АНАЛОГИ ЭРМИТОВЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ИНТЕГРАЛА ДИРИХЛЕ ОТ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ *)

В. Л. Васкевич

Функциональный подход к задаче приближенного интегрирования требует предварительного выбора пространства X подынтегральных функций. Обычно предполагают, что элемент φ из X обладает той или иной степенью гладкости. Отдельный интерес представляет при этом случай, когда φ бесконечно дифференцируемый [1, 2]. Не нарушая этот исторически сложившийся в теории кубатурных формул порядок, мы также зададим прежде всего класс подынтегральных функций.

Пусть Ω — ограниченная в $\mathbb{R}^n$ область. Будем рассматривать функции $u(x)$, гармонические в Ω и принадлежащие пространству Соболева $W_2^1(\Omega)$, т. е. такие, что

$$\Delta u = 0,\ x \in \Omega; \qquad \int\limits_{\Omega} (|u|^2 + |\nabla u|^2)\, dx < \infty. \tag{0.1}$$

Дальнейшая наша цель состоит в описании такого алгоритма приближенного вычисления интеграла Дирихле

$$D_\Omega(u) = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx, \tag{0.2}$$

который учитывал бы в максимальной степени свойства (0.1) и в результате приводил бы к формулам высокой степени (или порядка) точности N на исходном классе $X = X(\Omega)$.

Напомним определение степени точности N формулы приближенного интегрирования на X. Задав какой-нибудь ортонормированный базис $\{\psi_k(x)\}$ сепарабельного гильбертова пространства X, скажем, что *формула имеет на X степень точности $N+1$ относительно выбранного базиса*, если она точна на первых N его функциях [3]. Для областей Ω специального типа последовательность $\{\psi_j(x)\}$ удается построить с помощью обычного разделения переменных.

В случае линейных кубатурных формул высокий порядок точности на классе получают, следуя одному из двух правил. Согласно первому область интегрирования нужно разбить на мелкие части, например на элементарные ячейки некоторой параллелепипедной решетки узлов с шагом h. Затем исходное интегральное выражение следует аппроксимировать линейной комбинацией, составленной из значений подынтегральной

---

*) Исследования проводились при финансовой поддержке Фонда Сороса.

функции в узловых точках x_k. Коэффициенты этой комбинации выбираются так, чтобы формула действительно была точна на первых N функциях базиса X. Если узлов x_k достаточно много, причем их распределение в Ω правильно, то желаемого свойства добиться можно. При этом увеличение числа узлов приводит, как правило, к повышению порядка точности N. Указанный способ построения формул применяется как в случае функций конечной гладкости [1, 4, 5], так и для бесконечно дифференцируемых и, в частности, аналитических функций [6, 7]. В качестве базиса обычно используется последовательность полиномов, упорядоченных по возрастанию степеней.

Второй подход к построению формул, которому мы отдаем предпочтение в этой статье, существенно использует бесконечную дифференцируемость подынтегральных функций. Выбрав внутри области Ω ограниченное число узлов x_k (в частности, возможен случай ровно одного узла x_0), исходный интеграл аппроксимируют линейной комбинацией значений в этих точках как самой функции, так и всех ее производных. Высокая степень точности подобной формулы достигается не увеличением числа узлов, а с помощью специального выбора коэффициентов аппроксимирующей линейной комбинации. Подобные кубатурные формулы называют *эрмитовыми* [8].

Второй способ построения формул высокого порядка точности на классе X обобщается, как мы убедимся далее, на случай квадратичной формы, задаваемой интегралом Дирихле $D_\Omega(u)$. Естественно, что в качестве аппроксимации при этом следует брать не линейную комбинацию значений функции и ее производных в узловых точках, а квадратичную форму от этих переменных.

Дадим краткую характеристику полученных в статье результатов.

В § 1 определены необходимые в дальнейшем понятия следа произвольной функции из X во внутренней точке x_0 области Ω, фундаментальной матрицы следов $U(x_0)$ в этой точке и нормированной фундаментальной матрицы следов $\widetilde{U}(x_0)$. Каждая из этих матриц имеет бесконечный порядок.

В § 2 определен специальный базис X, называемый далее каноническим в точке x_0. Его свойства во многом похожи на свойства последовательности шаровых многочленов [1], хотя построение соответствующих базисных функций связано, вообще говоря, с разделением переменных. Доказано, что канонический в данной точке базис существует и единствен. Предложен также некоторый алгоритм аппроксимации его элементов.

В § 3, 4 даны явные оценки снизу сингулярных чисел произвольной нормированной фундаментальной матрицы следов $\widetilde{U}(x_0)$. Их справедливость установлена при весьма слабых предположениях о геометрии границы Ω в окрестности точки x_0.

В § 5 описана конструкция формул приближенного интегрирования для $D_\Omega(u)$ с единственной узловой точкой x_0 внутри Ω. Она особенно проста, когда Ω — шар и x_0 — его центр. Приблизив функцию $u(x)$ в шаре отрезком ее ряда Тейлора в точке x_0 и подставив соответствующее выражение в $D_\Omega(u)$, получим квадратичную форму от коэффициентов выбранной частичной суммы ряда Тейлора. Эта форма и есть искомая формула приближенного интегрирования для $D_\Omega(u)$. В случае произвольной области Ω ряд Тейлора для $u(x)$ в точке x_0 заменяет ее разложение по функциям канонического в точке x_0 базиса $X(\Omega)$. В остальном рассуждения аналогичны случаю шара с узловой точкой в центре. Подобная процедура применима к интегральным выражениям вида, отличного от $D_\Omega(u)$, например к выражениям

$$\int\limits_{\Omega} u(x)\,dx, \quad \int\limits_{\Omega} u(x)\,dS, \quad \int\limits_{\Omega} |u(x)|^2\,dx. \tag{0.3}$$

Интересно отметить, что в случае шаровой области Ω с узлом x_0 в центре формулы приближенного интегрирования для первых двух выражений из (0.3) принимают вид

$$\int\limits_{\Omega} u(x)\,dx \cong |\Omega| u(x_0), \quad \int\limits_{\partial\Omega} u(x)\,dx \cong |\partial\Omega| u(x_0);$$

здесь $|\Omega|$ и $|\partial\Omega|$ соответственно объем области Ω и площадь ее границы. Согласно известной теореме о среднем для гармонических функций эти формулы точны на всех элементах $X(\Omega)$. Следует иметь в виду, что для произвольной области Ω коэффициенты формулы приближенного интегрирования вычислить явно не удается и приходится вычислять их приближенные значения. Практически эта задача связана с сингулярным разложением произвольной нормированной фундаментальной матрицы следов $\widetilde{U}(x_0)$. Если матрица $\widetilde{U}(x_0)$ найдена, то ее сингулярное разложение осуществляется на ЭВМ с помощью стандартного пакета программ по линейной алгебре.

В § 6 исследовано поведение погрешности $R_N(u)$ рассматриваемой формулы приближенного интегрирования при увеличении порядка точности N. Установлено, что предел этой последовательности нулевой. Охарактеризовано также подпространство $X(\Omega)$, на котором формула дает точный результат. Как оказалось, объединение по N всех таких подпространств совпадает со всем $X(\Omega)$. Далее рассмотрена задача мажорирования погрешности $R_N(u)$ явной функцией от N. Отметим, что оценкой погрешности квадратурных формул на классах занимались многие авторы [3, 9–11]. Их результаты и утверждение основной теоремы из § 6 качественно схожи. В нашем случае погрешность $R_N(u)$ оценена сверху для функций $u(x)$ из $X(\Omega)$, обладающих дополнительным свойством. Именно, $u(x)$ должна быть гармонической не только в области Ω, но и в шаре с центром в узловой точке x_0 и радиусом R_2, бо́льшим расстояния R от x_0 до границы области Ω. Оказалось, что при этом условии погрешность $R_N(u)$ стремится к нулю «почти» экспоненциально, причем скорость этой сходимости тем выше, чем меньше отношение R/R_2. Иными словами, предлагаемый процесс приближенного интегрирования «самонастраивается» на дифференциальные свойства функции в окрестности узловой точки. В терминах монографии [12] его следует называть *процессом без насыщения*. Аналогичные результаты известны и в теории кубатурных и квадратурных формул (см., например, [2, 10, 13–16]).

Отметим, что пример приложения рассматриваемых в статье формул приближенного интегрирования к задаче Дирихле дан в [17]. Интересно было бы использовать эти формулы также в приближенных вычислениях кристаллического потенциала в рамках математической модели из [18]. Такой подход, по всей видимости, может привести к эффективному обобщению хорошо известного метода МТ-приближения кристаллических потенциалов.

§ 1. Предварительные сведения, обозначения

В этом параграфе мы определим пространства функций и последовательностей, с которыми будем иметь дело в дальнейшем. Полные доказательства приводимых здесь утверждений можно найти в [19].

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Рассмотрим множество $G_2^1(\Omega)$, состоящее из функций, гармонических в Ω и принадлежащих пространству Соболева $W_2^1(\Omega)$. Выделим в нем подпространство P_0 тождественно постоянных функций и образуем фактор-пространство (обозначим его через $X(\Omega)$) по P_0. Отметим, что интеграл Дирихле $D_\Omega(u)$ определен и однозначен на $X(\Omega)$. Задав в $X(\Omega)$ скалярное произведение

$$(u,v)_X = \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_\Omega \nabla u \nabla v \, dx \tag{1.1}$$

и заметив, что полученное при этом пространство полно по норме

$$\|u\|_X = (u,u)_X^{1/2} = (D_\Omega(u)/|\Omega|)^{1/2}, \tag{1.2}$$

убеждаемся, что $X(\Omega)$ гильбертово.

Шар с центром в точке x_1 и радиусом R_1 будем обозначать $B_{R_1}(x_1)$. При $x_1 = 0$ вместо $B_{R_1}(x_1)$ будем писать B_{R_1}.

Пространство $X(B_{R_1})$ имеет базис, состоящий из многочленов

$$u_{lm}(x) = B_l |x|^l Y_{lm}(\theta) \quad (l = 1,2,\dots,;\ m = 1,2,\dots,\sigma(l)); \tag{1.3}$$

здесь $\theta = x/|x|$, $\{Y_{lm}(\theta),\ m = 1,2,\dots,\sigma(l)\}$ — базис в пространстве сферических гармоник порядка l; $\sigma(l)$ — размерность этого пространства, т. е.

$$\sigma(l) = \frac{(n+2l-2)(l+n-3)!}{l!(n-2)!}.$$

Сферические гармоники нормированы условием

$$\int Y_{lm}^2(\theta)\, d\theta = 1, \tag{1.4}$$

а коэффициент B_l выбирается таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\|u_{lm}\|_{X(B_{R_1})} = 1. \tag{1.5}$$

Несложно убедиться, что равенство (1.5) достигается при

$$B_l = 1/(\sqrt{l} R_1^{n/2+l-1}). \tag{1.6}$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс с целочисленными координатами, $|\alpha| = l$. Положим

$$a_{\alpha,m} = 2^l \int \theta^\alpha Y_{lm}(\theta)\, d\theta. \tag{1.7}$$

Рассмотрим вместе с $X(\Omega)$ пространство l_2 вещественных последовательностей $c = (c_1, c_2, \dots, c_k, \dots)$, суммируемых с квадратом, т. е. таких, что

$$\|c\|_2^2 = \sum_{k=1}^\infty c_k^2 < +\infty.$$

Возьмем точку x_0, лежащую внутри Ω на расстоянии $R = R(x_0)$ от $\partial\Omega$, и определим оператор T_{x_0}, действующий из $X(\Omega)$ в l_2. Для произвольной функции $u(x)$ из $X(\Omega)$ положим

$$A_{lm}(x_0 \mid u) = \left(\frac{R}{2}\right)^l \sum_{|\alpha|=l} a_{\alpha,m} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}, \tag{1.8}$$

где $l \in \mathbf{N}$, $m = 1, 2, \dots, \sigma(l)$, и

$$A_l(x_0 \mid u) = (\sqrt{l} A_{l1}(x_0 \mid u), \dots, \sqrt{l} A_{l\sigma(l)}(x_0 \mid u)). \tag{1.9}$$

Из векторов $A_l(x_0 \mid u)$ конечной длины составим бесконечную последовательность

$$\bar{u}(x_0) = (A_1(x_0 \mid u), A_2(x_0 \mid u), \dots, A_k(x_0 \mid u), \dots). \tag{1.10}$$

Положим $T_{x_0}(u) = \bar{u}(x_0)$ и убедимся, что значения так заданного оператора действительно лежат в l_2. Имеет место

Лемма 1.1. *Для произвольной функции $u(x)$ из $X(\Omega)$ справедливо равенство*

$$D_{B_R(x_0)}(u) = R^{n-2} \|\bar{u}(x_0)\|_2^2. \tag{1.11}$$

Таким образом, при любой $u(x)$ из $X(\Omega)$ последовательность $\bar{u}(x_0)$ принадлежит l_2. Будем называть $\bar{u}(x_0)$ *следом функции u в точке x_0*.

Равенство (1.11) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\|u\|^2_{X(B_R(x_0))} = \frac{n}{\omega_n R^2} \|T_{x_0}(u)\|_2^2; \tag{1.12}$$

здесь ω_n обозначает площадь единичной сферы в n-мерном пространстве. Это означает, что оператор $\alpha_n T_{x_0}$, где $\alpha_n = \sqrt{n}/(R\sqrt{\omega_n})$, изометрически отображает $X(B_R(x_0))$ в l_2.

Вместе с величиной (1.9) при натуральном l рассмотрим вектор

$$\widetilde{A}_l(x_0 \mid u) = \left(\frac{A_{l1}(x_0 \mid u)}{\sqrt{2l+n}}, \dots, \frac{A_{l\sigma(l)}(x_0 \mid u)}{\sqrt{2l+n}}\right)$$

и соответствующую ему последовательность

$$\widetilde{u}(x_0) = (\widetilde{A}_1(x_0 \mid u), \widetilde{A}_2(x_0 \mid u), \dots, \widetilde{A}_k(x_0 \mid u), \dots),$$

которую назовем *нормированным следом $u(x)$ в точке x_0*. Очевидно, что

$$\|\widetilde{u}(x_0)\|_2 \leqslant \|\bar{u}(x_0)\|_2.$$

Следовательно, оператор $\widetilde{T}_{x_0}(u) = \widetilde{u}(x_0)$ действует из $X(\Omega)$ в l_2.

Пусть в $X(\Omega)$ задан ортонормированный базис $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Сопоставим ему матрицу $U(x_0)$ бесконечного порядка, столбцы которой суть следы в точке x_0 функций $u_k(x)$. Будем называть $U(x)$ *базисной* (*фундаментальной*) *матрицей следов в точке x_0*. Имеет место

Лемма 1.2. *Фундаментальная матрица следов определяет линейный ограниченный оператор из l_2 в l_2, имеющий к тому же левый обратный.*

Любая функция $u(x)$ из $X(\Omega)$, представленная в виде

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x),$$

имеет в точке x_0 след

$$\bar{u}(x_0) = U(x_0)c, \tag{1.13}$$

где $c = (c_1, c_2, \dots, c_k, \dots)$. Аналогичное представление имеет место и для нормированного следа в точке x_0:

$$\widetilde{u}(x_0) = \widetilde{U}(x_0)c,$$

где $\widetilde{U}(x_0)$ — нормированная фундаментальная матрица следов, столбцы которой суть нормированные следы в x_0 базисных функций $u_k(x)$. Очевидно, что $\widetilde{U}(x_0)$ определяет линейный ограниченный оператор из l_2 в l_2, имеющий левый обратный. Более того, справедлива следующая

Лемма 1.3. *Матрице $\widetilde{U}(x_0)$ соответствует вполне непрерывный оператор из l_2 в l_2.*

Норму в $L_2(B_R(x_0))$ произвольной функции $u(x)$ из $G_2^1(\Omega)$ можно выразить через норму в l_2 нормированного следа $\widetilde{u}(x_0)$. Более точно, имеет место равенство

$$\int\limits_{B_R(x_0)} |u|^2\,dx = \frac{R^n}{n}|u(x_0)|^2 + R^n \|\widetilde{u}(x_0)\|_2^2\,. \tag{1.14}$$

Его несложно получить, перейдя в интеграле слева к сферическим координатам, а затем воспользовавшись следующим разложением рассматриваемой функции в ряд по шаровым многочленам:

$$u(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{R}\right)^l \sum_{m=1}^{\sigma(l)} A_{lm}(x_0 \mid u) Y_{lm}(\theta). \tag{1.15}$$

Множество всех следов в точке x_0 функций, входящих в $X(\Omega)$, обозначим через $l_2(\Omega \mid x_0)$. Из (1.13) следует, что это множество совпадает с областью значений произвольной фундаментальной матрицы следов.

Отдельный интерес представляет случай, когда область Ω обладает симметрией относительно какой-либо оси (будем считать, что это — координатная ось x_1). Рассмотрим в $X(\Omega)$ подпространство $X_0(\Omega)$, состоящее из x_1-осесимметричных функций. Ясно, что $X_0(\Omega)$ замкнуто относительно нормы $\|\cdot\|_{X(\Omega)}$, поэтому само является гильбертовым пространством. Если Ω совпадает с шаром B_{R_1}, пространство $X_0(B_{R_1})$ имеет базис из шаровых осесимметричных многочленов:

$$u_{l1}(x) = B_l\,|x|^l\,Y_{l1}(\theta) \qquad (l = 1, 2, \dots). \tag{1.16}$$

Множитель B_l определен формулой (1.6), а

$$Y_{l1}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} T_l\Big(x_1/|x|\Big) & \text{при } n = 2, \\ A_l^1 C_l^{(\frac{n}{2}-1)}\Big(x_1/|x|\Big) & \text{при } n \geqslant 3. \end{cases}$$

Через $T_l(t)$ мы обозначили полином Чебышева первого рода степени l, а через $C_l^{(p)}(t)$ — многочлен Гегенбауэра, получающийся как коэффициент следующего разложения:

$$\frac{1}{(1-2zt+z^2)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(p)}(t) z^k.$$

Нормированный множитель A_l^1 при $n \geqslant 3$ задается равенством

$$A_l^1 = \Big(\frac{1}{2}\,\frac{l!(n-3)!}{(l+n-3)!}\,(n+2l-2)\,\frac{\Gamma(n/2-1)}{\pi^{n/2}}\Big). \tag{1.17}$$

В дальнейшем мы используем также известное равенство

$$C_l^{(\frac{n}{2}-1)}(1) = \frac{(n+l-3)!}{l!(n-3)!}. \tag{1.18}$$

Для функций $u(x)$ из $X_0(\Omega)$ остаются справедливыми все равенства, доказанные выше применительно к элементам $X(\Omega)$. Многие из них при этом упрощаются. Например, разложение (1.15) для $u(x)$ из $X_0(\Omega)$ принимает вид

$$U(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \Big(\frac{|x|}{R}\Big)^l A_{l1}(x_0 \mid u) Y_{l1}(\theta), \tag{1.19}$$

где

$$A_{l1}(x_0 \mid u) = \begin{cases} \sqrt{\pi}\,\frac{R^l}{l!}\,\frac{\partial^l u_1}{\partial x_1^l}(x_0) & \text{при } n = 2, \\ \frac{l!(n-3)!}{(l+n-3)!}\,\frac{4\pi^{n/2}}{(n+2l-2)\Gamma(n/2-1)}\,\frac{R^l}{l!}\,\frac{\partial^l u}{\partial x_1^l}(x_0). \end{cases}$$

Равенство (1.11) принимает вид

$$\begin{aligned} D_{B_R(x_0)}(u) = {} & \pi^{\frac{n}{2}} R^{n-2} \gamma_n \\ & \times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l!}{(l+n-3)!}\,\frac{2l}{(n+2l-2)}\,\Big|\frac{R^l}{l!}\,\frac{\partial^l(u)}{\partial x_1^l}(x_0)\Big|^2; \end{aligned} \tag{1.20}$$

здесь $\gamma_2 = 1$, $\gamma_n = 2(n-3)!/\Gamma(n/2-1)$ при $n \geqslant 3$.

Пусть имеется односвязная часть γ границы области Ω. *Функция* $u(x)$ *из* $G_2^1(\Omega)$ *принадлежит классу* $G_{2,0}^1(\Omega)$, если $u(x)$ обращается на γ в нуль. Скалярное произведение и норму в $G_{2,0}^1(\Omega)$ зададим равенствами (1.1) и (1.2). След функции $u(x)$ из $G_{2,0}^1(\Omega)$ в точке x_0 определим как последовательность $(A_{00}(x_0 \mid u), \bar{u}(x_0))$. Аналогично видоизменяются понятия нормированного следа, фундаментальной матрицы следов и др. Ввиду этого обстоятельства в наших дальнейших построениях вместе с $X(\Omega)$ можно использовать также пространство $G_{2,0}^1(\Omega)$.

§ 2. Канонический базис пространства

Пусть точка x_0 лежит внутри ограниченной области Ω из $\mathbb{R}^n$. Расстояние от x_0 до границы Ω будем, как и ранее, обозначать через $R = R(x_0)$. Известно, что пространство $W_2^1(\Omega)$ для ограниченной области Ω сепарабельно [20]. Значит, сепарабельно и его замкнутое подпространство $X(\Omega)$, т. е. в $X(\Omega)$ заведомо существует счетный ортонормированный базис. Такой базис не единствен. Выделим среди них некоторый специальный, называя его в дальнейшем каноническим базисом в точке x_0.

- Полная ортонормированная в $X(\Omega)$ последовательность $\{\psi_k(x)\}$ называется *каноническим в точке x_0 базисом*, если столбцы соответствующей нормированной фундаментальной матрицы следов $\widetilde{\Phi}(x_0)$ взаимно ортогональны, т. е.

$$\widetilde{\Phi}^*(x_0)\widetilde{\Phi}(x_0) = \Lambda^2, \tag{2.1}$$

где Λ^2 — диагональная матрица.

Теорема 2.1. *Для любой внутренней точки x_0 области Ω канонический базис пространства $X(\Omega)$ существует и единствен.*

Доказательству теоремы предпошлем одну лемму.

Лемма 2.1. *Любая нормированная фундаментальная матрица следов $\widetilde{U}(x_0)$ может быть разложена в произведение трех сомножителей:*

$$\widetilde{U}(x_0) = Q\Lambda\Phi^*, \tag{2.2}$$

где Λ — диагональная матрица с положительными числами на диагонали, Φ определяет в l_2 унитарный оператор, а матрица Q частично-изометрическая, причем $Q^*Q = I$. Вид Q и Λ не зависит от $\widetilde{U}(x_0)$.

Доказательство. Отметим, что оператор $\widetilde{U}(x_0)$ допускает полярное разложение [21], т. е. представим в виде

$$\widetilde{U}(x_0) = P(x_0)S(x_0); \tag{2.3}$$

здесь $P = P(x_0)$ — частично-изометрический оператор, а $S = S(x_0)$ — самосопряженный неотрицательный оператор, удовлетворяющий условию $S^2 = \widetilde{U}^*(x_0)\widetilde{U}(x_0)$.

Напомним простейшие свойства частично-изометрического оператора P. Если $H(P)$ — подпространство l_2, являющееся ортогональным дополнением к ядру P, то P изометрически отображает $H(P)$ на свою область значений $R_P(l_2)$. При этом пространство $R_P(l_2)$ замкнуто, а произведения P^*P и PP^* — это ортопроекторы l_2 на $R_{P^*}(l_2)$ и $R_P(l_2)$ соответственно.

Произведению $\widetilde{U}^*\widetilde{U}$, как следует из леммы 1.3, соответствует самосопряженный вполне непрерывный оператор в l_2. Очевидно, что он к тому же неотрицательно определен и нуль не является его собственным числом. В противном случае ядро оператора U было бы нетривиально. В самом деле, если x — ненулевой элемент l_2 такой, что $\widetilde{U}^*\widetilde{U}x$ равно нулю, то $(\widetilde{U}x, \widetilde{U}x) = (\widetilde{U}^*\widetilde{U}x, x) = 0$. Поэтому $\widetilde{U}x$ — это нулевой элемент l_2, и тем самым x принадлежит ядру U. Известно [22], что для оператора с такими свойствами справедливо разложение

$$\widetilde{U}^*\widetilde{U} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 P_{\varepsilon_k}, \tag{2.4}$$

где $\{\varepsilon_k^2\}_{k=1}^{\infty}$ — монотонно невозрастающая последовательность его собственных чисел, а P_{ε_k} — проектор на соответствующее ε_k^2 собственное подпространство. Для оператора S при этом имеет место равенство

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k P_{\varepsilon_k}, \tag{2.5}$$

где числа ε_k положительны для всех k.

Хорошо известно также, что в пространстве l_2 существует ортонормированный базис из собственных векторов вполне непрерывного самосопряженного оператора $\widetilde{U}^*\widetilde{U}$. Пользуясь этим фундаментальным утверждением, несложно убедиться, что произведение P^*P (где P — первый из сомножителей в (2.3)) — это тождественный оператор. Действительно, по условию P^*P есть ортопроектор l_2 на $R_{P^*}(l_2)$. Тем самым требуемое соотношение будет установлено, если убедиться, что $R_{P^*}(l_2)$ совпадает со всем l_2. Рассмотрим ортогональное дополнение к $R_{P^*}(l_2)$ в l_2 и докажем, что оно тривиально.

Пусть y принадлежит этому ортогональному дополнению. Тогда, как известно, Py равно нулю. Найдем элемент x из l_2 такой, что $y = Sx$. Существование x следует из полноты системы собственных векторов S во всем l_2. Имеем

$$0 = Py = PSx = \widetilde{U}x,$$

т. е. x принадлежит ядру $\widetilde{U}$, совпадающему с ядром оператора U в l_2. Иными словами, x — нулевой элемент l_2. Значит, равенство $P^*P = I$ установлено.

Образуем матрицу Φ, столбцы которой совпадают с собственными векторами оператора $\widetilde{U}^*(x_0)\widetilde{U}(x_0)$, занумерованными по порядку убывания соответствующих им собственных чисел ε_j. Рассмотрим также диагональную матрицу Λ с числами ε_j на диагонали. Из (2.4), (2.5) получим

$$\widetilde{U}^*\widetilde{U} = \Phi\Lambda^2\Phi^*, \qquad S = \Phi\Lambda\Phi^*. \tag{2.6}$$

Матрица Φ определяет унитарный оператор из l_2 в l_2, т. е. $\Phi^*\Phi = \Phi\Phi^* = I$. Подставив второе из равенств (2.6) в (2.3), получим разложение (2.2) с $Q = P\Phi$. Из свойств матриц P и Φ легко следует, что Q действительно определяет в l_2 частично-изометрический оператор, причем $Q^*Q = I$.

Убедимся, что вид первых двух сомножителей в (2.2) не зависит от выбора фундаментальной матрицы следов.

Пусть $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ — любой ортонормированный базис X. Образуем матрицу перехода $T = (t_{ij})$, где $t_{ij} = (u_i, v_j)_X$, определяющую в l_2 унитарный оператор. Нормированная фундаментальная матрица следов $\widetilde{V}(x_0)$, соответствующая базису $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, связана с $\widetilde{U}(x_0)$ соотношением

$$\widetilde{V}(x_0) = \widetilde{U}(x_0)T. \tag{2.7}$$

Действительно, если

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} b_i v_i = \sum_{J=1}^{\infty} c_j u_j,$$

то

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \Big(\sum_{j=1}^{\infty} t_{ji} u_j \Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} t_{ji} b_i \Big) u_j.$$

Таким образом, $c = (c_1, \dots, c_k, \dots)$ совпадает с последовательностью Tb, где $b = (b_1, b_2, \dots, b_k, \dots)$, значит, соотношение (2.7) верно.

Из (2.7) следует, что оператор $S_* = T^*ST$ представляет собой самосопряженный квадратный корень из $\widetilde{V}^*\widetilde{V}$. Так как S_* и S унитарно эквивалентны, они имеют одинаковые наборы собственных чисел. Таким образом, последовательность собственных чисел матрицы S_* совпадает с последовательностью $\{\varepsilon_k\}$ из равенства (2.5). Но это и означает, что $\Lambda(x_0)$ в (2.2) не зависит от выбора ортонормированного базиса в $X(\Omega)$.

Далее, полярное разложение P_*S_* для оператора V образуют операторы $P_* = PT$ и $P_* = T^*ST$. Ясно, что оператор P_*, как и P, частично-изометрический. Если Φ_* — базис из собственных векторов $\widetilde{V}^*\widetilde{V}$, то Φ_* совпадает с $T^*\Phi$. Таким образом, в качестве первого сомножителя Q_* разложения (2.2) оператора $\widetilde{V}(x_0)$ подходит матрица $Q_* = P_*\Phi_* = PT \cdot T^*\Phi = Q$. Лемма 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть функции $u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, образуют ортонормированный базис пространства X. Ему соответствуют матрицы $U(x)$ и Φ, удовлетворяющие соотношению (2.6). Рассмотрим функцию

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(j)} u_k(x), \qquad j = 1, 2, \dots,$$

для которой последовательность коэффициентов

$$c_j = (c_1^{(j)}, c_2^{(j)}, \dots, c_k^{(j)}, \dots)$$

совпадает с j-м столбцом матрицы Φ. Несложно убедиться, что последовательность $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ образует в X ортонормированный базис. Матрица перехода $T = (t_{ij})$ от базиса $\{\varphi_j(x)\}$ к исходному совпадает с Φ:

$$t_{ij} = (u_i, \varphi_j)_X = c_i^{(j)}.$$

Фундаментальная матрица следов $\Phi(x_0)$, порождаемая последовательностью $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$, подчинена условию (2.7). Поэтому

$$\widetilde{\Phi}(x_0) = \widetilde{U}(x_0)T = Q\Lambda\Phi^*\Phi = Q\Lambda; \tag{2.8}$$

здесь Q, Λ — операторы из равенства (2.2).

Таким образом, j-й столбец матрицы $\widetilde{\Phi}(x_0)$ совпадает с j-м столбцом матрицы Q, все компоненты которого умножены на ε_j. Но столбцы матрицы Q взаимно ортогональны в силу условия $Q^*Q = I$. Поэтому таким же свойством обладают и столбцы матрицы $\widetilde{\Phi}(x_0)$. Иными словами, базис

$\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ является каноническим в точке x_0. Убедимся теперь, что он единствен.

Пусть кроме базиса $\{\varphi_j(x)\}$ имеется еще один канонический в точке x_0 базис $\{v_j(x)\}$, причем первому из них соответствует фундаментальная матрица следов $\widetilde{\Phi}_1(x_0)$, а второму — $\widetilde{\Phi}_2(x_0)$. Каждая из этих матриц допускает разложение вида (2.2), и, как следует из доказательства леммы 2.1, матрица Φ в этом разложении единичная как для $\widetilde{\Phi}_1(x_0)$, так и для $\widetilde{\Phi}_2(x_0)$. Матрицы Q и Λ в (2.2) также не зависят от выбора базиса в $X(\Omega)$, поэтому $\widetilde{\Phi}_1(x_0)$ совпадает с $\widetilde{\Phi}_2(x_0)$. Тем самым следы гармонических в точке x_0 функций $u_j(x)$ и $v_j(x)$ равны. Значит, эти функции совпадают друг с другом во всей области Ω. Таким образом, доказана единственность канонического базиса. Теорема 2.1 доказана.

Разложение (2.2) по аналогии со случаем матриц конечных размеров назовем *сингулярным.* Как следует из теоремы 2.1, оно особенно просто в случае канонического базиса. Именно, соответствующая матрица $\widetilde{\Phi}(x_0)$ представима в виде

$$\widetilde{\Phi}(x_0) = Q(x_0 \mid \Omega)\Lambda(x_0 \mid \Omega).$$

Приведем пример канонического в точке базиса. Пусть область Ω совпадает с шаром $B_R(x_0)$. Рассмотрим последовательность шаровых многочленов $u_{lm}(x)$, заданных в сферических координатах с центром в x_0:

$$u_{lm}(x) = B_l\,|x|^l\,Y_{lm}(\theta), \quad l = 1,2,\dots\,; \quad m = 1,2,\dots,\sigma(l). \tag{2.9}$$

Напомним, что $\theta = x/|x|$, а $\sigma(l)$ — размерность пространства сферических гармоник порядка l. Коэффициент B_l выбираем так, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_{B_R(x_0)} |\nabla u_{lm}(x)|^2\,dx = 1. \tag{2.10}$$

Как несложно убедиться, равенство (2.10) имеет место при

$$B_l = \frac{1}{(\sqrt{l}R^{n/2+l-1})}. \tag{2.11}$$

Лемма 2.2. *Последовательность шаровых многочленов* (2.9) *образует базис пространства $X(\Omega)$, канонический в точке x_0.*

Доказательство. Многочлены (2.9) образуют базис $X(\Omega)$, что следует из формул (1.15) и (1.11). Также несложно проверить их ортонормированность в $X(\Omega)$. Пусть системе (2.9) соответствует нормированная фундаментальная матрица следов $\widetilde{U}(x_0)$. Убедимся, что ее столбцы ортогональны в l_2. Иначе говоря, докажем, что

$$\widetilde{U}^*\widetilde{U}(x_0) = \Lambda^2, \tag{2.12}$$

где Λ^2 диагональная. Рассмотрим интеграл

$$I(u,v) = \int\limits_{B_R(x_0)} u(x)v(x)\,dx,$$

определенный заведомо для u, v из $X(\Omega)$. Легко видеть, что

$$I(u,v) = \frac{I(u+v,u+v) - I(u-v,u-v)}{2}.$$

Подставив в правую часть последнего равенства разложения интегралов $I(u+v,u+v)$ и $I(u-v,u-v)$ по формуле (1.14), получим

$$I(u,v) = R^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+n} \sum_{m=1}^{\sigma(l)} A_{lm}(x_0 \mid u) A_{lm}(x_0 \mid v). \tag{2.13}$$

Взяв здесь вместо u функцию $u_{l_1 m_1}(x)$, а вместо v — полином $u_{l_2 m_2}(x)$, где $l_1 \neq l_2$ или $m_1 \neq m_2$, видим, что интеграл слева равен нулю. В правой же части (2.12) стоит скалярное произведение двух различных столбцов матрицы $\widetilde{U}(x_0)$ в пространстве l_2. Тем самым равенство (2.12), а с ним и лемма 2.2 доказаны.

Приведенный пример позволяет рассматривать канонический в точке базис $X(\Omega)$ как аналог системы шаровых многочленов для произвольной ограниченной области.

Сделаем некоторые замечания по поводу практического конструирования канонического в заданной точке базиса. Прежде всего, следует взять полную ортонормированную в $X(\Omega)$ последовательность функций $\{u_k(x)\}$. Затем, отыскав соответствующую ей матрицу $\widetilde{U}(x_0)$, нужно построить систему $c^{(k)}$ собственных векторов оператора $\widetilde{U}^*(x_0)\widetilde{U}(x_0)$, упорядочив их по убыванию собственных чисел. Каждый из векторов $c^{(k)}$ даст последовательность коэффициентов Фурье в разложении по исходному базису искомой функции $\varphi_k(x)$. Таким образом, задача практического построения канонического базиса эквивалентна задаче нахождения полной системы собственных векторов произвольной матрицы вида $\widetilde{U}^*(x_0)\widetilde{U}(x_0)$. Оставляя в $\widetilde{U}(x_0)$ конечное число строк и столбцов, приходим к стандартной задаче линейной алгебры. При этом, конечно, канонический базис находится лишь приближенно. Отметим, что попытка найти нужную систему функций с помощью обычного процесса Грама — Шмидта ортогонализации базиса $\{u_k(x)\}$ в скалярном произведении

$$\frac{1}{R^n} \int\limits_{B_R(x_0)} u(x)v(x)\,dx \tag{2.14}$$

к успеху, вообще говоря, не приводит. Это происходит потому, что функции $u(x)$, $v(x)$, ортогональные в смысле (2.14), не обязательно останутся таковыми в смысле скалярного произведения пространства $X(\Omega)$.

Диагональный элемент с номером j в матрице Λ, как следует из (2.1), представляет собой l_2-норму последовательности $\{\widetilde{\varphi}_j(x_0)\}$, где $\varphi_j(x)$ — функция из канонического в x_0 базиса $X(\Omega)$. Условимся обозначать этот диагональный элемент как $\varepsilon_j(x_0 \mid \Omega)$. Если речь будет идти о пространстве $X_0(\Omega)$, то соответствующее обозначение будет $\varepsilon_{j,0}(x_0 \mid \Omega)$. Обе эти последовательности согласно упорядочению функций $\varphi_j(x)$ не возрастают:

$$\varepsilon_1(x_0 \mid \Omega) \geqslant \varepsilon_2(x_0 \mid \Omega) \geqslant \ldots \geqslant \varepsilon_j(x_0 \mid \Omega) \geqslant \ldots,$$
$$\varepsilon_{1,0}(x_0 \mid \Omega) \geqslant \varepsilon_{2,0}(x_0 \mid \Omega) \geqslant \ldots \geqslant \varepsilon_{j,0}(x_0 \mid \Omega) \geqslant \ldots.$$

Проведенные в этом параграфе рассуждения показывают, в частности, что последовательность $\varepsilon_j(x_0 \mid \Omega)$ состоит из сингулярных чисел произвольной нормированной фундаментальной матрицы следов $\widetilde{U}(x_0)$. Аналогично $\varepsilon_{j,0}(x_0 \mid \Omega)$ — это последовательность сингулярных чисел матрицы $\widetilde{U}(x_0)$, построенной в случае пространства $X_0(\Omega)$. Величины $\varepsilon_j(x_0 \mid \Omega)$ и $\varepsilon_{j,0}(x_0 \mid \Omega)$ положительны, а при неограниченном увеличении j как первая, так и вторая стремятся к нулю. В следующих двух параграфах нас будут интересовать верхние и нижние оценки этих величин в виде явных функций аргумента j.

§ 3. Мажоранта последовательности сингулярных чисел

В этом параграфе будут получены оценки сверху величин $\varepsilon_j(x_0 \mid \Omega)$ в виде явных функций номера j. Начнем с важного частного случая, когда область Ω совпадает с шаром $B_{R_1}(x_1)$.

В лемме 2.2 доказано, что канонический в точке x_0 базис $X(\Omega)$ состоит из шаровых многочленов

$$u_{lm}(x) = B_l\, |x|^l\, Y_{lm}(\theta), \quad l = 1, 2, \dots, \tag{3.1}$$

где множитель B_l определяется формулой (1.6). Множество $u_{lm}(x)$ упорядочим по возрастанию степени l и положим $j(l) = \sigma(1)+\sigma(2)+\ldots+\sigma(l)+1$.

В случае пространства $X_0(\Omega)$ базис, канонический в центре шара, имеет вид (1.16). Справедлива следующая

Лемма 3.1. *Убывающая числовая последовательность ε_j, задаваемая при натуральном l и $j(l) \leqslant j \leqslant j(l+1) - 1$ равенством*

$$\varepsilon_j = \frac{1}{R^{(n-3)/2}} \frac{1}{\sqrt{l(n+2l+1)}}, \tag{3.2}$$

совпадает с множеством сингулярных чисел $\{\varepsilon_j(x_0 \mid B_R(x_0)\}$ матрицы $\widetilde{U}(x_0)$, соответствующей базису (3.1). *Сингулярные числа $\varepsilon_{j,0}(x_0|B_R(x_0))$ совпадают при $j \geqslant 1$ с величинами*

$$\varepsilon_{j,0} = \frac{1}{R^{(n-3)/2}} \frac{1}{(j-1)(2j+n-1)}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Квадрат нормы j-го столбца матрицы $\widetilde{U}(x_0)$, соответствующей базису (3.1), представим в виде суммы ряда:

$$\varepsilon_j^2(x_0 \mid B_R(x_0)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+n} \sum_{p=1}^{\sigma(k)} A_{kp}^2(x_0 \mid u_{lm}); \tag{3.4}$$

здесь l — натуральное число, m — одно из чисел $1, 2, \dots, \sigma(l)$ и $j(l) \leqslant j \leqslant j(l+1) - 1$. Правая часть последнего равенства совпадает с интегралом

$$\frac{1}{R^n} \int\limits_{B_R(x_0)} |u_{lm}(x)|^2\, dx, \tag{3.5}$$

который легко вычислить, переходя к сферическим координатам с центром в x_0. Проводя необходимые выкладки, получим

$$\varepsilon_j^2(x_0 \mid B_R(x_0)) = \frac{B_l^2 R^{2l+1}}{(2l+n+1)} = \frac{1}{R^{n-3} l(2l+n+1)}.$$

В осесимметричном случае для любого l существует ровно одна линейно независимая сферическая гармоника степени l, обладающая требуемой симметрией, т. е. порядок $\sigma(l)$ для всех l равен единице. Поэтому величина $j(l)$ совпадает с $l+1$, а условие $j(l) \leqslant j \leqslant j(l+1)-1$ означает, что $j = l+1$. Формула (3.4) при этом упрощается и принимает вид

$$\varepsilon_{j,0}^2(x_0 \mid B_R(x_0)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+n} A_{k1}^2(x_0 \mid u_{j-1,1}).$$

Представив ряд справа интегралом (3.5) с $m = 1$ и вычислив его, придем к искомой формуле (3.3). Лемма 3.1 доказана.

Установим асимптотику последовательности (3.2) при $j \to \infty$. Известно равенство [1]

$$\sigma(k) = (2k+n-2)\frac{(n+k-3)!}{(n-2)!k!} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} - \frac{(k+n-3)!}{(k-2)!(n-1)!}.$$

Поэтому при нечетном l справедливо соотношение

$$j(l) = \sum_{k=1}^{l} \sigma(k) + 1 = (2l+n-1)\frac{(l+n-2)!}{l!(n-1)!}.$$

Таким образом, при нечетном неограниченно возрастающем k функция $j(k)$ ведет себя как степенная, т. е. $j(k) \sim Ak^{n-1}$, где $A \neq 0$. Величина $\sigma(k)$ растет при больших k как функция Bk^{n-2}. Значит, при четных возрастающих k величина $j(k) = j(k-1) + \sigma(k)$ эквивалентна функции $Ak^{n-1} + Bk^{n-2} = Ak^{n-1}(1 + B/(Ak))$.

Следовательно, при больших l и $j(l) \leqslant j \leqslant (l+1) - 1$ справедливы неравенства

$$\left(\frac{j+1}{A}\right)^{1/(n-1)} - 1 \leqslant l \leqslant \left(\frac{j}{A}\right)^{1/(n-1)},$$

из которых в силу (3.2) выводим искомую асимптотическую формулу:

$$\begin{aligned} \varepsilon_j(x_0 \mid B_R(x_0)) &= \frac{1}{\sqrt{2}R^{(n-3)/2}} \frac{1}{l}\left\{1 - \frac{n+1}{4l} + O\left(\frac{1}{l^2}\right)\right\} \\ &= \frac{A^{1/(n-1)}}{\sqrt{2}R^{(n-3)/2}} \frac{1}{j^{1/(n-1)}}\left\{1 - \frac{n+1}{4}(A/j)^{1/(n-1)} + O(1/j^{2/(n-1)})\right\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Вернемся к произвольной ограниченной области Ω. Пользуясь известными экстремальными свойствами собственных чисел линейного оператора в гильбертовом пространстве, найдем важные представления величин $\varepsilon_j(x_0 \mid \Omega)$. Отметим, что в качестве пространства $X(\Omega)$ в последующих рассуждениях этого параграфа может выступать не только фактор-пространство $G_2^1(\Omega)$ по P_0, но и $G_{2,0}^1(\Omega)$.

Будем обозначать произвольное конечномерное подпространство l_2 через h_j, причем индекс j здесь совпадает с размерностью рассматриваемого подпространства. Если функции $\{\psi_k(x)\}$ образуют канонический в x_0 базис $X(\Omega)$, то линейную оболочку первых j функций этого базиса обозначим как $E_j = E_j(X(\Omega))$. В случае $X_0(\Omega)$ соответствующее обозначение будет $E_{j,0} = E_j(X_0(\Omega))$. Линейную оболочку в l_2 множества нормированных следов $\widetilde{\psi}_1(x_0), \widetilde{\psi}_2(x_0), \dots, \widetilde{\psi}_j(x_0)$ будем обозначать как e_j. Для любых двух функций u, v из $G_2^1(\Omega)$ определим билинейную и квадратичную формы, положив при $0 < r \leqslant R$

$$B_r(u,v) = \frac{1}{r^n} \int\limits_{B_r(x_0)} u(x)v(x)\,dx - \frac{u(x_0)v(x_0)}{n},$$

$$I_r(u) = B_r(u,u).$$

В силу равенства (1.14) значения $B_r(u,v)$ и $I_r(u)$ определены однозначно на элементах $u(x)$, $v(x)$ из $X(\Omega)$. В частности, если $u(x)$ принадлежит $X(\Omega)$, т. е. если $u(x)$ — класс отличающихся друг от друга на постоянное слагаемое функций из $G_2^1(\Omega)$, то в этом классе обязательно найдется элемент $u_*(x)$ такой, что $u_*(x_0) = 0$. При этом очевидно

$$I_r(u) = I_r(u_*) = \frac{1}{r^n} \int\limits_{B_r(x_0)} |u_*(x)|^2\,dx.$$

Число $\varepsilon_j^2(x_0 \mid \Omega)$, как оказывается, представляет собой экстремальное значение функционала $I_r(u)$ на подпространстве $X(\Omega)$. Более точно, справедлива следующая

Лемма 3.2. *Имеют место равенства*

$$\varepsilon_j^2(x_0 \mid \Omega) = \sup_{u \in E_j^\perp} \frac{I_R(u)}{\|u\|_X^2} = \inf_{D_j \subset X(\Omega)} \sup_{u \in D_j^\perp} \frac{I_R(u)}{\|u\|_X^2}; \tag{3.7}$$

здесь R — расстояние от x до $\partial\Omega$, а точная нижняя грань берется по всем j-мерным подпространствам $X(\Omega)$. В случае пространства $X_0(\Omega)$, когда точка x_0 лежит на координатной оси x_1, справедлива формула

$$\varepsilon_{j,0}^2(x_0 \mid \Omega) = \sup_{u \in E_{j,0}^\perp \cap X_0(\Omega)} \frac{I_R(u)}{\|u\|_{X_0}^2} = \inf_{D_{j,0} \subset X_0(\Omega)} \sup_{u \in D_{j,0}^\perp \cap X_0(\Omega)} \frac{I_R(u)}{\|u\|_{X_0}^2}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Предположим, что нормированная фундаментальная матрица следов $\widetilde{U}(x_0)$ соответствует каноническому в точке x_0 базису. Ее сингулярные числа обладают, как известно [23], следующим минимаксным свойством:

$$\varepsilon_{j+1}^2(x_0 \mid \Omega) = \inf_{h_j \subset l_2} \sup_{c \in h_j^\perp} \frac{\|\widetilde{U}(x_0)c\|_2^2}{\|c\|_2^2}. \tag{3.9}$$

Точная нижняя грань здесь берется по всем j-мерным подпространствам l_2 и достигается на подпространстве e_j, т. е.

$$\varepsilon^2_{j+1}(x_0 \mid \Omega) = \sup_{c\in e_j^{\perp}} \frac{\|\widetilde{U}(x_0)c\|_2^2}{\|c\|_2^2}. \tag{3.10}$$

Каждый элемент c из l_2 можно рассматривать как последовательность коэффициентов Фурье некоторой функции $u(x)$ из $X(\Omega)$ по каноническому в точке x_0 базису. При этом справедливы соотношения

$$\|c\|_2 = \|u\|_{X(\Omega)}, \quad \|\widetilde{U}(x_0)c\|_2 = \|\widetilde{u}(x_0)\|_2. \tag{3.11}$$

Далее, вектор c ортогонален в l_2 подпространству e_j тогда и только тогда, когда соответствующая ему функция $u(x)$ ортогональна в $X(\Omega)$ множеству E_j. Это замечание, а также равенства (3.11) позволяют записать (3.10) в другом виде:

$$\varepsilon^2_{j+1}(x_0 \mid \Omega) = \sup_{u\in E_j^{\perp}} \frac{\|\widetilde{u}(x_0)\|_2^2}{\|u\|_2^2}. \tag{3.12}$$

Отсюда и из (1.14) сразу следует первое из равенств (3.7). Второе мы получим, применив обычную в таких случаях схему рассуждений. Отметим очевидное соотношение

$$\varepsilon^2_{j+1}(x_0 \mid \Omega) \geqslant \inf_{D_j\subset X(\Omega)} \sup_{u\in D_j^{\perp}} \frac{I_R(u)}{\|u\|_X^2}. \tag{3.13}$$

Пусть теперь D_j — любое j-мерное подпространство $X(\Omega)$. Рассмотрим ненулевую функцию $u_0(x)$, лежащую в E_{j+1} и ортогональную к D_j (такая, очевидно, всегда существует). Нормируем $u_0(x)$ так, чтобы $\|u_0\|_X = 1$, и предположим, что

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{j+1} c_k^{(0)} \psi_k(x).$$

Учитывая последнее равенство, получим

$$\sup_{u\in D_j^{\perp}} \frac{I_R(u)}{\|u\|_X^2} \geqslant I_R(u_0) = \sum_{k,m=1}^{j+1} c_k^{(0)} c_m^{(0)} B_r(\psi_k, \psi_m). \tag{3.14}$$

Согласно (1.14) $B_r(\psi_k, \psi_m)$ в последней сумме представимы в виде

$$B_r(\psi_k, \psi_m) = (\widetilde{\psi}_k(x_0), \widetilde{\psi}_m(x_0)) = \varepsilon_k^2(x_0 \mid \Omega)\delta_k^m,$$

где δ_k^m — символ Кронекера. Продолжим формулу (3.14):

$$\sup_{u\in D_j^{\perp}} \frac{I_R(u)}{\|u\|_X^2} \geqslant \sum_{k=1}^{j+1} |c_k^{(0)}|^2 \varepsilon_k^2(x_0 \mid \Omega) \geqslant \varepsilon^2_{j+1}(x_0 \mid \Omega) \sum_{k=1}^{j+1} |c_k^{(0)}|^2 = \varepsilon^2_{j+1}(x_0 \mid \Omega).$$

Взяв от обеих частей точную нижнюю грань по всем D_j и пользуясь неравенством (3.13), получаем второе из равенств (3.7). Представления (3.8) выводятся аналогично. Лемма 3.2 доказана.

Следствие 3.1. *Пусть область Ω совпадает с шаром $B_R(x_0)$. Тогда при натуральных l и $j(l) \leqslant j \leqslant j(l+1)-1$ имеет место равенство*

$$\inf_{D_j \subset X(B_R(x_0))} \sup_{u \in D_j^\perp} \frac{I_R(u)}{\|u\|_X^2} = \frac{B_l^2 R^{2l+1}}{(2l+n+1)}, \tag{3.15}$$

где B_l определена формулой (1.6).

Соотношение (3.15) получается из (3.7) и леммы 3.1. Его можно обобщить следующим образом:

$$\inf_{D_j \subset X(B_R(x_0))} \sup_{u \in D_j^\perp} \frac{I_\rho(u)}{\|u\|^2_{X(B_R(x_0))}} = \frac{B_l^2 \rho^{2l+1}}{(2l+n+1)}. \tag{3.16}$$

Равенство (3.16) несложно получить из (3.7), незначительно видоизменив доказательство леммы 3.1.

В случае пространства $X_0(B_R(x_0))$ функций, обладающих симметрией относительно координатной оси x_1, формула (3.16) упрощается, принимая вид

$$\inf_{D_{j,0} \subset X(B_R(x_0))} \sup_{u \in D_{j,0}^\perp} \frac{I_\rho(u)}{\|u\|^2_{X_0(B_R(x_0))}} = \frac{B_{j-1}^2 \rho^{2j-1}}{(2j+n+1)}. \tag{3.17}$$

Отметим, что как здесь, так и в (3.16) параметр ρ положителен и не превосходит R.

Теорема 3.1. *Пусть области Ω_1 и Ω_2 ограничены, причем Ω_1 вложена в Ω_2, а расстояния от x_0 внутри Ω_1 до границ Ω_1 и Ω_2 равны. Тогда имеет место неравенство*

$$\varepsilon_j(x_0 \mid \Omega_1) \geqslant \varepsilon_j(x_0 \mid \Omega_2). \tag{3.18}$$

Если Ω_1 и Ω_2 имеют общую ось симметрии и точка x_0 лежит на ней, справедливо неравенство

$$\varepsilon_{j,0}(x_0 \mid \Omega_1) \geqslant \varepsilon_{j,0}(x_0 \mid \Omega_2). \tag{3.19}$$

Доказательство. Пространства $X(\Omega_1)$ и $X(\Omega_2)$ будем для краткости обозначать X_1 и X_2 соответственно. Для оценки величины $\varepsilon_j(x_0 \mid \Omega_1)$ снизу воспользуемся первым из равенств (3.7). Взяв точную верхнюю грань в нем по подмножеству пространства $E_j^\perp = E_j(X_1)^\perp$, состоящему лишь из тех функций $E_j^\perp$, которые принадлежат X_2, получим

$$\varepsilon_{j+1}^2(x_0 \mid \Omega_1) \geqslant \sup_{u \in E_j(X_1)^\perp \cap X_2} \frac{I_R(u)}{\|u\|_{X_1}^2}. \tag{3.20}$$

Исследуем подробнее пересечение $E_j(X_1)$ с X_2. Пусть функции $\{\psi_k(x)\}$ образуют канонический в x_0 базис пространства X_2, которому соответствует фундаментальная матрица следов $\widetilde{\Psi}(x_0)$. Положим

$$\begin{gathered} \bar{a}_{(k)} = \widetilde{\Psi}(x_0)^* \widetilde{\varphi}_k(x_0), \quad k = 1, 2, \dots, \\ \bar{a}_{(k)} = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_j^{(k)}, \dots), \\ v_k(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(k)} \psi_j(x); \end{gathered} \tag{3.21}$$

здесь $\widetilde{\varphi}_k(x_0)$ обозначает нормированный след $\varphi_k(x)$ в точке x_0, функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_j(x), \ldots$ образуют канонический в x_0 базис пространства X_1. Линейная оболочка D_j функций $v_1(x), \ldots, v_j(x)$ — это подпространство X_2, причем его размерность, очевидно, не превосходит j.

Докажем, что для любой функции $u(x)$ из X_2 справедливо равенство

$$(u, v_k)_{X_2} = \varepsilon_k^2(x_0 \mid \Omega_1)(u, \varphi_k)_{X_1}. \tag{3.22}$$

Пусть функция $u(x)$ принадлежит X_2, тогда

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} c^{(1)} \varphi_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^{(2)} \psi_j(x),$$

причем первый ряд сходится в X_1, а второй — в X_2. Далее, из (3.21) имеем

$$\begin{aligned}(u, v_k)_{X_2} &= (\bar{c}_{(2)}, \bar{a}_{(k)})_2 \\ &= (\bar{c}_{(2)}, \widetilde{\Psi}(x_0)^* \widetilde{\varphi}_k(x_0))_2 = (\widetilde{\Psi}(x_0)\bar{c}_{(2)}, \widetilde{\varphi}_k(x_0))_2. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Согласно условию расстояния от x_0 до границ областей Ω_1 и Ω_2 равны, поэтому

$$\widetilde{\Psi}(x_0)\bar{c}_{(2)} = \widetilde{u}(x_0) = \widetilde{U}(x_0)\bar{c}_{(1)};$$

здесь $\widetilde{U}(x_0)$ обозначает нормированную фундаментальную матрицу следов, соответствующую базису $\{\varphi_k(x)\}$ пространства X_1. Учитывая это, продолжим формулу (3.23):

$$(u, v_k)_{X_2} = (\widetilde{U}(x_0)\bar{c}_{(1)}, \widetilde{\varphi}_k(x_0))_2 = (\bar{c}_{(1)}, \widetilde{U}(x_0)^* \widetilde{\varphi}_k(x_0))_2. \tag{3.24}$$

Напомним, что $\widetilde{\varphi}_k(x_0)$ представляет собой k-й столбец матрицы $\widetilde{U}(x_0)$, удовлетворяющей условию

$$\widetilde{U}(x_0)^* \widetilde{U}(x_0) = \Lambda^2,$$

где Λ^2 диагональная, причем ее диагональные элементы — это величины $\varepsilon_j^2(x_0 \mid \Omega_1)$. Значит, образ вектора $\widetilde{\varphi}_k(x_0)$ при отображении $\widetilde{U}^*(x_0)$ — это вектор с нулевыми координатами, за исключением k-й, на месте которой стоит величина $\varepsilon_k^2(x_0 \mid \Omega_1)$. Отсюда в силу (3.24) следует (3.22).

Равенство (3.22) позволяет, в частности, утверждать, что функция u из X_2 ортогональна в X_1 множеству E_j тогда и только тогда, когда u ортогональна в X_2 множеству D_j. Иными словами, множество $E_j(X_1)^{\perp} \cap X_2$ совпадает с $D_j(X_2)^{\perp}$ — ортогональным дополнением к D_j в пространстве X_2. Тем самым оценка (3.20) эквивалентна следующей:

$$\varepsilon_{j+1}^2(x_0 \mid \Omega_1) \geqslant \sup_{u \in D_j(X_1)^{\perp}} \frac{I_R(u)}{\|u\|_{X_1}^2}. \tag{3.25}$$

Пространство X_2 вложено в X_1, и при этом для любой функции $u(x)$ из X_2 имеет место неравенство $\|u\|_{X_1} \leqslant \|u\|_{X_2}$. Отсюда и из (3.25) получим

$$\varepsilon_{j+1}^2(x_0 \mid \Omega_1) \geqslant \sup_{u \in D_j(X_2)^{\perp}} \frac{I_R(u)}{\|u\|_{X_2}^2} \geqslant \inf_{H_k \subset X_2} \sup_{u \in H_k^{\perp}} \frac{I_R(u)}{\|u\|_{X_2}^2}. \tag{3.26}$$

Точная нижняя грань здесь берется по всевозможным H_k — k-мерным подпространствам X_2, и при этом

$$k = \dim D_j \leqslant j. \tag{3.27}$$

Применив к правой части (3.26) второе из равенств (3.7), в силу (3.27) приходим к оценке $\varepsilon^2_{j+1}(x_0 \mid \Omega_1) \geqslant \varepsilon^2_{k+1}(x_0 \mid \Omega_2) \geqslant \varepsilon_{j+1}(x_0 \mid \Omega_2)$. Неравенства (3.19) получаются аналогично. Теорема 3.1 доказана.

Следствие 3.2. *Пусть точка x_0 лежит внутри ограниченной области Ω и R — расстояние от x_0 до границы области Ω. Тогда*

$$\varepsilon_j(x_0 \mid \Omega) \leqslant \varepsilon_j(x_0 \mid B_R(x_0)). \tag{3.28}$$

Неравенство (3.28) получается из теоремы 3.1 при условии, что Ω_1 — шар $B_R(x_0)$, а область Ω_2 совпадает с Ω.

Напомним, что величины $\varepsilon_j(x_0 \mid B_R(x_0))$ подчиняются асимптотическому правилу (3.6) позволяющему достаточно полно судить о порядке их убывания при возрастании j. Объединяя оценки (3.6) и (3.28), делаем вывод, что последовательность $\varepsilon_j(x_0 \mid \Omega)$ для любой ограниченной области Ω стремится к нулю не медленнее некоторой отрицательной степени j.

§ 4. Оценки сингулярных чисел снизу

Пусть, как и прежде, область Ω ограничена, а точка x_0 лежит внутри Ω. Обозначим через x_* точку границы $\partial\Omega$, в которой достигается расстояние от x_0 до $\partial\Omega$, т. е. такую, что $|x_* - x_0| = R = R(x_0)$. Предположим также, что область Ω вложена в некоторый шар $D_{R_1}(x_1)$, граница которого пересекается с $\partial\Omega$ как раз в точке x_*. Это условие заведомо выполнено, если $\partial\Omega$ является поверхностью класса C^1 в окрестности x_*, а Ω лежит строго по одну сторону от касательной плоскости к $\partial\Omega$ в этой точке. Для областей подобного типа получим нижние оценки величин $\varepsilon_j(x_0 \mid \Omega)$. Из теоремы 3.1, положив $\Omega_1 = \Omega$, а $\Omega_2 = B_{R_1}(x_1)$, выводим основное неравенство

$$\varepsilon_j(x_0 \mid \Omega) \geqslant \varepsilon_j(x_0 \mid B_{R_1}(x_1)).$$

Рассмотрим последовательность в правой части этого неравенства. Сначала исследуем ее зависимость от параметра R_1. Имеет место формула

$$\varepsilon_j(x_0 \mid B_{R_1}(x_1)) = \frac{1}{R_1^{(n-2)/2}}\, \varepsilon_j\,(y_0 \mid B_1(x_1)); \tag{4.1}$$

здесь через y_0 обозначен вектор $(x_0 - x_1)/R_1$.

Выведем равенство (4.1) при $x_1 = 0$. Ясно, что это не ограничит общности доказательства. Пусть $x = R_1 y$. Тогда шару $B_{R_1}(x_1)$ в пространстве x соответствует единичный шар $B_1(x_1)$ в пространстве y. Шар $B_R(x_0)$ переходит при этом в шар $B_{R_2}(y_0)$, где $R_2 = R/R_1 = 1 - |y_0|$. Ясно также, что любая функция $u(x)$ из $X(B_{R_1})$ преобразуется в функцию $v(y) = u(R_1 y)$ из $X(B_1)$. Если $u_1(x)$, $u_2(x)$ ортогональны в $X(B_{R_1})$, то их образы $v_1(y)$, $v_2(y)$ ортогональны в $X(B_1)$, ибо

$$\int\limits_{B_{R_1}} \nabla u_1(x) \nabla u_2(x)\, dx = R_1^{n-2} \int\limits_{B_1} \nabla v_1 \nabla v_2\, dy. \tag{4.2}$$

Следовательно,

$$\|u(x)\|^2_{X(B_{R_1})} = R_1^{n-2}\|v(y)\|^2_{X(B_1)}.$$

Очевидно, что j-мерному подпространству D_j^x, вложенному в $X(B_{R_1})$, соответствует j-мерное подпространство D_j^y, вложенное в $X(B_1)$. Учитывая этот факт, а также равенство

$$\frac{1}{R^n}\int\limits_{B_R(x_0)}|u(x)|^2dx = \frac{1}{R_2^n}\int\limits_{B_{R_2}(y_0)}|v(y)|^2\,dy,$$

получаем (4.1) из представления (3.7).

Нижнюю оценку величины $\varepsilon_j(x_0 \mid B_{R_1}(c_1))$ дает следующая

Теорема 4.1. *Пусть шар $B_{R_1}(x_1)$ расположен в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Тогда для любого положительного ε найдется номер $j_0 = j_0(\varepsilon)$ такой, что при всех $j \geqslant j_0$ имеет место неравенство*

$$\varepsilon_j(x_0 \mid B_{R_1}(x_1)) \geqslant \alpha_n q_n(x_0)\frac{1}{\sqrt{(j^2-1)(2j+1)}}; \tag{4.3}$$

здесь $\alpha_2 = 1$ и при $n \geqslant 3$

$$\alpha_n = \left[\frac{n(n-2)\Gamma(n/2-1)}{(n+2)\pi^{n/2-1}}\right]^{1/2}; \tag{4.4}$$

величина $q_n(x_0)$ задается формулой

$$q_n(x_0) = \frac{1}{R_1^{n/2-2}e(\sqrt{2|x_0-x_1|}+\varepsilon\sqrt{R_1-|x_0-x_1|})^2}. \tag{4.5}$$

Доказательство разобьем на ряд лемм и проведем его при $x_0 = 0$.

Лемма 4.1. *Пусть $n = 2$ и точка x_0 лежит внутри единичного круга, т. е. $|x_0| = q < 1$. Тогда для любого положительного ε найдется номер $l_0 = l_0(\varepsilon)$ такой, что при $l \geqslant l_0$ и $2l+1 \leqslant j \leqslant 2l+2$ справедлива оценка снизу*

$$\varepsilon_j(q \mid B_1) \geqslant p_n(x_0)\frac{1}{(l+2.5)\sqrt{l(2l+3)}}, \tag{4.6}$$

где

$$p_n(x_0) = \frac{1}{e(\sqrt{2|x_0|}+\varepsilon\sqrt{1-|x_0|})^2}.$$

Аналогично в осесимметричном случае найдется номер $j_0 = j_0(\varepsilon)$ такой, что при $j \geqslant j_0$ имеет место неравенство

$$\varepsilon_{j,0}(q \mid B_1) \geqslant p_n(x_0)\frac{1}{(j+1.5)\sqrt{(j-1)(2j+3)}}. \tag{4.7}$$

Доказательство. Введем на плоскости декартовы координаты (x,y) так, чтобы точке x_0 соответствовала пара $(q,0)$. Возьмем положительное r, меньшее, чем $1-q$, и запишем вытекающее из (3.7) следующее равенство:

$$\varepsilon_j^2(q \mid B_1) = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \inf_{D_j\subset X(B_1)}\ \sup_{u\in D_j^{\perp}}\frac{I_r(u)}{\|u\|^2_{X(B_1)}}. \tag{4.8}$$

Преобразуем конформно плоскость $z = x + iy$ в плоскость $w = \varphi + i\psi$, положив

$$w = \frac{a^*z - 1}{z - a^*}; \tag{4.9}$$

здесь $a^* = 1/a$, параметр a пока произволен. Преобразование (4.9) отображает пространство $X(B_1)$ на себя взаимно однозначно, причем нормы соответствующих друг другу элементов, выражаемые интегралом Дирихле, совпадают друг с другом:

$$\|u(x,y)\|_{X(B_1)} = \|v(\varphi,\psi)\|_{X(B_1)}, \tag{4.10}$$

где $v(\varphi,\psi) = u(x(\varphi,\psi), y(\varphi,\psi))$. Круг $B_r(x_0)$ плоскости z преобразуется с помощью (4.9) в некоторый другой круг, лежащий внутри B_1. При определенном выборе a образ $B_1(x_0)$ совпадает с кругом $|w| = \rho$, имеющим центр в начале координат. Чтобы убедиться в этом, достаточно положить

$$a = \frac{1 - r^2 + q^2 - \sqrt{(r^2 - 1 - q^2)^2 - 4q^2}}{2q}$$

и воспользоваться формулами из [24, с. 133]. Условие $0 < r < 1 - q$ позволяет утверждать вещественность параметра a, а также его принадлежность единичному интервалу: $0 < a < 1$. В окрестности точки $r_0 = 1 - q$ справедливо асимптотическое разложение

$$a = 1 - \sqrt{\frac{2(1-q)}{q}}\,(1 - q - r)^{1/2} + O((1 - q - r)^{3/2}). \tag{4.11}$$

При таком a радиус ρ образа $B_r(x_0)$ можно выразить по формуле [24, с. 133]

$$\rho = r\,\frac{1 - a^2}{(1 - aq)^2 - a^2r^2}.$$

В окрестности точки $r_0 = 1 - q$ имеет место асимптотическое разложение

$$\rho = 1 - \sqrt{\frac{2q}{1-q}}\,(1 - q - r)^{1/2} + \left[\frac{1+q}{2(1-q)} + 2(1-q)\right](1 - q - r) + O((1 - q - r)^{3/2}). \tag{4.12}$$

Якобиан Δ преобразования, обратного к (4.9), можно оценить снизу при $|w| \leqslant 1$:

$$\Delta = |z'(w)|^2 = \left(\frac{1 - a^2}{|aw - 1|}\right) \geqslant \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2.$$

Поэтому для произвольной функции $u_*(x,y)$ из $G_2^1(B_1)$ имеем

$$\int\limits_{|z-q|=r} |u_*(x,y)|^2\,dx\,dy \geqslant \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 \int\limits_{|w|=\rho} |u_*(\varphi,\psi)|^2\,d\varphi\,d\psi.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что при равенстве $u_*(q,0)$ нулю для класса $u(x,y)$ функций $G_2^1(\Omega)$, отличающихся от $u_*(x,y)$ на постоянное слагаемое, справедливо соотношение

$$I_r(u) = I_r(u_*) \geqslant \left(\frac{(1-a)\rho}{(1+a)r}\right)^2 I_\rho(u). \tag{4.13}$$

Подставляя (4.10) и (4.13) в (4.8), приходим к неравенству

$$\varepsilon_j^2(q \mid B_1) \geqslant \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 \inf_{D_j \subset X(B_1)} \sup_{u \in D_j^{\perp}} \frac{I_\rho(u)}{\|u\|^2_{X(B_1)}}. \tag{4.14}$$

Вспоминая, что при $n = 2$ величина $j(l)$ совпадает с $2l+1$ и полагая $2l+1 \leqslant j \leqslant 2l+3$, вычислим инфимум в правой части (4.14) по формуле (3.16). В результате получим

$$\varepsilon_j^2(q \mid B_1) \geqslant \frac{1}{R^2} \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 \rho^{2l+3} \frac{B_l^2}{(2l+3)}. \tag{4.15}$$

Далее, из (4.11), (4.12) следует, что для любого положительного ε существует положительное $r_0 = r_0(\varepsilon)$, меньшее, чем $1 - q$, и такое, что для всех r из промежутка $[r_0, 1-q]$ справедливы оценки

$$1 - a(r) \geqslant \frac{2}{\beta + \varepsilon}(1 - q - r)^{1/2},$$
$$\rho(r) \geqslant 1 - (\beta + \varepsilon)(1 - q - r)^{1/2},$$

где $\beta = \sqrt{2q/(1-q)}$. Отсюда, используя (4.15) и условие $0 < a < 1$, выводим

$$\varepsilon_j^2(q \mid B_1) \geqslant \frac{B_l^2}{4R^2(2l+3)} f(\sqrt{1-q-r}\,), \tag{4.16}$$

где

$$f(p) = \left(\frac{2}{\beta+\varepsilon}\right) p^2 (1 - (\beta+\varepsilon)p)^\alpha, \qquad \alpha = 2l+3.$$

Поскольку неравенство (4.16) выполнено при всех r таких, что $r_0 \leqslant r < 1 - q$, имеет место соотношение

$$\varepsilon_j^2(q \mid B_1) \geqslant \frac{B_l^2}{4R^2(2l+3)} \sup_{0 \leqslant p \leqslant p_0} f(p), \tag{4.17}$$

где $p_0 = \sqrt{1 - q - r_0}$. Найдем точную верхнюю грань в (4.17). Имеем

$$f'(p) = \left(\frac{2}{\beta+\varepsilon}\right)^2 (1 - (\beta+\varepsilon)p)^{\alpha-1}\, p\, [2(1 - (\beta+\varepsilon)p) - \alpha(\beta+\varepsilon)p].$$

Таким образом, полуось $p \geqslant 0$ разбивается на два промежутка: от нуля до $p_1 = 2/(\alpha+2)(\beta+\varepsilon)$, где $f(p)$ монотонно возрастает, и от p_1 до бесконечности, где $f(p)$ монотонно убывает. Если $l \geqslant l_0$, где l_0 — целая часть величины $(1/p_0(\beta+\varepsilon) - 2.5)$, то точка максимума p_1 функции $f(p)$ содержится в интервале $(0, p_0)$. Значит, для $l \geqslant l_0$ неравенство (4.17) эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^2(q \mid B_1) &\geqslant \frac{B_l^2}{4R^2(2l+3)} f(p_1) \\ &= \frac{B_l^2}{R^2(2l+3)} \frac{4}{(\alpha+2)^2(\beta+\varepsilon)^4} \left(1 - \frac{2}{\alpha+2}\right)^\alpha.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Учитывая неравенство $(1 - 2/(\alpha + 2))^\alpha \geqslant 1/e^2$, получим из (4.18) при $l \geqslant l_0 + 1$ и $2l + 1 \leqslant j \leqslant 2l + 2$ соотношение

$$\varepsilon_j^2(q \mid B_1) \geqslant \left(\frac{2}{e}\right)^2 \frac{B_l^2}{(\sqrt{2q} + \varepsilon\sqrt{1-q})^4} \frac{1}{(2l+3)(2l+5)^2}.$$

Подставляя в него значение B_l из (1.6), приходим к искомому неравенству (4.6). Оценка (4.7) выводится аналогично. Следует только иметь в виду, что для осесимметричного случая величина $j(l)$ совпадает с $l + 1$ и в оценке для $\varepsilon_{j,0}^2(q \mid B_1)$, аналогичной (4.14), инфимум вычисляется по формуле (3.17). Лемма 4.1 доказана.

Пусть шар B_1 расположен в n-мерном пространстве. Условимся тогда обозначать числа $\varepsilon_j(q \mid B_1)$ через $\varepsilon_j(q \mid n)$.

Лемма 4.2. *Если $0 \leqslant q \leqslant 1$ и $n \geqslant 2$, то имеет место неравенство*

$$\varepsilon_{j,0}(q \mid n+1) \geqslant \beta_n \varepsilon_{j,0}(q \mid n), \tag{4.19}$$

где j — натуральное число, $\beta_2 = \sqrt{(4l-1)}/5$, а при $n \geqslant 3$

$$\beta_n = \left[\frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{(n+3)(n-2)n\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}\right]^{1/2}. \tag{4.20}$$

Доказательство. Рассмотрим ортонормированный базис (1.16) в пространстве $X_0(\Omega)$ функций, обладающих симметрией относительно оси x_1. Вычислим соответствующую фундаментальную матрицу следов $U_0(q) \equiv U_0(q \mid n)$ в точке $x_0 = (q, 0, \ldots, 0)$. Пользуясь равенствами (1.17) и (1.6), несложно убедиться, что при $n \geqslant 3$ справедливо представление

$$U_0(q \mid n) = \gamma_n V(q) \Lambda(n), \tag{4.21}$$

$$\gamma_n = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{4\pi^{n/2}\Gamma(n-2)}\right]^{1/2},$$

верхняя треугольная матрица $V(q) = (u_{ij})$ бесконечного порядка имеет элементы

$$u_{ij} = \begin{cases} \frac{j!}{i!(j-i)!}(1-q)^i q^{j-i} & \text{при } j \geqslant i, \\ 0 & \text{при } j < i, \end{cases}$$

а диагональная матрица

$$\Lambda(n) = \mathrm{diag}\{\mu_1(n), \ldots, \mu_l(n), \ldots, \}$$

имеет бесконечный порядок, причем

$$\mu_l(n) = \left[\frac{(n+2l-2)\Gamma(n+l-2)}{l\Gamma(l+1)}\right]^{1/2}.$$

Если $n = 2$, то равенство (4.21) выполнено при $\gamma_2 = 1/\sqrt{2\pi}$. Из (4.21) следует равенство

$$U_0(q \mid n) = \gamma(n \mid n+1) U_0(q \mid n+1) \Lambda(n \mid n+1); \tag{4.22}$$

здесь $\gamma(n \mid n+1) = \gamma_n/\gamma_{n+1}$, т. е. при $n \geqslant 3$

$$\gamma(n \mid n+1) = \left[\frac{(n-2)\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right]^{1/2}.$$

Диагональная матрица

$$\Lambda(n \mid n+1) = \operatorname{diag}\{\mu_1(n \mid n+1), \ldots, \mu_l(n \mid n+1), \ldots\}$$

имеет элементы

$$\mu_l(n \mid n+1) = \frac{\mu_l(n)}{\mu_l(n+1)} = \frac{1}{(l+n-2)^{1/2}}\left(1 - \frac{1}{n+2l-1}\right)^{1/2}. \qquad (4.23)$$

Последовательность $\mu_l(n \mid n+1)$ монотонно убывает по l, поэтому справедливо неравенство $\mu_l(n \mid n+1) \leqslant \mu_1(n \mid n+1)$. Следовательно, оператор $\Lambda(n \mid n+1)$ действует из l_2 в l_2 и при этом

$$\|\Lambda(n \mid n+1)c\|_2 \leqslant \mu_1(n \mid n+1)\|c\|_2. \qquad (4.24)$$

Рассмотрим теперь канонический в точке x_0 базис $\{\varphi_k(x)\}$ пространства $X_0(B_1) = X_0(B_1 \mid n+1)$, где B_1 — единичный шар в $\mathbb{R}^{n+1}$. Пусть h_j^0 обозначает линейную оболочку в l_2 векторов

$$\Lambda(n \mid n+1)\widetilde{\varphi}_1(x_0), \ldots, \Lambda(n \mid n+1)\widetilde{\varphi}_j(x_0). \qquad (4.25)$$

Ясно, что размерность h_j^0 равна j. Если вектор c из l_2 ортогонален векторам (4.25), то $\Lambda(n \mid n+1)c$ находится в ортогональном дополнении к подпространству $e_j = e_j(n+1)$, представляющему собой линейную оболочку нормированных следов $\widetilde{\varphi}_1(x_0), \ldots, \widetilde{\varphi}_j(x_0)$. Отсюда и из представления

$$\varepsilon_{j+1,0}^2(q \mid n+1) = \sup_{c \in e_j(n+1)^{\perp}} \frac{\|\widetilde{U}_0(q \mid n+1)c\|_2^2}{\|c\|_2^2}$$

получаем при любом c из $h_j^{0\perp}$ неравенство

$$\|\widetilde{U}_0(q \mid n+1)\Lambda(n \mid n+1)c\|^2 \leqslant \varepsilon_{j+1,0}^2(q \mid n+1)\|\Lambda(n \mid n+1)c\|_2^2. \qquad (4.26)$$

Воспользуемся следующей формулой, аналогичной (3.9):

$$\varepsilon_{j+1,0}^2(q \mid n) = \inf_{h_j \subset l_2} \sup_{c \in h_j^{\perp}} \frac{\|\widetilde{U}_0(q \mid n)c\|_2^2}{\|c\|_2^2}.$$

Подставляя в последнюю формулу вытекающее из (4.22) выражение

$$\widetilde{U}(q \mid n) = \gamma(n \mid n+1)M(n \mid n+1)\widetilde{U}_0(q \mid n+1)\Lambda(n \mid n+1),$$

в котором диагональная матрица $M(n \mid n+1)$ задается равенством

$$M(n \mid n+1) = \operatorname{diag}\left\{\sqrt{1+\frac{1}{n+2}}, \ldots, \sqrt{1+\frac{1}{n+2l}}, \ldots\right\},$$

получим

$$\varepsilon^2_{j+1,0}(q \mid n) \leqslant \gamma^2(n \mid n+1) \sup_{c \in h_j^{0\perp}} \frac{\|M(n \mid n+1)\widetilde{U}_0(q \mid n+1)\Lambda(n \mid n+1)c\|_2^2}{\|c\|_2^2}.$$

Продолжим эту формулу, учитывая, что для любого вектора c из l_2 справедливо неравенство $\|M(n \mid n+1)c\|_2 \leqslant \sqrt{1+1/(n+2)}\,\|c\|_2$. В силу (4.26) имеем

$$\varepsilon^2_{j+1,0}(q \mid n) \leqslant \gamma^2(n \mid n+1)\Bigl(1+\frac{1}{n+2}\Bigr) \times \varepsilon^2_{j+1,0}(q \mid n+1) \sup_{c \in h_j^{0\perp}} \frac{\|\Lambda(n \mid n+1)c\|_2^2}{\|c\|_2^2}. \tag{4.27}$$

Отсюда с учетом (4.24) получим искомое неравенство (4.19), в котором

$$\beta_n = \frac{1}{\mu_1(n \mid n+1)\gamma(n \mid n+1)}\Bigl(1-\frac{1}{n+3}\Bigr)^{1/2}.$$

Лемма 4.2 доказана.

Разложим пространство $X(B_1)$ в прямую сумму

$$X(B_1) = X_0 \oplus X_1. \tag{4.28}$$

В качестве X_0 здесь, как и прежде, взято подпространство функций из $X(B_1)$, симметричных относительно координатной оси x_1. Значит, X_1 в (4.28) является ортогональным дополнением к X_0 в пространстве $X(B_1)$. Возьмем точку x_0 на оси x_1 внутри B_1, т. е. $x_0 = (q, 0, \dots, 0)$, где $0 < q < 1$. В каждом из пространств X_0 и X_1 существует свой базис, канонический в точке x_0. Пусть эти два базиса состоят из функций

$$\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}, \quad \{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \tag{4.29}$$

соответственно. Рассмотрим их объединение.

Лемма 4.3. *Объединение базисов пространств X_0 и X_1, канонических в точках x_0, совпадает с базисом X, каноническим в той же точке.*

Доказательство. Отметим, что функции (4.29) образуют в X ортонормированный базис. Это легко следует из их определения и разложения (4.28). Таким образом, достаточно проверить, что этот базис канонический в x_0, т. е. нормированные следы $\widetilde{\varphi}_j(x_0)$ и $\widetilde{\psi}_k(x_0)$ ортогональны в l_2. Как уже отмечалось, справедливо равенство

$$(\widetilde{\varphi}_j(x_0), \widetilde{\psi}_k(x_0)) = \frac{1}{R^n} \int\limits_{B_R(x_0)} \varphi_j(x)\overline{\psi}_k(x)\,dx, \tag{4.30}$$

где $R = R(x_0)$ — расстояние от точки x_0 до границы Ω. Поэтому достаточно убедиться, что при всех j, k интеграл (4.30) равен нулю. С этой целью разложим функции базисов (4.29) в ряды по шаровым многочленам:

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} c_{l1}^{(j)} u_{l1}(x), \\ \psi_k(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=2}^{\sigma(l)} c_{lm}^{(k)} u_{lm}(x). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Напомним, что $u_{l1}(x)$ представляет собой тот шаровой многочлен степени l, который обладает симметрией относительно оси x_1. Разложения (4.31) справедливы в силу определения пространств X_0 и X_1. Подставляя (4.31) в правую часть (4.30), видим, что вычисляемая величина является суммой интегралов вида

$$\int\limits_{B_R(x_0)} u_{l1}(x)u_{km}(x)\,dx, \qquad m = 2,3,\dots,\sigma(k). \tag{4.32}$$

Чтобы вычислить величину (4.32) при фиксированных l,m, введем кроме координат (r_1,θ_1), где $r_1 = |x|$, $\theta_1 = x/r_1$, координаты (r_2,θ_2), где $r_2 = |x-x_0|$, $\theta_2 = (x-x_0)/r_2$. Положим $\theta_j = (\theta_1^{(j)},\theta_2^{(j)},\dots,\theta_n^{(j)})$, $j = 1,2,\dots$, где

$$\begin{gathered}
\theta_1^{(j)} = \cos v_1^{(j)}, \quad \theta_2^{(j)} = \sin v_1^{(j)} \cos v_2^{(j)},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\theta_{n-1}^{(j)} = \sin v_1^{(j)} \dots \sin v_{n-2}^{(j)} \cos v_{n-1}^{(j)},\\
\theta_n^{(j)} = \sin v_1^{(j)} \dots \sin v_{n-2}^{(j)} \sin v_{n-1}^{(j)}.
\end{gathered}$$

Углы $v_1^{(j)},\dots,v_{n-2}^{(j)}$ изменяются в $[0,\pi]$, а угол $v_{n-1}^{(j)}$ — в $[0,2\pi)$. Перейдя в интеграле (4.32) к переменным $(r_2, v_1^{(2)},\dots,v_{n-1}^{(2)})$, для плоского случая $(n=2)$ получим

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_R(x_0)} u_{l1}(x)u_{km}(x)\,dx &= D_{lkm} \int\limits_{B_R(x_0)} r_1^{l+k} \cos lv_1 \sin kv_1\,dx\\
&= D_{lkm} \int\limits_0^R \Big[\int\limits_0^{2\pi} F(r_2,v_1^{(2)})\,dv_1^{(2)}\Big] r_2\,dr_2;
\end{aligned} \tag{4.33}$$

здесь $D_{lkm} = B_l B_k A_l^1 A_l^m$, а через $F(r_2,v_1^{(2)})$ обозначено произведение $r_1^{l+k} \cos lv_1^{(1)} \sin kv_1^{(1)}$, переписанное в полярных координатах $(r_2,v_1^{(2)})$ с центром в точке x_0. Несложно найти явное выражение функции $F(r_2,v_1^{(2)})$ через ее аргументы, воспользовавшись соотношениями

$$r_1 \cos v_1^{(1)} - r_2 \cos v_1^{(2)} = x_0, \qquad r_1 \sin v_1^{(1)} - r_2 \sin v_1^{(2)} = 0,$$

из которых, в частности, следует

$$\begin{gathered}
r_1^2 = (r_2 \cos v_1^{(2)} + x_0)^2 + r_2^2 \sin^2 v_1^{(2)},\\
r_1^\gamma \sin \gamma v_1^{(1)} = \operatorname{Im}\Big[(r_1 e^{iv_1^{(1)}})^\gamma\Big] = \operatorname{Im}\Big[(x_0 + r_2 \cos v_1^{(2)} + i r_2 \sin v_1^{(2)})^\gamma\Big].
\end{gathered}$$

Теперь заключаем, что функция $F(r_2,v_1^{(2)})$ нечетна по $v_1^{(2)}$ и периодична по этой переменной с периодом 2π:

$$F(r_2,-v_1^{(2)}) = -F(r_2,v_1^{(2)}), \qquad F(r_2,v_1^{(2)}+2\pi) = F(r_2,v_1^{(2)}).$$

Пользуясь этими свойствами, несложно убедиться, что внутренний интеграл в правой части (4.33) равен нулю. То же верно относительно интеграла (4.30). Таким образом, в плоском случае утверждение доказано.

В случае $n = 3$ имеет место аналог (4.33):

$$\int\limits_{B_R(x_0)} u_{l1}(x)u_{lm}(x)\,dx = D_{lkm} \times \int\limits_0^R \Big[\int\limits_0^\pi r_1^{k+l} P_l(\cos v_1^{(1)}) P_k^{m_1}(\cos v_1^{(1)}) \sin v_1^{(2)}\, dv_1^{(2)}\Big] \times r_2^2 dr_2 \int\limits_0^{2\pi} e^{\pm i m_1 v_2^{(1)}}\, dv_2^{(2)}, \tag{4.34}$$

где $m_1 \in \mathbb{N}$. Заметив, что углы $v_2^{(1)}$ и $v_2^{(2)}$ совпадают, убеждаемся в равенстве нулю интеграла по переменной $v_2^{(2)}$ в правой части (4.34). Таким образом, и в трехмерном пространстве интеграл (4.30) — нулевой. Аналогично рассматривается случай $n > 3$. Лемма 4.3 доказана.

Пусть k равно нулю или единице. Тогда положим

$$\varepsilon_{j,k}^2(x_0 \mid B_1) = \inf_{D_j \subset X_k} \sup_{u \in D_j^\perp(X_k)} \frac{I_R(u)}{\|u\|_X^2};$$

здесь $R = R(x_0)$ — расстояние от x_0 до границы Ω. При фиксированном значении k последовательность $\{\varepsilon_{j,k}(x_0 \mid B_1)\}_{j=1}^\infty$ состоит из сингулярных чисел произвольной фундаментальной матрицы следов $\widetilde{U}_k(x_0)$ в пространстве X_k. При $k = 0$ это утверждение доказано ранее, а при $k = 1$ его несложно вывести, придерживаясь аналогичной схемы рассуждений.

Имеет место следующая

Лемма 4.4. *Множество $\{\varepsilon_{j,k}(x_0 \mid B_1)\}_{j=1}^\infty$ как при $k = 0$, так и при $k = 1$ является подпоследовательностью множества сингулярных чисел $\{\varepsilon_j(x_0 \mid B_1\}_{j=1}^\infty$.*

Доказательство. Рассмотрим базисы (4.29), канонические в точке x_0 в пространствах X_0 и X_1 соответственно. Согласно лемме 4.3 их объединение — это канонический в x_0 базис пространства X. Представим вектор c коэффициентов Фурье произвольной функции $u(x)$ по этому базису в виде $c = (c^{(0)}, c^{(1)})$; здесь $c^{(j)}$ — вектор коэффициентов Фурье в разложении $u(x)$ по базису пространства X_j, $j = 0, 1$. Нормированный след $\widetilde{u}(x_0)$ можно записать теперь следующим образом:

$$\widetilde{u}(x_0) = \widetilde{U}(x_0)c = \widetilde{U}_0(x_0)c^{(0)} + \widetilde{U}_1(x_0)c^{(1)}; \tag{4.35}$$

здесь $\widetilde{U}(x_0)$, $\widetilde{U}_0(x_0)$, $\widetilde{U}_1(x_0)$ — фундаментальная матрица следов в точке x_0, соответствующие выбранным в X, X_0, X_1 базисам. По лемме 4.3 произведение $\widetilde{U}^*(x_0)\widetilde{U}(x_0)$ — это диагональная матрица, у которой на диагонали стоят числа $\varepsilon_j^2(x_0 \mid B_1)$:

$$\widetilde{U}^*(x_0)\widetilde{U}(x_0) = \Lambda^2. \tag{4.36}$$

С другой стороны, как следует из (4.35) это произведение можно найти по формуле

$$\widetilde{U}^*(x_0)\widetilde{U}(x_0) = \begin{pmatrix} \widetilde{U}_1^*(x_0) \\ \widetilde{U}_2^*(x_0) \end{pmatrix} (\widetilde{U}_1(x_0) \mid \widetilde{U}_2(x_0))$$
$$= \begin{bmatrix} \widetilde{U}_1^*(x_0)\widetilde{U}_1(x_0) & 0 \\ 0 & \widetilde{U}_2^*(x_0)\widetilde{U}_2(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_0^2 & 0 \\ 0 & \Lambda_1^2 \end{bmatrix},$$

где Λ_k^2 — диагональная матрица с элементами $\{\varepsilon_{j,k}^2(x_0 \mid B_1)\}_{j=1}^{\infty}$, $k = 0, 1$. Поэтому в силу (4.36) получаем утверждение леммы 4.4.

Следствие 4.1. *Для всех j справедливо неравенство*

$$\varepsilon_j(x_0 \mid B_1) \geqslant \varepsilon_{j,0}(x_0 \mid B_1). \tag{4.37}$$

Доказательство теоремы 4.1. В плоском случае необходимая оценка получена в лемме 4.1. Поэтому будем считать $n \geqslant 3$. Без ограничения общности можно предполагать, что точка x_1 находится в начале координат. Согласно формулам (4.1) и (4.36) справедливы соотношения

$$\varepsilon_j(x_0 \mid B_{R_1}) = \frac{\varepsilon_j(y_0 \mid B_1)}{R^{n/2-1}} \geqslant \frac{\varepsilon_{j,0}(y_0 \mid B_1)}{R_1^{n/2-1}}. \tag{4.38}$$

В случае, когда шар B_{R_1} лежит в $\mathbb{R}^n$, мы условились обозначать величину $\varepsilon_{j,0}(y_0 \mid B_1)$ как $\varepsilon_{j,0}(q \mid n)$. Здесь $q = |y_0|$. Учитывая этот факт, перепишем (4.38) в эквивалентном виде:

$$\varepsilon_j(x_0 \mid B_{R_1}) \geqslant \frac{\varepsilon_{j,0}(q \mid n)}{R_1^{n/2-1}}. \tag{4.39}$$

Далее, согласно лемме 4.2 справедливо равенство

$$\varepsilon_{j,0}(q \mid n) \geqslant \beta_2\beta_3\ldots\beta_{n-1}\varepsilon_{j,0}(q \mid 2), \tag{4.40}$$

произведение параметров β_j в котором несложно вычислить явно:

$$\beta_2\beta_3\ldots\beta_{n-1} = \left[\frac{n(n-2)}{n+2}\,\frac{\Gamma(n/2-1)}{\pi^{n/2-1}}\right]^{1/2}.$$

Учитывая это и пользуясь оценками (4.39), (4.40) и неравенством (4.7) из леммы 4.1 приходим к искомому соотношению (4.3). Теорема 4.1 доказана.

§ 5. Формула приближенного интегрирования

В этом параграфе мы найдем формулу приближенного вычисления интеграла Дирихле $D_\Omega(u)$, имеющую единственный узел во внутренней к Ω точке x_0. Потребуем при этом, чтобы погрешность приближения стремилась к нулю при подходящем изменении параметров формулы и при условии, что подынтегральная функция $u(x)$ лежит в $X(\Omega)$. В качестве основного пространства $X(\Omega)$ в этом параграфе выступает фактор-пространство $G_2^1(\Omega)/P_0$. Заметим, что аналогичное построение несложно осуществить и в случае других, определенных в § 1, пространств.

Условимся об обозначениях. Пусть $\{\varepsilon_j(x_0 \mid \Omega)\}$ — последовательность диагональных элементов матрицы Λ из разложения (2.1), а $\{q_{ij}(x_0 \mid \Omega)\}$ — матрица Q из того же разложения. Образуем трехиндексный массив $q_{lm,j}$, положив при $l \in \mathbb{N}$ и $m = 1, 2, \ldots, \sigma(l)$

$$q_{lm,i} = q_{i(l-1)+m,j},$$

где $i(0) = 0$, $i(l) = i(l-1) + \sigma(l) = \sigma(1) + \sigma(2) + \ldots + \sigma(l)$ при $l \geqslant 1$. Напомним, что функция $\sigma(l)$ натурального аргумента l для рассматриваемого пространства $X(\Omega)$ определена в § 1. Числа $q_{lm,j} = q_{lm,j}(x_0 \mid \Omega)$ удовлетворяют ввиду частичной изометричности Q следующим соотношениям:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\sigma(l)} q_{lm,i} q_{lm,j} = \sum_{k=1}^{\infty} q_{ki} q_{kj} = \delta_i^j. \tag{5.1}$$

Вспомнив также обозначение $a_{\alpha,m}$, введенное равенством (1.7), для натурального l и α таких, что $|\alpha| = l$, положим

$$b_{lj,\alpha} = \left(\frac{R}{2}\right)^l \frac{1}{\sqrt{2l+n}} \sum_{m=1}^{\sigma(l)} q_{lm,j} a_{\alpha,m}. \tag{5.2}$$

Основой для построения формулы нужного типа служит следующая

Теорема 5.1. *Интеграл Дирихле $D_\Omega(u)$ представляется на пространстве следов $l_2(\Omega \mid x_0)$ квадратичной формой, значение которой на любой функции $u(x)$ из $X(\Omega)$ можно найти по формуле*

$$D_\Omega(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_j^2(x_0 \mid \Omega)} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=l} b_{lj,\alpha} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!} \right\}^2, \tag{5.3}$$

где величины $b_{lj,\alpha}$ определены в (5.2).

Доказательство. Рассмотрим канонический в точке x_0 базис $\{v_j(x)\}$ пространства $X(\Omega)$ и разложим произвольную функцию $u(x)$ из $X(\Omega)$ в ряд:

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j v_j(x). \tag{5.4}$$

Квадрат нормы u в пространстве X, совпадающий в рассматриваемом случае с интегралом $D_\Omega(u)$, представляет собой сумму квадратов c_j из (5.4):

$$D_\Omega(u) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2. \tag{5.5}$$

Выразим теперь коэффициенты Фурье c_j функции через значения ее производных в точке x_0 с тем, чтобы подставить их в (5.5). По условию базис $\{v_j(x)\}$ канонический. Значит, соответствующая ему нормированная фундаментальная матрица следов $\widetilde{V}(x_0)$ допускает разложение $\widetilde{V}(x_0) = Q\Lambda$. В силу (5.4) заключаем, что

$$\widetilde{u}(x_0) = \widetilde{V}(x_0) c = Q\Lambda c.$$

Домножив обе части этой системы слева на Q^* и пользуясь (5.1), получим

$$\Lambda c = Q^* \widetilde{u}(x_0)$$

или в покомпонентной записи:

$$c_j = \frac{1}{\varepsilon_j^2(x_0 \mid \Omega)} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{R}{2}\right)^l \frac{1}{\sqrt{2l+n}} \sum_{m=1}^{\sigma(l)} q_{lm,j}(x_0 \mid \Omega) \left\{ \sum_{|\alpha|=l} a_{\alpha,m} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!} \right\}.$$

Таким образом, коэффициенты c_j связаны с производными функции $u(x)$ в точке x_0 формулой

$$c_j = \frac{1}{\varepsilon_j^2(x_0 \mid \Omega)} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=l} b_{l,j\alpha,} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}.$$

Подставив это выражение в (5.5), приходим к искомой формуле (5.3). Теорема 5.1 доказана.

В частных случаях формула (5.3) допускает упрощение. Например, если Ω — шар $B_R(x_0)$, то (5.3) совпадает с (1.11).

Как мы видим, использование формулы (5.3) требует, чтобы были известны заранее последовательность $\{\varepsilon_j(x_0 \mid \Omega)\}$, матрица $Q = (q_{ij}(x_0 \mid \Omega))$ и числа $a_{\alpha,m}$. Наиболее трудоемким оказывается процесс вычисления именно матрицы Q. В связи с этим приведем достаточное условие, при выполнении которого формула (5.3) преобразуется к более простому виду, не предполагающему знания элементов q_{ij}. Положим для всех натуральных l и для $m = 1, 2, \ldots, \sigma(l)$

$$\varepsilon_{lm}(x_0 \mid \Omega) = \varepsilon_{i(l-1)+m}(x_0 \mid \Omega),$$

где $i(0) = 0$, $i(l) = i(l-1) + \sigma(l)$. Имеет место следующая

Лемма 5.1. *Пусть оператор $\widetilde{V}(x_0)$, порождаемый в l_2 фундаментальной матрицей следов, соответствующей каноническому в точке x_0 базису $X(\Omega)$, нормален. Тогда для любой функции $u(x)$ из $X(\Omega)$ имеет место равенство*

$$D_\Omega(u) = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{R}{2}\right)^{2l} \frac{1}{2l+n} \sum_{m=1}^{\sigma(l)} \frac{1}{\varepsilon_{lm}^2(x_0 \mid \Omega)} \left\{ \sum_{|\alpha|=l} a_{\alpha,m} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!} \right\}^2. \tag{5.6}$$

Доказательство. Представим нормированную фундаментальную матрицу следов, соответствующую каноническому в точке x_0 базису, по формуле

$$\widetilde{V}(x_0) = Q\Lambda, \tag{5.7}$$

в которой Q — частично-изометрический оператор, $Q^*Q = I$, а Λ — диагональная матрица. При условии (5.7) оператор $\widetilde{V}(x_0)$, как известно [21, с. 22], представим также в виде

$$\widetilde{V}(x_0) = S_1 Q; \tag{5.8}$$

здесь Q та же матрица, что и в (5.7), а $S_1 = Q\Lambda Q^*$ — неотрицательный квадратный корень из произведения $\widetilde{V}(x_0)\widetilde{V}^*(x_0)$. Отсюда и из нормальности оператора $\widetilde{V}(x_0)$ следует, что S_1 совпадает с Λ, т. е. матрицы Q и Λ перестановочны. Пусть теперь $u(x)$ из $X(\Omega)$ и

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j v_j(x),$$

тогда $\widetilde{u}(x_0) = \widetilde{V}(x_0)c = \Lambda Qc$. Выразив из этой системы координаты вектора Qc через производные функции $u(x)$ в точке x_0 и подставив их в соотношение

$$D_\Omega(u) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 = (Qc, Qc),$$

получаем искомую формулу (5.6). Лемма 5.1 доказана.

Искомую формулу приближенного интегрирования получим теперь, взяв во внешней сумме равенства (5.3) первые N, а во внутренней — первые M слагаемых. Иными словами, положим

$$D_\Omega(u) \cong D_\Omega^{NM}(u), \tag{5.9}$$

где

$$D_\Omega^{NM}(u) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\varepsilon_j^2(x_0 \mid \Omega)} \left\{ \sum_{l=1}^{M} \sum_{|\alpha|=l} b_{lj,\alpha} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!} \right\}^2. \tag{5.10}$$

Если M бесконечно, условимся обозначать $D_\Omega^{NM}(u)$ через $D_\Omega^N(u)$, т. е. вместе с формулой (5.9) будем рассматривать следующую:

$$D_\Omega(u) \cong D_\Omega^N(u) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\varepsilon_j^2(x_0 \mid \Omega)} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=l} b_{lj,\alpha} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!} \right\}^2. \tag{5.11}$$

Чтобы различать случаи конечного и бесконечного M, условимся называть формулы (5.11) и (5.9) формулами I-го и II-го рода соответственно.

§ 6. Погрешность формул приближенного интегрирования

Исследуем аппроксимативные свойства формул, построенных в § 5. Рассмотрим сначала формулы первого рода. Пусть выражение $D_\Omega^N(u)$ задается равенством

$$D_\Omega^N(u) = \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{\varepsilon_j^2(x_0 \mid \Omega)} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2l}} \left(\frac{R}{2}\right)^l \right.$$
$$\left. \times \sum_{m=1}^{\sigma(l)} q_{lm,j}(x_0 \mid \Omega) \left[\sum_{|\alpha|=l} a_{\alpha,m} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!} \right]^2 \right\}.$$

Сопоставим ему функционал

$$R_N(u) = D_\Omega(u) - D_\Omega^N(u), \tag{6.1}$$

который по аналогии с теорией линейных кубатурных формул назовем *функционалом погрешности формулы* $D_\Omega(u) \cong D_\Omega^N(u)$.

Справедлива

Лемма 6.1. *Равенство* (6.1) *определяет на множестве* $X(\Omega)$ *неотрицательную монотонно невозрастающую последовательность квадратичных форм, стремящуюся к нулю.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{\Psi}(x_0)$ обозначает нормированную фундаментальную матрицу следов, соответствующую каноническому в точке x_0 базису $X(\Omega)$. Тогда

$$\widetilde{u}(x_0) = \widetilde{\Psi}(x_0)c, \quad \widetilde{\Psi}(x_0) = Q\Lambda, \quad Q^*Q = I; \tag{6.2}$$

здесь $u(x)$ — произвольная функция из $X(\Omega)$, а c — последовательность ее коэффициентов Фурье в разложении по каноническому базису. Из (6.2) следует, что

$$\Lambda^2 c = \Lambda Q^* \widetilde{u}(x_0) = \widetilde{\Psi}^*(x_0)\widetilde{u}(x_0),$$

т. е. для $j = 1, 2, \ldots$ справедливы равенства

$$c_j = \frac{1}{\varepsilon_j^2(x_0 \mid \Omega)}(\widetilde{\psi}_j(x_0), \widetilde{u}(x_0))_2. \tag{6.3}$$

Рассмотрим теперь билинейную форму

$$B_N(u,v) = \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j(u)c_j(v) = \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{(\widetilde{\psi}_j(x_0)\widetilde{u}(x_0))_2(\widetilde{\psi}_j(x_0), \widetilde{v}(x_0))_2}{\varepsilon_j^4(x_0 \mid \Omega)};$$

здесь u, v — произвольные функции из $X(\Omega)$; $c_j(u)$, $c_j(v)$ — их коэффициенты Фурье, определяемые по формуле (6.3). Легко видеть, что

$$R_N(u) = \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 = B_N(u,u). \tag{6.4}$$

Следовательно, квадратичная форма $R_N(u)$ неотрицательная. Неравенство $R_{N+1}(u) \leqslant R_N(u)$ и сходимость $R_N(u)$ к нулю при $N \to \infty$ также очевидны из (6.4). Лемма 6.1 доказана.

Рассмотрим подмножество $X(\Omega)$, на котором функционал погрешности (6.1) обращается в нуль:

$$\ker R_N = \{u \in X(\Omega) : R_N(u) = 0\}. \tag{6.5}$$

Ясно, что на функциях из $\ker R_N$ формула (3.12) точна.

Лемма 6.2. *Множество* $\ker R_N$ *и линейная оболочка* $E_N(X(\Omega))$ *первых* N *функций канонического в точке* x_0 *базиса* $X(\Omega)$ *совпадают.*

Доказательство. Воспользуемся первым из равенств (6.4), согласно которому для любой функции из $X(\Omega)$

$$R_N(u) = \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2.$$

Тогда если $R_N(u) = 0$, то все c_j $(j \geqslant N+1)$ равны нулю. Иными словами, $u(x)$ представляет собой линейную комбинацию первых N функций канонического в точке x_0 базиса $X(\Omega)$, т. е. $u(x)$ принадлежит $E_N(X(\Omega))$. Обратное утверждение очевидно. Лемма 6.2 доказана.

Следуя терминологии, принятой в случае линейных формул приближенного интегрирования [3], будем говорить, что рассматриваемая формула имеет относительно канонического в x_0 базиса степень (порядок точности) $N+1$. Если базис состоит из многочленов, упорядоченных по возрастанию степени, порядок точности назовем *алгебраическим*.

Перейдем к оценке $R_N(u)$ сверху в зависимости от величины N и дифференциальных свойств функции $u(x)$ в окрестности узловой точки. Напомним, что область Ω ограничена, а точка x_0 лежит строго внутри нее. Выберем значение ρ так, чтобы выполнялось соотношение $0 < \rho \leqslant R = R(x_0)$. По той же схеме, что и в § 2, доказываются существование и единственность для данного ρ ортонормированного базиса $X(\Omega)$ с элементами $\varphi_j(x)$, ортогональными в следующем смысле:

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)} \varphi_k(x)\varphi_m(x)\,dx = 0 \qquad (k \neq m).$$

При $\rho = R$ такой базис совпадает с каноническим в точке x_0. Будем также считать, что функции $\varphi_j(x)$ упорядочены таким образом, что при $k \leqslant m$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)} |\varphi_k(x)|^2\,dx \geqslant \int\limits_{B_\rho(x_0)} |\varphi_m(x)|^2\,dx. \tag{6.6}$$

Пусть $E_j^{(\rho)} = E_j^{(\rho)}(X)$ — линейная оболочка функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_j(x)$.

- Узловая точка x_0 называется *регулярной*, если для всех $j = 0, 1, 2, \ldots$ и ρ таких, что $0 < \rho \leqslant R(x_0)$ имеет мѐсто соотношение

$$\sup_{u \in E_j^{(\rho)}(X)^\perp} \frac{I_\rho(u)}{\|u\|_X^2} \geqslant \sup_{u \in E_j(X)^\perp} \frac{I_\rho(u)}{\|u\|_X^2}. \tag{6.7}$$

Приведем пример регулярной точки. Пусть Ω — шар $B_\rho(x_0)$. Тогда его центр x_0 — регулярная узловая точка. Канонический базис пространства $X(\Omega)$ состоит в этом случае из шаровых многочленов (1.3). Эти функции, как несложно убедиться, ортогональны не только в смысле пространства $X(\Omega)$, но и в следующем смысле:

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)} u_{l_1 m_1}(x) u_{l_2 m_2}(x)\,dx = 0 \quad (l_1 \neq l_2 \text{ или } m_1 \neq m_2);$$

здесь ρ может быть любым положительным не превышающим R числом. Функции $u_{lm}(x)$ естественным образом упорядочены по возрастанию l. При этом соотношения типа (6.6) выполняются автоматически. Таким образом, для всех ρ $(0 < \rho \leqslant R)$ множество $E_j^{(\rho)}(X)$ совпадает с множеством $E_j(X)$. Значит, для $j = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место неравенство (6.7), т. е. центр x_0 шара $B_R(x_0)$ действительно регулярен.

Пусть область Ω вложена в некоторый шар $B_R(x_1)$, граница которого имеет с границей области Ω единственную общую точку x_*. Будем считать, что в точке X_* достигается расстояние от узловой точки x_0 до границы области Ω, т. е. $|x_* - x_0| = R(x_0)$. Кроме того, условимся обозначать через N_k величину $j(k) - 1$, где $k \in \mathbb{N}$, а функция $j(k)$ определена в § 3. Пусть при $R_1 < R$ число $k_1(R_1)$ является целой частью отношения $nR^{1/7}/(R^{1/7} - R_1^{1/7})$. Для рассматриваемой области Ω справедлива

Теорема 6.1. *Пусть узловая точка x_0 формулы приближенного интегрирования первого рода регулярна, а функция $u(x)$ из $X(\Omega)$ допускает гармоническое продолжение в шар $B_{R_2}(x_0)$, где $R_2 > R = R(x_0)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $k_0(\varepsilon)$ такой, что при всех k, бо́льших одновременно $k_0(\varepsilon)$ и $k_1(R_1)$, справедливо неравенство*

$$R_{N_k}(u) \leqslant e_n(x_0) d_{k,n}(R_2) \left(\frac{R}{R_2}\right)^{2k+1} \frac{1}{R_2^n} \int\limits_{B_{R_2}(x_0)} |u|^2 \, dx; \tag{6.8}$$

здесь величины $e_n(x_0)$ и $d_{k,n}(x_0)$ не зависят от u и определяются равенствами

$$e_n(x_0) = \pi(R_0 e^2)^2 \left(\frac{\pi R_0^2}{R}\right)^{n-3} \left[\frac{n+2}{n(n-2)\Gamma(n/2-1)}\right]^2 \times \left(\sqrt{2|x_0 - x_1|} + \varepsilon\sqrt{R_0 - |x_0 - x_1|}\right)^8,$$

$$d_{k,n}(R_2) = \frac{4\sigma(k+1)[j(k+1)]^6}{k(n+2k+1)} \frac{(2+k)^{14} R_2^2}{(2+k)^{14} R_2^2 - (n+k+2)R^2}.$$

Доказательству теоремы 6.1 предпошлем две леммы.

Лемма 6.3. *Пусть функция u из $X(\Omega)$ гармонична в шаре $B_{R_2}(x_0)$, где $R_2 > R$. Тогда коэффициент c_j в ее разложении по каноническому в точке x_0 базису удовлетворяет неравенству*

$$|c_j| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_j^2(x_0 \mid \Omega)} \frac{1}{R_1^{n/2}} \left[\int\limits_{B_{R_1}(x_0)} |\psi_j(x)|^2 \, dx\right]^{1/2} \cdot \frac{1}{R_2^{n/2}} \left[\int\limits_{B_{R_2}(x_0)} |u(x)|^2 \, dx\right]^{1/2}, \tag{6.9}$$

где $R_1 R_2 = R^2$.

Доказательство. Представим коэффициент c_j по формуле (6.3), а затем скалярное произведение в правой части запишем в виде

$$(\widetilde{\psi}_j(x_0), \widetilde{u}(x_0))_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l+n} \sum_{m=1}^{\sigma(l)} \left(\frac{R_1}{2}\right)^l \left\{ \sum_{|\alpha|=l} a_{\alpha,m} \frac{D^\alpha \psi_j(x_0)}{\alpha!} \right\}$$

$$\times \left(\frac{R^2}{2R_1}\right)^l \left\{ \sum_{|\alpha|=l} a_{\alpha,m} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!} \right\} = (\widetilde{\psi}_j^{(R_1)}(x_0), \widetilde{u}^{(R_2)}(x_0))_2; \quad (6.10)$$

здесь $\widetilde{\psi}_j^{(R_1)}(x_0)$ и $\widetilde{u}^{(R_2)}(x_0)$ обозначают последовательности, построенные по тому же правилу, что и нормированные следы $\widetilde{\psi}(x_0)$ и $\widetilde{u}(x_0)$ с той разницей, что вместо параметра R при построении взяты числа R_1 и R_2 соответственно. Из (6.10) и неравенства Коши — Буняковского имеем

$$|(\widetilde{\psi}_j(x_0), \widetilde{u}(x_0))_2| \leqslant \|\widetilde{\psi}_j^{(R_1)}(x_0)\|_2 \|\widetilde{u}^{(R_2)}(x_0)\|_2.$$

Подставляя эту оценку в (6.3) и пользуясь дважды формулой (1.14), приходим к искомому соотношению (6.9). Лемма 6.3 доказана.

Лемма 6.4. *Пусть точка x_0 из Ω регулярна. Тогда для $l = 1, 2, \ldots$, $j(l) \leqslant j \leqslant j(l+1) - 1$ и $0 < \rho \leqslant R$ функция $\psi_j(x)$ канонического в точке x_0 базиса удовлетворяет оценке*

$$\frac{1}{\rho^n} \int\limits_{B_\rho(x_0)} |\psi_{j+1}(x)|^2 \, dx \leqslant \frac{1}{l(n+2l+1)R^{n-3}} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2l+1}. \quad (6.11)$$

Доказательство. Обозначим через X_1 пространство $X(B_R(x_0))$, а через X_2 — пространство $X(\Omega)$. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 3.1, получим для j ($j(l) \leqslant j \leqslant j(l+1) - 1$) неравенство

$$\sup_{u \in E_j(X_1)^\perp} \frac{I_\rho(u)}{\|u\|_X^2} \geqslant \sup_{u \in E_j^{(\rho)}(X_2)^\perp} \frac{I_\rho(u)}{\|u\|_X^2}. \quad (6.12)$$

Точная верхняя грань в правой части согласно условию регулярности (6.7) не меньше величины $\sup\limits_{u \in E_j(X_2)^\perp} [I_\rho(u)/\|u\|_X^2]$. Учитывая этот факт, а также формулу (3.16), получим для $\psi(x)$ из $E_j(X_2)^\perp$ неравенство

$$\frac{1}{\rho^n} \int\limits_{B_\rho(x_0)} |\psi(x)|^2 \, dx \leqslant \frac{B_l^2 \rho^{2l+1}}{2l+n+1} \|\psi\|_X^2.$$

Взяв в качестве ψ функцию $\psi_{j+1}(x)$, что возможно, поскольку $\psi_{j+1}(x)$ принадлежит $E_j(X_2)^\perp$, приходим к оценке (6.11). Лемма 6.4 доказана.

Доказательство теоремы 6.1. Разложим данную функцию $u(x)$ в ряд по каноническому базису

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \psi_j(x).$$

Коэффициент c_j в этом разложении допускает согласно лемме 6.3 оценку (6.9). Поэтому

$$R_N(u) = \sum_{j=N+1}^{\infty} c_j^2 \leqslant \frac{1}{R_2^n} \int\limits_{B_{R_2}(x_0)} |u(x)|^2\, dx \times \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{R_1^n \varepsilon_j^4(x_0 \mid \Omega)} \int\limits_{B_{R_1}(x_0)} |\psi_j(x)|^2\, dx; \tag{6.13}$$

здесь $R_1 = R^2/R_2$. Положив $N = N_k$ и оценив сумму ряда в правой части (6.13) с помощью формул (6.11) и (4.3), после несложных выкладок получим неравенство

$$R_{N_k}(u) \leqslant \frac{4}{R^{n-3}\alpha_n^4 q_n^4(x_0)} \sum_{l=k}^{\infty} \left(\frac{R_1}{R}\right)^{2l+1} \times \frac{\sigma(l+1)[j(l+1)]^6}{l(n+2l+1)} \frac{1}{R_2^n} \int\limits_{B_{R_2}(x_0)} |u(x)|^2\, dx. \tag{6.14}$$

Промажорируем сумму в правой части. Положив

$$a_l = \frac{\sigma(l+1)[j(l+1)]^6}{l(n+2l+1)} \left(\frac{R_1}{R}\right)^{2l+1},$$

заметим, что при $l \geqslant 1$

$$\frac{a_{l+1}}{a_l} \leqslant \left(\frac{n+l+2}{l+2}\right)^{14} \left(\frac{R_1}{R}\right)^2. \tag{6.15}$$

Если $l \geqslant k$, то $(n+l+2)/(l+2) \leqslant (n+k+2)/(k+2)$. Отсюда и из (6.15) следует, что при $k \geqslant k_1(R_1)$ отношение a_{l+1}/a_l строго меньше единицы. Учитывая этот факт и используя (6.15), получим

$$\sum_{l=k}^{\infty} a_l \leqslant a_k \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{n+k+2}{k+2}\right)^{16j} \left(\frac{R_1}{R}\right)^{2j} = a_k \frac{(2+k)^{16} R^2}{(2+k)^{16} R^2 - (n+k+2)^{16} R_1^2}.$$

Подставляя это неравенство в (6.14), приходим к оценке (6.8). Теорема 6.1 доказана.

Перейдем к оценке погрешности формул второго рода. Пусть выражение $D_\Omega^{N,M}(u)$ задается суммой

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\varepsilon_j^2(x_0|\Omega)} \left\{ \sum_{l=1}^{M} \frac{1}{\sqrt{n+2l}} \left(\frac{R}{2}\right)^l \sum_{m=1}^{\sigma(l)} q_{lm,j}(x_0|\Omega) \left[\sum_{|\alpha|=l} a_{\alpha,m} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!} \right] \right\}^2,$$

в которой N, M — конечные натуральные числа, а величины $\varepsilon_j(x_0 \mid \Omega)$ и $q_{lm,j}(x_0 \mid \Omega)$ определены ранее в § 2, 5 и не зависят от M, N. Исследуем аппроксимативные свойства формулы

$$D_\Omega(u) \cong D_\Omega^{N,M}(u). \tag{6.16}$$

Рассмотрим соответствующий ей функционал погрешности

$$R_{N,M}(u) = D_\Omega(u) - D_\Omega^{N,M}(u). \tag{6.17}$$

Очевидно, что равенство (6.17) при фиксированном N определяет на $X(\Omega)$ последовательность квадратичных форм, которая стремится при $M \to \infty$ к значению $R_N(u)$. Очевидно также, что при одновременном увеличении M и N погрешность $R_{N,M}(u)$ стремится к нулю для любой функции u из $X(\Omega)$.

На подпространстве $X(\Omega)$, состоящем из гармонических полиномов степени меньше M, значения функционалов погрешности $R_{N,M}(u)$, $R_N(u)$ совпадают. Если канонический базис $X(\Omega)$ состоит из полиномов, упорядоченных по возрастанию степени, а $M \geqslant N$, то формула (6.16) имеет алгебраический порядок точности $N+1$.

Пусть область Ω удовлетворяет тем же условиям, что и в теореме 6.1. Тогда справедлива

Теорема 6.2. *Пусть функция $u(x)$ из $X(\Omega)$ допускает гармоническое продолжение в шар $B_{R_2}(x_0)$, где $R_2 > R$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N_0(\varepsilon)$ такой, что при любом M и $N \geqslant N_0(\varepsilon)$ справедливо неравенство*

$$|R_{N,M}(u)| \leqslant R_N(u) + b_n(x_0)(N+1)^3 \left(\frac{R}{R_2}\right)^M \frac{1}{R_2^n} \int\limits_{B_{R_2}(x_0)} |u|^2\,dx; \tag{6.18}$$

здесь

$$b_n(x_0) = 2^{3/2} R_0^{n-4} e^2 (\sqrt{2|x_0 - x_1|} + \varepsilon\sqrt{R_0 - |x_0 - x_1|})^4 \frac{(n+2)\pi^{n/2-1}}{n(n--2)\Gamma(n/2-1)}.$$

Доказательство. Имеем

$$|R_{N,M}(u)| \leqslant R_N(u) + |R_N(u) - R_{N,M}(u)|. \tag{6.19}$$

Оценим второе слагаемое в правой части. Преобразуем нормированный след $\widetilde{u}(x_0)$ в новую последовательность

$$\widetilde{u}_M(x_0) = (u_1^M, u_2^M, \dots, u_j^M, \dots),$$

полагая, что все координаты $\widetilde{u}(x_0)$, начиная с $(M+1)$-й, равны нулю. Справедливо следующее равенство:

$$R_N(u) - R_{N,M}(u) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\varepsilon_j^2(x_0 \mid \Omega)} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} q_{ij}(u_i - u_i^M) \right\} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} q_{ij}(u_i + u_i^M) \right\}. \tag{6.20}$$

Напомним, что матрица $Q = (q_{ij}(x_0 \mid \Omega))$ определяет в l_2 частично-изометрический оператор. Учитывая, что при $1 \leqslant j \leqslant N$ величина $\varepsilon_j^2(x_0 \mid \Omega)$ не меньше, чем $\varepsilon_N^2(x_0 \mid \Omega)$, и пользуясь неравенством Коши для сумм, получим из (6.20) неравенство

$$|R_N(u) - R_{N,M}(u)| \\ \leqslant \frac{1}{\varepsilon_N^2(x_0 \mid \Omega)} \|Q^*(\widetilde{u}(x_0) - \widetilde{u}_M(x_0))\|_2 \, \|Q^*(\widetilde{u}(x_0) + \widetilde{u}_M(x_0))\|_2. \quad (6.21)$$

Как известно, оператор QQ^* определяет в l_2 ортопроектор на замкнутое подпространство. В частности, для любой последовательности c из l_2 справедлива оценка

$$\|QQ^*c\|_2 \leqslant \|c\|_2.$$

Применив ее сначала к разности, а затем к сумме $\widetilde{u}(x_0)$ и $\widetilde{u}_M(x_0)$ и подставив результат в (6.21), получим

$$|R_N(u)-R_{N,M}(u)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_N^2(x_0 \mid \Omega)} \|\widetilde{u}(x_0)+\widetilde{u}_M(x_0)\|_2 \, \|\widetilde{u}(x_0)-\widetilde{u}(x_0)\|_2. \quad (6.22)$$

Далее, имеем

$$\|\widetilde{u}(x_0) + \widetilde{u}_M(x_0)\|_2 \leqslant \sqrt{2}\|\widetilde{u}(x_0)\|_2 \leqslant \sqrt{2}\|\widetilde{u}^{(R_2)}(x_0)\| \\ \leqslant \left[\frac{2}{R_2^n} \int\limits_{B_{R_2}(x_0)} |u(x)|^2 \, dx\right]^{1/2}. \quad (6.23)$$

Норму разности между $\widetilde{u}(x_0)$ и $\widetilde{u}^M(x_0)$ оценим по формуле

$$\|\widetilde{u}(x_0) - \widetilde{u}^{(M)}(x_0)\|_2 \leqslant \left(\frac{R}{R_2}\right)^{M+1} \left[\frac{1}{R_2^n} \int\limits_{B_{R_2}(x_0)} |u(x)|^2 \, dx\right]^{1/2}. \quad (6.24)$$

Подставляя (6.23) и (6.24) в (6.22), приходим к неравенству

$$|R_N(u) - R_{N,M}(u)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon_N^2(x_0 \mid \Omega)} \left(\frac{R}{R_2}\right)^{M+1} \frac{1}{R_2^n} \int\limits_{B_{R_2}(x_0)} |u(x)|^2 \, dx,$$

из которого в силу (4.3) и (6.19) получаем (6.18). Теорема 6.2 доказана.

Полагая $M \geqslant N$ в формуле (6.18) и считая выполненными условия теоремы 6.1, можем оценить погрешность $R_{N,M}(u)$. В частности, заметим, что при увеличении порядка точности N_k погрешность убывает к нулю экспоненциально по k. Подобный эффект хорошо известен в теории линейных квадратурных формул [14–16] и используется в некоторых случаях при решении краевых задач [17].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Соболев С. Л.** Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
2. **Davis P. J., Rabinowitz P.** Numerical integration. Waltham: Blaisdell Publ. Co., 1967.
3. **Крылов В. И.** Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967.
4. **Бахвалов Н. С.** Численные методы. М.: Наука, 1973.
5. **Мысовских И. П.** Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
6. **Березин И. С. Жидков Н. П.** Методы вычислений. М.: Наука, 1966. Т. 1.
7. **Люстерник Л. А., Диткин В. А.** Построение приближенных формул для вычисления кратных интегралов // Докл. АН СССР. 1948. Т. 61, № 3. С. 441–444.
8. **Половинкин В. И., Дидур Л. И.** Асимптотически оптимальные последовательности эрмитовых кубатурных формул // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 3. С. 663–669.
9. **Бахвалов Н. С.** Об оптимальной скорости интегрирования аналитических функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 6, № 6. С. 1011–1020.
10. **Davis P. J.** On the numerical integration of periodic analytic functions // On numerical approximation. Madison: Univ. Wisconsin Press, 1959. P. 45–59.
11. **Коллатц Л.** Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969.
12. **Бабенко К. И.** Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
13. **Соболев С. Л.** Об алгебраическом порядке точности формул приближенного интегрирования // Дифференциальные уравнения уравнения с частными производными. Новосибирск: Наука, 1986. С. 4–11.
14. **Васкевич В. Л.** О сходимости квадратурных формул Эйлера — Маклорена на одном классе гладких функций // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260, № 1. С. 1040–1043.
15. **Васкевич В. Л.** О сходимости квадратурных формул Грегори // Докл. АН СССР. 1981. Т. 261, № 5. С. 1041–1043.
16. **Васкевич В. Л.** Классы бесконечно дифференцируемых функций и приближенное интегрирование // Тр. семинара акад. С. Л. Соболева. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. 1984. № 2. С. 52–64.
17. **Васкевич В. Л.** К приближенному решению задачи Дирихле в составных пространственных областях // Численный анализ. Новосибирск: Наука, 1989. С. 93–126.
18. **Васкевич В. Л.** Численный анализ энергетической зонной структуры кристалла с многоатомной элементарной ячейкой // Вычислительные проблемы в задачах математической физики. Новосибирск: Наука, 1992. С. 55–91.
19. **Васкевич В. Л.** Приближенное вычисление некоторых квадратичных форм интегрального вида // Вычислительные проблемы в задачах математической физики. Новосибирск: Наука, 1992. С. 92–123.
20. **Соболев С. Л.** Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций. М.: Наука, 1989.
21. **Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.** Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
22. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
23. **Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
24. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.