat{q})}\right)^{1/2},$$

причем $\widehat{u}_1 = \widehat{u}^0_1$ (с большой точностью),

$$\widehat{u}^0_{1\infty} = \widehat{u}^0_1 + \frac{\widehat{\rho}^0_{pp}}{2}(\widehat{u}^0_1)^3\Delta + O(\Delta^2).$$

Неравенства $\widehat{v}_\infty > \widehat{u}^0_{1\infty}$, $\widehat{u}_1 > \widehat{v}$ справедливы, если

$$\widehat{\mu}^0_{1ppp} = \mu_{1ppp}(\widehat{p}, 0) > 0. \tag{2.18}$$

Неравенство $\widehat{v} > \widehat{u}_2$ выполнено в силу соотношения (2.6).

Рассмотрим теперь температурный разрыв. Пусть заданы величины $\widehat{p}$, $\widehat{T}$, $\widehat{T}_\infty$; при этом $[\widehat{T}] = \Delta$, где Δ — малая величина. Остальные параметры, входящие в (2.11), будем искать в виде следующих разложений:

$$\begin{aligned} \widehat{w} &= W_1\Delta + O(\Delta^2), & \widehat{p}_\infty &= \widehat{p} + P_1\Delta + O(\Delta^2), \\ \widehat{v} &= \widehat{v}^0 + V_1\Delta + O(\Delta^2), & \widehat{v}_\infty &= \widehat{v}^0 + U_1\Delta + O(\Delta^2). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Так как в первом приближении температурный разрыв распространяется со скоростью, равной скорости второго звука (см. [5; 6, § 29]), имеем $\widehat{v}^0 = \widehat{u}^0_2$, т. е. для определенности мы полагаем $\widehat{v}^0 > 0$. Подставляя разложения (2.19) в (2.11), получим

$$\begin{aligned} &P_1 = 0, \quad W_1 = -\frac{\widehat{S}^0}{\widehat{\rho}_n\widehat{u}^0_2}, \\ &U_1 = \left(\frac{\widehat{\rho}^0\widehat{\nu}^0_T}{4\widehat{\rho}^0_n\widehat{\rho}^0_s} + \frac{\widehat{S}^0_{TT}}{4\widehat{S}^0_T} + \frac{\widehat{S}^0_T}{2\widehat{S}^0}\right)\widehat{u}^0_2 = U_1'\widehat{u}^0_2, \\ &V_1 = \left(\frac{\widehat{\rho}^0\widehat{\nu}^0_T}{4\widehat{\rho}^0_n\widehat{\rho}^0_s} + \frac{\widehat{S}^0_{TT}}{4\widehat{S}^0_T} - \frac{\widehat{S}^0_T}{2\widehat{S}^0}\right)\widehat{u}^0_2 = V_1'\widehat{u}^0_2; \end{aligned} \tag{2.20}$$

здесь $\widehat{u}^0_2 = \left(\widehat{\rho}^0_s(\widehat{S}^0)^2/\widehat{\rho}^0\widehat{\rho}^0_n\widehat{S}^0_T\right)^{1/2}$, $\widehat{S}^0 = S(\widehat{p}, \widehat{T}, 0)$ и т. д.

Проверим выполнение условий эволюционности температурного разрыва

$$\widehat{u}^0_{1\infty} > \widehat{v}_\infty > \widehat{u}^0_{2\infty}, \tag{2.21}$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{u}^0_{2\infty} &= \left(\frac{\rho_s(\widehat{p}_\infty, \widehat{T}_\infty, 0)(S(\widehat{p}_\infty, \widehat{T}_\infty, 0))^2}{\rho(\widehat{p}_\infty, 0)\rho_n(\widehat{p}_\infty, \widehat{T}_\infty, 0)\widehat{S}_T(\widehat{p}_\infty, \widehat{T}_\infty, 0)}\right)^{1/2} \\ &= \widehat{u}^0_2 + \left(-\frac{\widehat{\rho}^0\widehat{\nu}^0_T}{2\widehat{\rho}^0_n\widehat{\rho}^0_s} + \frac{\widehat{S}^0_{TT}}{2\widehat{S}^0_T} - \frac{\widehat{S}^0_T}{\widehat{S}^0}\right)\widehat{u}^0_2\Delta + O(\Delta^2). \end{aligned}$$

Неравенство $\widehat{v}_\infty > \widehat{u}^0_{2\infty}$ выполнено, если

$$\Big(\frac{3}{4}\frac{\widehat{\mu}^0_{2qT}}{\widehat{\mu}^0_q(1+\widehat{\mu}^0_q)} - \frac{3}{2}\frac{\widehat{\mu}^0_{2TT}}{\widehat{\mu}^0_{2T}} + \frac{1}{4}\frac{\widehat{\mu}^0_{2TTT}}{\widehat{\mu}^0_{2TT}}\Big)\Delta < 0. \qquad (2.22)$$

Это неравенство может быть переписано в виде

$$P'\Delta = \Big(-\frac{3}{4}\frac{\widehat{\rho}^0\widehat{\nu}^0_T}{\widehat{\rho}^0_{\text{n}}\widehat{\rho}^0_{\text{s}}} + \frac{\widehat{S}^0_{TT}}{4\widehat{S}^0_T} - \frac{3}{2}\frac{\widehat{S}^0_T}{\widehat{S}^0}\Big)\Delta < 0. \qquad (2.22^*)$$

Неравенство $\widehat{u}^0_{1\infty} > \widehat{v}_\infty$ справедливо в силу соотношения (2.6).

Заканчивая этот параграф, рассмотрим вопрос о собственных значениях матриц $\widehat{A}^{-1}_{0\infty}\widehat{A}_{1\infty}$, $\widehat{A}^{-1}_0\widehat{A}_1$. Информация о них важна для правильной постановки граничных условий при $x_1 = 0$ в линейных смешанных задачах об устойчивости разрыва давления и температурного разрыва в гелии II.

Выпишем представления собственных значений соответствующих матриц. Рассмотрим разрыв давления.

Собственные значения λ_i $(i = \overline{0,8})$ *матрицы* $\widehat{A}^{-1}_{0\infty}\widehat{A}_{1\infty}$:

$$\begin{aligned}
&\lambda_k = \widehat{u}^0_1 + U_1\Delta + O(\Delta^2), && k = \overline{1,4},\\
&\lambda_5 = 2\widehat{u}^0_1 + C_1\Delta + O(\Delta^2), && \lambda_6 = -V_1\Delta + O(\Delta^2),\\
&\lambda_7 = \widehat{u}^0_1 + \widehat{u}^0_2 + D_+\Delta + O(\Delta^2), && \lambda_8 = \widehat{u}^0_1 - \widehat{u}^0_2 + D_-\Delta + O(\Delta^2),
\end{aligned} \qquad (2.23')$$

где

$$C_1 = \frac{1}{2\widehat{\rho}^0\widehat{u}^0_1} + \frac{3}{4}\frac{\widehat{\rho}^0_{pp}}{4}(\widehat{u}^0_1)^3, \qquad D_\pm = U_1 \pm \frac{\widehat{\rho}^0_{\text{s}}\widehat{\rho}^0_p - \widehat{\rho}^0\widehat{\nu}^0_p}{\widehat{\rho}^0_{\text{n}}\widehat{\rho}^0_{\text{s}}}\widehat{u}^0_2,$$

величины U_1, V_1 определены формулами (2.16).

Собственные значения λ_i $(i = \overline{1,8})$ *матрицы* $\widehat{A}^{-1}_0\widehat{A}_1$:

$$\begin{aligned}
&\lambda_k = \widehat{u}^0_1 + V_1\Delta + O(\Delta^2), && k = \overline{1,4},\\
&\lambda_5 = 2\widehat{u}^0_1 + V_1\Delta + O(\Delta^2), && \lambda_6 = V_1\Delta + O(\Delta^2),\\
&\lambda_7 = \widehat{u}^0_1 + \widehat{u}^0_2 + V_1\Delta + O(\Delta^2), && \lambda_8 = \widehat{u}^0_1 - \widehat{u}^0_2 + V_1\Delta + O(\Delta^2).
\end{aligned} \qquad (2.23'')$$

Рассмотрим температурный разрыв.

Собственные значения λ_i $(i = \overline{0,8})$ *матрицы* $\widehat{A}^{-1}_{0\infty}\widehat{A}_{1\infty}$:

$$\begin{aligned}
&\lambda_k = \widehat{u}^0_2 + U_1\Delta + O(\Delta^2), && k = \overline{1,4},\\
&\lambda_5 = \widehat{u}^0_2 + \widehat{u}^0_1 + U_1\Delta + O(\Delta^2), && \lambda_6 = \widehat{u}^0_2 - \widehat{u}^0_1 + U_1\Delta + O(\Delta^2),\\
&\lambda_7 = 2\widehat{u}^0_2 + C_1\Delta + O(\Delta^2), && \lambda_8 = -P'\widehat{u}^0_2\Delta + O(\Delta^2),
\end{aligned} \qquad (2.24')$$

где

$$C_1 = \Big(-\frac{\widehat{\rho}^0\widehat{\nu}^0_T}{4\widehat{\rho}^0_{\text{n}}\rho^0_{\text{s}}} + \frac{3}{4}\frac{\widehat{S}^0_{TT}}{\widehat{S}^0_T} - \frac{\widehat{S}^0_T}{2\widehat{S}^0}\Big)\widehat{u}^0_2,$$

величины U_1, P' определены соотношениями (2.20), (2.22*).

Собственные значения λ_i $(i=\overline{1,8})$ *матрицы* $\widehat{A}_0^{-1}\widehat{A}_1$:

$$\begin{aligned} &\lambda_k = \widehat{u}_2^0 + V_1\Delta + O(\Delta^2), && k=\overline{1,4},\\ &\lambda_5 = \widehat{u}_2^0 + \widehat{u}_1^0 + U_1\Delta + O(\Delta^2), && \lambda_6 = \widehat{u}_2^0 - \widehat{u}_1^0 + U_1\Delta + O(\Delta^2),\\ &\lambda_7 = 2\widehat{u}_2^0 + P'\widehat{u}_2^0\Delta + O(\Delta^2), && \lambda_8 = P'\widehat{u}_2^0\Delta + O(\Delta^2), \end{aligned} \tag{2.24''}$$

где величина V_1 определена формулой (2.20).

§ 3. Устойчивость разрыва давления в сверхтекучем гелии

В этом параграфе устанавливается факт устойчивости разрыва давления малой интенсивности в сверхтекучем гелии. В п. 3.1 формулируются линейные смешанные задачи об устойчивости разрыва давления в гелии II (задача РД1, задача РД2 — варианты основной задачи). В задаче РД1 параметры кусочно-постоянного решения (см. разложения (2.15)) вычисляются с точностью не выше второго порядка малости относительно величины скачка давления $[p]=\Delta$, где $\Delta>0$ — малая величина, а в задаче задаче РД2 — с точностью не выше пятого порядка малости. В п. 3.2 задача РД1 сводится к смешанной задаче для волнового уравнения (задача W1), а задача РД2 таким же образом — к смешанной задаче для уравнения, близкого к волновому (задача W2). В п. 3.3 методом диссипативных интегралов энергии выводится априорная оценка решения задачи РД1, доказывающая устойчивость разрыва давления в гелии II. При этом на основное кусочно-постоянное решение накладываются только физически оправданные ограничения. При выводе априорной оценки строится так называемая расширенная система, которая получается дифференцированием симметрической системы (2.8) и добавлением симметрической системы, полученной симметризацией волнового уравнения задачи W1. В п. 3.4 тот же подход применяется для вывода априорной оценки решения задачи РД2. При этом на кусочно-постоянное решение накладывается еще одно дополнительное условие.

3.1. Постановка линейной смешанной задачи об устойчивости разрыва давления в гелии II. В п. 2.4 основная задача сформулирована без учета специфики стационарного разрыва. Принимая во внимание стационарный разрыв, приходим к нескольким вариантам основной задачи.

Пусть стационарным разрывом является разрыв давления ($[p]=\Delta$, где $\Delta>0$ мало). Потребуем выполнения условий (2.17) эволюционности разрыва давления. Рассмотрим также собственные значения λ_i $(i=\overline{0,8})$ матриц $\widehat{A}_{0\infty}^{-1}\widehat{A}_{1\infty}$, $\widehat{A}_0^{-1}\widehat{A}_1$. При выполнении условий эволюционности матрица $\widehat{A}_{0\infty}^{-1}\widehat{A}_{1\infty}$ имеет восемь положительных собственных значений. Следовательно, для системы уравнений (2.12$'$) (или (2.14$'$)) не требуется постановки граничных условий при $x_1=0$ (решение системы в этом случае полностью определяется заданием начальных данных при $x_1<0$). Для матрицы $\widehat{A}_0^{-1}\widehat{A}_1$ семь собственных значений λ_i $(i=\overline{1,5})$, λ_7, λ_8 строго положительны, а собственное значение λ_6 строго отрицательно, т. е. для системы уравнений (2.12$''$) (или (2.14$''$)) при $x_1=0$ надо ставить семь граничных условий. Кроме того, в ходе решения требуется найти функцию F, поэтому одно граничное условие следует рассматривать как уравнение для ее определения (см. замечание 2.4). Следовательно, при выполнении условий эволюционности разрыва давления (2.17), как было отмечено в § 1, число граничных условий должно равняться восьми, т. е. соотношений (2.13) столько, сколько требуется для эволюционности разрыва давления.

Учитывая замечание 2.5, выпишем математическую постановку линейной смешанной задачи об устойчивости разрыва давления в гелии II (в плоском случае), в которой будут учитываться параметры кусочно-постоянного решения, вычисленные с точностью не выше второго порядка (задача РД1; при такой точности $\widehat{w} = 0$ и $[\widehat{T}] = 0$, т. е. $\widehat{T} = \widehat{T}_\infty$) и не выше пятого порядка (задача РД2) малости относительно скачка давления Δ.

Задача РД1. Найти решение системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &Lp + \overline{\rho}_{\rm n}^0 \operatorname{div}\mathbf{w} + \operatorname{div}\mathbf{v}_{\rm s} = 0,\\ &LT + \overline{\rho}_{\rm n}^0(\overline{u}^0)^2 \operatorname{div}\mathbf{w} = 0,\\ &M_1^2 L\mathbf{w} + \frac{1}{\overline{\rho}_{\rm n}^0}\nabla T = 0,\\ &M_1^2 L\mathbf{v}_{\rm s} + \nabla p - \nabla T = 0, \end{aligned}\right\}\quad t > 0, x \in R_+^2 \tag{3.1$'$}$$

удовлетворяющее при $t > 0$, $x_1 = 0$, $x_2 \in \mathbb{R}$ граничным условиям

$$\begin{aligned} &w_2 = 0,\ v_{{\rm s}2} = -(1-\overline{v})\xi_2 F,\ \tau F = \overline{\mu} p,\\ &w_1 = \overline{\nu}_1 p,\ v_{{\rm s}1} = \overline{d} p,\ T = \overline{\nu}_2 p \end{aligned} \tag{3.2$'$}$$

и начальным условиям

$$\begin{aligned} &\mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R_+^2,\\ &F|_{t=0} = F_0(x_2), \quad x_2 \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

здесь $L = \tau + \xi_1, \quad \tau = \dfrac{\partial}{\partial t}, \quad \xi_k = \dfrac{\partial}{\partial x_k},\ k = 1, 2,$

$$\overline{\mu} = -\frac{1 - M_1^2}{2(1-\overline{\rho}^0)M_1^2}, \quad \overline{\nu}_1 = \frac{\gamma}{\overline{\rho}_{\rm n}^0}, \quad \overline{d} = -\gamma - \alpha,$$

$$\overline{\nu}_2 = -\frac{(1-\overline{\rho}^0)((\overline{u}^0)^2 + \varkappa M_1^2)(1 - M_1^2)}{2\overline{\rho}^0((\overline{u}^0)^2 - M_1^2)} = (-\gamma + (1-\overline{\rho}^0)\lambda)M_1^2,$$

$$\alpha = \frac{1 + M_1^2}{2M_1^2}, \quad \gamma = \frac{(1-\overline{\rho}^0)(1+\varkappa)(1-M_1^2)}{2\overline{\rho}^0((\overline{u}^0)^2 - M_1^2))}, \quad \varkappa = \frac{\widehat{S}^0}{\widehat{T}\widehat{S}_T^0},$$

$$\lambda = -\frac{1 - M_1^2}{2\overline{\rho}^0 M_1^2}, \quad \overline{\rho}_{\rm n}^0 = \frac{\widehat{\rho}_{\rm n}^0}{\widehat{\rho}^0}, \quad \overline{\rho}^0 = \frac{\widehat{\rho}_\infty^0}{\widehat{\rho}^0}, \quad \overline{v} = \frac{\widehat{v}_\infty}{\widehat{v}}, \quad \overline{u}^0 = \frac{\widehat{u}_2^0}{\widehat{u}_1^0},$$

$$M_1 = \frac{\widehat{v}}{\widehat{u}_1^0} < 1, \quad \widehat{\rho}_{\rm n}^0 = \rho_{\rm n}(\widehat{p}, \widehat{T}, 0) \quad \text{и т. д.}$$

Задача РД2. Найти решение системы уравнений

$$
\begin{aligned}
&Lp + \overline{\rho}_{\mathrm{n}}^0 \operatorname{div} \mathbf{w} + \operatorname{div} \mathbf{v}_{\mathrm{s}} - a\widetilde{M}\xi_1 p - \Big(b + \frac{d}{\overline{\rho}_{\mathrm{n}}^0}\Big)\widetilde{M}\xi_1 T = 0,\\
&LT + \overline{\rho}_{\mathrm{n}}^0(\overline{u}^0)^2 \operatorname{div} \mathbf{w} + \frac{\overline{\rho}_{\mathrm{n}}^0}{\overline{\rho}_{\mathrm{s}}^0} a(\overline{u}^0)^2\widetilde{M}\xi_1 p + \frac{1+\overline{\rho}_{\mathrm{n}}^0}{\overline{\rho}_{\mathrm{s}}^0} b(\overline{u}^0)^2\widetilde{M}\xi_1 T = 0,\\
&M_1^2 L w_1 + \frac{1}{\overline{\rho}_{\mathrm{n}}^0}\xi_1 T + (1 + a + b(\overline{u}^0)^2)M_1\widetilde{M}_1\xi_1 w_1\\
&\qquad + (a + b(\overline{u}^0)^2)M_1\widetilde{M}_1\xi_2 w_2 \qquad\qquad (3.1'')\\
&\qquad + \Big(1 + \frac{a - \overline{\rho}_{\mathrm{s}}^0}{\overline{\rho}_{\mathrm{n}}^0}\Big)M_1\widetilde{M}_1\xi_1 v_{\mathrm{s}1} + \frac{a - \overline{\rho}_{\mathrm{s}}^0}{\overline{\rho}_{\mathrm{n}}^0}M_1\widetilde{M}_1\xi_2 v_{\mathrm{s}2} = 0,\\
&M_1^2 L w_2 + \frac{1}{\overline{\rho}_{\mathrm{n}}^0}\xi_2 T + M_1\widetilde{M}_1\xi_2(w_1 + v_{\mathrm{s}1}) = 0,\\
&M_1^2 L \mathbf{v}_{\mathrm{s}} + \nabla p - \nabla T - \overline{\rho}_{\mathrm{n}}^0 M_1\widetilde{M}_1\nabla w_1 - M_1\widetilde{M}_1\nabla v_{\mathrm{s}1} = 0, \quad t > 0, x \in R_+^2,
\end{aligned}
$$

удовлетворяющее при $t > 0$, $x_1 = 0$, $x_2 \in \mathbb{R}$ граничным условиям

$$
\begin{aligned}
&w_2 = -\widetilde{M}F_{x_2}, \quad v_{\mathrm{s}2} = -(1 - \overline{v} - \widetilde{M})F_{x_2},\\
&F_t = (\overline{\mu} + \widetilde{\mu})p, \quad w_1 = (\overline{\nu}_1 + \widetilde{\nu}_1)p, \qquad (3.2'')\\
&v_{\mathrm{s}1} = (\overline{d} + \widetilde{d})p, \quad T = (\overline{\nu}_2 + \widetilde{\nu}_2)p
\end{aligned}
$$

и начальным условиям

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R_+^2,\\
&F|_{t=0} = F_0(x_2), \quad x_2 \in \mathbb{R};
\end{aligned}
$$

здесь

$$
\widetilde{\mu} = \frac{1}{1 - \overline{\rho}^0}\Big\{\gamma\Big(\frac{d}{2\overline{\rho}_{\mathrm{n}}^0}M_1\widetilde{M}_1 - \overline{\rho}_{\mathrm{s}}^0\widetilde{M}\Big) - \overline{\rho}_{\mathrm{s}}^0\alpha\widetilde{M}\Big\},
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nu}_1 = &\frac{1}{\overline{\rho}^0\overline{\rho}_{\mathrm{n}}^0((\overline{u}^0)^2 - M_1^2)}\Big\{\gamma\Big(\overline{\rho}_{\mathrm{s}}^0(1 + \varkappa)M_1\widetilde{M}_1 - \overline{\rho}^0\overline{\rho}_{\mathrm{s}}^0\varkappa M_1\widetilde{M}_1 + \overline{\rho}^0\overline{\rho}_{\mathrm{s}}^0(\overline{u}^0)^2\widetilde{M}\\
&- \frac{1 - \overline{\rho}^0}{2\overline{\rho}_{\mathrm{n}}^0}(1 + \varkappa)dM_1^3\widetilde{M}_1 + \frac{\overline{\rho}^0}{\overline{\rho}_{\mathrm{s}}^0}(1 + \overline{\rho}_{\mathrm{n}}^0)b(\overline{u}^0)^2M_1\widetilde{M}_1 + \overline{\rho}^0 bM_1^3\widetilde{M}_1\Big)\\
&+ \frac{3}{2}(1 - \overline{\rho}^0)\overline{\rho}_{\mathrm{s}}^0\varkappa M_1\widetilde{M}_1 - \frac{\overline{\rho}_{\mathrm{s}}^0}{2}(1 - \overline{\rho}^0)\varkappa\widetilde{M} + \overline{\rho}_{\mathrm{s}}^0 M_1\widetilde{M}_1 - \frac{\overline{\rho}^0}{2}M_1\widetilde{M}_1\\
&- \frac{\overline{\rho}^0}{2}(\overline{\rho}_{\mathrm{n}}^0 - \overline{\rho}_{\mathrm{s}}^0)\widetilde{M} - \overline{\rho}^0\overline{\rho}_{\mathrm{n}}^0(\overline{u}^0)^2\frac{1 - M_1^2}{2M_1^2}\widetilde{M} - \Big(\overline{\rho}^0 a - \frac{b}{2}(1 - \overline{\rho}^0)(1 - M_1^2)\Big)\\
&\times\Big(M_1\widetilde{M}_1 + \frac{\overline{\rho}_{\mathrm{n}}^0}{\overline{\rho}_{\mathrm{s}}^0}(\overline{u}^0)^2\widetilde{M}\Big) - \overline{\mu}((\overline{\rho}^0 - \overline{\rho}_{\mathrm{s}}^0)M_1\widetilde{M}_1 + \overline{\rho}^0\overline{\rho}_{\mathrm{n}}^0(\overline{u}^0)^2\widetilde{M})\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{d} = &\frac{1}{\overline{\rho}^0((\overline{u}^0)^2 - M_1^2)}\Big\{ -\gamma\Big(\overline{\rho}_{\mathrm{s}}^0(1 - \overline{\rho}^0)(1 + \varkappa)M_1\widetilde{M}_1 + 2\overline{\rho}^0\overline{\rho}_{\mathrm{s}}^0(\overline{u}^0)^2\widetilde{M}\\
&- \frac{1 + \varkappa}{2\overline{\rho}_{\mathrm{n}}^0}dM_1^3\widetilde{M}_1 + \frac{\overline{\rho}^0}{2\overline{\rho}_{\mathrm{n}}^0}\varkappa dM_1^3\widetilde{M}_1 + \frac{\overline{\rho}^0}{2\overline{\rho}_{\mathrm{n}}^0}d(\overline{u}^0)^2M_1\widetilde{M}_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{2\overline{\rho}}{\overline{\rho}_{\rm s}^0} b(\overline{u}^0)^2 M_1 \widetilde{M}_1\Big) - \frac{3}{2}(1-\overline{\rho}^0)\varkappa M_1 \widetilde{M}_1 + \frac{\overline{\rho}_{\rm s}^0}{2}(1-\overline{\rho}^0)\varkappa \widetilde{M} \\
&- \overline{\rho}_{\rm s}^0 M_1 \widetilde{M}_1 + \frac{\overline{\rho}^0}{2}(1+\overline{\rho}_{\rm s}^0) M_1 \widetilde{M} - \frac{\overline{\rho}^0}{2}(\overline{u}^0)^2 \widetilde{M} + \frac{\overline{\rho}^0}{2}\overline{\rho}_{\rm n}^0 \widetilde{M} \\
&- \frac{\overline{\rho}^0}{2}(\overline{\rho}_{\rm s}^0 - \overline{\rho}_{\rm n}^0)(\overline{u}^0)^2 \frac{\widetilde{M}}{M_1^2} + \Big(\overline{\rho}^0 a - \frac{b}{2}(1-\overline{\rho}^0)(1-M_1^2)\Big) \\
&\times \frac{(\overline{u}^0)^2}{\overline{\rho}_{\rm s}^0}\widetilde{M} + \overline{\mu}((\overline{\rho}^0 - \overline{\rho}_{\rm s}^0) M_1 \widetilde{M}_1 + \overline{\rho}^0 \overline{\rho}_{\rm n}^0 (\overline{u}^0)^2 \widetilde{M})\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nu}_2 =& \frac{M_1^2}{\overline{\rho}^0((\overline{u}^0)^2 - M_1^2)}\Big\{\gamma\Big(\overline{\rho}^0\overline{\rho}_{\rm s}^0(1+\varkappa)M_1\widetilde{M}_1 - \overline{\rho}_{\rm s}^0(\overline{u}^0)^2\widetilde{M} - \overline{\rho}_{\rm s}^0\varkappa M_1\widetilde{M}_1 \\
&- 2\overline{\rho}^0\overline{\rho}_{\rm s}^0(\overline{u}^0)^2\widetilde{M} + \frac{1-\overline{\rho}^0}{2\overline{\rho}_{\rm n}^0}\varkappa d M_1^3 \widetilde{M}_1 + \frac{1-\overline{\rho}^0}{2\overline{\rho}_{\rm n}^0} d(\overline{u}^0)^2 M_1 \widetilde{M}_1 \\
&- 2\frac{\overline{\rho}^0}{\overline{\rho}_{\rm s}^0} b(\overline{u}^0)^2 M_1\widetilde{M}_1\Big) - \overline{\rho}_{\rm s}^0(\overline{u}^0)^2 \frac{1+M_1^2}{2M_1^2}\widetilde{M} - \frac{3}{2}\overline{\rho}_{\rm s}^0(1-\overline{\rho}^0)\varkappa M_1\widetilde{M}_1 \\
&+ \frac{\overline{\rho}_{\rm s}^0}{2}(1-\overline{\rho}^0)(1+\varkappa)\widetilde{M} - \frac{\overline{\rho}_{\rm s}^0}{2}(1-\overline{\rho}^0)M_1\widetilde{M}_1 + \overline{\rho}^0\overline{\rho}_{\rm n}^0(\overline{u}^0)^2\frac{\widetilde{M}}{M_1^2} \\
&+ (\overline{\rho}^0 a - (1-\overline{\rho}^0)(1-M_1^2)\frac{b}{2})\frac{(\overline{u}^0)^2}{\overline{\rho}_{\rm s}^0}\widetilde{M} - \frac{1-M_1^2}{2(1-\overline{\rho}^0)M_1^2} \\
&\times (\overline{\rho}^0(\overline{\rho}_{\rm n}^0 + 1)(\overline{u}^0)^2\widetilde{M} - \overline{\rho}_{\rm s}^0(\overline{u}^0)^2\widetilde{M})\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
a = \widehat{\nu}_\rho^0(\widehat{u}_1^0)^2, \quad b = \frac{\widehat{\nu}_T^0}{\widehat{S}^0}(\widehat{u}_1^0)^2, \quad d = \frac{\widehat{\rho}_q^0}{\widehat{\rho}^0}(\widehat{u}_1^0)^2, \overline{\rho}_{\rm s}^0 = \frac{\widehat{\rho}_{\rm s}^0}{\widehat{\rho}^0}, \quad \widetilde{M} = \frac{\widehat{w}}{\widehat{v}}, \quad \widetilde{M}_1 = \frac{\widehat{w}}{\widehat{u}_1^0}.
$$

В задачах РД1, РД2 координаты x_k ($k = 1,2$), время t, компоненты вектора относительной скорости $\mathbf{w}$, компоненты вектора скорости сверхтекучего движения $\mathbf{v}_{\rm s}$, давление p и температура T обезразмерены; они отнесены к следующим характерным величинам: $\widehat{l}$, $\widehat{l}/\widehat{v}$, $\widehat{v}$, $\widehat{v}$, $\widehat{\rho}^0(\widehat{u}_1^0)^2$, $(\widehat{\rho}^0/\widehat{S}^0)(\widehat{u}_1^0)^2$, где $\widehat{l}$ — характерная длина.

Убедимся, что для задач РД1, РД2 при $t > 0$, $\mathbf{x} \in R_+^2$ выполнено условие Ландау (2.4) (если оно выполнялось при $t = 0, \mathbf{x} \in R_+^2$). В плоском случае вектор $\operatorname{rot} \mathbf{v}_{\rm s}$ имеет только одну ненулевую компоненту $\xi_2 v_{\rm s1} - \xi_1 v_{\rm s2}$. Здесь и далее, указывая порядковый номер уравнения, мы имеем в виде покомпонентную запись системы уравнений. Продифференцировав пятое уравнение системы (3.1$'$) (или (3.1$''$)) по x_2, а шестое уравнение — по x_1, получаем при $t > 0$, $\mathbf{x} \in R_+^2$ следующее уравнение:

$$
L(\xi_2 v_{\rm s1} - \xi_1 v_{\rm s2}) = 0.
$$

Используя шестое уравнение системы (3.1$'$) и граничные условия (3.2$'$), для задачи РД1 получаем при $t > 0$, $x_1 = 0$, $x_2 \in \mathbb{R}$ граничное условие

$$
\xi_2 v_{\rm s1} - \xi_1 v_{\rm s2} = \{\overline{d} - (1-\overline{v})\overline{\mu} + 1/M_1^2 - \overline{\nu}_2/M_1^2\}\xi_2 p = 0.
$$

Аналогично для задачи РД2 при $t > 0$, $x_1 = 0$, $x_2 \in \mathbb{R}$ выполнено граничное условие

$$\xi_2 v_{s1} - \xi_1 v_{s2} = \{\overline{d} + \widetilde{d} - (1 - \overline{v} - \widetilde{M})\overline{\mu} - (1 - \overline{v})\widetilde{\mu} + 1/M_1^2 \\ - (\overline{\nu}_2 + \widetilde{\nu}_2)/M_1^2 - \overline{\rho}_{\rm n}^0 \widetilde{M}\overline{\nu}_1 - \widetilde{M}\overline{d}\}\xi_2 p = 0.$$

Следовательно, $\xi_2 v_{s1} - \xi_1 v_{s2}$ в обоих случаях является решением смешанной задачи

$$\begin{aligned} &L(\xi_2 v_{s1} - \xi_1 v_{s2}) = 0, && t > 0,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2, \\ &\xi_2 v_{s1} - \xi_1 v_{s2} = 0, && t > 0,\ x_1 = 0,\ x_2 \in \mathbb{R}, \\ &\xi_2 v_{s1} - \xi_1 v_{s2} = 0, && t = 0,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^2, \end{aligned}$$

из которой получаем, что $\xi_2 v_{s1} - \xi_1 v_{s2} = 0$ при $t > 0$, $x \in R_+^2$.

Прежде чем перейти к получению априорных оценок вида (1.18), сведем задачу РД1 к смешанной задаче для волнового уравнения.

3.2. Сведение задачи РД1 к смешанной задаче для волнового уравнения. Действуя на первое, третье, четвертое, пятое, шестое уравнения системы (3.1′) операторами $M_1^2 L$, $-\overline{\rho}_{\rm n}^0\xi_1$, $-\overline{\rho}_{\rm n}^0\xi_2$, $-\xi_1$, $-\xi_2$ и затем складывая результаты, получим, что давление p удовлетворяет волновому уравнению $(M_1^2 L^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2)p = 0$. Далее, действуя на первое, третье и пятое уравнения системы (3.1′) операторами $M_1^2\tau$, $-\overline{\rho}_{\rm n}^0$, $-\tau$, приходим к выражению

$$M_1^2\tau^2 p - \overline{\rho}_{\rm n}^0 M_1^2\tau^2 w_1 - M_1^2\tau^2 v_{s1} - (1 - M_1^2)\tau\xi_1 p + \overline{\rho}_{\rm n}^0 M_1^2\tau\xi_2 w_2 + M_1^2\tau\xi_2 v_{s2} = 0.$$

Рассматривая его при $x_1 = 0$ и учитывая граничные условия (3.2′), окончательно получаем соотношение

$$M_1^2(1+\alpha)\tau^2 p - (1 - M_1^2)\tau\xi_1 p + M_1^2\lambda\xi_2^2 p = 0.$$

Сформулируем теперь математическую постановку линейной смешанной задачи для волнового уравнения

Задача W1. Найти решение волнового уравнения

$$(M_1^2 L^2 - \widetilde{\Delta})p = 0, \quad t > 0,\ \mathbf{x} \in R_+^2, \tag{3.3′}$$

удовлетворяющее при $t > 0$, $x_1 = 0$, $x_2 \in \mathbb{R}$ граничному условию

$$M_1^2(1+\alpha)\tau^2 p - \beta^2\tau\xi_1 p + M_1^2\lambda\xi_2^2 p = 0, \tag{3.4′}$$

а при $t = 0$, $\mathbf{x} \in R_+^2$ начальным условиям

$$\begin{aligned} &p = p_0(\mathbf{x}), \\ &\tau p = -\xi_1 p_0(\mathbf{x}) - \overline{\rho}_{\rm n}^0 \operatorname{div}\mathbf{w}_0(\mathbf{x}) - \operatorname{div}\mathbf{v}_{s0}(\mathbf{x}); \end{aligned}$$

здесь $\widetilde{\Delta} = \xi_1^2 + \xi_2^2$, $\beta^2 = 1 - M_1^2 > 0$.

Аналогично задача РД2 сводится к следующей линейной смешанной задаче.

Задача W2. Найти решение уравнения

$$(M_1^2L^2-\widetilde{\Delta})p+\widetilde{L}=0,\quad t>0,\ \mathbf{x}\in R_+^2, \tag{3.3''}$$

удовлетворяющее при $t>0$, $x_1=0$, $x_2\in\mathbb{R}$ граничному условию

$$M_1^2(1+\alpha)\tau^2p-\beta^2\tau\xi_1p+M_1^2\lambda\xi_2^2p+\widetilde{L}_r=0, \tag{3.4''}$$

а при $t=0$, $\mathbf{x}\in R_+^2$ начальным условиям

$$p=p_0(\mathbf{x}),$$

$$\tau p=-\xi_1p_0(\mathbf{x})-\overline{\rho}_{\rm n}^0{\rm div}\,\mathbf{w}_0(\mathbf{x})-{\rm div}\,\mathbf{v}_{s0}(\mathbf{x})\\ +a\widetilde{M}\xi_1p_0(\mathbf{x})+(b+d/\overline{\rho}_{\rm n}^0)\widetilde{M}\xi_1T_0(\mathbf{x});$$

здесь

$$\widetilde{L}=-2\overline{\rho}_{\rm s}^0M_1\widetilde{M}_1L\xi_1p+\Big(\frac{2\overline{\rho}_{\rm s}^0}{(\overline{u}^0)^2}-\frac{d}{\overline{\rho}_{\rm n}^0}\Big)M_1\widetilde{M}_1L\xi_1T,$$

$$\widetilde{L}_r=M_1\widetilde{M}_1\Big\{\Big(\gamma\Big(\frac{d}{2\overline{\rho}_{\rm n}^0}M_1^2+\overline{\rho}_{\rm s}^0\Big)+\overline{\rho}_{\rm s}^0\alpha\Big)\tau^2p+\Big(\frac{d}{\overline{\rho}_{\rm n}^0}\Big(\gamma M_1^2+\frac{(1-\overline{\rho}^0)\beta^2}{2\overline{\rho}^0}\Big)\\ -2\overline{\rho}_{\rm s}^0(\gamma+\alpha)\Big)\tau\xi_1p+\frac{1}{\overline{\rho}^0}\Big(\gamma\Big(\frac{d}{2\overline{\rho}_{\rm n}^0}M_1^2-\overline{\rho}_{\rm s}^0\Big)-\overline{\rho}_{\rm s}^0\alpha\Big)\xi_2^2p\Big\}.$$

Так как коэффициенты в разложениях $\widetilde{L}$ и $\widetilde{L}_r$ имеют порядок малости выше второго относительно Δ, можно применять практически один и тот же прием для получения априорной оценки решения как для задачи РД1, так и для задачи РД2.

3.3. Вывод априорной оценки решения задачи РД1. Для получения априорной оценки решения задачи РД1 сконструируем расширенную систему. Воспользуемся тем фактом, что задачу для волнового уравнения можно свести к смешанной задаче для некоторой симметрической системы. Введем дифференциальные операторы

$$L_1=\frac{M_1}{\beta^2}\tau,\quad L_2=\xi_1-\frac{M_1^2}{\beta^2}\tau,\quad L_3=\frac{\xi_2}{\beta}.$$

Волновое уравнение (3.3′) в терминах этих операторов примет вид

$$(L_1^2-L_2^2-L_3^2)p=0. \tag{3.5}$$

Если функция p удовлетворяет (3.5), то вектор $\mathbf{W}=(\mathbf{Y}_1^*,\mathbf{Y}_2^*,\mathbf{Y}_3^*)^*$, где $\mathbf{Y}_k=L_k\mathbf{Y}$ $(k=\overline{1,3})$, $\mathbf{Y}=\widetilde{\nabla}p$, $\widetilde{\nabla}=(L_1,L_2,L_3)^*$, удовлетворяет системе

$$\{EL_1-QL_2-RL_3\}\mathbf{W}=0; \tag{3.6}$$

здесь

$$E=\begin{bmatrix}\mathcal{K}&\mathcal{L}&\mathcal{N}\\ \mathcal{L}&\mathcal{K}&i\mathcal{N}_1\\ \mathcal{N}&-i\mathcal{N}_1&\mathcal{K}\end{bmatrix},\qquad Q=\begin{bmatrix}\mathcal{L}&\mathcal{K}&i\mathcal{N}_1\\ \mathcal{K}&\mathcal{L}&\mathcal{N}\\ -i\mathcal{N}_1&\mathcal{N}&-\mathcal{L}\end{bmatrix},$$

$$R=\begin{bmatrix}\mathcal{N} & -i\mathcal{N}_1 & \mathcal{K}\\ i\mathcal{N}_1 & -\mathcal{N} & \mathcal{L}\\ \mathcal{K} & \mathcal{L} & \mathcal{N}\end{bmatrix},$$

$\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{N}, \mathcal{N}_1$ — произвольные эрмитовы матрицы порядка 3. Возвращаясь к дифференциальным операторам τ, ξ_1, ξ_2 в (3.6), получаем систему

$$\Bigl(D\tau - Q\xi_1 - \frac{1}{\beta}R\xi_2\Bigr)\mathbf{W} = 0; \tag{3.7}$$

здесь $D = \frac{M_1}{\beta^2}(E + M_1 Q)$.

Теперь получим граничные условия для системы (3.7). Для этого перепишем граничное условие (3.4$'$) в терминах операторов L_1, L_2, L_3:

$$\Bigl\{\varphi L_1^2 - \frac{\lambda}{\beta}L_2^2 - \frac{\beta}{M_1^2}L_1L_2\Bigr\}p = 0, \tag{3.8}$$

где $\varphi = \frac{\alpha\beta}{M_1^2} + \frac{\lambda}{\beta}$. Используя соотношения (3.5), (3.8), в качестве граничных условий при $x_1 = 0$ для системы (3.7) примем равенства

$$\begin{aligned}
&\{L_1^2 - L_2^2 - L_3^2\}p + \widehat{\alpha}\{L_1L_2p - L_2L_1p\} = 0,\\
&L_3L_2p - L_2L_3p = 0,\\
&\Bigl\{ - M_1\alpha L_2^2 - \frac{M_1^3}{\beta}\varphi L_3^2 + L_1L_2\Bigr\}p = 0,
\end{aligned}$$

которые перепишем в виде

$$C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y}_2 + C_3\mathbf{Y}_3 = 0; \tag{3.9}$$

здесь

$$C_1 = \begin{bmatrix}1 & \widehat{\alpha} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\quad C_2 = \begin{bmatrix}-\widehat{\alpha} & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -M_1\alpha & 0\end{bmatrix}\quad C_3 = \begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{M_1^3}{\beta}\varphi\end{bmatrix},$$

$\widehat{\alpha} > 1$ — некоторая константа.

Рассмотрим матрицу $\Lambda = \begin{bmatrix}O_3 & I_3\\ \Lambda_1 & \Lambda_2\end{bmatrix}$, где I_3 — единичная матрица порядка 3, O_3 — нулевая матрица порядка 3, $\Lambda_1 = -(C_1 + C_3)^{-1}(C_1 - C_3)$, $\Lambda_2 = 2(C_1 + C_3)^{-1}C_2$. Согласно критерию Рауса — Гурвица все собственные значения матрицы Λ будут лежать в левой полуплоскости, если $\beta^2\alpha + \lambda M_1^2 > 0$, $\lambda < 0$. В нашем случае эти условия выполняются, поэтому

$$\begin{aligned}
&\beta^2\alpha + \lambda M_1^2 = \beta^2\Bigl(\frac{1 + M_1^2}{2M_1^2} - \frac{1}{2\overline{\rho}^0}\Bigr) = \beta^2\Bigl(\frac{1}{2} + O(\Delta^2)\Bigr) > 0,\\
&\lambda = -\frac{\beta^2}{2\overline{\rho}^0 M_1^2} < 0.
\end{aligned}$$

Итак, все собственные значения λ_i $(i = \overline{1,6})$ матрицы Λ лежат в левой полуплоскости. Поэтому матричное уравнение Ляпунова $\Lambda^*H + H\Lambda = -G$ имеет единственное решение $H = \begin{bmatrix}H_1 & H_2\\ H_3 & H_4\end{bmatrix}$, где $H = H^*$ — положительно определенная матрица, при любой симметрической положительно определенной матрице G. При этом матрицы $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_1$ находятся из соотношений

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}(H_1 + H_4), \qquad \mathcal{L} = -\frac{1}{2}(H_2 + H_3),$$
$$\mathcal{N} = -\frac{1}{2}(H_1 - H_4), \quad \mathcal{N}_1 = \frac{i}{2}(H_2 - H_3).$$

Введем вектор $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_1^*, \mathbf{z}_2^*, \mathbf{z}_3^*)^*$, где $\mathbf{z}_1 = -(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_3)/\sqrt{2}$, $\mathbf{z}_2 = \mathbf{Y}_2/\sqrt{2}$, $\mathbf{z}_3 = -(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_3)/\sqrt{2}$. Тогда $\mathbf{W} = T\mathbf{Z}$, где $T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -I_3 & O_3 & -I_3 \\ O_3 & 2I_3 & O_3 \\ I_3 & O_3 & I_3 \end{bmatrix}$. Заметим, что

$$(Q\mathbf{W}, \mathbf{W})|_{x_1=0} = \left(G\begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{pmatrix}\right) > 0. \tag{3.10}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}(Q\mathbf{W}, \mathbf{W})|_{x_1=0} > \widehat{C}_1\{(L_1^2 p)^2 + (L_1L_2p)^2 + (L_1L_3p)^2 + (L_2^2p)^2 + (L_2L_3p)^2 \\ + (L_3^2p)^2\} > \widehat{C}_2\{(\tau^2 p)^2 + (\tau\xi_1 p)^2 + (\tau\xi_2 p)^2 \\ + (\xi_1^2 p)^2 + (\xi_1\xi_2 p)^2 + (\xi_2^2 p)^2\};\end{aligned} \tag{3.10*}$$

здесь $\widehat{C}_1, \widehat{C}_2$ — некоторые положительные константы. Неравенство (3.10*) выполнено при любом отличном от нуля векторе $\mathbf{W}$, т. е. граничные условия (3.9) для симметрической системы (3.7) диссипативны. Заметим также, что соотношение

$$\begin{aligned}(D\mathbf{W}, \mathbf{W}) = \frac{M_1}{\beta^2}\left(H\begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 - M_1\mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_2 - M_1\mathbf{z}_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 - M_1\mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_2 - M_1\mathbf{z}_3 \end{pmatrix}\right) \\ + M_1\left(H\begin{pmatrix} \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \end{pmatrix}\right) > 0,\end{aligned} \tag{3.11}$$

выполнено при любом отличном от нуля векторе $\mathbf{W}$, т. е. $D > 0$.

Для получения априорной оценки решения задачи РД1 сконструируем расширенную систему

$$\widehat{A}_{0p}\tau\mathbf{U}_p + \widehat{A}_{1p}\xi_1\mathbf{U}_p + \widehat{A}_{2p}\xi_2\mathbf{U}_p = 0; \tag{3.12}$$

здесь

$\mathbf{U}_p = (\mathbf{U}^*, \tau\mathbf{U}^*, \xi_1\mathbf{U}^*, \xi_2\mathbf{U}^*, \tau^2\mathbf{U}^*, \tau\xi_1\mathbf{U}^*, \tau\xi_2\mathbf{U}^*, \xi_1^2\mathbf{U}^*, \xi_1\xi_2\mathbf{U}^*, \xi_2^2\mathbf{U}^*, \mathbf{W}^*)^*$, матрицы $\widehat{A}_{0p} = (\widehat{A}_0, \widehat{A}_0, \widehat{A}_0, \widehat{A}_0, \widehat{A}_0, \widehat{A}_0, \widehat{A}_0, \widehat{A}_0, \widehat{A}_0, \widehat{A}_0, D)$, $\widehat{A}_{1p} = (\widehat{A}_1, \dots, \widehat{A}_1, -Q)$, $\widehat{A}_{2p} = (\widehat{A}_2, \dots, \widehat{A}_2, -\frac{1}{\beta}R)$ клеточно-диагональные, матрицы $\widehat{A}_{\alpha p}$ $(\alpha = \overline{0,2})$ эрмитовы, а матрица $\widehat{A}_{0p}$, кроме того, положительно определенная. В этом случае справедливы соотношения

$$\tau(\widehat{A}_{0p}\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p) = 2(\widehat{A}_{0p}\tau\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p),$$
$$\xi_k(\widehat{A}_{kp}\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p) = 2(\widehat{A}_{kp}\xi_k\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p), \quad k = 1, 2.$$

Умножая систему (3.12) скалярно на вектор $\mathbf{U}_p$, получаем интеграл энергии в дифференциальной форме:

$$\tau(\widehat{A}_{0p}\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p) + \xi_1(\widehat{A}_{1p}\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p) + \xi_2(\widehat{A}_{2p}\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p) = 0.$$

Интегрируя последнее соотношение по области R^2_+ и используя формулу Гаусса — Остроградского, находим

$$\frac{d}{dt}J(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} (\widehat{A}_{1p}\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p)\Big|_{x_1=0} dx_2; \tag{3.13}$$

здесь

$$J(t) = \int\limits_{R^2_+} (\widehat{A}_{0p}\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p)\, d\mathbf{x},$$

$$(\widehat{A}_{0p}\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p) = (\widehat{A}_0\mathbf{U}, \mathbf{U}) + (\widehat{A}_0\tau\mathbf{U}, \tau\mathbf{U}) + \ldots + (\widehat{A}_0\xi_2^2\mathbf{U}, \xi_2^2\mathbf{U}) + (D\mathbf{W}, \mathbf{W}),$$
$$(\widehat{A}_{1p}\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p) = (\widehat{A}_1\mathbf{U}, \mathbf{U}) + (\widehat{A}_1\tau\mathbf{U}, \tau\mathbf{U}) + \ldots + (\widehat{A}_1\xi_2^2\mathbf{U}, \xi_2^2\mathbf{U}) - (Q\mathbf{W}, \mathbf{W});$$

При выводе (3.13) мы полагали, что $|\mathbf{U}_p| = (\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p)^{1/2} \to 0$ при $x_1 \to \infty$ или $|x_2| \to \infty$.

Благодаря выбору матрицы G (см. неравенство (3.10)), можно добиться положительной определенности формы

$$-\{(\widehat{A}_1\tau^2\mathbf{U}, \tau^2\mathbf{U}) + (\widehat{A}_1\tau\xi_1\mathbf{U}, \tau\xi_1\mathbf{U}) + (\widehat{A}_1\tau\xi_2\mathbf{U}, \tau\xi_2\mathbf{U}) + (\widehat{A}_1\xi_1^2\mathbf{U}, \xi_1^2\mathbf{U})$$
$$+(\widehat{A}_1\xi_1\xi_2\mathbf{U}, \xi_1\xi_2\mathbf{U}) + +(\widehat{A}_1\xi_2^2\mathbf{U}, \xi_2^2\mathbf{U}) - (Q\mathbf{W}, \mathbf{W})\}\Big|_{x_1=0}.$$

Учитывая этот факт и граничные условия (3.2′), получим

$$(\widehat{A}_{1p}\mathbf{U}_p, \mathbf{U}_p) < \widehat{C}_3\{w_2^2 + v_{s2}^2 + p^2 + (\tau p)^2 + (\xi_1 p)^2 + (\xi_2 p)^2\},$$

где $\widehat{C}_3$ — некоторая положительная константа. Окончательно из (3.13) приходим к неравенству

$$\frac{d}{dt}J(t) < \widehat{C}_4 J(t), \quad t > 0,$$

где $\widehat{C}_4$ — некоторая положительная константа. Отсюда следует искомая априорная оценка

$$J(t) < J(0)e^{\widehat{C}_4 T}, \quad 0 < t \leqslant T < \infty,$$

которая может быть переписана в стандартном виде

$$\|\mathbf{U}(t)\|_{W_2^2(R^2_+)} < \widehat{C}_5\|\mathbf{U}(0)\|_{W_2^2(R^2_+)}, \quad 0 < t \leqslant T < \infty, \tag{3.14}$$

где $\widehat{C}_5$ — некоторая положительная константа, не зависящая от $\mathbf{U}(t)$.

Априорная оценка (3.14) показывает, что задача РД1 корректно поставлена, т. е. разрыв давления устойчив. Заметим, что априорная оценка (3.14) получена для любого вектора $(\widehat{p}, \widehat{T}, 0, 0, \widehat{v}, 0)$ из открытого множества Ω (см. п. 2.1), удовлетворяющего неравенству, которое обеспечивает эволюционность разрыва давления (см. (2.18)): $\mu_{1ppp}(\widehat{p}, 0) > 0$.

В задаче РД1, полученной из основной задачи, параметры кусочно-постоянного решения вычислены с точностью не выше второго порядка малости относительно Δ. Возникает вопрос: можно ли, применяя данную технику, получить априорную оценку решения (вида (3.14)) для задачи РД2? Частично ответ на этот вопрос содержится в п. 3.4.

3.4. Получение априорной оценки решения задачи РД2. Перепишем уравнение (3.3″) в виде

$$(L_1^2 - L_2^2 - L_3^2)p - \frac{2\overline{\rho}_s^0}{\beta^2}M_1\widetilde{M}_1\xi_1 p + \Big(\frac{2\overline{\rho}_s^0}{(\overline{u}^0)^2} - \frac{d}{\overline{\rho}_n^0}\Big)\frac{M_1\widetilde{M}_1}{\beta^2}L\xi_1 T = 0. \quad (3.15)$$

Если функция p удовлетворяет уравнению (3.15), то вектор $\mathbf{W}$ удовлетворяет системе

$$\Big(D\tau - Q\xi_1 - \frac{1}{\beta}R\xi_2\Big)\mathbf{W} - \frac{2\overline{\rho}_s^0}{\beta^2}M_1\widetilde{M}_1\begin{bmatrix}\mathcal{K}\\ \mathcal{L}\\ \mathcal{N}\end{bmatrix}L\xi_1\widetilde{\nabla}p$$
$$+ \Big(\frac{2\overline{\rho}_s^0}{(\overline{u}^0)^2} - \frac{d}{\overline{\rho}_n^0}\Big)\frac{M_1\widetilde{M}_1}{\beta^2}\begin{bmatrix}\mathcal{K}\\ \mathcal{L}\\ \mathcal{N}\end{bmatrix}L\xi_1\widetilde{\nabla}T = 0. \quad (3.16)$$

Получим граничные условия для системы (3.16). С этой целью перепишем граничное условие (3.4″) следующим образом:

$$\Big(\varphi L_1^2 - \frac{\lambda}{\beta}L_2^2 - \frac{\beta}{M_1^3}L_1L_2\Big)p - \frac{2\lambda}{\beta^3}M_1\widetilde{M}_1$$
$$\times\Big(\overline{\rho}_s^0 - \Big(\frac{\overline{\rho}_s^0}{(\overline{u}^0)^2} - \frac{d}{2\overline{\rho}_n^0}\Big)\overline{\nu}_2\Big)L\xi_1 p + \frac{\widetilde{M}}{\beta^3}\Big(\Big(\frac{d}{2}\overline{\nu}_1M_1^2 - \overline{\rho}_s^0\overline{d}\Big)\tau^2 p$$
$$+ \Big(2\overline{\rho}_s^0\overline{d} - \frac{d}{\overline{\rho}_n^0}\overline{\nu}_2\Big)\tau\xi_1 p + \frac{1}{\overline{\rho}^0}\Big(\overline{\rho}_n^0\overline{d} + \frac{d}{2}\overline{\nu}_1M_1^2\Big)\xi_2^2 p\Big) = 0. \quad (3.17)$$

Используя граничные условия (3.2″), запишем уравнение (3.15) при $x_1 = 0$:

$$(L_1^2 - L_2^2 - L_3^2)p - \frac{2}{\beta^2}M_1\widetilde{M}_1\Big(\overline{\rho}_s^0 - \Big(\frac{\overline{\rho}_s^0}{(\overline{u}^0)^2} - \frac{d}{2\overline{\rho}_n^0}\Big)\overline{\nu}_2\Big)L\xi_1 p = 0. \quad (3.18)$$

Учитывая (3.17), (3.18), в качестве граничных условий при $x_1 = 0$ для системы (3.16) возьмем следующие равенства:

$$(b_1L_1^2 - b_2L_2^2 - L_3 + b_3L_1L_2)p + \widetilde{\alpha}(L_1L_2p - L_2L_1p) = 0,$$
$$L_3L_2p - L_2L_3p = 0,$$
$$(b_4L_1^2 - b_5L_2^2 - b_6L_3^2 + b_7L_1L_2)p = 0,$$

которые перепишем в виде

$$C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y}_2 + C_3\mathbf{Y}_3 = 0; \quad (3.19)$$

здесь

$$C_1 = \begin{bmatrix} b_1 & b_3+\widetilde{\alpha} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ b_4 & b_7 & 0\end{bmatrix},\ C_2 = \begin{bmatrix} -\widetilde{\alpha} & -b_2 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -b_5 & 0\end{bmatrix},\ C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -b_6\end{bmatrix},$$

$\widetilde{\alpha} > 1$ — некоторая константа,

$$b_1 = 1 - \frac{2}{\beta^2}M_1\widetilde{M}_1\Big(\overline{\rho}_s^0 - \Big(\frac{\overline{\rho}_s^0}{(\overline{u}^0)^2} - \frac{d}{2\overline{\rho}_n^0}\Big)\overline{\nu}_2\Big),$$
$$b_2 = 1 + \frac{2}{\beta^2}M_1\widetilde{M}_1\Big(\overline{\rho}_s^0 - \Big(\frac{\overline{\rho}_s^0}{(\overline{u}^0)^2} - \frac{d}{2\overline{\rho}_n^0}\Big)\overline{\nu}_2\Big),$$

$$b_3 = -\frac{2}{\beta^2}(1+M_1^2)\widetilde{M}_1\Big(\overline{\rho}_{\rm s}^0 - \Big(\frac{\overline{\rho}_{\rm s}^0}{(\overline{u}^0)^2} - \frac{d}{2\overline{\rho}_{\rm n}^0}\Big)\overline{\nu}_2\Big),$$

$$b_4 = -\frac{M_1^2\widetilde{M}_1}{\beta^2}\Big(2\alpha\Big(\frac{d}{2\overline{\rho}_{\rm n}^0} - \frac{\overline{\rho}_{\rm s}^0}{(\overline{u}^0)^2}\Big)\overline{\nu}_2$$
$$+\Big(\overline{\rho}_{\rm s}^0\alpha + \overline{\rho}_{\rm n}^0\overline{\nu}_1\Big(\overline{\rho}_{\rm s}^0 - \frac{d}{2\overline{\rho}_{\rm n}^0}M_1^2\Big)\Big)\frac{\beta^2}{M_1^2} - 2\Big(\overline{\rho}_{\rm n}^0\overline{\rho}_{\rm s}^0\overline{\nu}_1 + \frac{d}{2\overline{\rho}_{\rm n}^0}\overline{\nu}_2\Big)\Big),$$

$$b_5 = M_1\alpha + \frac{2}{\beta^2}M_1^2\widetilde{M}_1\alpha\Big(\overline{\rho}_{\rm s}^0 + \Big(\frac{d}{2\overline{\rho}_{\rm n}^0} - \frac{\overline{\rho}_{\rm s}^0}{(\overline{u}^0)^2}\Big)\overline{\nu}_2\Big),$$

$$b_6 = \frac{M_1^3}{\beta}\varphi + \frac{M_1^2\widetilde{M}_1}{\overline{\rho}^0\beta^2}\Big(\overline{\rho}_{\rm s}^0 d + \frac{d}{2}\overline{\nu}_1 M_1^2\Big),$$

$$b_7 = 1 - \frac{2}{\beta^2}(1+M_1^2)M_1\widetilde{M}_1\alpha$$
$$\times\Big(\overline{\rho}_{\rm s}^0 + \Big(\frac{d}{2\overline{\rho}_{\rm n}^0} - \frac{\overline{\rho}_{\rm s}^0}{(\overline{u}^0)^2}\Big)\overline{\nu}_2\Big) - \frac{2}{\beta^2}M_1\widetilde{M}_1\Big(\overline{\rho}_{\rm s}^0 d - \frac{d}{2\overline{\rho}_{\rm n}^0}\overline{\nu}_2\Big).$$

Рассмотрим матрицу $\Lambda = \begin{bmatrix} O_3 & I_3 \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 \end{bmatrix}$, где $\Lambda_1 = -(C_1+C_3)^{-1}(C_1-C_3)$, $\Lambda_2 = 2(C_1+C_3)C_2$. Все ее собственные значения лежат в левой полуплоскости, так как $\beta^2\alpha + \lambda M_1^2 > 0$, $\lambda < 0$. Следовательно, матричное уравнение Ляпунова $\Lambda^* H + H\Lambda = -G$ имеет единственное решение $H = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{bmatrix}$, где $H = H^*$ — положительно определенная матрица, при любой симметрической положительно определенной матрице G; при этом матрицы $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_1$ определяются из соотношений

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}(H_1 + H_4), \qquad \mathcal{L} = -\frac{1}{2}(H_2 + H_3),$$
$$\mathcal{N} = -\frac{1}{2}(H_1 - H_4), \quad \mathcal{N}_1 = \frac{i}{2}(H_2 - H_3).$$

Следовательно, будут выполняться неравенства (3.10), (3.11). Это означает, что матрица D положительно определенная и граничные условия (3.19) для системы (3.16) являются диссипативными.

Пусть выполняется равенство

$$\widehat{\mu}_{1pq}^0 = \frac{2(\widehat{\mu}_q^0)^2\widehat{\mu}_{1p}^0\widehat{\mu}_{2TT}^0}{(\mu_{2T}^0)^2}. \tag{3.20}$$

Тогда $2\overline{\rho}_{\rm s}^0/(\overline{u}^0)^2 - d/\overline{\rho}_{\rm n}^0 = 0$ и система (3.16) примет вид

$$(\widehat{D}\tau - \widehat{Q}\xi_1 - \frac{1}{\beta}R\xi_2)\mathbf{W} = 0, \tag{3.21}$$

где

$$\widehat{D} = D + B, \quad \widehat{Q} = Q - B, \quad B = -\frac{2\overline{\rho}_{\rm s}^0}{\beta^2}M_1\widetilde{M}_1\begin{bmatrix} M_1\mathcal{K} & \mathcal{K} & O_3 \\ M_1\mathcal{L} & \mathcal{L} & O_3 \\ M_1\mathcal{N} & \mathcal{N} & O_3 \end{bmatrix}.$$

Умножая систему (3.21) скалярно на $2\mathbf{W}$, получим равенство

$$\tau(D\mathbf{W},\mathbf{W}) - \xi_1(Q\mathbf{W},\mathbf{W}) - \frac{\xi_2}{\beta}(R\mathbf{W},\mathbf{W}) - \frac{2\overline{\rho}_s^0}{\beta^2}M_1\widetilde{M}_1(\tau\Omega_0 + \xi_1\Omega_1 + \xi_2\Omega_2) = 0, \quad (3.22)$$

где

$$\Omega_0 = \frac{1}{\beta^2}(\xi_1\widetilde{\nabla}p,(\mathcal{L} - M_1\mathcal{K})\xi_1\widetilde{\nabla}p) + \frac{1}{\beta}(\xi_2\widetilde{\nabla}p,\mathcal{N}\xi_1\widetilde{\nabla}p),$$

$$\Omega_1 = \frac{M_1}{\beta^2}(\tau\widetilde{\nabla}p,(\mathcal{K} - M_1\mathcal{L})\tau\widetilde{\nabla}p) + 2\frac{M_1}{\beta^2}(\tau\widetilde{\nabla}p,(\mathcal{K} - M_1\mathcal{L})\xi_1\widetilde{\nabla}p) + (\xi_1\widetilde{\nabla}p,\mathcal{L}\xi_1\widetilde{\nabla}p) + \frac{1}{\beta}(\xi_2\widetilde{\nabla}p,\mathcal{N}(\tau + 2\xi_2)\widetilde{\nabla}p),$$

$$\Omega_2 = -\frac{1}{\beta}(L\widetilde{\nabla}p,\mathcal{N}\xi_1\widetilde{\nabla}p).$$

Для вывода априорной оценки решения задачи РД2 сконструируем расширенную систему

$$\widehat{A}_{0p}\tau\mathbf{U}_p + \widehat{A}_{1p}\xi_1\mathbf{U}_p + \widehat{A}_{2p}\xi_2\mathbf{U}_p = 0; \quad (3.23)$$

здесь

$\mathbf{U}_p = (\mathbf{U}^*,\tau\mathbf{U}^*,\xi_1\mathbf{U}^*,\xi_2\mathbf{U}^*,\tau^2\mathbf{U}^*,\tau\xi_1\mathbf{U}^*,\tau\xi_2\mathbf{U}^*,\xi_1^2\mathbf{U}^*,\xi_1\xi_2\mathbf{U}^*,\xi_2^2\mathbf{U}^*,\mathbf{W}^*)^*$, матрицы

$$\widehat{A}_{\alpha p} = (\widehat{A}_\alpha,\widehat{A}_\alpha,\widehat{A}_\alpha,\widehat{A}_\alpha,\widehat{A}_\alpha,\widehat{A}_\alpha,\widehat{A}_\alpha,\widehat{A}_\alpha,\widehat{A}_\alpha,\widehat{A}_\alpha), \quad \alpha = \overline{0,2},$$

клеточно-диагональные, матрицы $\widehat{A}_{\alpha p}$ ($\alpha = \overline{0,2}$) симметрические, а матрица $\widehat{A}_{0p}$ положительно определенная. Добавим к системе (3.23) систему (3.21). Умножая (3.23) скалярно на $2\mathbf{U}_p$ и добавляя (3.22), получим интеграл энергии в дифференциальной форме

$$\tau(\widehat{A}_{0p}\overline{U}_p,\mathbf{U}_p) + \xi_1(\widehat{A}_{1p}\mathbf{U}_p,\mathbf{U}_p) + \xi_2(\widehat{A}_{2p}\mathbf{U}_p,\mathbf{U}_p) + \tau(D\mathbf{W},\mathbf{W}) - \xi_1(Q\mathbf{W},\mathbf{W}) - \frac{\xi_2}{\beta}(R\mathbf{W},\mathbf{W}) - \frac{2\overline{\rho}_s^0}{\beta^2}M_1\widetilde{M}_1(\tau\Omega_0 + \xi_1\Omega_1 + \xi_2\Omega_2) = 0.$$

Интегрируя последнее соотношение по области R^2_+ и используя формулу Гаусса — Остроградского, получим

$$\frac{d}{dt}J(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left\{(\widehat{A}_{1p}\mathbf{U}_p,\mathbf{U}_p) - (Q\mathbf{W},\mathbf{W}) - \frac{\overline{\rho}_s^0}{\beta^2}M_1\widetilde{M}_1\Omega_1\right\}\Big|_{x_1=0}\,dx_2, \quad (3.24)$$

где

$$J(t) = \int\limits_{R^2_+} \left\{(\widehat{A}_{0p}\mathbf{U}_p,\mathbf{U}_p) + (D\mathbf{W},\mathbf{W}) - \frac{\overline{\rho}_s^0}{\beta^2}M_1\widetilde{M}_1\Omega_0\right\}d\mathbf{x}.$$

При выводе (3.24) мы полагали, что $|\mathbf{U}_p| = (\mathbf{U}_p,\mathbf{U}_p)^{1/2} \to 0$ при $x_1 \to \infty$ или $|x_2| \to \infty$. Учитывая, что величина Δ мала и используя граничные условия (3.2''), а также соотношение (3.10), мы можем утверждать, как и в п. 3.3, что

$$(\widehat{A}_{1p}\mathbf{U}_p,\mathbf{U}_p)-(Q\mathbf{W},\mathbf{W})-\frac{2\overline{\rho}_s^0}{\beta^2}M_1\widetilde{M}_1\Omega_1 < \widehat{C}_3(w_2^2+v_{s2}^2+p^2+(\tau p)^2+(\xi_1 p)^2+(\xi_2 p)^2),$$

где $\widehat{C}_3$ — некоторая положительная константа. Величина $J(t)$ больше нуля. Из (3.24) следует неравенство

$$\frac{d}{dt}J(t)<\widehat{C}_4J(0),\quad t>0,$$

где $\widehat{C}_4$ — некоторая положительная константа. Из последнего неравенства вытекает априорная оценка

$$J(t)<J(0)e^{\widehat{C}_4T},\quad 0<t\leqslant T<\infty,$$

которую можно записать в стандартном виде:

$$\|\mathbf{U}(t)\|_{W_2^2(R_+^2)}<\widehat{C}_5\|\mathbf{U}(0)\|_{W_2^2(R_+^2)},\quad 0<t\leqslant T<\infty, \tag{3.25}$$

где $\widehat{C}_5$ — некоторая положительная константа, не зависящая от вектора $\mathbf{U}(t)$. Априорная оценка (3.25) аналогична оценке (3.14). Она указывает на корректность задачи РД2, т. е. устойчивость разрыва давления.

Априорная оценка (3.25) получена для любого вектора

$$(\widehat{p},\widehat{T},\widehat{w},0,\widehat{v}-\widehat{w},0)$$

из открытого множества Ω (см. п. 2.1), которая удовлетворяет неравенству, обеспечивающего эволюционность разрыва давления $\mu_{1ppp}(\widehat{p},0)>0$, и дополнительному условию

$$\widehat{\mu}_{1pq}^0=\frac{2(\widehat{\mu}_q^0)^2\widehat{\mu}_{1p}^0\widehat{\mu}_{2TT}^0}{(\mu_{2T}^0)^2}.$$

§ 4. Неустойчивость температурного разрыва в сверхтекучем гелии

В этом параграфе доказывается неустойчивость температурного разрыва в сверхтекучем гелии. В п. 4.1 формулируется линейная смешанная задача об устойчивости температурного разрыва в гелии II (задача TD — вариант основной задачи), а в п. 4.2 для задачи TD строится пример некорректности типа примера Адамара. Этот пример показывает, что нет непрерывной зависимости решения задачи TD от начальных данных.

4.1. Постановка линейной смешанной задачи об устойчивости температурного разрыва в гелии II. Пусть стационарный разрыв является температурным ($[T]=\Delta$, где Δ — малая величина). При выполнении условий эволюционности температурного разрыва (см. (2.21)) у матрицы $\widetilde{A}_{0\infty}^{-1}\widetilde{A}_{1\infty}$ собственное значение λ_6 меньше нуля, а собственные значения λ_i $(i = \overline{1,5})$, λ_7, λ_8 больше нуля; у матрицы $\widetilde{A}_0^{-1}\widetilde{A}_1$ собственные значения λ_i $(i = \overline{1,5})$, λ_7 положительны, а собственные значения λ_6, λ_8 отрицательны. Следовательно, для системы уравнений (2.12′) (или (2.14′)) требуется ставить при $x_1 = 0$ одно граничное условие, а для системы (2.12″) (или (2.14″)) — шесть граничных условий. Кроме того, для определения функции $F(\mathbf{x}')$ необходимо еще одно граничное условие. В итоге получаем, что для эволюционности температурного разрыва при $x_1 = 0$ надо поставить восемь граничных условий, т. е. столько же, сколько граничных условий (2.13).

С учетом неравенства $\widehat{v}_\infty > \widehat{u}^0_{2\infty}$ (одно из условий (2.21) эволюционности температурного разрыва) основная задача может быть упрощена. Действуя на второе уравнение системы (2.14′) оператором $\frac{L_\infty}{\widehat{\rho}^0_\infty \widehat{S}^0_{T\infty}}$, на третье уравнение — оператором $-\frac{1}{\widehat{S}^0_\infty}(\widehat{u}^0_{2\infty})^2\xi_1$, на четвертое уравнение — оператором $-\frac{1}{\widehat{S}^0_\infty}(\widehat{u}^0_{2\infty})^2\xi_2$, на пятое уравнение — оператором $-\frac{1}{\widehat{S}^0_\infty}(\widehat{u}^0_{2\infty})^2\xi_3$ и складывая результаты, получим систему для функции T:

$$L^2_\infty T - (\widehat{u}^0_{2\infty})^2\widetilde{\nabla}T = 0.$$

Перепишем ее в эквивалентном виде:

$$R_0\tau\mathbf{Y} + \sum_{k=1}^{3} R_k\xi_k\mathbf{Y} = 0; \tag{4.1}$$

здесь

$$\widetilde{\Delta} = \sum_{k=1}^{3}\xi_k^2,\ L_\infty = \tau + \widehat{v}_\infty\xi_1,\ \tau = \frac{\partial}{\partial t},\ \xi_k = \frac{\partial}{\partial x_k},\ k = \overline{1,3},$$
$$\mathbf{Y} = (L_\infty T, \xi_1 T, \xi_2 T, \xi_3 T)^*,$$

$$R_0 = \begin{bmatrix} 1/(\widehat{u}^0_{2\infty}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_1 = \widehat{v}_\infty R_0 + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, на гладких решениях системы (2.14′) ввиду (4.1) имеем

$$Q_0\tau\mathbf{X} + \sum_{k=1}^{3} Q_k\xi_k\mathbf{X}Q_4\mathbf{X} = 0, \tag{4.2}$$

где
$$\mathbf{X} = (\mathbf{Y}^*, T, \mathbf{w}^*)^*,$$

$Q_0 = \operatorname{diag}(R_0, I_4)$, $Q_1 = \operatorname{diag}(R_1, \widehat{v}_\infty I_4)$, $Q_k = \operatorname{diag}(R_k, I_4)$ $(k = 2, 3)$ — клеточно-диагональные матрицы,

I_4 — единичная матрица порядка 4,

Q_4 — нулевая матрица порядка 4,

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad r_0 = \frac{\widehat{S}^0_\infty}{\widehat{\rho}^0_{\text{п}\infty}}.$$

Так как $\widehat{v}_\infty > \widehat{u}^0_{2\infty}$, матрица Q_1 положительно определенная. Заметим также, что матрицы Q_α $(\alpha = \overline{0,3})$ симметрические, а матрица Q_0 положительно определенная. Умножая скалярно (4.2) на вектор $2\mathbf{X}$, получим интеграл энергии в дифференциальной форме

$$\tau(Q_0\mathbf{X}, \mathbf{X}) + \sum_{k=1}^{3} \xi_k(Q_k\mathbf{X}, \mathbf{X}) + ((Q_4 + Q_4^*)\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0.$$

Интегрируя это соотношение по области R^3_- и применяя формулу Гаусса — Остроградского, находим

$$\frac{d}{dt}J(t) + \int\limits_{R^2_-} (Q_1\mathbf{X}, \mathbf{X})\, d\mathbf{x}' + \int\limits_{R^3_-} ((Q_4 + Q_4^*)\mathbf{X}, \mathbf{X})\, d\mathbf{x} = 0, \tag{4.3}$$

где $J(t) = \int\limits_{R^3_-} (Q_0\mathbf{X}, \mathbf{X})\, d\mathbf{x}$. При выводе (4.3) мы полагали, что $|\mathbf{X}| = (\mathbf{X}, \mathbf{X})^{1/2} \to 0$ при $x_1 \to -\infty$ или $|\mathbf{x}'| \to \infty$. Ввиду положительной определенности матрицы Q_1 отсюда вытекает неравенство

$$\frac{d}{dt}J(t) \leqslant -\int\limits_{R^3_-} ((Q_4 + Q_4^*)\mathbf{X}, \mathbf{X})\, d\mathbf{x}. \tag{4.4}$$

В силу положительной определенности матрицы Q_0 найдется положительная константа $\widehat{C}$, не зависящая от вектора $\mathbf{X}$ и такая, что $-((Q_4 + Q_4^*)\mathbf{X}, \mathbf{X}) \leqslant \widehat{C}(Q_0\mathbf{X}, \mathbf{X})$. Поэтому из (4.4) получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}J(t) \leqslant \widehat{C}J(t),$$

из которого следует оценка

$$J(t) \leqslant e^{\widehat{C}T}J(0), \quad 0 < t \leqslant T < \infty.$$

Таким образом, если $\mathbf{X} \equiv 0$ при $t = 0$, $\mathbf{x} \in R^3_-$, то $\mathbf{X} \equiv 0$ при $t > 0$, $\mathbf{x} \in R^3_-$. Поэтому систему (2.14′) можно переписать так:

$$L_\infty p + \widehat{\rho}^0_\infty(\widehat{u}^0_{1\infty})^2 \operatorname{div} \mathbf{v}_\text{s} = 0,$$
$$L_\infty \mathbf{v}_\text{s} + \widehat{V}^0_\infty \nabla p = 0, \quad t > 0, \ x \in R^3_-.$$

Соответствующие упрощения должны быть сделаны и в граничных условиях (2.13).

Приведем теперь математическую постановку линейной смешанной задачи об устойчивости температурного разрыва (в плоском случае).

Задача TD. Найти решения систем уравнений

$$\begin{aligned} &L_\infty \rho + \overline{u}_{1\infty} \operatorname{div} \mathbf{v}_s = 0, \\ &L_\infty \mathbf{v}_s + \overline{u}_{1\infty} \nabla p = 0, \quad t > 0, \ \mathbf{x} \in R^2_-; \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} &Lp + a_1\xi_1 p + a_2\xi_1 T + a_3\xi_1 w_1 + a_4\xi_2 w_2 + a_5\xi_1 v_{s1} + a_6\xi_2 v_{s2} = 0, \\ &LT + b_1\xi_1 p + b_2\xi_1 T + b_3\xi_1 w_1 + b_4\xi_2 w_2 + b_5\xi_1 v_{s1} + b_6\xi_2 v_{s2} = 0, \\ &Lw_1 + c_1\xi_1 p + c_2\xi_1 T + c_3\xi_1 w_1 + c_4\xi_2 w_2 + c_5\xi_1 v_{s1} + c_6\xi_2 v_{s2} = 0, \\ &Lw_2 + \frac{\overline{u}^2}{\overline{\rho}_s}\xi_2 T + \overline{M}_1\xi_2(w_1 + v_{s1}) = 0, \\ &L\mathbf{v}_s + \nabla p - \frac{\overline{\rho}_n\overline{u}^2}{\overline{\rho}_s}\nabla T - \overline{\rho}_n\overline{M}_1\nabla w_1 - \overline{M}_1\nabla v_{s1} = 0, \quad t > 0, \ x \in R^2_+, \end{aligned} \tag{4.6}$$

удовлетворяющие при $t > 0$, $x_1 = 0$, $x_2 \in \mathbf{R}$ граничным условиям

$$\begin{aligned} &m_1 v_{s1} + m_2 w_1 + m_3 p + m_4 T = m_5 v_{s1\infty} + m_6 p_\infty, \\ &n_1 v_{s1} + n_2 w_1 + n_3 p + n_4 T = n_5 v_{s1\infty} + n_6 p_\infty, \\ &l w_2 + v_{s2} = \overline{u}_{1\infty} v_{s2\infty}, \\ &k_1\xi_2 v_{s1} + k_2\xi_2 w_1 + \xi_2 p + k_3\xi_2 T - l\tau w_2 = k_4\xi_2 v_{s1\infty} + k_5\xi_2 p_\infty, \\ &r_1 v_{s1} + r_2 w_1 + r_3 p + r_4 T = r_5 v_{s1\infty} + r_6 p_\infty \end{aligned} \tag{4.7}$$

и начальным условиям

$$\begin{aligned} &\mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^2_+, \\ &p|_{t=0} = p_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{v}_s|_{t=0} = \mathbf{v}_{s0}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^2_; \end{aligned}$$

здесь

$$L = \tau + M_1\xi_1, \ L_\infty = \tau + M_{1\infty}\xi_1, \ \tau = \frac{\partial}{\partial t}, \ \xi_k = \frac{\partial}{\partial x_k} \ (k = 1, 2),$$

$$a_1 = -a\frac{\overline{a}_1}{\overline{d}}\overline{M}_1, \quad a_2 = -(\overline{a}_1\omega + \frac{\overline{\rho}_n}{\overline{\rho}_s}\overline{u}^2 d)\overline{M}_1/\overline{d},$$

$$a_3 = (\overline{a}_2 - (\overline{a}_1 c + \overline{\rho}_n d)\overline{M}_1^2)\frac{1}{\overline{d}}, \quad a_4 = \overline{a}_2/\overline{d},$$

$$\begin{aligned} &a_5 = (\overline{a}_3 - \overline{\rho}_n d\overline{M}_1^2)/\overline{d}, \quad a_6 = \overline{a}_3/\overline{d}, \\ &b_1 = a(b_1/\overline{d})\overline{M}_1, \quad b_2 = (1 + \overline{b}_1)\omega\overline{M}_1/\overline{d}, \\ &b_3 = (\overline{b}_2 + (\overline{b}_1 c + \overline{\rho}_n b)M_1^2)/\overline{d}, \quad b_4 = \overline{b}_2/\overline{d}, \\ &b_5 = (\overline{b}_3 + \overline{\rho}_n b\overline{M}_1^2)/\overline{d}, \quad b_6 = \overline{b}_3/\overline{d}, \\ &c_1 = a\overline{c}_1/\overline{d}, \quad c_2 = (\overline{c}_1\omega + (\overline{\rho}_n/\overline{\rho}_s)\overline{u}^2)/\overline{d}, \\ &c_3 = (\overline{c}_2 + \overline{c}_1 c + \overline{\rho}_n)\overline{M}_1/\overline{d}, \quad c_4 = (\overline{c}_2/\overline{d})\overline{M}_1, \end{aligned}$$

$$c_5 = (\overline{c}_3 + \overline{\rho}_{\rm n})\overline{M}_1/\overline{d}, \quad c_6 = (\overline{c}_3/\overline{d})\overline{M}_1,$$
$$\overline{a}_1 = \overline{\rho}_{\rm n} + (\omega(d-b) + d - c)\overline{M}_1^2, \quad \overline{a}_2 = \overline{\rho}_{\rm n}^2 - (\overline{\rho}_{\rm s} d\omega + \overline{\rho}_{\rm n}(c + b\omega))\overline{M}_1^2,$$
$$\overline{a}_3 = \overline{\rho}_{\rm n} + (\overline{\rho}_{\rm s} d - c - b\omega)M_1^2,$$
$$\overline{b}_1 = \overline{\rho}_{\rm n} + (ad - c + (1-a)b)\overline{M}_1^2,$$
$$\overline{b}_2 = \overline{\rho}_{\rm n}\overline{\rho}_{\rm s} + (\overline{\rho}_{\rm n} ab + \overline{\rho}_{\rm s}(ad - c))M_1^2, \quad \overline{b}_3 = -bd\overline{M}_1^2,$$
$$\overline{c}_1 = (1 - a + \omega)\overline{M}_1^2, \quad \overline{c}_2 = \overline{\rho}_{\rm n} a + \overline{\rho}_{\rm s}\omega, \quad \overline{c}_3 = a - \overline{\rho}_{\rm s},$$
$$\overline{d} = \overline{\rho}_{\rm n} - (c - da + b\omega)\overline{M}_1^2,$$
$$m_1 = 1 - m_0(\overline{M}_1 - M_1), \ m_2 = \overline{\rho}_{\rm n} + dM_1\overline{M}_1 - c\overline{M}_1^2 - \overline{\rho}_{\rm n} m_0 \overline{M}_1,$$
$$m_3 = M_1 - a\overline{M}_1 + m_0, \ m_4 = -\omega\overline{M}_1 - (\overline{\rho}_{\rm n}/\overline{\rho}_{\rm s})\overline{u}^2 m_0,$$
$$m_5 = (\overline{\rho} + m_0 M_{1\infty})\overline{u}_{1\infty}, \ m_6 = \overline{\rho} M_{1\infty} + \overline{u}_{1\infty}^2 m_0,$$
$$m_0 = (1 - \overline{\rho})/(\overline{M}_1 - [M_1]), \quad n_1 = 2\overline{\rho} M_{1\infty},$$
$$n_2 = \overline{\rho}(2\overline{\rho}_{\rm n} + dM_1\overline{M}_1 + \overline{\rho}_{\rm s} d\overline{M}_1^2 - 2c\overline{M}_1^2)M_{1\infty} + (\overline{\rho}_{\rm n} - \overline{\rho}_{\rm s})c\overline{M}_1^3 + \overline{\rho}_{\rm s}^2 d\overline{M}_1^3 + 2\overline{\rho}_{\rm n}\overline{\rho}_{\rm s}\overline{M}_1,$$
$$n_3 = 1 + \overline{\rho}(M_1 + \overline{\rho}_{\rm s} M_1 - 2a\overline{M}_1)M_{1\infty} + (\overline{\rho}_{\rm n} - \overline{\rho}_{\rm s})a\overline{M}_1^2 + \overline{\rho}_{\rm s}^2\overline{M}_1^2,$$
$$n_4 = -2\overline{\rho}\omega\overline{M}_1 M_{1\infty} + (\overline{\rho}_{\rm n} - \overline{\rho}_{\rm s})\omega\overline{M}_1^2,$$
$$n_5 = 2\overline{\rho} M_{1\infty}\overline{u}_{1\infty}, \quad n_6 = \overline{\rho}(M_{1\infty}^2 + \overline{u}_{1\infty}^2),$$
$$l = (\overline{M}_1 - [M_1])/\overline{M}_1, \ k_1 = M_1 - \overline{M}_1, \ k_2 = -\overline{\rho}_{\rm n}\overline{M}_1,$$
$$k_3 = -(\overline{\rho}_{\rm n}/\overline{\rho}_{\rm s})\overline{u}^2, \ k_4 = M_{1\infty}\overline{u}_{1\infty}, \ k_5 = \overline{u}_{1\infty}^2,$$
$$r_1 = 1 + 2\overline{\rho}_{\rm n}\delta M_1\overline{M}_1 - \varkappa_0(\overline{M}_1 - M_1),$$
$$r_2 = 1 + (d - b + 2\overline{\rho}_{\rm n}\delta)M_1\overline{M}_1 + (\overline{\rho}_{\rm n} + (d-c)\overline{M}_1^2)\delta M_1^2 - \overline{\rho}_{\rm n}\varkappa_0\overline{M}_1,$$
$$r_3 = M_1 + (1-a)\delta M_1^2\overline{M}_1 + \varkappa_0,$$
$$r_4 = (1 + \varkappa)M_1 - \omega\delta M_1^2\overline{M}_1 - (\overline{\rho}_{\rm n}/\overline{\rho}_{\rm s})\overline{u}^2\varkappa_0,$$
$$r_5 = (\overline{ST} + \varkappa_0 M_{1\infty})\overline{u}_{1\infty}, \quad r_6 = \overline{ST} M_{1\infty} + \varkappa_0\overline{u}_{1\infty}^2,$$
$$\varkappa_0 = (1 - \overline{ST} + 2\overline{\rho}_{\rm n}\delta M_1\overline{M}_1)/(\overline{M}_1 - [M_1]),$$
$$a = \widehat{\nu}_p(\widehat{u}_1)^2, \ b = \frac{\widehat{\nu}_T}{\widehat{S}}(\widehat{u}_1)^2, \ c = \frac{\widehat{\nu}_q}{\widehat{\rho}}(\widehat{u}_1)^2, \ d = \frac{\widehat{\rho}_q}{\widehat{\rho}}(\widehat{u}_1)^2,$$
$$\omega = \frac{\widehat{\nu}_T\widehat{S}}{\widehat{\rho}\widehat{S}_T}, \ \varkappa = \frac{\widehat{S}}{\widehat{S}_T\widehat{T}}, \ \delta = \frac{\widehat{\rho}\widehat{u}_1^2}{\widehat{S}\widehat{T}},$$
$$M_1 = \frac{\widehat{v}}{\widehat{u}_1}, \ M_{1\infty} = \frac{\widehat{v}_\infty}{\widehat{u}_1}, \quad [M_1] = M_1 - M_{1\infty}, \quad \overline{M}_1 = \frac{\widehat{w}}{\widehat{u}_1},$$
$$\overline{u} = \frac{\widehat{u}_2}{\widehat{u}_1}, \ \overline{u}_{1\infty} = \frac{\widehat{u}_{1\infty}}{\widehat{u}_1}, \quad \overline{\rho} = \frac{\widehat{\rho}_\infty^0}{\widehat{\rho}}, \ \overline{\rho}_{\rm n} = \frac{\widehat{\rho}_{\rm n}}{\widehat{\rho}}, \ \overline{\rho}_{\rm s} = \frac{\widehat{\rho}_{\rm s}}{\widehat{\rho}}, \ \overline{S} = \frac{\widehat{S}_\infty^0}{\widehat{S}}, \ \overline{T} = \frac{\widehat{T}_\infty}{\widehat{T}},$$
$$\overline{\rho}_{\rm n} = \overline{\rho}_{\rm n}(\widehat{p}, \widehat{T}, \widehat{q}) \quad \text{и т. д.}$$

Задача TD получена из основной задачи после соответствующего обезразмеривания: координаты x_k ($k = 1, 2$), время t, компоненты вектора относительной скорости $\mathbf{w}(x_1 > 0)$, компоненты скорости сверхтекучего движения $\mathbf{v}_s(x_1 > 0)$, давление $p(x_1 > 0)$, температура $T(x_1 > 0)$, компоненты вектора скорости сверхтекучего движения $\mathbf{v}_s(x_1 < 0)$ и давление $p(x_1 < 0)$ отнесены к следующим характерным величинам:

$$\widehat{l},\ \widehat{l}/\widehat{u}_1,\ \widehat{u}_1,\ \widehat{u}_1,\ \widehat{\rho}\widehat{u}_1^2,\ \widehat{S}/\widehat{S}_T,\ \widehat{u}_{1\infty}^0,\ \widehat{\rho}_\infty^0(\widehat{u}_{1\infty}^0)^2,$$

где $\widehat{l}$ — характерная длина. Кроме того, в граничных условиях (4.7) исключена перекрестным дифференцированием функция F.

Убедимся, что для задачи TD выполнено при $t > 0$, $\mathbf{x} \in R^3$ условие Ландау (2.4) (если оно выполнялось при $t = 0$, $\mathbf{x} \in R^2$). В плоском случае третья компонента $\operatorname{rot}\mathbf{v}_s$ имеет вид $\xi_2 v_{s1} - \xi_1 v_{s2}$, тогда как все остальные компоненты равны нулю. Продифференцировав второе уравнение системы (4.5) по x_2, а третье уравнение по x_1 и взяв их разность, получаем при $t > 0$, $\mathbf{x} \in R^2_-$ уравнение

$$L_\infty(\xi_2 v_{s1} - \xi_1 v_{s2}) = 0.$$

Продифференцировав пятое уравнение системы (4.6) по x_2, а шестое уравнение по x_1 и взяв их разность, получаем при $t > 0$, $\mathbf{x} \in R^2_+$ уравнение

$$L(\xi_2 v_{s1} - \xi_1 v_{s2}) = 0.$$

Подействуем на третье граничное условие из (4.7) оператором τ и вычтем результат из четвертого граничного условия. В итоге получим

$$(M_1 - \overline{M}_1)\xi_2 v_{s1} - \overline{\rho}_n\overline{M}_1\xi_2 w_1 + \xi_2 p - \frac{\overline{\rho}_n^0}{\overline{\rho}_s^0}\overline{u}^2\xi_2 T + \tau v_{s2}$$
$$= M_{1\infty}\overline{u}_{1\infty}\xi_2 v_{s1\infty} + \overline{u}_{1\infty}^2\xi_2 p_\infty + \overline{u}_{1\infty}\tau v_{s2\infty}.$$

Учитывая третье уравнение системы (4.5) и шестое уравнение системы (4.6), заключаем, что при $t > 0$, $x_1 = 0$, $x_2 \in \mathbb{R}$ выполнено граничное условие

$$M_1(\xi_2 v_{s1} - \xi_1 v_{s2}) = M_{1\infty}\overline{u}_{1\infty}(\xi_2 v_{s1\infty} - \xi_1 v_{s2\infty}).$$

Следовательно, $\xi_2 v_{s1} - \xi_1 v_{s2}$ в задаче TD является решением задачи

$$\begin{aligned}
&L_\infty(\xi_2 v_{s1} - \xi_1 v_{s2}) = 0, \quad t > 0,\ \mathbf{x} \in R^2_-,\\
&L(\xi_2 v_{s1} - \xi_1 v_{s2}) = 0, \quad t > 0,\ \mathbf{x} \in R^2_+,\\
&M_1(\xi_2 v_{s1} - \xi_1 v_{s2}) = M_{1\infty}\overline{u}_{1\infty}(\xi_2 v_{s1\infty} - \xi_1 v_{s2\infty}), \quad t > 0,\ x_1 = 0,\ x_2 \in \mathbb{R},\\
&\xi_2 v_{s1} - \xi_1 v_{s2} = 0, \quad t = 0,\ \mathbf{x} \in R^2,
\end{aligned}$$

из которой следует $\xi_2 v_{s1} - \xi_1 v_{s2} \equiv 0$ при $t > 0$, $\mathbf{x} \in R^2$.

4.2. Некорректность задачи TD. Будем искать экспоненциальные решения задачи TD в виде

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V} = \mathbf{V}_\infty^{(0)}\exp\{n(\widehat{\tau}t + \widehat{\xi}_\infty x_1 + ix_2)\},\ x_1 < 0,\\
&\mathbf{U} = \mathbf{U}^{(0)}\exp\{n(\widehat{\tau}t + \widehat{\xi}x_1 + ix_2)\},\ x_1 > 0;
\end{aligned} \tag{4.8}$$

здесь $\mathbf{V} = (\rho, \mathbf{v}_s^*)^*$, $\mathbf{V}_\infty^{(0)} = (p_\infty^{(0)}, v_{s1\infty}^{(0)}, v_{s2\infty}^{(0)})^*$, $\mathbf{U}^{(0)} = (p^{(0)}, T^{(0)}, w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, v_{s1}^{(0)}, v_{s2}^{(0)})$ — постоянные векторы, $\widehat{\tau}(\mathrm{Re}\widehat{\tau} > 0)$, $\widehat{\xi}_\infty(\mathrm{Re}\widehat{\xi}_\infty > 0)$, $\widehat{\xi}(\mathrm{Re}\widehat{\xi} < 0)$ —

константы, $n = 1, 2, \ldots$. Наличие у задачи TD решений вида (4.8) означает, что для нее можно построить пример некорректности типа примера Адамара.

Подставляя (4.8) в систему (4.5), получим для определения компонент вектора $\mathbf{V}_\infty^{(0)}$ линейную алгебраическую систему

$$\mathcal{A}\mathbf{V}_\infty^{(0)} = 0, \tag{4.9}$$

где

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\widehat{\tau}, \widehat{\xi}_\infty) = \begin{bmatrix} \widehat{L}_\infty & \overline{u}_{1\infty}\widehat{\xi}_\infty & \overline{u}_{1\infty} i \\ \overline{u}_{1\infty}\widehat{\xi}_\infty & \widehat{L}_\infty & 0 \\ \overline{u}_{1\infty} i & 0 & \widehat{L}_\infty \end{bmatrix}, \; \widehat{L}_\infty = \widehat{\tau} + M_{1\infty}\widehat{\xi}_\infty.$$

Система (4.9) имеет нетривиальное решение, если $\det \mathcal{A} = 0$, т. е.

$$\widehat{L}_\infty(\widehat{L}_\infty^2 - \overline{u}_{1\infty}^2\widehat{\xi}_\infty^2 + \overline{u}_{1\infty}^2) = 0.$$

Рассматривая это уравнение как уравнение относительно $\widehat{\xi}_\infty$, находим корень (только один!) с требуемым свойством ($\mathrm{Re}\widehat{\xi}_\infty > 0$ при $\mathrm{Re}\widehat{\tau} > 0$):

$$\widehat{\xi}_\infty = \frac{M_{1\infty}\widehat{\tau} + \overline{u}_{1\infty}\sqrt{\overline{u}_{1\infty}^2 + \widehat{\tau}^2 - M_{1\infty}^2}}{\overline{u}_{1\infty}^2 - M_{1\infty}^2}. \tag{4.10}$$

Заметим, что в силу (2.6) $(\overline{u}_{1\infty}^2 - M_{1\infty}^2) > 0$.

Аналогично, подставляя (4.8) в систему (4.6), получим для определения компонент вектора $\mathbf{U}^{(0)}$ линейную алгебраическую систему

$$\mathcal{B}\mathbf{U}^{(0)} = 0, \tag{4.11}$$

где

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\widehat{\tau}, \widehat{\xi}) = \begin{bmatrix} \widehat{L} + a_1\widehat{\xi} & a_2\widehat{\xi} & a_3\widehat{\xi} & a_4 i & a_5\widehat{\xi} & a_6 i \\ b_1\widehat{\xi} & \widehat{L} + b_2\widehat{\xi} & b_3\widehat{\xi} & b_4 i & b_5\widehat{\xi} & b_6 i \\ c_1\widehat{\xi} & c_2\widehat{\xi} & \widehat{L} + c_3\widehat{\xi} & c_4 i & c_5\widehat{\xi} & c_6 i \\ 0 & \frac{\overline{u}^2}{\overline{\rho}_s} i & M_1 i & \widehat{L} & \overline{M}_1 i & 0 \\ \widehat{\xi} & -\frac{\overline{\rho}_n}{\overline{\rho}_s}\overline{u}^2\widehat{\xi} & -\overline{\rho}_n\overline{M}_1\widehat{\xi} & 0 & \widehat{L} - \overline{M}_1\widehat{\xi} & 0 \\ i & -\frac{\overline{\rho}_n}{\overline{\rho}_s}\overline{u}^2 i & -\overline{\rho}_n\overline{M}_1 i & 0 & -\overline{M}_1 i & \widehat{L} \end{bmatrix},$$

$\widehat{L} = \widehat{\tau} + M_1\widehat{\xi}$.

Система (4.11) имеет нетривиальное решение, если $\det\mathcal{B}$, т. е.

$$\widehat{L}\{\widehat{L}^5 + \mathcal{B}_4\widehat{L}^4 + \mathcal{B}_3\widehat{L}^3 + \mathcal{B}_2\widehat{L}^2 + \mathcal{B}_1\widehat{L} + \mathcal{B}_0\} = 0; \tag{4.12}$$

здесь

$$\mathcal{B}_4 = 2(\omega + (b\omega - ad + c)\overline{M}_1^2)\overline{M}_1\widehat{\xi}/\overline{d},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_3 = &-\Big\{(\overline{c}_2 + \omega + \overline{\rho}_\mathrm{n})a\overline{a}_1\overline{M}_1^2/\overline{d}^2 - (\overline{c}_2\omega + \overline{\rho}_\mathrm{n}\omega + \frac{\overline{\rho}_\mathrm{n}}{\overline{\rho}_\mathrm{s}}\overline{u}^2(da \\ &- c))\overline{b}_1\overline{M}_1^2/\overline{d}^2 + (\overline{a}_2 a + \overline{b}_2\omega - (\overline{\rho}_\mathrm{n} da + (c - \overline{\rho}_\mathrm{n} b)\omega)\overline{M}_1^2)\overline{c}_1/\overline{d} \\ &+ \left(\frac{\overline{\rho}_\mathrm{n}}{\overline{\rho}_\mathrm{s}}\overline{u}^2\overline{b}_2 - \omega\overline{c}_2\overline{M}_1^2\right)\frac{1}{\overline{d}^2} - a\overline{a}_1\frac{\overline{M}_1^2}{\overline{d}} + \omega b_1\frac{\overline{M}_1^2}{\overline{d}} + c\overline{c}_1\frac{\overline{M}_1^2}{\overline{d}} \\ &+ \overline{c}_2\frac{\overline{M}_1^2}{\overline{d}} + \frac{\overline{a}_3}{\overline{d}} - \frac{\overline{\rho}_\mathrm{n}}{\overline{\rho}_\mathrm{s}}\overline{u}^2\frac{\overline{b}_3}{\overline{d}} - \overline{\rho}_\mathrm{n}\frac{\overline{c}_3}{\overline{d}}\overline{M}_1^2 + (\overline{\rho}_\mathrm{s}\omega + \overline{\rho}_\mathrm{n}\overline{\rho}_\mathrm{s} - \overline{\rho}_\mathrm{n} d)\frac{\overline{M}_1^2}{\overline{d}}\Big\}\widehat{\xi}^2 \\ &+ \frac{\overline{u}^2}{\overline{\rho}_\mathrm{s}}\frac{\overline{b}_2}{\overline{d}} + \frac{\overline{c}_2}{\overline{d}}\overline{M}_1^2 + \frac{\overline{a}_3}{\overline{d}} - \frac{\overline{\rho}_\mathrm{n}}{\overline{\rho}_\mathrm{s}}\overline{u}^2\frac{\overline{b}_3}{\overline{d}} - \overline{\rho}_\mathrm{n}\frac{\overline{c}_3}{\overline{d}}\overline{M}_1^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2 = &\Big\{-\overline{a}_3\left(\overline{c}_2 + \left(\omega + \frac{\overline{\rho}_\mathrm{n}}{\overline{\rho}_\mathrm{s}}\overline{u}^2 a\right)\overline{b}_1 + (\overline{\rho}_\mathrm{n} a + c)\overline{c}_1 + \omega + \overline{\rho}_\mathrm{n}\right) \\ &+ \overline{b}_3\left(\frac{\overline{\rho}_\mathrm{n}}{\overline{\rho}_\mathrm{s}}\overline{u}^2\overline{c}_2 - \left(\omega + \frac{\overline{\rho}_\mathrm{n}}{\overline{\rho}_\mathrm{s}}\overline{u}^2 a\right)\overline{a}_1 + \left(\frac{\overline{\rho}_\mathrm{n}}{\overline{\rho}_\mathrm{s}}\overline{u}^2 c - \overline{\rho}_\mathrm{n}\omega\right)\overline{c}_1 - \frac{\overline{\rho}_\mathrm{n}}{\overline{\rho}_\mathrm{s}}\overline{u}^2 d\right) \\ &+ \overline{c}_3\Big(\overline{a}_2 - \frac{\overline{\rho}_\mathrm{n}}{\overline{\rho}_\mathrm{s}}\overline{u}^2\overline{b}_2 - (\overline{\rho}_\mathrm{n} a + c)\overline{a}_1\overline{M}_1^2 - \left(\frac{\overline{\rho}_\mathrm{n}}{\overline{\rho}_\mathrm{s}}\overline{u}^2 c - \overline{\rho}_\mathrm{n}\omega\right)b_1\overline{M}_1^2 \\ &- \overline{\rho}_\mathrm{n} d\overline{M}_1^2\Big)\Big\}\overline{M}_1\widehat{\xi}(\widehat{\xi}^2 - 1)/\overline{d}^2 + \Big\{a(\overline{a}_2\overline{c}_1 + \overline{a}_1\overline{c}_2\overline{M}_1^2) \\ &+ \omega(\overline{b}_2\overline{c}_1 - \overline{b}_1\overline{c}_2 M_1^2) + \overline{\rho}_\mathrm{n}\overline{a}_2 + \overline{\rho}_\mathrm{n}\overline{u}^2\overline{b}_2 + (\overline{\rho}_\mathrm{n} d - \overline{\rho}_\mathrm{s}\omega)\overline{c}_2\overline{M}_1^2 \\ &+ (\overline{\rho}_\mathrm{s}(\overline{\rho}_\mathrm{n} + \omega)a - \overline{\rho}_\mathrm{n}(\omega b + c))\overline{a}_1 M_1^2 + (\overline{\rho}_\mathrm{n} d(\omega - \overline{u}^2 a) + \overline{\rho}_\mathrm{n}(\overline{u}^2 c \\ &- \overline{\rho}_\mathrm{s}\omega))\overline{b}_1\overline{M}_1^2 + (\overline{\rho}_\mathrm{n} d(c - \overline{\rho}_\mathrm{s} a) + \overline{\rho}_\mathrm{s}(\overline{\rho}_\mathrm{n} b - c)\omega)\overline{c}_1\overline{M}_1^2 \\ &+ \Big(\frac{\overline{\rho}_\mathrm{n}}{\overline{\rho}_\mathrm{s}}\overline{u}^2 a(\overline{a}_1\overline{b}_2 + \overline{a}_2\overline{b}_1) - a\omega(\overline{a}_2\overline{c}_1 + \overline{a}_1\overline{c}_2\overline{M}_1^2) \\ &- \frac{\overline{\rho}_\mathrm{n}}{\overline{\rho}_\mathrm{s}}\overline{u}^2 ad(\overline{b}_2\overline{c}_1 - \overline{b}_1\overline{c}_2\overline{M}_1^2)\Big)\frac{1}{\overline{d}}\Big\}\frac{\overline{M}_1}{\overline{d}^2}\widehat{\xi}^3 + \Big\{-(\overline{a}_2 + \overline{u}^2\overline{b}_2 + \overline{\rho}_\mathrm{s}\overline{c}_2 M_1^2)\frac{\overline{M}_1}{\overline{d}} \\ &+ \Big(-\frac{\overline{u}^2}{\overline{\rho}_\mathrm{s}}a(\overline{a}_2\overline{b}_1 + \overline{a}_1\overline{b}_2) - a(\overline{a}_2\overline{c}_1 + \overline{a}_1\overline{c}_2 M_1^2) \\ &+ \left(\frac{\overline{u}^2}{\overline{\rho}_\mathrm{s}}c - \omega\right)(\overline{b}_2\overline{c}_1 - \overline{b}_1\overline{c}_2\overline{M}_1^2)\Big)\frac{\overline{M}_1}{\overline{d}^2}\Big\}\widehat{\xi},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 = &\Big\{\left(\frac{\overline{\rho}_\mathrm{n}}{\overline{\rho}_\mathrm{s}}\overline{u}^2 a + \omega\right)(\overline{c}_1\overline{b}_2 - \overline{b}_1\overline{c}_2\overline{M}_1^2) - \omega(c - \overline{\rho}_\mathrm{n} b)\overline{c}_1\overline{M}_1^2 \\ &+ \overline{\rho}_\mathrm{n}\left(\frac{\overline{u}^2}{\overline{\rho}_\mathrm{s}}c - \omega\right)b_1\overline{M}_1^2 + \frac{\overline{\rho}_\mathrm{n}}{\overline{\rho}_\mathrm{s}}\overline{u}^2\overline{b}_2 - \omega\overline{c}_2\overline{M}_1^2\Big\}\overline{a}_3\widehat{\xi}^2(\widehat{\xi}^2 - 1)/\overline{d}^3 \\ &+ \Big\{-\left(\frac{\overline{\rho}_\mathrm{n}}{\overline{\rho}_\mathrm{s}}\overline{u}^2 a + \omega\right)(\overline{a}_2\overline{c}_1 + \overline{a}_1\overline{c}_2\overline{M}_1^2) + \overline{\rho}_\mathrm{n}\left(\frac{\overline{u}^2}{\overline{\rho}_\mathrm{s}}c - \omega\right)\overline{a}_1\overline{M}_1^2\end{aligned}$$

$$- \overline{\rho}_{\rm n} d\left(\frac{\overline{u}^2}{\overline{\rho}_{\rm s}}c-\omega\right)\overline{c}_1\overline{M}_1^2 - \frac{\overline{\rho}_{\rm n}}{\overline{\rho}_{\rm s}}\overline{u}^2 d\overline{c}_2\overline{M}_1^2 - \frac{\overline{\rho}_{\rm n}}{\overline{\rho}_{\rm s}}\overline{u}^2\overline{a}_2\Bigg\}\frac{\overline{b}_3}{\overline{d}^3}\widehat{\xi}^2(\widehat{\xi}^2-1)$$
$$+\left\{\left(\frac{\overline{\rho}_{\rm n}}{\overline{\rho}_{\rm s}}\overline{u}^2 a+\omega\right)(\overline{a}_2\overline{b}_1+\overline{a}_1\overline{b}_2)+\overline{\rho}_{\rm n} d\left(\frac{\overline{u}^2}{\overline{\rho}_{\rm s}}c-\omega\right)\overline{b}_1\overline{M}_1^2\right.$$
$$\left.-\,\omega(c-\overline{\rho}_{\rm n}b)\overline{a}_1\overline{M}_1^2+\omega\overline{a}_2+\frac{\overline{\rho}_{\rm n}}{\overline{\rho}_{\rm s}}\overline{u}^2 d\overline{b}_2\right\}\overline{c}_3\overline{M}_1^2\widehat{\xi}^2(\widehat{\xi}^2-1)/\overline{d}^3$$
$$+\{\overline{\rho}_{\rm n}(\omega-\overline{u}^2 a)(\overline{b}_1\overline{a}_2+\overline{b}_2\overline{a}_1)+\omega(\overline{\rho}_{\rm s}a-\overline{\rho}_{\rm n}b)(\overline{a}_2\overline{c}_1+\overline{a}_1\overline{c}_2\overline{M}_1^2)$$
$$+\,\overline{\rho}_{\rm n} d(\overline{u}^2 a-\omega)(\overline{b}_2\overline{c}_1-\overline{b}_1\overline{c}_2\overline{M}_1^2)\Big\}\overline{M}_1^2\widehat{\xi}^4/\overline{d}^3+\Bigg\{\frac{\overline{u}^2}{\overline{\rho}_{\rm s}}(\overline{a}_2\overline{b}_3-\overline{a}_3\overline{b}_2)$$
$$+\,(\overline{a}_2\overline{c}_3-\overline{a}_3\overline{c}_2)\overline{M}_1^2+(\overline{u}^2 a-\omega)(\overline{a}_1\overline{b}_2+\overline{a}_2\overline{b}_1)\overline{M}_1^2$$
$$+\,(\overline{\rho}_{\rm s}a-c)(\overline{a}_2\overline{c}_1+\overline{a}_1\overline{c}_2\overline{M}_1^2)\overline{M}_1^2-(\overline{u}^2 c-\overline{\rho}_{\rm s}\omega)(\overline{b}_2\overline{c}_1$$
$$-\,\overline{b}_1\overline{c}_2\overline{M}_1^2)\overline{M}_1^2\Bigg\}\frac{\widehat{\xi}^2}{\overline{d}}+\left(\left(\frac{\overline{u}^2}{\overline{\rho}_{\rm s}}\overline{b}_2+\overline{c}_2\overline{M}_1^2\right)\overline{a}_3-\frac{\overline{u}^2}{\overline{\rho}_{\rm s}}\overline{a}_2\overline{b}_3-\overline{a}_2\overline{c}_3\overline{M}_1^2\right)\frac{1}{\overline{d}^2},$$

$$\mathcal{B}_0=(\overline{\rho}_{\rm n}b-c)(\overline{\rho}_{\rm n}+\omega)(d+a-\overline{\rho}_{\rm s})\omega\left\{1+\frac{1}{\overline{\rho}_{\rm n}}(ad-c-b\omega)\overline{M}_1^2\right\}\frac{\overline{M}_1^5}{\overline{d}^3}\widehat{\xi}(\widehat{\xi}^2-1).$$

Рассматривая (4.12) как уравнение относительно $\widehat{\xi}$, находим корни с требуемым свойством ($\mathrm{Re}\widehat{\xi}<0$ при $\mathrm{Re}\widehat{\tau}>0$):

$$\widehat{\xi}_k=\widehat{\xi}_k^0+\widehat{\xi}_k'\Delta+O(\Delta^2),\ k=\overline{1,4},\ \widehat{\xi}_1=-\frac{\widehat{\tau}}{M_1},$$
$$\widehat{\xi}_1^0=\widehat{\xi}_2^0=-\frac{\widehat{\tau}^0}{\overline{u}^0},\ \widehat{\xi}_3=\frac{\overline{u}^0\widehat{\tau}^0-R^0}{1-(\overline{u}^0)^2},\ \widehat{\xi}_4=-\frac{(\widehat{\tau}^0)^2+(\overline{u}^0)^2}{2\overline{u}^0\widehat{\tau}^0},$$
$$\widehat{\xi}_1'=\widehat{\xi}_2'=\frac{V_1'\widehat{\tau}^0-\widehat{\tau}'}{\overline{u}^0},\ \widehat{\xi}_3'=-\frac{\widehat{L}_3^0(\widehat{\tau}'+U_1'\overline{u}^0\widehat{\xi}_3^0)}{R^0},$$
$$\widehat{\xi}_4'=-\frac{\widehat{L}_4^0(\widehat{\tau}+P'\overline{u}^0\widehat{\xi}_4^0)}{\widehat{\tau}^0\overline{u}^0};$$

здесь $\widehat{\tau}=\widehat{\tau}^0+\widehat{\tau}'\Delta+O(\Delta^2)$, $\widehat{L}_k^0=\widehat{\tau}^0+\overline{u}^0\widehat{\xi}_k^0$, $k=3,4$, $\overline{u}=\overline{u}^0+O(\Delta^2)$, $\overline{u}^0=\widehat{u}_2^0/\widehat{u}_1^0$ ($\overline{u}^0<1$ в силу (2.6)), $R^0=\sqrt{1+(\widehat{\tau}^0)^2-(\overline{u}^0)^2}$, величины U_1', V_1', P' описаны в § 2 (см. формулы (2.20), (2.22*)).

Найдем нетривиальное решение системы

$$\mathcal{B}(\widehat{\tau},\widehat{\xi}_1)\mathbf{U}^{(1)}=0.$$

Вектор $\mathbf{U}^{(1)}=(p^{(1)},T^{(1)},w_1^{(1)},w_2^{(1)},v_{\rm s1}^{(1)},v_{\rm s2}^{(1)})^*$ будет решением этой системы, если $p^{(1)}=\overline{\rho}_{\rm s}\overline{M}_1v_{\rm s1}^{(1)}$, $T^{(1)}=-\frac{\overline{\rho}_{\rm s}}{\overline{u}^2}\frac{\varphi}{\psi}\overline{M}_1v_{\rm s1}^{(1)}$, $w_1^{(1)}=-\frac{\chi}{\psi}v_{\rm s1}^{(1)}$, $w_2^{(1)}=-\frac{\chi}{\psi}\widehat{\xi}_1iv_{\rm s1}^{(1)}$, $v_{\rm s2}^{(1)}=\widehat{\xi}_1iv_{\rm s1}^{(1)}$, $v_{\rm s1}^{(1)}$ — некоторая постоянная; здесь $\varphi=c-\overline{\rho}_{\rm s}a$, $\psi=c-\overline{\rho}_{\rm n}b$, $\chi=\overline{\rho}_{\rm s}a-\overline{\rho}_{\rm n}b$. Найдем также нетривиальные решения систем

$$\mathcal{B}(\widehat{\tau},\widehat{\xi}_k)\mathbf{U}^{(k)}=0,\quad k=\overline{2,4},$$
$$\mathcal{A}(\widehat{\tau},\widehat{\xi}_\infty)\mathbf{V}_\infty^{(0)}=0$$

(величина $\widehat{\xi}_\infty$ определяется по формуле (4.10)):

$$\mathbf{U}^{(k)} = (p^{(k)}, T^{(k)}, w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, w_{s1}^{(k)}, w_{s2}^{(k)})^*, \quad k = \overline{2,4},$$
$$\mathbf{V}_\infty^{(0)} = (p_\infty^{(0)}, v_{s1\infty}^{(0)}, v_{s2\infty}^{(0)})^*,$$

где

$$p^{(k)} = \overline{\rho}_n \widehat{L}_k i w_2^{(k)} - \left(\frac{\widehat{L}_k}{\widehat{\xi}_k} - \overline{\rho}_s \overline{M}_1\right) v_{s1}^{(k)},$$
$$T^{(k)} = -\frac{\overline{\rho}_s}{\overline{u}^2}\overline{M}_1 w_1^{(k)} + \frac{\overline{\rho}_n}{\overline{u}^2}\widehat{L}_k i w_2^{(k)} - \frac{\overline{\rho}_s}{\overline{u}^2}\overline{M}_1 v_{s1}^{(k)},$$
$$v_{s2}^{(k)} = i\eta_k w_1^{(k)} + \varkappa_k w_2^{(k)} + \lambda_k i v_{s1}^{(k)}, \quad \widehat{L}_k = \tau + M_1\widehat{\xi}_k, \quad k = \overline{2,4},$$
$$p_\infty^{(0)} = -\frac{\widehat{L}_\infty}{\widehat{u}_{1\infty}\widehat{\xi}_\infty} v_{s1\infty}^{(0)}, \quad v_{s2\infty}^{(0)} = \left(\widehat{\xi}_\infty - \frac{\widehat{L}_\infty^2}{\overline{u}_{1\infty}^2 \widehat{\xi}_\infty}\right) i v_{s1\infty}^{(0)},$$

$v_{s1\infty}^{(0)}$, $v_{s1}^{(k)}$, $w_1^{(k)}$, $w_2^{(k)}$ — некоторые постоянные, причем последние три связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} &\delta_k w_1^{(k)} + \varepsilon_k i w_2^{(k)} + \zeta_k v_{s1}^{(k)} = 0, \\ &\alpha_k w_1^{(k)} + \beta_k i w_2^{(k)} + \gamma_k v_{s1}^{(k)} = 0, \quad k = \overline{2,4}; \end{aligned} \tag{4.13}$$

здесь

$$\alpha_k = -\frac{\overline{\rho}_s}{\overline{u}^2}\overline{M}_1\widehat{L}_k + \left\{\overline{b}_2 + \psi\overline{b}_1\overline{M}_1^2 - \frac{\overline{b}_3}{\overline{a}_3}(\overline{a}_2 - \psi\overline{a}_1\overline{M}_1^2)\right\}\frac{\widehat{\xi}_k}{\overline{d}},$$
$$\beta_k = \left(\frac{\overline{\rho}_s}{\overline{u}^2} - \overline{\rho}_n\frac{\overline{b}_3}{\overline{a}_3}\right)\widehat{L}_k^2 + \overline{\rho}_n\left\{(a+b)\overline{b}_1 + b + \frac{\overline{b}_3}{\overline{a}_3}((a+b)\overline{a}_1 + d)\right\}$$
$$\times \frac{\overline{M}_1}{\overline{d}}\widehat{L}_k\widehat{\xi}_k + \left(\overline{b}_2 - \frac{\overline{b}_3}{\overline{a}_3}\overline{a}_2\right)\frac{1}{\overline{d}},$$
$$\gamma_k = \frac{\overline{b}_3}{\overline{a}_3}\frac{\widehat{L}_k^2}{\widehat{\xi}_k} - \left\{a\frac{\overline{b}_1}{\overline{d}} + \frac{\overline{\rho}_s}{\overline{u}^2} + \frac{\overline{b}_3}{\overline{a}_3}(a\frac{\overline{a}_1}{\overline{d}} + \overline{\rho}_s)\right\}\overline{M}_1\widehat{L}_k + \chi\left(\overline{b}_1 + \frac{\overline{b}_3}{\overline{a}_3}\overline{a}_1\right)\overline{M}_1^2\frac{\widehat{\xi}_k}{\overline{d}},$$
$$\delta_k = \widehat{L}_k + \left\{\overline{c}_2 + \psi\overline{c}_1 - \frac{\overline{c}_3}{\overline{a}_3}(\overline{a}_2 - \psi\overline{a}_1\overline{M}_1^2)\right\}\frac{\overline{M}_1}{\overline{d}}\widehat{\xi}_k,$$
$$\varepsilon_k = -\overline{\rho}_n\frac{\overline{c}_3}{\overline{a}_3}\overline{M}_1\widehat{L}_k^2 + \overline{\rho}_n\left\{(a+b)\overline{c}_1 + 1 + \frac{\overline{c}_3}{\overline{a}_3}((a+b)\overline{a}_3 + \overline{\rho}_n d)\overline{M}_1^2\right\}$$
$$\times \frac{\widehat{L}_k\widehat{\xi}_k}{\overline{d}} + \left(\overline{c}_2 - \frac{\overline{c}_3}{\overline{a}_3}\overline{a}_2\right)\frac{\overline{M}_1}{\overline{d}},$$
$$\zeta_k = \frac{\overline{c}_3}{\overline{a}_3}\overline{M}_1\frac{\widehat{L}_k^2}{\widehat{\xi}_k} - \left\{a\frac{\overline{c}_1}{\overline{d}} + \frac{\overline{c}_3}{\overline{a}_3}\left(a\frac{\overline{a}_1}{\overline{d}} + \overline{\rho}_s\right)\overline{M}_1^2\right\}\widehat{L}_k + \chi(\overline{c}_1 + \frac{\overline{c}_3}{\overline{a}_3}\overline{a}_1\overline{M}_1^2)\frac{\overline{M}_1}{\overline{d}}\widehat{\xi}_k,$$
$$\eta_k = (\overline{a}_2 - \psi\overline{a}_1\overline{M}_1^2)\frac{\widehat{\xi}_k}{\overline{a}_3},$$
$$\varkappa_k = -\frac{1}{\overline{a}_3}\left\{\overline{\rho}_n d\widehat{L}_k^2 - \overline{\rho}_n((a+b)\overline{a}_1 + d)\overline{M}_1\widehat{L}_k\widehat{\xi}_k + \overline{a}_2\right\},$$

$$\lambda_k = -\frac{1}{\overline{a}_3}\left\{\frac{\overline{d}}{\widehat{\xi}_k}\widehat{L}_k^2 - (a\overline{a}_1 + \overline{\rho}_s d)\overline{M}_1\widehat{L}_k + (\chi\overline{a}_1\overline{M}_1^2 - \overline{a}_3)\widehat{\xi}_k\right\}, \quad k = \overline{2,4}.$$

Таким образом, решение задачи TD следует искать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{V}_\infty^{(0)}\exp\{n(\widehat{\tau}t + \widehat{\xi}_\infty x_1 + ix_2)\}, \quad x_1 < 0, \\ \mathbf{U} &= \exp\{n(\widehat{\tau}t + ix_2)\}\sum_{k=1}^{4}\mathbf{U}^{(k)}\exp(n\widehat{\xi}_k x_1), \quad x_1 > 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Подставляя (4.14) в граничные условия (4.7) и учитывая соотношения (4.13), сконструируем следующую линейную алгебраическую систему:

$$\Gamma\,\mathbf{W} = 0, \tag{4.15}$$

где

$$\mathbf{W} = (v_{s1}^{(1)}, w_1^{(2)}, w_2^{(2)}, v_{s1}^{(2)}, w_1^{(3)}, w_2^{(3)}, v_{s1}^{(3)}, w_1^{(4)}, w_2^{(4)}, v_{s1}^{(4)}, v_{s1\infty}^{(0)})^*,$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix}
\mathcal{M}_1 & \mathcal{M}_2^{w_1} & \mathcal{M}_2^{w_2}i & \mathcal{M}_2^{v_{s1}} & \mathcal{M}_3^{w_1} & \mathcal{M}_3^{w_2}i & \mathcal{M}_3^{v_{s1}} & \mathcal{M}_4^{w_1} & \mathcal{M}_4^{w_2}i & \mathcal{M}_4^{v_{s1}} & M_\infty \\
\mathcal{N}_1 & \mathcal{N}_2^{w_1} & \mathcal{N}_2^{w_2}i & \mathcal{N}_2^{v_{s1}} & \mathcal{N}_3^{w_1} & \mathcal{N}_3^{w_2}i & \mathcal{N}_3^{v_{s1}} & \mathcal{N}_4^{w_1} & \mathcal{N}_4^{w_2}i & \mathcal{N}_4^{v_{s1}} & N_\infty \\
\mathcal{L}_1 i & \mathcal{L}_2^{w_1}i & \mathcal{L}_2^{w_2} & \mathcal{L}_2^{v_{s1}}i & \mathcal{L}_3^{w_1}i & \mathcal{L}_3^{w_2} & \mathcal{L}_3^{v_{s1}}i & \mathcal{L}_4^{w_1}i & \mathcal{L}_4^{w_2} & \mathcal{L}_4^{v_{s1}}i & L_\infty i \\
\mathcal{K}_1 i & \mathcal{K}_2^{w_1}i & \mathcal{K}_2^{w_2} & \mathcal{K}_2^{v_{s1}}i & \mathcal{K}_3^{w_1}i & \mathcal{K}_3^{w_2} & \mathcal{K}_3^{v_{s1}}i & \mathcal{K}_4^{w_1}i & \mathcal{K}_4^{w_2} & \mathcal{K}_4^{v_{s1}}i & K_\infty i \\
\mathcal{R}_1 & \mathcal{R}_2^{w_1} & \mathcal{R}_2^{w_2}i & \mathcal{R}_2^{v_{s1}} & \mathcal{R}_3^{w_1} & \mathcal{R}_3^{w_2}i & \mathcal{R}_3^{v_{s1}} & \mathcal{R}_4^{w_1} & \mathcal{R}_4^{w_2}i & \mathcal{R}_4^{v_{s1}} & R_\infty \\
0 & \alpha_2 & \beta_2 i & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \delta_2 & \varepsilon_2 i & \zeta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 i & \gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 & \varepsilon_3 i & \zeta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & \beta_4 i & \gamma_4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_4 & \varepsilon_4 i & \zeta_4 & 0
\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= 1 - \overline{\rho}_n\psi/\chi + (\overline{\rho}_s - d\psi/\chi)M_1\overline{M}_1 + m_0 M_1, \\
\mathcal{M}_k^{w_1} &= \overline{\rho}_n + dM_1\overline{M}_1 - \chi\overline{M}_1^2, \\
\mathcal{M}_k^{w_2} &= \overline{\rho}_n(M_1 - (a+b)\overline{M}_1)\widehat{L}_k, \\
\mathcal{M}^{v_{s1}} &= -(M_1 - a\overline{M}_1 + m_0)\widehat{L}_k/\widehat{\xi}_k + 1 + m_0 M_1 + \overline{\rho}_s M_1\overline{M}_1 - \psi\overline{M}_1^2, \\
\mathcal{M}_\infty &= \overline{\rho}\overline{u}_{1\infty} + m_0 M_{1\infty}\overline{u}_{1\infty} - (\overline{\rho}M_{1\infty} + m_0\overline{u}_{1\infty}^2)\widehat{L}_\infty/(\overline{u}_{1\infty}\widehat{\xi}_\infty), \\
\mathcal{N}_1 &= 2\overline{\rho}M_{1\infty} - \{\overline{\rho}(2\overline{\rho}_n + dM_1\overline{M}_1 + \overline{\rho}_s d\overline{M}_1^2)M_{1\infty} + \overline{\rho}_s^2 d\overline{M}_1^3 + 2\overline{\rho}_n\overline{\rho}_s\overline{M}_1\}\psi/\chi \\
&\quad + \overline{\rho}_s\{1 + \overline{\rho}(M_1 + \overline{\rho}_s\overline{M}_1)\overline{M}_{1\infty} + \overline{\rho}_s^2\overline{M}_1^2\}\overline{M}_1, \\
\mathcal{N}_k^{w_1} &= \overline{\rho}\{2\overline{\rho}_n + dM_1\overline{M}_1 + (\overline{\rho}_s d - 2\chi)\overline{M}_1^2\}M_{1\infty} + 2\overline{\rho}_n\overline{\rho}_s\overline{M}_1 + (\overline{\rho}_s^2 d \\
&\quad + (\overline{\rho}_n - \overline{\rho}_s)\chi)\overline{M}_1^3, \\
\mathcal{N}_k^{w_2} &= \overline{\rho}_n\{1 + \overline{\rho}(M_1 + (\overline{\rho}_s - 2(a+b))\overline{M}_1)M_{1\infty} + (\overline{\rho}_s^2 \\
&\quad + (\overline{\rho}_n - \overline{\rho}_s)(a+b))\overline{M}_1^2\}\widehat{L}_k,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}_k^{v_{s1}} &= -\{1+\overline{\rho}(M_1+(\overline{\rho}_s-2a)\overline{M}_1)M_{1\infty}+(\overline{\rho}_s^2+(\overline{\rho}_n-\overline{\rho}_s)a)\overline{M}_1^2\}\widehat{L}_k/\widehat{\xi}_k\\
&\quad+\overline{\rho}(2+\overline{\rho}_s M_1\overline{M}_1+(\overline{\rho}_s^2-2\psi)\overline{M}_1^2)M_{1\infty}+\overline{\rho}_s\overline{M}_1\\
&\quad+(\overline{\rho}_s^3+(\overline{\rho}_n-\overline{\rho}_s)\psi)\overline{M}_1^3,\\
\mathcal{N}_\infty &= 2\overline{\rho}M_{1\infty}\overline{u}_{1\infty}-\overline{\rho}(M_{1\infty}^2+\overline{u}_{1\infty}^2)\widehat{L}_\infty/(\overline{u}_{1\infty}\widehat{\xi}_\infty),\\
\mathcal{L}_1 &= \left(\frac{[M_1]}{\overline{M}_1}\frac{\psi}{\chi}+\frac{\varphi}{\chi}\right)\widehat{\xi}_1,\\
\mathcal{L}_k^{w_1} &= (\overline{a}_2-\chi\overline{a}_1\overline{M}_1^2)\widehat{\xi}_k/\overline{a}_3,\\
\mathcal{L}_k^{w_2} &= l-\{\overline{\rho}_n\overline{d}\widehat{L}_k^2-\overline{\rho}_n((a+b)\overline{a}_1+d)\overline{M}_1\widehat{L}_k\widehat{\xi}_k+\overline{a}_2\}/\overline{a}_3,\\
\mathcal{L}_k^{v_{s1}} &= \{-\overline{d}\widehat{L}_k^2/\widehat{\xi}_k+(a\overline{a}_1+\overline{\rho}_s d)\overline{M}_1\widehat{L}_k-\psi\overline{a}_1\overline{M}_1^2\widehat{\xi}_k\}/\overline{a}_3+\widehat{\xi}_k,\\
\mathcal{L}_\infty &= \overline{u}_{1\infty}\widehat{\xi}_\infty-\widehat{L}_\infty^2/(\overline{u}_{1\infty}\xi_\infty),\\
\mathcal{K}_1 &= l\frac{\psi}{\chi}\widehat{\tau}\widehat{\xi}_1+M_1,\ \mathcal{K}_k^{w_1}=0,\ \mathcal{K}_k^{w_2}=-l\widehat{\tau},\ \mathcal{K}_k^{v_{s1}}=M_1-\widehat{L}_k/\widehat{\xi}_k,\\
\mathcal{K}_\infty &= M_{1\infty}\overline{u}_{1\infty}-\overline{u}_{1\infty}\widehat{L}_\infty/\widehat{\xi}_\infty,\\
\mathcal{R}_1 &= 1+\overline{\rho}_n\delta M_1\overline{M}_1+\varkappa_0 M_1-\{1+(d-b)M_1\overline{M}_1+(\overline{\rho}_n+d\overline{M}_1^2)\delta M_1^2\\
&\quad+\overline{\rho}_n\delta M_1\overline{M}_1\}\frac{\psi}{\chi}+(M_1+\delta M_1^2\overline{M}_1)\overline{\rho}_s\overline{M}_1-\frac{\overline{\rho}_s}{\overline{u}^2}\frac{\varphi}{\chi}M_1\overline{M}_1,\\
\mathcal{R}^{w_1} &= 1+\left(d-b-\frac{\overline{\rho}_s}{\overline{u}^2}\right)M_1\overline{M}_1+(\overline{\rho}_n+(d-\chi)\overline{M}_1^2)\delta M_1^2+\overline{\rho}_n\delta M_1\overline{M}_1,\\
\mathcal{R}_k^{w_2} &= \{(\overline{\rho}_n+\overline{\rho}_s/\overline{u}^2+\overline{\rho}_n\delta)M_1+\overline{\rho}_n(1-a-b)\delta M_1^2\overline{M}_1\}L_k,\\
\mathcal{R}_k^{v_{s1}} &= -\{M_1+(1-a)\delta M_1^2\overline{M}_1+\varkappa_0\}\widehat{L}_k/\widehat{\xi}_k+1+\overline{\rho}_n\delta M_1\overline{M}_1\\
&\quad+(\overline{\rho}_s-\overline{\rho}_s/\overline{u}^2)M_1\overline{M}_1+(\overline{\rho}_s-\psi)\delta M_1^2\overline{M}_1^2+\varkappa_0 M_1,\ k=\overline{2,4},\\
\mathcal{R}_\infty &= \overline{ST}\overline{u}_{1\infty}+\varkappa_0 M_{1\infty}\overline{u}_{1\infty}-\{\overline{ST}M_{1\infty}+\varkappa_0\overline{u}_{1\infty}^2\}\widehat{L}_\infty/(\overline{u}_{1\infty}\widehat{\xi}_\infty).
\end{aligned}
$$

Система (4.15) имеет нетривиальное решение, если $\det\Gamma = 0$. Раскладывая по малому параметру Δ все коэффициенты матрицы Γ, можно записать

$$
\begin{aligned}
\det\Gamma &= -\psi^0(a^0-(\overline{\rho}_s^0)^2+\overline{\rho}_n^0\overline{\rho}_s^0/(\overline{u}^0)^2)(\overline{\rho}_s^0+\omega^0)(d^0+a^0-\overline{\rho}_s^0)b^0\\
&\quad\times\frac{(\widehat{S}_T^0)^6}{(\overline{\rho}_n^0)^2(\overline{\rho}_s^0)^4(\widehat{S}^0)^6}\frac{(\widehat{\tau}^0-\overline{u}^0R^0)((\widehat{\tau}^0)^2-(\overline{u}^0)^2)^4R^0}{(1-(\overline{u}^0)^2)(1+(\widehat{\tau}^0)^2)}i\Delta^6+O(\Delta^7)=0;
\end{aligned}
$$

здесь

$$
\psi^0=c^0-\overline{\rho}_n^0b^0,\ a^0=\widehat{\nu}_p^0(\widehat{u}_1^0)^2,\ b^0=\frac{\widehat{\nu}_T^0}{\widehat{S}^0}(\widehat{u}_1^0)^2,\ c^0=\frac{\widehat{\nu}_q^0}{\widehat{\rho}^0}(\widehat{u}_1^0)^2,
$$

$$
d^0=\frac{\widehat{\rho}_q^0}{\widehat{\rho}^0}(\widehat{u}_1^0),\ \omega^0=\frac{\widehat{\nu}_T^0\widehat{S}^0}{\widehat{\rho}^0\widehat{S}_T^0},\ \overline{\rho}_n^0=\frac{\widehat{\rho}_n^0}{\widehat{\rho}^0},\ \overline{\rho}_s^0=\frac{\widehat{\rho}_s^0}{\widehat{\rho}^0},\ \widehat{\rho}_n^0=\rho_n(\widehat{p},\widehat{T},0)\quad \text{и т. д.}
$$

Приравняв нулю коэффициент при Δ^6, видим, что можно положить $\widehat{\tau}^0=\overline{u}^0$. Это означает, что для задачи TD можно построить пример некорректности типа примера Адамара. Действительно, при $t=0$ решения вида (4.14) мало отличаются друг от друга при $n \to \infty$, а для $t > 0$ неограниченно возрастают при $n \to \infty$, поэтому нет непрерывной зависимости решений задачи TD от начальных данных. Последнее означает некорректность линейной смешанной задачи об устойчивости температурного разрыва в гелии II. Заметим, что пример некорректности (4.14) построен для любого вектора $(\widehat{p}, \widehat{T}, \widehat{w}, 0, \widehat{v} - \widehat{w}, 0)^*$ из открытого множества Ω (см. п. 2.1), удовлетворяющего условию эволюционности температурного разрыва (см. неравенство (2.22)):

$$\left(\frac{3}{4}\,\frac{\widehat{\mu}^0_{2qT}}{\widehat{\mu}^0_q(1+\widehat{\mu}^0_q)} - \frac{3}{2}\,\frac{\widehat{\mu}^0_{2TT}}{\widehat{\mu}^0_{2T}} + \frac{1}{4}\,\frac{\widehat{\mu}^0_{2TTT}}{\widehat{\mu}^0_{2TT}}\right)\Delta < 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Капица П. Л.** Вязкость жидкого гелия при температурах ниже точки λ // Докл. АН СССР. 1939. Т.18, №1. С. 21–23.
2. **Капица П. Л.** Исследования механизма теплопередачи в гелии II // ЖЭТФ. 1941. Т. 11, № 1. С. 1–31.
3. **Капица П. Л.** Теплоперенос и сверхтекучесть гелия II // ЖЭТФ. 1941. Т. 11, № 6. С. 581–591.
4. **Ландау Л. Д.** Теория сверхтекучести гелия II // ЖЭТФ. 1941. Т. 11, № 6. С. 592–614.
5. **Халатников И. М.** Разрывы и звук большой амплитуды в гелии II // ЖЭТФ. 1952. Т. 23, № 3(9). С. 253–264.
6. **Халатников И. М.** Теория сверхтекучести. М.: Наука, 1971.
7. **Немировский С. К.** Устойчивость ударной волны в сверхтекучем гелии // Физика низких температур. 1985. Т. 11, № 8. С. 787–795.
9. **Блохин А. М.** Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1986.
10. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
11. **Majda A.** Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables // Appl. Math. Sci. 1984. V. 53. P. 159.
12. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
13. **Мизохата С.** Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
14. **Блохин А. М., Крымских Д. А.** Постановка задач об устойчивости сильных разрывов в сверхтекучей жидкости // Дифференциальные уравнения с частными производными. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1991. С. 30–53.