О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Г. В. Демиденко, И. Ю. Нехаев

В работах [1–3] рассматривались общие краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических уравнений и исследовались условия разрешимости в весовых соболевских классах. В частности, было установлено, что для корректной разрешимости задачи с однородными краевыми условиями достаточно потребовать от правой части конечного числа условий ортогональности некоторым полиномам. Был выделен также класс уравнений, для которых имеет место безусловная разрешимость в подходящей шкале весовых соболевских пространств.

В настоящей работе продолжаются исследования [1–3]. Мы изучаем регулярность решений общих краевых задач для квазиэллиптических уравнений, а также на примере краевых задач для полигармонического уравнения устанавливаем, насколько близки достаточные условия разрешимости из [2, 3] к необходимым.

1. Формулировки результатов, примеры. Рассмотрим краевую задачу в полупространстве для квазиэллиптического уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} L(D_x)u &= f(x), \qquad x \in R_n^+, \\ B_j(D_x)u\Big|_{x_n=0} &= 0, \qquad j = 1, \dots, \mu, \end{aligned} \tag{1}$$

с граничными операторами, удовлетворяющими условию Лопатинского. Напомним условия на операторы $L(D_x)$ и $B_j(D_x)$ из [1–3].

Оператор $L(D_x)$ квазиэллиптический, и символ его $L(i\xi)$ однороден относительно вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $1/\alpha_i$ натуральные, т. е.

$$L(c^\alpha i\xi) = cL(i\xi), \qquad c > 0.$$

Число граничных операторов $B_j(D_x)$ равно числу корней уравнения

$$L(is, i\lambda) = 0, \qquad s \in R_{n-1} \setminus \{0\}, \tag{2}$$

по λ, лежащих в верхней полуплоскости. Каждый из операторов имеет вид

$$B_j(D_x) = D_{x_n}^{m_j} + \sum_{k<m_j} B_{j,k}(D_{x'})D_{x_n}^k, \qquad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}),$$

при этом символы $B_j(i\xi)$ однородны относительно вектора α с показателем однородности β_j, $0 \leqslant \beta_j < 1$, т. е.

$$B_j(c^\alpha i\xi) = c^{\beta_j} B_j(i\xi), \qquad c > 0.$$

Обозначим через S_n оператор следа на гиперплоскости $\{x_n = 0\}$. Предположим, что для оператора

$$\{L(D_x), S_n \circ B_1(D_x), \dots, S_n \circ B_\mu(D_x)\}$$

выполняется условие Лопатинского.

Отметим, что в силу квазиэллиптичности оператора $L(D_x)$ коэффициент при старшей производной по x_n отличен от нуля, и в дальнейшем для определенности будем считать, что он равен единице. Пусть $r = (1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n)$, $1 < p < \infty$, $1/p' + 1/p = 1$, $\alpha_{\min} = \min\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Приведем формулировки теорем из [2, 3] о корректной разрешимости задачи (1) в соболевском пространстве $W_p^r(R_n^+)$.

Теорема А. *Если $|\alpha|/p' > 1$, то для любой функции $f \in L_p(R_n^+) \cap L_1(R_n^+)$ краевая задача* (1) *имеет единственное решение $u \in W_p^r(R_n^+)$, и для него справедливо неравенство*

$$\|u(x), W_p^r(R_n^+)\| \leqslant c(\|f(x), L_p(R_n^+)\| + \|f(x), L_1(R_n^+)\|)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f(x)$.

Теорема В. *Пусть $|\alpha|/p' \leqslant 1$. Предположим, что $f \in L_p(R_n^+)$ удовлетворяет условиям*

$$(1 + \langle x \rangle)^{N|\alpha|} f(x) \in L_1(R_n^+), \tag{3}$$

$$\int\limits_{R_n^+} x^\beta f(x)\, dx = 0, \qquad |\beta| = 0, \dots, N-1, \tag{4}$$

где N — натуральное число, определяемое из неравенств

$$|\alpha|/p' + N\alpha_{\min} > 1 \geqslant |\alpha|/p' + (N-1)\alpha_{\min}. \tag{5}$$

Тогда существует единственное решение $u \in W_p^r(R_n^+)$ краевой задачи (1), *и для него выполняется оценка*

$$\|u(x), W_p^r(R_n^+)\| \leqslant c(\|f(x), L_p(R_n^+)\| + \|(1 + \langle x \rangle)^{N|\alpha|} f(x), L_1(R_n^+)\|)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f(x)$.

Доказательства теорем А и В основаны на изучении свойств семейства интегральных операторов R_h, $h \in (0,1)$, определенного в работах [1, 2] и возникающего при построении приближенных решений задачи (1).

Сформулируем теоремы о регулярности решений задачи (1). Далее будем считать, что $s \geqslant 1$ и s/α_n натуральное.

Теорема 1. *Если $|\alpha|/p' > 1$, то для любой функции f из пространства $W_p^{(s-1)r}(R_n^+) \cap L_1(R_n^+)$ решение краевой задачи* (1) *принадлежит $W_p^{sr}(R_n^+)$ и для него имеет место оценка*

$$\|u(x), W_p^{sr}(R_n^+)\| \leqslant c(\|f(x), W_p^{(s-1)r}(R_n^+)\| + \|f(x), L_1(R_n^+)\|) \tag{6}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f(x)$.

Теорема 2. *Если $|\alpha|/p' \leqslant 1$, то для любой функции $f \in W_p^{(s-1)r}(R_n^+)$, удовлетворяющей условиям (3)–(5), решение задачи (1) принадлежит пространству $W_p^{sr}(R_n^+)$ и для него выполняется неравенство*

$$\|u(x), W_p^{sr}(R_n^+)\| \leqslant c(\|f(x), W_p^{(s-1)r}(R_n^+)\| + \|(1+\langle x\rangle)^{N|\alpha|} f(x), L_1(R_n^+)\|) \tag{7}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f(x)$.

Теоремы о регулярности решений задачи (1) будем доказывать, исследуя свойства операторов R_h. Поэтому в следующем пункте приведем конструкцию приближенного решения из [1, 2].

При изучении краевой задачи (1) в работах [2, 3] на правую часть уравнения $f(x)$ были поставлены условия ортогональности (4), при которых в случае $|\alpha|/p' \leqslant 1$ доказывалась разрешимость в пространстве $W_p^r(R_n^+)$. Возникает естественный вопрос: насколько существенны эти дополнительные условия? В общем случае ответ на этот вопрос представляет довольно сложную задачу и остается пока открытым. Здесь мы приведем один результат для частного случая, когда оператор $L(D_x)$ является полигармоническим. Из него, в частности, следует, что условия ортогональности (4) близки к необходимым.

Рассмотрим краевую задачу для полигармонического уравнения

$$\begin{aligned} &\Delta^m u = f(x), \qquad x_n > 0, \\ &B_j(D_x)u\Big|_{x_n=0} = 0, \qquad j = 1,\dots,m. \end{aligned} \tag{8}$$

Будем считать, что граничные операторы $B_j(D_x)$ однородные степени m_j, $0 \leqslant m_j < 2m$, и выполнено условие Лопатинского. При $s \in R_{n-1} \setminus \{0\}$ введем функции

$$\varphi_j^k(s) = \frac{i(-1)^m}{(m-1)!}\Big(D_\lambda^{m-1}\Big(\frac{(-i\lambda)^k B_j(is,i\lambda)}{(\lambda - i|s|)^m}\Big)\Big|_{\lambda=-i|s|} + D_\lambda^{m-1}\Big(\frac{(-i\lambda)^k B_j(is,i\lambda)}{(\lambda + i|s|)^m}\Big)\Big|_{\lambda=i|s|}\Big),$$

где $k \geqslant 0$, $j = 1,\dots,m$. Имеет место

Теорема 3. *Пусть $f \in C_0^\infty(R_n^+)$, $n \leqslant 2mp'$, $1 < p \leqslant 2$, N — натуральное число, удовлетворяющее неравенствам*

$$N - 1 \leqslant 2m - n/p' < N. \tag{9}$$

Предположим, что для всех $k \leqslant N-1$, не равных k_0, выполнены тождества

$$\varphi_j^k(s) \equiv 0, \qquad j = 1,\dots,m,$$

при этом для некоторых $j = 1,\dots,m$

$$\varphi_j^{k_0}(s) \not\equiv 0, \qquad s \in R_n^+ \setminus \{0\}.$$

Тогда для существования решения краевой задачи (8) в $W_p^{2m}(R_n^+)$ необходимо выполнение следующих условий:

$$\int\limits_{R_n^+} x^\beta f(x)\,dx \equiv 0, \qquad 0 \leqslant |\beta| \leqslant N-1, \qquad \beta_n = k_0. \tag{10}$$

Приведем примеры краевых задач для трехмерного уравнения Пуассона $\Delta u = f(x)$, иллюстрирующие теорему 3. Отметим, что в этом случае неравенство (9) выполняется при $N = 1$, если $3/2 < p \leqslant 2$, и при $N = 2$, если $1 < p \leqslant 3/2$.

Пример 1. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta u = f(x), \qquad x \in R_3^+,$$
$$u\Big|_{x_3=0} = 0.$$

Поскольку $m = 1$ и $B_1(is, i\lambda) \equiv 1$, имеем $\varphi_1^0(s) \equiv 0$, $\varphi_1^1(s) \equiv -1$. Следовательно, по теореме 3 для разрешимости задачи в $W_p^2(R_3^+)$ при $1 < p \leqslant 3/2$ необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\int\limits_{R_3^+} x_3 f(x)\, dx = 0.$$

Пример 2. Рассмотрим задачу Неймана

$$\Delta u = f(x), \qquad x \in R_3^+,$$
$$D_{x_3} u\Big|_{x_3=0} = 0;$$

здесь $m = 1$, $B_1(is, i\lambda) \equiv i\lambda$, поэтому $\varphi_1^0(s) \equiv -i$, $\varphi_1^1(s) \equiv 0$. Следовательно, по теореме 3 для разрешимости задачи в $W_p^2(R_3^+)$ при $3/2 < p \leqslant 2$ необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\int\limits_{R_3^+} f(x)\, dx = 0,$$

а при $1 < p \leqslant 3/2$ требуется более жесткое условие:

$$\int\limits_{R_3^+} x_1^{q_1} x_2^{q_2} f(x)\, dx = 0, \qquad 0 \leqslant q_1 + q_2 \leqslant 1.$$

Отметим, что в этом случае необходимые условия разрешимости в пространстве $W_p^2(R_3^+)$ близки к достаточным условиям (4).

2. Конструкция приближенного решения и вспомогательные утверждения. Построение приближенного решения краевой задачи (1) из [1, 2] основано на использовании специального усреднения функций $f \in L_p(R_k)$ из работы С. В. Успенского [4]:

$$f(x) = \lim_{h\to 0} (2\pi)^{-k} \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha^k|-1} \int\limits_{R_k}\int\limits_{R_k} \exp\Big(t\frac{x-y}{v^\alpha}\xi\Big) G(\xi) f(y)\, d\xi\, dy\, dv, \quad (11)$$

где

$$G(\xi) = m\langle\xi\rangle^m \exp(-\langle\xi\rangle^m), \qquad m = 2l > k+1,$$
$$\langle\xi\rangle^2 = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^{2/\alpha_i}, \qquad |\alpha^k| = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i.$$

Пусть $\Gamma^+(s)$ — контур в комплексной плоскости, охватывающий корни $\lambda_k^+(s)$ уравнения (2), а $\Gamma^-(s)$ — контур, охватывающий все корни, лежащие в нижней полуплоскости. Определим контурные интегралы

$$J_+(s, x_n) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma^+(s)} \frac{\exp(ix_n\lambda)}{L(is, i\lambda)}\, d\lambda,$$

$$J_-(s, x_n) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma^-(s)} \frac{\exp(ix_n\lambda)}{L(is, i\lambda)}\, d\lambda,$$

$$J_j(s, x_n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^+(s)} \frac{\exp(ix_n\lambda)}{M^+(s,\lambda)} N_j(s,\lambda)\, d\lambda,$$

где $j = 1, \dots, \mu$ и $M^+(s,\lambda) = \prod_{k=1}^{\mu}(\lambda - \lambda_k^+(s))$, а $N_j(s\lambda)$ — полиномы по λ такие, что выполняются равенства

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^+(s)} \frac{B_k(is, i\lambda) N_j(s,\lambda)}{M^+(s,\lambda)}\, d\lambda = \delta_j^k, \qquad k, j = 1, \dots, \mu,$$

(см., например, [5]).

Используя интегральное представление (11) при $k = n-1$ и определенные контурные интегралы, введем линейные интегральные операторы (см. [1, 2]) R_h^+, R_h^-, $R_{j,h}$ $(j = 1, \dots, \mu,\ h \in (0,1))$ следующим образом. Для любой функции $f \in L_p(R_n^+) \cap L_1(R_n^+)$ по определению полагаем

$$R_h^+ f(x) = (2\pi)^{1-n} \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-1} \int\limits_0^{x_n} \int\limits_{R_{n-1}} \int\limits_{R_{n-1}} \exp(i(x'-y')s)$$
$$\times G(sv^{\alpha'}) J_+(s, x_n - y_n) f(y)\, ds\, dy'\, dy_n\, dv,$$

$$x = (x', x_n), \qquad y = (y', y_n), \qquad \alpha = (\alpha', \alpha_n),$$

$$R_h^- f(x) = (2\pi)^{1-n} \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-1} \int\limits_{x_n}^{\infty} \int\limits_{R_{n-1}} \int\limits_{R_{n-1}} \exp(i(x'-y')s)$$
$$\times G(sv^{\alpha'}) J_-(s, x_n - y_n) f(y)\, ds\, dy'\, dy_n\, dv,$$

$$R_{j,h}f(x) = (2\pi)^{1-n} \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-1} \int\limits_{R_{n-1}} \int\limits_{R_{n-1}} \exp\left(i(x'-y')s\right)$$
$$\times G(sv^{\alpha'})J_j(s,x_n) \int\limits_0^\infty I_j(s,y_n)f(y',y_n)\,dy_n\,ds\,dy'\,dv,$$

где $j = 1,\dots,\mu$,

$$I_j(s,y_n) = -B_j(is, D_{z_n})J_-(s, z_n - y_n)\Big|_{z_n=0},$$

$$G(s) = m\langle s\rangle^m \exp\left(-\langle s\rangle^m\right), \qquad m = 2l > n, \qquad \langle s\rangle^2 = \sum_{i=1}^{n-1} s_i^{2/\alpha_i}.$$

Определим теперь семейство интегральных операторов R_h ($h \in (0,1)$) по формуле

$$R_h = R_h^+ + R_h^- + \sum_{j=1}^{\mu} R_{j,h}.$$

Из определения операторов R_h^+, R_h^-, $R_{j,h}$ вытекает (см. [1]), что для функции $u_h(x) = R_hf(x)$, $h > 0$, имеют место равенства

$$L(D_x)u_h(x) = (2\pi)^{1-n} \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha'|-1} \int\limits_{R_{n-1}} \int\limits_{R_{n-1}} \exp\left(i\frac{x'-y'}{v^{\alpha'}}s\right)G(s)$$
$$\times f(y',x_n)\,ds\,dy'\,dv,$$

$$B_j(D_x)u_h(x)\Big|_{x_n=0} = 0, \qquad j = 1,\dots,\mu, \qquad |\alpha'| = \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i.$$

Поэтому с учетом (11) функцию $u_h(x)$ при малых $h > 0$ можно рассматривать как приближенное решение краевой задачи (1), и для доказательства регулярности решения, как и в [1, 3], нужно изучать свойства семейства операторов R_h.

В п. 3 нам понадобятся следующие леммы [2, 3].

Лемма 1. *Для любого вектора* $\nu = (\nu', \nu_n)$, $\nu\alpha = \nu'\alpha' + \nu_n\alpha_n = 1$, *функции*

$$\mu_\nu^+(\xi) = (is)^{\nu'} \int_0^\infty e^{-i\xi_n x_n} D_{x_n}^{\nu_n} J_+(s,x_n)\,dx_n,$$

$$\mu_\nu^-(\xi) = (is)^{\nu'} \int_{-\infty}^0 e^{i\xi_n x_n} D_{x_n}^{\nu_n} J_-(s,x_n)\,dx_n,$$

$$\mu_{j,\nu}(\xi) = \langle s\rangle^{\beta_j-\nu_n\alpha_n} \int_0^\infty e^{i\xi_n x_n} D_{x_n}^{\nu_n+1} J_j(s,x_n)\,dx_n,$$

$$\mu_{j,\nu}(\xi) = (is)^{\nu'} \int_0^\infty e^{i\xi_n x_n} \langle s\rangle^{\nu_n\alpha_n-\beta_j} B_j(is,D_{y_n}) J_-(s,y_n-x_n)\Big|_{y_n=0}\,dx_n,$$

где $j=1,\dots,\mu$, *являются мультипликаторами в* $L_p(R_n)$.

Отметим, что при доказательстве леммы 1 существенно использовалась теорема Лизоркина о мультипликаторах [6].

Лемма 2. *При* $s\in R_{n-1}\setminus\{0\}$ *имеют место равенства*

$$D_{x_n}^k\Big(J_+(s,x_n)-J_-(s,x_n)\Big)\Big|_{x_n=0} = \delta_{l-1}^k,\quad k=0,\dots,l-1,$$

где δ_{l-1}^k — *символ Кронекера,* $l=r_n=1/\alpha_n$.

Лемма 3. *Пусть* $f\in L_1(R_n^+)$ *и* $\widehat{f}(s,x_n)$ — *частичное преобразование Фурье по* x'. *Тогда при* $s\in R_{n-1}\setminus\{0\}$ *имеют место следующие равенства:*

$$J_j(s,x_n)\int_0^\infty I_j(s,y_n)\widehat{f}(s,y_n)\,dy_n$$
$$= -\int_0^\infty D_{z_n}\Big(J_j(s,x_n+z_n)\int_0^\infty I_j(s,y_n+z_n)\widehat{f}(s,y_n)\,dy_n\Big)\,dz_n,$$

где $j=1,\dots,\mu$.

Используя контурные интегралы $J_+(s,x_n)$, $J_-(s,x_n)$, $J_l(s,x_n)$, $I_l(s,x_n)$, при $x_n>0$, $s\in R_{n-1}\setminus\{0\}$ введем функции

$$\begin{gathered} H(s,x_n,y_n) = J_+(s,x_n-y_n) + \sum_{l=1}^{\mu} J_l(s,x_n)I_l(s,y_n),\\ H^k(s,x_n,y_n) = D_{y_n}^k H(s,x_n,y_n),\qquad k\geqslant 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Далее принимаем следующие обозначения:

$$M^+(s,D_{x_n}) = \prod_{k=1}^{\mu}(D_{x_n}-\lambda_k^+(s)),\quad \Lambda = \max_{i,s'}|\lambda_i(s')|,\quad \langle s'\rangle = 1.$$

Приведем некоторые леммы, которые будут применяться при доказательстве теоремы 3.

Лемма 4. *Функция* $H^k = H^k(s, x_n, 0)$ *является решением краевой задачи*

$$M^+(s, D_{x_n})H^k = 0, \qquad x_n > 0,$$
$$B_j(is, D_{x_n})H^k\Big|_{x_n=0} = \varphi_j^k(s), \qquad j = 1, \dots, \mu, \tag{13}$$
$$|H^k(s, x_n)| \to 0 \text{ при } x_n \to \infty,$$

где

$$\varphi_j^k(s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma(s)} \frac{(-i\lambda)^k B_j(is, i\lambda)}{L(is, i\lambda)}\, d\lambda,$$
$$\Gamma(s) = \{\lambda \in C\colon |\lambda| = 2\Lambda\langle s\rangle^{\alpha_n}\}.$$

Доказательство. По определению контурных интегралов $J_+(s, x_n)$, $J_l(s, x_n)$, очевидно, имеем

$$M^+(s, D_{x_n})H^k(s, x_n) \equiv 0,$$
$$|H^k(s, x_n)| \to 0 \quad \text{при } x_n \to \infty.$$

Проверим краевые условия. Учитывая (12), имеем

$$B_j(is, D_{x_n})H^k(s, x_n)\Big|_{x_n=0} = B_j(is, D_{x_n})D_{y_n}^k H(s, x_n, y_n)\Big|_{y_n=0}\Big|_{x_n=0}$$
$$= B_j(is, D_{x_n})\Big(D_{y_n}^k\Big(J_+(s, x_n - y_n) + \textstyle\sum_{l=1}^{\mu} J_l(s, x_n)I_l(s, y_n)\Big)\Big|_{y_n=0}\Big)\Big|_{x_n=0}$$
$$= B_j(is, D_{x_n})\Big((-1)^k D_{x_n}^k J_+(s, x_n) + \textstyle\sum_{l=1}^{\mu} J_l(s, x_n)D_{y_n}^k I_l(s, y_n)\Big|_{y_n=0}\Big)\Big|_{x_n=0}$$
$$\Big[\text{используем формулу } B_j(is, D_{x_n})J_l(s, x_n)\Big|_{x_n=0} = \delta_j^l\Big]$$
$$= (-1)^k B_j(is, D_{x_n})D_{x_n}^k J_+(s, x_n)\Big|_{x_n=0} + D_{y_n}^k I_j(s, y_n)\Big|_{y_n=0}$$
$$= (-1)^k B_j(is, D_{x_n})D_{x_n}^k J_+(s, x_n)\Big|_{x_n=0} - (-1)^k D_{x_n}^k B_j(is, D_{x_n})J_-(s, x_n)\Big|_{x_n=0}$$
$$= (-1)^k B_j(is, D_{x_n})\Big(D_{x_n}^k J_+(s, x_n) - D_{x_n}^k J_-(s, x_n)\Big)\Big|_{x_n=0}$$
$$= \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma(s)} \tfrac{(-i\lambda)^k B_j(is, i\lambda)}{L(is, i\lambda)}\, d\lambda = \varphi_j^k(s).$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Для функции* $H^k = H^k(s, x_n, 0)$ *имеет место представление*

$$H^k(s, x_n, 0) = \sum_{l=1}^{\mu} J_l(s, x_n)\varphi_l^k(s). \tag{14}$$

Доказательство непосредственно вытекает из леммы 4.

Лемма 6. *Для функции $H^k = H^k(s, x_n, 0)$ справедливо неравенство*

$$|H^k(s, x_n, 0)| \leqslant c(2\Lambda)^k \langle s\rangle^{(k+1)\alpha_n - 1} \exp(-\delta x_n \langle s\rangle^{\alpha_n}),$$

где c, $\delta > 0$ — константы, не зависящие от k.

Доказательство основано на представлении (14).

По лемме 2 [1] при $x_n > 0$, $s \in R_{n-1} \setminus \{0\}$ верна оценка

$$|J_l(s, x_n)| \leqslant c_1 \langle s\rangle^{-\beta_l} \exp(-\delta x_n \langle s\rangle^{\alpha_n}),$$

где c, $\delta > 0$ — константы. Из определения функций $\varphi_l^k(s)$ очевидным образом имеем также неравенство

$$|\varphi_l^k(s)| \leqslant c_2(2\Lambda)^k \langle s\rangle^{(k+1)\alpha_n - 1 + \beta_l}$$

с константой c_2, не зависящей от k. Отсюда в силу (14) вытекает доказательство леммы.

Лемма 7. *Для любой константы $c > 0$ справедливо равенство*

$$H^k(c^{\alpha'} s, c^{-\alpha_n} x_n, 0) = c^{-1+(1+k)\alpha_n} H^k(s, x_n, 0).$$

Доказательство непосредственно вытекает из определения.

3. Доказательство теорем. В этом пункте будут доказаны основные результаты. При доказательстве теорем 1 и 2 мы следуем схеме, предложенной в [2, 3] и основанной на изучении свойств интегральных операторов R_h.

В следующих леммах приводятся оценки производных приближенного решения краевой задачи (1).

Лемма 8. *Пусть $f \in W_p^{(s-1)r}(R_n^+) \cap L_1(R_n^+)$, $u_h^0(x) = (R_h^+ + R_h^-)f(x)$. Тогда для любого мультииндекса $\beta = (\beta', \beta_n)$, $1 \leqslant \beta\alpha \leqslant s$, $0 \leqslant \beta_n \alpha_n \leqslant 1$, имеет место оценка*

$$\|D_x^\beta u_h^0(x), L_p(R_n^+)\| \leqslant c\|f(x), W_p^{(s-1)r}(R_n^+)\|, \qquad 0 < h < 1, \tag{15}$$

где константа $c > 0$ не зависит от h, $f(x)$; при этом

$$\|D_x^\beta u_{h_1}^0(x) - D_x^\beta u_{h_2}^0(x), L_p(R_n^+)\| \leqslant \varepsilon(h_1, h_2)\|f(x), W_p^{(s-1)r}(R_n^+)\| \tag{16}$$

и $\varepsilon(h_1, h_2) \to 0$, h_1, $h_2 \to 0$.

Доказательство. В дальнейшем для сокращения записи будем использовать следующие обозначения: $\beta = \nu + \sigma$, $\nu = (\nu', \nu_n)$, $\sigma = (\sigma', \sigma_n)$, $\nu\alpha = 1$,

$$K(s, h) = (2\pi)^{(1-n)/2} \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-1} G(s v^{\alpha'})\, dv, \tag{17}$$

$$\widehat{f}(s, y_n) = (2\pi)^{(1-n)/2} \int\limits_{R_{n-1}} \exp(-i y' s) f(y', y_n)\, dy', \tag{18}$$

$$\widehat{f}_\theta(s, s_n) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R_n} \exp\left(-i(y's + y_n s_n)\right)\theta(y_n) f(y', y_n)\, dy, \tag{19}$$

где $\theta(y_n)$ — функция Хевисайда, $y = (y', y_n)$.

Рассмотрим случай $\beta = (\beta', 0) = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, 0)$. Имеем

$$\begin{aligned} D_x^\beta u_h^0(x) = (2\pi)^{1-n} \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-1} \int\limits_0^{x_n} \int\limits_{R_{n-1}} \int\limits_{R_{n-1}} &\exp\left(i(x' - y')s\right) G(sv^{\alpha'})(is)^{\beta'} \\ &\times J_+(s, x_n - y_n) f(y)\, ds\, dy'\, dy_n\, dv \\ + (2\pi)^{1-n} \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-1} \int\limits_{x_n}^{\infty} \int\limits_{R_{n-1}} \int\limits_{R_{n-1}} &\exp\left(i(x' - y')s\right) G(sv^{\alpha'})(is)^{\beta'} \\ &\times J_-(s, x_n - y_n) f(y)\, ds\, dy'\, dy_n\, dv = v_h^+(x) + v_h^-(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части, которое обозначим через $v_h^+(x)$. Учитывая введенные выше обозначения, а также свойства преобразования Фурье, перепишем его в виде

$$\begin{aligned} v_h^+(x) &= \int\limits_0^{x_n} \int\limits_{R_{n-1}} \exp(ix's) K(s, h)(is)^{\beta'} J_+(s, x_n - y_n) \widehat{f}(s, y_n)\, ds\, dy_n \\ &= \int\limits_{R_n} \exp\left(i(x's + x_n s_n)\right) K(s, h) \Big((is)^{\beta'} \int\limits_0^{\infty} \exp(-iy_n s_n) \\ &\qquad \times J_+(s, y_n)\, dy_n\Big) \widehat{f}_\theta(s, s_n)\, d\xi, \qquad \xi = (s, s_n). \end{aligned}$$

Используя функцию $\mu_\nu^+(\xi)$, определенную в лемме 1, находим

$$v_h^+(x) = \int\limits_{R_n} \exp(ix\xi) K(s, h) \mu_\nu^+(\xi)(is)^{\sigma'} \widehat{f}_\theta(\xi)\, d\xi, \quad \xi = (s, s_n).$$

Но поскольку функция $\mu_\nu^+(\xi)$ является мультипликатором в $L_p(R_n)$, приходим к оценке

$$\begin{aligned} &\|v_h^+(x), L_p(R_n^+)\| \\ &\qquad \leqslant c \Big\| \int\limits_{R_{n-1}} \exp(ix's) K(s, h)(is)^{\sigma'} \theta(x_n) \widehat{f}(s, x_n)\, ds, L_p(R_n) \Big\| \end{aligned}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f(x)$. Следовательно, в силу определения ядра $G(s)$ получаем неравенство

$$\|v_h^+(x),\, L_p(R_n^+)\| \leqslant c_1 \|f(x),\, W_p^{(s-1)r}(R_n^+)\|, \tag{20}$$

где константа $c_1 > 0$ не зависит от $f(x)$ и h.

Рассмотрим второе слагаемое, которое обозначим $v_h^-(x)$. Проводя аналогичные преобразования и используя функцию $\mu_\nu^-(\xi)$, определенную в лемме 1, его можно представить в следующем виде:

$$v_h^-(x) = \int\limits_{R_n} \exp(ix\xi) K(s,h) \mu_\nu^-(\xi)(is)^{\sigma'} \widehat{f}_\theta(\xi)\, d\xi, \quad \xi = (s, s_n).$$

По лемме 1 функция $\mu_\nu^-(\xi)$ является мультипликатором в $L_p(R_n)$. Следовательно, имеем оценку

$$\|v_h^-(x),\, L_p(R_n^+)\| \leqslant c \Big\| \int\limits_{R_{n-1}} \exp(ix's) K(s,h)(is)^{\sigma'} \theta(x_n) \widehat{f}(s, x_n)\, ds,\, L_p(R_n) \Big\|$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f(x)$. Поэтому, как и выше, в силу определения ядра $G(s)$ получаем неравенство

$$\|v_h^-(x),\, L_p(R_n^+)\| \leqslant c_2 \|f(x),\, W_p^{(s-1)r}(R_n^+)\|, \tag{21}$$

где константа $c_2 > 0$ не зависит от $f(x)$ и h.

Из оценок (20) и (21) непосредственно вытекает неравенство (15) в случае $\beta = (\beta', 0)$. Точно так же устанавливается оценка (16).

Рассмотрим случай $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $0 < \beta_n < r_n = 1/\alpha_n$. Учитывая определение функции $u_h^0(x)$, прибавляя и вычитая выражение

$$A_h f(x) = (2\pi)^{1-n} \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-1} \int\limits_0^{x_n} \int\limits_{R_{n-1}} \int\limits_{R_{n-1}} \exp(i(x'-y')s) G(sv^{\alpha'}) \times J_-(s, x_n - y_n) f(y)\, ds\, dy'\, dy_n\, dv, \tag{22}$$

получим

$$\begin{aligned} D_x^\beta u_h^0(x) = D_{x_n}^{\beta_n} \Big((2\pi)^{1-n} \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-1} \int\limits_0^{x_n} \int\limits_{R_{n-1}} \int\limits_{R_{n-1}} \exp(i(x'-y')s) G(sv^{\alpha'})(is)^{\beta'} \\ \times \Big(J_+(s, x_n - y_n) - J_-(s, x_n - y_n) \Big) f(y)\, ds\, dy'\, dy_n\, dv \Big) \\ + (2\pi)^{1-n} \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-1} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{R_{n-1}} \int\limits_{R_{n-1}} \exp(i(x'-y')s) G(sv^{\alpha'})(is)^{\beta'} \\ \times D_{x_n}^{\beta_n} J_-(s, x_n - y_n) f(y)\, ds\, dy'\, dy_n\, dv. \end{aligned}$$

Теперь, вычисляя производные в первом слагаемом, по лемме 2 находим

$$D_x^\beta u_h^0(x) = (2\pi)^{1-n} \int_h^{h^{-1}} v^{-1} \int_0^{x_n} \int_{R_{n-1}} \int_{R_{n-1}} \exp(i(x'-y')s) G(sv^{\alpha'})(is)^{\beta'} \times D_{x_n}^{\beta_n} J_+(s, x_n - y_n) f(y)\, ds\, dy'\, dy_n\, dv$$

$$+ (2\pi)^{1-n} \int_h^{h^{-1}} v^{-1} \int_{x_n}^{\infty} \int_{R_{n-1}} \int_{R_{n-1}} \exp(i(x'-y')s) G(sv^{\alpha'})(is)^{\beta'} \times D_{x_n}^{\beta_n} J_-(s, x_n - y_n) f(y)\, ds\, dy'\, dy_n\, dv = \varphi_h^+(x) + \varphi_h^-(x).$$

Оценим первое слагаемое в правой части, которое обозначим $\varphi_h^+(x)$. Учитывая обозначения (17)–(19) и свойства преобразования Фурье, запишем его в виде

$$\varphi_h^+(x) = \int_0^{x_n} \int_{R_{n-1}} \exp(ix's) K(s,h)(is)^{\beta'} D_{x_n}^{\beta_n} J_+(s, x_n - y_n) \widehat{f}(s, y_n)\, ds\, dy_n$$

$$= \int_{R_n} \exp(i(x's + x_n s_n)) K(s,h)(is)^{\beta'} \int_0^\infty \exp(-iy_n s_n) D_{y_n}^{\beta_n} \times J_+(s, y_n)\, dy_n \widehat{f}_\theta(s, s_n)\, d\xi, \quad \xi = (s, s_n).$$

Обозначим $\beta = \nu + \sigma$, $\nu = (\nu', \beta_n)$, $\sigma = (\sigma', 0)$, $\nu\alpha = 1$. Используя функцию $\mu_\nu^+(\xi)$ из леммы 1, получаем

$$\varphi_h^+(x) = \int_{R_n} \exp(ix\xi) K(s,h) \mu_\nu^+(\xi)(is)^{\sigma'} \widehat{f}_\theta(\xi)\, d\xi, \quad \xi = (s, s_n).$$

Поскольку $\mu_\nu^+(\xi)$ является мультипликатором в $L_p(R_n)$, приходим к оценке

$$\|\varphi_h^+(x),\, L_p(R_n^+)\| \leqslant c \Big\| \int_{R_{n-1}} \exp(ix's) K(s,h)(is)^{\sigma'} \theta(x_n) \widehat{f}(s, x_n)\, ds,\, L_p(R_n) \Big\|$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f(x)$. Следовательно, в силу определения функции $K(s,h)$, получаем неравенство

$$\|\varphi_h^+(x),\, L_p(R_n^+)\| \leqslant c_1 \|f(x),\, W_p^{(s-1)r}(R_n^+)\|, \tag{23}$$

где константа $c_1 > 0$ не зависит от $f(x)$ и h.

Аналогичным образом с использованием функции $\mu_\nu^-(\xi)$ из леммы 1 получается оценка

$$\|\varphi_h^-(x),\, L_p(R_n^+)\| \leqslant c_2 \|f(x),\, W_p^{(s-1)r}(R_n^+)\|, \tag{24}$$

где константа $c_2 > 0$ не зависит от $f(x)$ и h.

Из оценок (23) и (24) непосредственно вытекает неравенство (15) в случае, когда $\beta = (\beta', \beta_n)$, $0 < \beta_n < r_n = 1/\alpha_n$. Точно так же устанавливается оценка (16).

Рассмотрим случай $\beta = (\beta', 1/\alpha_n)$. Учитывая определение функции $u_h(x)$, прибавляя и вычитая выражение (22), получим

$$\begin{aligned}
D_x^{\beta} u_h^0(x) &= D_{x'}^{\beta'} D_{x_n}^{r_n} u_h(x) \\
&= D_{x_n}^{r_n}\Big((2\pi)^{1-n}\int_h^{h^{-1}} v^{-1}\int_0^{x_n}\int_{R_{n-1}}\int_{R_{n-1}} \exp\left(i(x'-y')s\right)G(sv^{\alpha'})(is)^{\beta'} \\
&\qquad \times \Big(J_+(s, x_n - y_n) - J_-(s, x_n - y_n)\Big) f(y)\, ds\, dy'\, dy_n\, dv\Big) \\
&\quad + (2\pi)^{1-n}\int_h^{h^{-1}} v^{-1}\int_0^{\infty}\int_{R_{n-1}}\int_{R_{n-1}} \exp\left(i(x'-y')s\right)G(sv^{\alpha'})(is)^{\beta'} \\
&\qquad \times D_{x_n}^{r_n} J_-(s, x_n - y_n) f(y)\, ds\, dy'\, dy_n\, dv.
\end{aligned}$$

Вычисляя производные в первом слагаемом, согласно лемме 2 имеем

$$\begin{aligned}
D_x^{\beta} u_h^0(x) &= (2\pi)^{1-n}\int_h^{h^{-1}} v^{-1}\int_{R_{n-1}}\int_{R_{n-1}} \exp\left(i(x'-y')s\right) \\
&\qquad \times (is)^{\beta'} G(sv^{\alpha'}) f(y', x_n)\, ds\, dy'\, dv \\
&\quad + (2\pi)^{1-n}\int_h^{h^{-1}} v^{-1}\int_0^{x_n}\int_{R_{n-1}}\int_{R_{n-1}} \exp\left(i(x'-y')s\right)G(sv^{\alpha'})(is)^{\beta'} \\
&\qquad \times D_{x_n}^{r_n} J_+(s, x_n - y_n) f(y)\, ds\, dy'\, dy_n\, dv \\
&\quad + (2\pi)^{1-n}\int_h^{h^{-1}} v^{-1}\int_{x_n}^{\infty}\int_{R_{n-1}}\int_{R_{n-1}} \exp\left(i(x'-y')s\right)G(sv^{\alpha'})(is)^{\beta'} \\
&\qquad \times D_{x_n}^{r_n} J_-(s, x_n - y_n) f(y)\, ds\, dy'\, dy_n\, dv \\
&= \omega_h^0(x) + \omega_h^+(x) + \omega_h^-(x).
\end{aligned}$$

Повторяя рассуждения, проведенные при получении неравенств (23), (24), получаем оценку

$$\|\omega_h^+(x),\, L_p(R_n^+)\| + \|\omega_h^-(x),\, L_p(R_n^+)\| \leqslant c\, \|f(x),\, W_p^{(s-1)r}(R_n^+)\|, \tag{25}$$

где константа $c > 0$ не зависит от $f(x)$ и h.

Оценим $\omega_h^0(x)$. Вводя обозначение

$$F_\beta(y', x_n) = (2\pi)^{(1-n)/2}\int_{R_{n-1}} \exp\left(iy's\right)(is)^{\beta'} \widehat{f}(s, x_n)\, ds,$$

и учитывая определение функции $G(s)$, его можно переписать в виде

$$\omega_h^0(x) = (2\pi)^{1-n} \int\limits_{R_{n-1}} \Big(\int\limits_{R_{n-1}} \exp\big(i(x'-y')s - h^N \langle s\rangle^N\big)\, ds\Big) F_\beta(y', x_n)\, dy'$$
$$- (2\pi)^{1-n} \int\limits_{R_{n-1}} \Big(\int\limits_{R_{n-1}} \exp\big(i(x'-y')s - h^{-N} \langle s\rangle^N\big)\, ds\Big) F_\beta(y', x_n)\, dy'.$$

Теперь нетрудно получить оценку функции $\omega_h^0(x)$ в норме $L_p(R_n^+)$. Действительно, ввиду неравенств Юнга

$$\|\omega_h^0(x),\, L_p(R_n^+)\| \leqslant \Big(\| \int\limits_{R_{n-1}} \exp\big(ix's - \langle h^{\alpha'} s\rangle^N\big)\, ds,\, L_1(R_{n-1})\|$$
$$+ \| \int\limits_{R_{n-1}} \exp\big(ix's - \langle h^{-\alpha'} s\rangle^N\big)\, ds,\, L_1(R_{n-1})\|\Big) \|F_\beta(y', x_n),\, L_p(R_n^+)\|$$
$$= 2 \| \int\limits_{R_{n-1}} \exp\big(ix's - \langle s\rangle^N\big)\, ds,\, L_1(R_{n-1})\| \|F_\beta(y', x_n),\, L_p(R_n^+)\|.$$

Отсюда в силу равенства $\beta'\alpha' = s-1$ получаем оценку

$$\|\omega_h^0(x),\, L_p(R_n^+)\| \leqslant c \|f(x),\, W_p^{(s-1)r}(R_n^+)\| \tag{26}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f(x)$ и h.

Из оценок (25) и (26) вытекает неравенство (15) в случае, когда $\beta = (\beta', r_n)$, $r_n = 1/\alpha_n$. Точно так же устанавливается оценка (16). Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Пусть* $f \in W_p^{(s-1)r}(R_n^+) \cap L_1(R_n^+)$, $u_h^j(x) = R_{j,h} f(x)$. *Тогда для любого мультииндекса* $\beta = (\beta', \beta_n)$, $1 \leqslant \beta\alpha \leqslant s$, $0 \leqslant \beta_n \alpha_n \leqslant 1$, *имеет место оценка*

$$\|D_x^\beta u_h^j(x),\, L_p(R_n^+)\| \leqslant c \|f(x),\, W_p^{(s-1)r}(R_n^+)\|, \tag{27}$$
$$0 < h < 1,$$

где константа $c > 0$ *не зависит от* h, $f(x)$; *при этом*

$$\|D_x^\beta u_{h_1}^j(x) - D_x^\beta u_{h_2}^j(x),\, L_p(R_n^+)\| \leqslant \varepsilon(h_1, h_2) \|f(x),\, W_p^{(s-1)r}(R_n^+)\| \tag{28}$$

и $\varepsilon(h_1, h_2) \to 0 \quad (h_1, h_2 \to 0)$.

Доказательство. Используя обозначения (17), (18), запишем

$$D_x^\beta u_h^j(x) = \int\limits_{R_{n-1}} \exp(ix's) K(s,h) (is)^{\beta'} D_{x_n}^{\beta_n} J_j(s, x_n)$$
$$\times \int\limits_0^\infty I_j(s, y_n) \widehat{f}(s, y_n)\, dy_n\, ds.$$

В силу леммы 3 последнее соотношение можно записать в виде

$$D_x^\beta u_h^j(x) = -\int\limits_{R_{n-1}} \exp(ix's)K(s,h)(is)^{\beta'} \int\limits_0^\infty D_{z_n}\Big(D_{x_n}^{\beta_n} J_j(s, x_n + z_n) \times \int\limits_0^\infty I_j(s, y_n + z_n)\widehat{f}(s, y_n)\,dy_n\Big)\,dz_n\,ds.$$

С помощью функции Хевисайда перепишем это выражение при $x_n > 0$ следующим образом:

$$\begin{aligned} -D_x^\beta u_h^j(x) &= \int\limits_{R_{n-1}}\int\limits_{R_1} \exp(ix's)K(s,h)(is)^{\beta'} D_{z_n}^{\beta_n+1}(J_j(s, x_n+z_n)) \\ &\qquad \times \theta(x_n+z_n)\theta(z_n)\Big(\int\limits_0^\infty I_j(s,y_n+z_n)\widehat{f}(s,y_n)\,dy_n\Big)\,dz_n\,ds \\ &+ \int\limits_{R_{n-1}}\int\limits_{R_1} \exp(ix's)K(s,h)(is)^{\beta'}\theta(x_n+z_n)D_{z_n}^{\beta_n}J_j(s,x_n+z_n) \\ &\qquad \times \theta(z_n)\Big(\int\limits_0^\infty D_{z_n}I_j(s,y_n+z_n)\widehat{f}(s,y_n)\,dy_n\Big)\,dz_n\,ds \\ &= \Phi_h^1(x) + \Phi_h^2(x). \end{aligned} \tag{29}$$

Рассмотрим первое слагаемое $\Phi_h^1(x)$. Используя формулу преобразования Фурье свертки и функцию $\mu_{j,\beta}(\xi)$, $\xi = (s, \xi_n)$ из леммы 1, получаем

$$\begin{aligned} \Phi_h^1(x) = \int\limits_{R_n} &\exp(ix's - ix_n\xi_n)\mu_{j,\beta}(\xi)\Big(\int\limits_{R_1}\exp(-it_n\xi_n) \\ &\times \Big(\theta(t_n)\int\limits_{R_1} K(s,h)(is)^{\beta'}\langle s\rangle^{\beta_n\alpha_n-\beta_j} I_j(s,y_n+t_n)\theta(y_n) \\ &\times \widehat{f}(s,y_n)\,dy_n\Big)\,dt_n\Big)\,d\xi. \end{aligned} \tag{30}$$

По лемме 1 функция $\mu_{j,\beta}(\xi)$ является мультипликатором в $L_p(R_n)$. Следовательно, если мы докажем оценку

$$\begin{aligned} \|\int\limits_{R_{n-1}} &\exp(ix's)\Big(\theta(x_n)\int\limits_{R_1} K(s,h)(is)^{\beta'}\langle s\rangle^{\beta_n\alpha_n-\beta_j} \\ &\times I_j(s,y_n+x_n)\theta(y_n)\widehat{f}(s,y_n)\,dy_n\Big)\,ds,\ L_p(R_n)\| \\ &\leqslant c\,\|f(x),\ W_p^{(s-1)r}(R_n^+)\| \end{aligned} \tag{31}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f(x)$, $h \in (0,1)$, то для функции $\Phi_h^1(x)$ будет верно неравенство

$$\|\Phi_h^1(x),\, L_p(R_n^+)\| \leqslant c_1 \,\|f(x),\, W_p^{(s-1)r}(R_n^+)\|, \tag{32}$$

где константа $c_1 > 0$ не зависит от $f(x)$ и $h \in (0,1)$.

Обозначим норму в левой части (31) через I_j, и пусть $\beta = \nu + \sigma$, $\nu = (\nu', \beta_n)$, $\sigma = (\sigma', 0)$, $\nu\alpha = 1$. Используя формулу преобразования Фурье свертки и функции $m_{j,\nu}(\xi)$ из леммы 1 и (19), получаем ($\xi = (s, \xi_n)$)

$$I_j = \| \int\limits_{R_n} \exp\,(ix's - ix_n\xi_n) K(s,h) m_{j,\nu}(\xi)(is)^{\sigma'} \widehat{f}_\theta(s,\xi_n)\, d\xi,\, L_p(R_n)\|.$$

Но поскольку функция $m_{j,\nu}(\xi)$ является мультипликатором в $L_p(R_n)$ и $\sigma'\alpha' = s-1$, по определению ядра $G(s)$ оценка (31) справедлива.

Таким образом, неравенство (32) доказано. Аналогично устанавливается оценка

$$\|\Phi_h^2(x),\, L_p(R_n^+)\| \leqslant c_2 \,\|f(x),\, L_p(R_n^+)\| \tag{33}$$

с константой $c_2 > 0$, не зависящей от $f(x)$ и $h \in (0,1)$.

Из (32) и (33) непосредственно вытекает неравенство (27). Точно так же устанавливается оценка (28). Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Пусть* $f \in W_p^{(s-1)r}(R_n^+) \cap L_1(R_n^+)$, $u_h(x) = (R_h^+ + R_h^- + \sum_{j=1}^{\mu} R_{j,h}) f(x)$. *Тогда для любого мультииндекса* $\beta = (\beta', \beta_n)$, $1 \leqslant \beta\alpha \leqslant s$, $1 < \beta_n\alpha_n \leqslant s$, *справедлива оценка*

$$\|D_x^\beta u_h(x),\, L_p(R_n^+)\| \leqslant c\|f(x),\, W_p^{(s-1)r}(R_n^+)\| \quad (0 < h < 1), \tag{34}$$

где константа $c > 0$ *не зависит от* h, $f(x)$; *при этом*

$$\|D_x^\beta u_{h_1}(x) - D_x^\beta u_{h_2}(x),\, L_p(R_n^+)\| \leqslant \varepsilon(h_1,h_2)\|f(x),\, W_p^{(s-1)r}(R_n^+)\| \tag{35}$$

и $\varepsilon(h_1, h_2) \to 0$ *при* $h_1, h_2 \to 0$.

Доказательство. Как отмечалось в п. 2, для функции $u_h(x)$ выполнено равенство $L(D_x)u_h(x) = f_h(x)$, где

$$f_h(x) = (2\pi)^{1-n} \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha'|-1} \int\limits_{R_{n-1}} \int\limits_{R_{n-1}} \exp\,\Big(i\frac{x'-y'}{v^{\alpha'}}s\Big) G(s) f(y', x_n)\, ds\, dy'\, dv.$$

Поскольку в операторе $L(D_x)$ коэффициент при производной $D_{x_n}^{r_n}$, $r_n = 1/\alpha_n$, равен единице, имеет место представление

$$D_{x_n}^{r_n} u_h(x) = -\sum_{k<r_n} D_{x_n}^k L_k(D_{x'}) u_h(x) + f_h(x).$$

Пусть $\beta = (\beta', \beta_n)$ и $\beta_n = r_n + 1$. Тогда из этого представления следует равенство

$$D_x^\beta u_h(x) = -\sum_{k<r_n} D_{x_n}^{k+1} D_{x'}^{\beta'} L_k(D_{x'}) u_h(x) + D_{x_n} D_{x'}^{\beta'} f_h(x).$$

Символ $(i\xi_n)^{k+1}(is)^{\beta'}L_k(is)$ оператора $D_{x_n}^{k+1}D_{x'}^{\beta'}L_k(D_{x'})$ является однородным относительно вектора $\alpha = (\alpha', \alpha_n)$ с показателем однородности s. Поскольку $(k+1)\alpha_n \leqslant 1$, в силу лемм 8 и 9, из последнего равенства вытекает оценка

$$\|D_x^\beta u_h(x), L_p(R_n^+)\| \leqslant c_1\|f(x), W_p^{(s-1)r}(R_n^+)\| + \|D_{x_n}D_{x'}^{\beta'}f_h(x), L_p(R_n^+)\|$$

с константой c_1, не зависящей от $f(x)$ и h. Учитывая определение ядра $G(s)$, нетрудно также получить неравенство

$$\|D_{x_n}D_{x'}^{\beta'}f_h(x),\, L_p(R_n^+)\| \leqslant c_2\|f(x),\, W_p^{(s-1)r}(R_n^+)\|$$

с константой c_2, не зависящей от $f(x)$ и h.

Из этих двух оценок вытекает оценка (34) в случае $\beta = (\beta', r_n + 1)$. Доказательство (35) проводится аналогично.

Общий случай $\beta = (\beta', r_n + k)$, $(r_n + k)\alpha_n \leqslant s$ рассматривается последовательным повторением предыдущих рассуждений. Лемма 10 доказана.

Доказательство теоремы 1. В работе [3] при доказательстве теоремы А для приближенного решения задачи (1)

$$u_h(x) = (R_h^+ + R_h^- + \sum_{j=1}^{\mu} R_{j,h})f(x)$$

были установлены оценки

$$\|u_h(x),\, W_p^r(R_n^+)\| \leqslant c\,(\|f(x),\, L_p(R_n^+)\| + \|f(x),\, L_1(R_n^+)\|),$$

$$\|u_{h_1}(x) - u_{h_2}(x),\, W_p^r(R_n^+)\| \leqslant \varepsilon(h_1,h_2)(\|f(x),\, L_p(R_n^+)\| + \|f(x),\, L_1(R_n^+)\|),$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от $f(x)$, h, и $\varepsilon(h_1,h_2) \to 0$ при $h_1,h_2 \to 0$. Из этих оценок вытекает существование решения $u \in W_p^r(R_n^+)$ такого, что

$$\|u_h(x) - u(x),\, W_p^r(R_n^+)\| \to 0 \quad (h \to 0).$$

Ввиду лемм 8–10 в условиях теоремы 1 решение $u(x)$ принадлежит пространству $W_p^{sr}(R_n^+)$ и удовлетворяет оценке (6). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. В [3] при доказательстве теоремы В для приближенного решения были установлены оценки

$$\|u_h(x),\, W_p^r(R_n^+)\| \leqslant c\,(\|f(x),\, L_p(R_n^+)\| + \|(1+\langle x\rangle)^{N|\alpha|}f(x),\, L_1(R_n^+)\|),$$

$$\|u_{h_1}(x) - u_{h_2}(x),\, W_p^r(R_n^+)\| \leqslant \varepsilon(h_1,h_2)(\|f(x),\, L_p(R_n^+)\| + \|(1+\langle x\rangle)^{N|\alpha|}f(x),\, L_1(R_n^+)\|)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $f(x)$, h, и $\varepsilon(h_1,h_2) \to 0$ при $h_1,h_2 \to 0$. Поэтому, рассуждая как и выше, и учитывая леммы 8–10, убеждаемся в справедливости теоремы 2.

Доказательство теоремы 3 проведем от противного. Предположим, что при функции $f \in C_0^\infty(R_n^+)$, не удовлетворяющей условиям ортогональности (10), краевая задача (8) имеет решение $u \in W_p^{2m}(R_n^+)$, $1 < p \leqslant 2$. Тогда в силу неравенства Хаусдорфа — Юнга (см., например, [7]) имеем

$$\|u(x),\, L_p(R_n^+)\| \geqslant c\,\|\,\|\widehat{u}(s,x_n),\, L_{p'}(R_{n-1})\|,\, L_p(R_1^+)\|, \tag{36}$$

где $\widehat{u}(s,x_n)$ — частичное преобразование Фурье по x' функции $u(x',x_n)$.

При $s \in R_{n-1}\backslash\{0\}$ функция $\widehat{u}(s,x_n)$ является решением краевой задачи

$$\begin{gathered}
(-|s|^2 + D_{x_n}^2)^m \widehat{u} = \widehat{f}(s,x_n), \quad x_n > 0,\\
B_j(is, D_{x_n})\widehat{u}\,\Big|_{x_n=0} = 0, \qquad j = 1,\dots,m,\\
\widehat{u}(s,x_n) \to 0 \quad (x_n \to \infty).
\end{gathered}$$

Поскольку для этой задачи выполнено условие Лопатинского, имеет место следующее представление:

$$\begin{aligned}
\widehat{u}(s,x_n) &= \int_0^{x_n} J_+(s, x_n - y_n)\widehat{f}(s,y_n)\,dy_n\\
&+ \int_{x_n}^\infty J_-(s, x_n - y_n)\widehat{f}(s,y_n)\,dy_n + \sum_{j=1}^m \int_0^\infty J_j(s,x_n) I_j(s,y_n)\widehat{f}(s,y_n)\,dy_n.
\end{aligned}$$

Используя это представление и учитывая финитность функции $f(x)$ ($\rho = \operatorname{diam}\operatorname{supp} f < \infty$), из неравенства (36) получаем

$$\begin{aligned}
\|u(x),\, L_p(R_n^+)\| &\geqslant c\,\|\,\|\int_0^\infty \Big[J_+(s,x_n - y_n) + \sum_{j=1}^m J_j(s,x_n) I_j(s,y_n)\Big]\\
&\qquad\times \widehat{f}(s,y_n)\,dy_n,\, L_{p'}(R_{n-1})\|,\, L_p(x_n > \rho)\|\\
&\geqslant c\,\|\,\|\int_0^\infty \Big[J_+(s,x_n - y_n) + \sum_{j=1}^m J_j(s,x_n) I_j(s,y_n)\Big]\\
&\qquad\times \widehat{f}(s,y_n)\,dy_n,\, L_{p'}(|s| < 1)\|,\, L_p(x_n > \rho)\|.
\end{aligned}$$

Перепишем последнюю оценку, используя функцию

$$H(s,x_n,y_n) = J_+(s,x_n - y_n) + \sum_{l=1}^m J_l(s,x_n) I_l(s,y_n),$$

введенную в п. 2. Имеем

$$\begin{aligned}
&\|u(x),\, L_p(R_n^+)\|\\
&\qquad\geqslant c\,\|\,\|\int_0^\infty H(s,x_n,y_n)\widehat{f}(s,y_n)\,dy_n,\, L_{p'}(|s| < 1)\|,\, L_p(x_n > \rho)\|
\end{aligned}$$

$$= c\|\|\int\limits_0^\infty \sum_{k=0}^{N-1} \frac{y_n^k}{k!} H^k(s,x_n,0)\widehat{f}(s,y_n)\,dy_n$$

$$+\int\limits_0^\infty \sum_{k=N}^{\infty} \frac{y_n^k}{k!} H^k(s,x_n,0)\widehat{f}(s,y_n)\,dy_n,\ L_{p'}(|s|<1)\|,\ L_p(x_n>p)\|.$$

По условиям теоремы 3 при всех $k \leqslant N-1$, не равных k_0, выполнены тождества $\varphi_j^k(s) \equiv 0$, $j=1,\dots,m$; при этом $\varphi_j^{k_0}(s) \not\equiv 0$, $s \in R_{n-1}\setminus\{0\}$, для некоторых $j=1,\dots,m$. В силу леммы 5

$$H^k(s,x_n,0) \equiv 0, \quad k \leqslant N-1,\ k \neq k_0,$$
$$H^{k_0}(s,x_n,0) \not\equiv 0, \quad s \in R_{n-1}\setminus\{0\}.$$

Поэтому предыдущее неравенство принимает вид

$$\|u(x),\ L_p(R_n^+)\| \geqslant c\|\|\int\limits_0^\infty \frac{y_n^{k_0}}{k_0!} H^{k_0}(s,x_n,0)\widehat{f}(s,y_n)\,dy_n$$

$$+\int\limits_0^\infty \Big[\sum_{k=N}^{\infty} \frac{y_n^k}{k!} H^k(s,x_n,0)\Big]\widehat{f}(s,y_n)\,dy_n,\ L_{p'}(|s|<1)\|, L_p(x_n>\rho)\|. \quad (37)$$

Для дальнейших рассуждений нам понадобится

Лемма 11. *Пусть $N > 2m - n/p'$. Справедливы следующие оценки: при $k \leqslant N-1$*

$$\|\,\|H^k(s,x_n,0)|s|^{N-k},\ L_{p'}(|s|<1)\|,\ L_p(x_n>\rho)\| \leqslant R < \infty,$$

при $k \geqslant N$

$$\|\,\|H^k(s,x_n,0),\ L_{p'}(|s|<1)\|,\ L_p(x_n>\rho)\| \leqslant R(2\Lambda)^k < \infty,$$

где $\Lambda = \max\limits_{i,s'}|\lambda_i(s')|$, $|s'|=1$.

Доказательство. По лемме 6

$$|H^k(s,x_n,0) \leqslant c(2\Lambda)^k|s|^{k+1-2m}\exp(-\delta|s|x_n), \quad \delta>0.$$

Поэтому достаточно доказать неравенство

$$I = \|\,\|\,|s|^{N+1-2m}\exp(-\delta|s|x_n),\ L_{p'}(|s|<1)\|,\ L_p(x_n>\rho)\|$$
$$< r < \infty. \quad (38)$$

Для нормы I выпишем оценку

$$I \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \|\,\|\,|s|^{N+1-2m}$$

$$\times\exp(-\delta|s|x_n),\ L_{p'}(2^{-\nu-1}<|s|<2^{-\nu})\|,\ L_p(x_n>\rho)\| = \sum_{\nu=0}^{\infty} I_\nu$$

и рассмотрим каждое слагаемое I_ν отдельно. Имеем

$$\begin{aligned} I_\nu &\leqslant \| \, |s|^{N+1-2m},\, L_{p'}(2^{-\nu-1} < |s| < 2^{-\nu})\| \\ &\qquad\qquad\qquad \times \| \exp(-\delta \cdot 2^{-\nu-1} x_n),\, L_p(x_n > \rho)\| \\ &= c_1 2^{\nu/p} \| \, |s|^{N+1-2m},\, L_{p'}(2^{-\nu-1} < |s| < 2^{-\nu})\| \\ &\leqslant c_2 2^{\nu/p - \nu(n-1)p' - \nu(N+1-2m)} = c_2 2^{-\nu(n/p' + N - 2m)}, \end{aligned}$$

где константа c_2 не зависит от ν. Поэтому

$$I \leqslant c_2 \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu(n/p'+N-2m)}.$$

Поскольку $N > 2m - n/p'$, ряд в правой части последнего неравенства сходится, откуда получаем (38). Лемма 11 доказана.

Из леммы 11 следует, что норма второй группы слагаемых в правой части неравенства (37) конечна. Действительно,

$$\begin{aligned} A &= \| \, \| \int\limits_0^\infty \Big[\sum_{k=N}^{\infty} \frac{y_n^k}{k!} H^k(s, x_n, 0) \Big] \widehat{f}(s, y_n)\, dy_n,\, L_{p'}(|s| < 1),\, L_p(x_n > \rho)\| \\ &\leqslant c_0 \sum_{k=N}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \| \, \| H^k(s, x_n, 0),\, L_{p'}(|s| < 1)\|, L_p(x_n > 0)\| \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \leqslant c_0 \sum_{k=N}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} R(2\Lambda)^k = c(f) < \infty. \end{aligned}$$

Применяя к (37) неравенство Минковского, получим

$$\begin{aligned} &\|u(x),\, L_p(R_n^+)\| + c(f) \\ &\qquad \geqslant c \| \, \| \int\limits_0^\infty \frac{y_n^{k_0}}{k_0!} H^{k_0}(s, x_n, 0) \widehat{f}(s, y_n)\, dy_n,\, L_{p'}(|s| < 1)\|,\, L_p(x_n > \rho)\|. \end{aligned} \tag{39}$$

Обозначив

$$g(s) = \int\limits_0^\infty y_n^{k_0} \widehat{f}(s, y_n)\, dy_n, \tag{40}$$

перепишем неравенство (39) в виде

$$\begin{aligned} &\|u(x),\, L_p(R_n^+)\| + c(f) \\ &\qquad \geqslant c \| \, \| H^{k_0}(s, x_n, 0) g(s),\, L_{p'}(|s| < 1)\|,\, L_p(x_n > p)\|. \end{aligned} \tag{41}$$

По лемме Адамара функцию $g(s)$ можно представить в виде

$$g(s) = \sum_{j=1}^{n-1} s_j \int\limits_0^1 D_{z_j} g(z) \Big|_{z=\lambda_1 s} d\lambda_1 + g(0)$$

или, учитывая обозначения (40),

$$g(s) = \sum_{j=1}^{n-1} s_j \int_0^1 D_{z_j} g(z)\Big|_{z=\lambda_1 s} d\lambda_1 + (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{R_n^+} y_n^{k_0} f(y)\, dy. \qquad (42)$$

Вводя обозначение $g_j(\lambda_1 s) = D_{z_j} g(z)\Big|_{z=\lambda_1 s}$ и применияя повторно лемму Адамара, получим

$$g_j(\lambda_1 s) = \sum_{l=1}^{n-1} s_l \left[\int_0^1 \lambda_1 D_{z_l} g_j(z)\Big|_{z=\lambda_2\lambda_1 s} d\lambda_2 \right] + g_j(0).$$

Подставляя последнее выражение в (42) и учитывая (40), находим

$$g(s) = \sum_{j=1}^{n-1} s_j \int_0^1 \sum_{l=1}^{n-1} s_l \left[\int_0^1 \lambda_1 D_{z_l} g_j(z)\Big|_{z=\lambda_2\lambda_1 s} d\lambda_2 \right] d\lambda_1$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-1} s_j D_{s_j} g(s)\Big|_{s=0} + (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{R_n^+} y_n^{k_0} f(y)\, dy$$
$$= \sum_{l,j=1}^{n-1} s_j s_l \int_0^1 \left[\int_0^1 \lambda_1 D_{z_l} g_j(z)\Big|_{z=\lambda_2\lambda_1 s} d\lambda_2 \right] d\lambda_1$$
$$+ (2\pi)^{-(n-1)/2} \left[\sum_{j=1}^{n-1} (-is_j) \int_{R_n^+} y_j y_n^{k_0} f(y)\, dy + \int_{R_n^+} y_n^{k_0} f(y)\, dy \right].$$

Проведя аналогичные рассуждения $N - k_0 - 2$ раз, получим, как в [8], следующее представление:

$$g(s) = \sum_{|\beta| = N - k_0} s^\beta h_\beta(s) + \sum_{|\beta| < N - k_0} \frac{(-is)^\beta}{\beta!} c(\beta, f),$$

где h_β — некоторые гладкие функции,

$$c(\beta, f) = (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{R_n^+} x_n^{k_0} x'^{\beta} f(x)\, dx.$$

Напомним, что невыполнение условия (10) означает $c(\beta, f) \neq 0$ при некоторых β, $|\beta| + k_0 \leqslant N - 1$. Учитывая выписанное представление, перепишем оценку (41) в виде

$$\|u(x), L_p(R_n^+)\| + c(f) \geqslant c \|\, \|H^{k_0}(s, x_n, 0) \sum_{|\beta| = N - k_0} s^\beta h_\beta(s)$$
$$+ H^{k_0}(s, x_n, 0) \sum_{|\beta| < N - k_0} \frac{(-is)^\beta}{\beta!} c(\beta, f),\, L_{p'}(|s| < 1)\|,\, L_p(x_n > \rho)\|.$$

Ввиду леммы 11 норма первой группы слагаемых конечна. Используя неравенств Минковского, получим

$$\|u(x),\, L_p(R_n^+)\| + c_1(f)$$
$$\geqslant c\Big\|\,\Big\|H^{k_0}(s,x_n,0)\sum_{|\beta|<N-k_0}\frac{(-is)^\beta}{\beta!}c(\beta,f),\, L_{p'}(|s|<1)\Big\|,\, L_p(x_n>\rho)\Big\|. \tag{43}$$

Пусть

$$c(0,f) = (2\pi)^{-(n-1)/2}\int\limits_{R_n^+} x_n^{k_0} f(x)\,dx \neq 0.$$

Очевидно, что существует число $\varepsilon > 0$ такое, что при $|s| \leqslant \varepsilon$

$$\sum_{0<|\beta|<N-k_0}\frac{(-is)^\beta}{\beta!}c(\beta,f) < \frac{c(0,f)}{2}.$$

Следовательно, (43) можно переписать следующим образом:

$$\|u(x),\, L_p(R_n^+)\| + c_1(f)$$
$$\geqslant (c/2)\big\|\,\|c(0,f)H^{k_0}(s,x_n,0),\, L_{p'}(|s|<\varepsilon)\|,\, L_p(x_n>\rho)\big\|. \tag{44}$$

Покажем, что правая часть не может быть конечной. Введем обозначение

$$\Phi(\rho,\varepsilon) = \sup_{\delta>0}\left\{\int\limits_\rho^\infty\left[\int\limits_{\delta<|s|<\varepsilon}|s^\beta H^{k_0}(s,x_n,0)|^{p'}\,ds\right]^{p/p'}dx_n\right\}^{1/p}.$$

Тогда (44) принимает вид

$$\|u(x),\, L_p(R_n^+)\| + c_1(f) \geqslant c_2\Phi(\rho,\varepsilon), \quad c_2 > 0.$$

Как уже отмечалось, $H^{k_0}(s,x_n,0)\not\equiv 0$ при $s \in R_{n-1}\backslash\{0\}$. Следовательно, $\Phi(\rho,\varepsilon) > 0$. Делая замену переменных $x_n = x_n' c^{-1/2m}$, $s = s' x^{1/2m}$, где $c > 1$, в силу леммы 7 получаем

$$\Phi(\rho,\varepsilon) = \sup_{\delta>0}\left\{\int\limits_{\rho c^{1/2m}}^\infty\left[\int\limits_{\delta<|s'|<\varepsilon c^{-1/2m}}|c^{|\beta|/2m}s'^\beta\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\, H^{k_0}(c^{1/2m}s', c^{-1/2m}x_n', 0)\right|^{p'}c^{(n-1)/2m}\,ds'\right]^{p/p'}c^{-1/2m}dx_n'\Bigg\}^{1/p}$$
$$= c^{(|\beta|-2m+k_0+1+(n-1)/p'-1/p)/2m}\Phi(\rho c^{1/2m}, c^{-1/2m}\varepsilon)$$
$$= c^{(|\beta|-2m+k_0+n/p')/2m}\Phi(\rho c^{1/2m}, c^{-1/2m}\varepsilon). \tag{45}$$

Поскольку $\Phi(\rho,\varepsilon) > 0$, для некоторого $c > 1$ имеем

$$\Phi(\rho,\varepsilon) > 2\Phi(\rho c^{1/2m}, c^{-1/2m}\varepsilon).$$

Поэтому

$$\Phi(\rho,\varepsilon)/\Phi(\rho c^{1/2m}, c^{-1/2m}\varepsilon) > 2$$

и ввиду (45)

$$c^{(|\beta|-2m+k_0+n/p')/2m} > 2.$$

Но так как по предположению $|\beta| + k_0 \leqslant N - 1$, $c > 1$ и по условию (9) $N - 1 \leqslant 2m - n/p'$, заключаем, что $c^{(|\beta|-2m+k_0+n/p')/2m} \leqslant 1$, т. е. пришли к противоречию. Следовательно, условие

$$\int\limits_{R_n^+} x_n^{k_0} f(x)\, dx = 0$$

необходимо для существования решения задачи (8) в $W_p^{2m}(R_n^+)$. Повторяя аналогичные рассуждения $N - k_0 - 1$ раз, убедимся, что условия ортогональности (10) являются необходимыми для разрешимости краевой задачи (8) в $W_p^{2m}(R_n^+)$. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Демиденко Г. В.** О корректной разрешимости краевых задач в полупространстве для квазиэллиптических уравнений // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 4. С. 54–67.
2. **Демиденко Г. В.** Интегральные операторы, определяемые краевыми задачами для квазиэллиптических уравнений // Докл. РАН. 1992. Т. 326, № 5. С. 765–769.
3. **Демиденко Г. В.** Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уравнениями. II // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 1. С. 41–65.
4. **Успенский С. В.** О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1972. Т. 117. С. 292–299.
5. **Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.** Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
6. **Лизоркин П. И.** Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов и его приложения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1969. Т. 105. С. 89–167.
7. **Трибель Х.** Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
8. **Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.** Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.