РЕАЛИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ИЗ $L_q^{m^*}(\Omega)$

В. И. Половинкин

В данной работе обоснован способ реализации линейных функционалов в пространстве $L_q^m(\Omega)$ через однородные дифференциальные формы. Аналогичные представления функционалов получены в [1] для пространств $W_q^m(\Omega)$, $\overset{0}{W}_q(\Omega)$ и в [2] для пространств L_q^m, $\widetilde{L}_q^m$. Для широкого класса функционалов (в частности, функционалов ошибок весовых кубатурных формул) показано, что реализующие их функции удовлетворяют соответствующим однородным краевым условиям. Этот факт усиливает аналогичный результат [3], относящийся к случаю $q = 2$ и функционалам ошибок кубатурных формул с постоянной весовой функцией.

Введем следующие обозначения:

◇ m, n — натуральные числа, $n > 1$;

◇ p, q — положительные вещественные числа такие, что $q > 1$, а p — сопряженный к q показатель, т. е. $p = q(q-1)^{-1}$;

◇ E^n — n-мерное пространство;

◇ Ω — ограниченная область в E^n с границей $\partial\Omega = S$, которая предполагается достаточно гладкой;

◇ $W_p^m(\Omega)$ — совокупность функций, которые обладают в Ω всеми обобщенными производными до порядка m, суммируемыми по Ω в степени p;

◇ для функции $f = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, определенной в Ω,

$$\int\limits_\Omega f\,dx = \int\limits_\Omega f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n;$$

◇ для функций u, v, обладающих в Ω всеми обобщенными производными порядка m,

$$\mathcal{J}(u,v) = \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_m=1}^{n} \frac{\partial^m u}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} \quad \frac{\partial^m v}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}};$$

◇ для функций $u \in W_p^m(\Omega)$, $v \in W_q^m(\Omega)$

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega (|u|^2 + \mathcal{J}(u,u))^{p/2}\,dx\right)^{1/p}, \tag{1}$$

$$\langle u, v\rangle = \int\limits_\Omega \mathcal{J}(u,v)\,dx,$$

$$\|u\|_{L_p^m(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega (\mathcal{J}(u,u))^{p/2}\,dx\right)^{1/p}. \tag{2}$$

Отметим, что множество функций $W_p^m(\Omega)$ с нормой (1) и полунормой (2) индуцирует банаховы пространства $W_p^m(\Omega)$ и $L_p^m(\Omega)$ соответственно. Сопряженное к $W_p^m(\Omega)$ линейное нормированное пространство обозначим через $W_p^{m*}(\Omega)$.

Теорема 1 ([1], см. также [4]).

(а) *Для функционала $\rho \in W_q^{m*}(\Omega)$ существует функция $u \in W_p^m(\Omega)$ такая, что при $v \in W_q^m(\Omega)$*

$$(\rho, v) = \int\limits_\Omega uv\,dx + \langle u, v\rangle.$$

(б) *Функция u из утверждения* (а) *единственна.*

Замечание 1. В теореме 1 и ниже единственность функции понимается как единственность соответствующего элемента линейного нормированного пространства $W_p^m(\Omega)$.

Обозначим через $L_q^{m*}(\Omega)$ множество функционалов из $W_q^{m*}(\Omega)$, равных нулю на многочленах степени ниже m. Далее речь будет идти о реализации функционалов $\rho \in L_q^{m*}(\Omega)$ в виде

$$\forall v \in W_q^m(\Omega) \qquad (\rho, v) = \langle u, v\rangle, \tag{3}$$

где $u \in W_p^m(\Omega)$. Формула (3) может рассматриваться как реализация в сопряженном к $L_q^m(\Omega)$ пространстве функционала, индуцируемого ρ, через элемент пространства $L_p^m(\Omega)$, представителем которого является u.

Теорема 2. *Для всякого функционала $\rho \in L_q^{m*}(\Omega)$ существует единственная с точностью до многочлена степени ниже m функция $u \in W_p^m(\Omega)$, удовлетворяющая* (3).

Доказательство. Обозначим через μ множество чисел $p \in (1, \infty)$ таких, что если функция $u \in W_p^m(\Omega)$ удовлетворяет условию

$$\forall v \in W_q^m(\Omega) \qquad \langle u, v\rangle = 0, \tag{4}$$

то

$$\|u\|_{L_p^m(\Omega)} = 0. \tag{5}$$

При $p \geqslant 2$ имеем $p \in \mu$. Это свойство следует из (4) при $u = v$.

Из рассуждений работы [2, с. 130, 131], которые могут быть перенесены с пространства E^n на случай конечной области Ω, вытекает, что теорема будет верна в случае вложения $(1, 2) \subset \mu$. Чтобы установить это вложение, приведем две леммы.

Лемма 1 [5, с. 74, 75]. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*

(а) $mp > n, s \in (1, \infty)$;

(б) $mp \leqslant n$, $1 \leqslant s < np(n - mp)^{-1}$.

Тогда справедлива оценка

$$\forall f \in W_p^m(\Omega) \quad \|f\|_{L_s(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |f|^s\,dx\right)^{1/s} \leqslant K\|f\|_{W_p^m(\Omega)},$$

где K — положительная постоянная.

Лемма 2. *Пусть число $s \in \mu \cap (p, \infty)$ удовлетворяет условию* (а) *или* (б) *леммы* 1. *Тогда $p \in \mu$.*

Доказательство. Пусть существует функция $u \in W_p^m(\Omega)$, удовлетворяющая условию (4). Покажем, что тогда для u выполняется (5).

Пусть $r = s(s-1)^{-1}$, т. е. r — сопряженный к s показатель. Из леммы 1 и неравенства Гёльдера следует, что функционал $\int\limits_\Omega uv\,dx$ индуцирует функционал из $W_r^{m*}(\Omega)$. По теореме 1 существует функция $u_0 \in W_s^m(\Omega)$ такая, что

$$\forall v \in W_r^m(\Omega) \quad \int\limits_\Omega uv\,dx = \int\limits_\Omega u_0 v\,dx + \langle u_0, v\rangle. \tag{6}$$

В силу условия (4)

$$\forall v \in W_q^m(\Omega) \quad \int\limits_\Omega uv\,dx = \int\limits_\Omega uv\,dx + \langle u, v\rangle. \tag{7}$$

Формулы (6), (7) и неравенство $r < q$ приводят к равенству

$$\forall v \in W_q^m(\Omega) \quad \int\limits_\Omega (u - u_0)v\,dx + \langle u - u_0, v\rangle = 0. \tag{8}$$

Поскольку $u_0 \in W_s^m(\Omega)$ и $s > p$, имеем $u_0 \in W_p^m(\Omega)$, следовательно, $(u - u_0) \in W_p^m(\Omega)$. Из (8) и теоремы 1(б) находим, что $u = u_0$. Но $u_0 \in W_s^m(\Omega)$, поэтому $u \in W_s^m(\Omega)$. Заметим, что множество $W_q^m(\Omega)$ плотно в пространстве $W_r^m(\Omega)$ (см. [5, с. 263]). Так как $u \in W_s^m(\Omega)$, равенство (4) справедливо не только при $v \in W_q^m(\Omega)$, но и при $v \in W_r^m(\Omega)$. Но поскольку $s \in \mu$, должно выполняться (5). Ввиду произвольности выбора функции u, удовлетворяющей (4) при всех $v \in W_q^m(\Omega)$, лемма 2 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2. Определим при $pm < n$ число δ из равенства $2 = n\delta(n - m\delta)^{-1}$. Имеем $\delta = 2n(2m+n)^{-1} < 2$.

Рассмотрим вначале случай, когда либо $pm > n$, либо $p \geqslant \delta$. При таких p функции из $W_p^m(\Omega)$ принадлежат $L_2(\Omega)$, поэтому $p \in \mu$ по лемме 2.

Теперь рассмотрим случай $\delta > 1$, $p \in (1, \delta)$. Положим $p(0) = p$. Числа $p(i)$ при натуральных i определим по индукции. Пусть $p(0), p(1), \ldots, p(i)$ определены и при этом $mp(i) < n$. Тогда полагаем $p(i+1) = np(i)(n -$

$mp(i))^{-1}$. Имеем $p = p(0) < p(1) < \ldots < p(i) < p(i+1)$. Кроме того, при $k = 0, 1, \ldots, i$

$$\frac{p(k+1)}{p(k)} = \frac{n}{n - mp(k)} > \frac{n}{n - mp}.$$

Поэтому существует натуральное число t такое, что $p, p(1), \ldots, p(t-1)$ строго меньше δ, а $p(t)$ больше δ. Число $p(t)$ принадлежит μ. По лемме 2 последовательно находим $p(t-1), p(t-2), \ldots, p \in \mu$. Таким образом, $(1, \infty) \subset \mu$. Теорема 2 доказана.

Замечание 2. При $p = q = 2$ теорему 2 можно получить непосредственно из теоремы об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве, если рассматривать $L_2^m(\Omega)$ как гильбертово пространство со скалярным произведением, индуцированным билинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$. В этом случае к границе S не надо предъявлять требований, связанных с ее гладкостью.

Функция u из (3) удовлетворяет (в смысле обобщенных функций) в Ω неоднородному полигармоническому уравнению

$$\Delta^m u = (-1)^m \rho. \tag{9}$$

Обозначим через $C^m(\Omega \cup S)$ класс функций, непрерывных вместе с производными порядка m вплоть до границы в Ω. Пусть функция $u \in W_p^m(\Omega)$ имеет в Ω непрерывные производные порядка $2m$, $\Delta^m u$ суммируем в Ω, $v \in C^m(\Omega \cup S)$. Тогда справедлива формула Грина для полигармонического оператора:

$$\langle u, v \rangle = (-1)^m \int\limits_\Omega \Delta^m u v \, dx + \int\limits_S F_m(u, v, dS), \tag{10}$$

где $F_m(u, v, dS)$ — дифференциальная форма, содержащая производные функции u порядков $m, m+1, \ldots, 2m-1$, а также функцию v и ее производные порядков $1, 2, \ldots, m-1$. Точное выражение $F_m(u, v, dS)$, разъяснение, в каком смысле понимается правый интеграл в (10), и вывод самой формулы Грина для полигармонического оператора приводятся в [6, с. 515]. Отметим, что справедливость равенства (10) утверждалась в [6] при более сильных ограничениях на u, v. Анализируя вывод этой формулы в [6], можно убедиться, что она остается справедливой и при сформулированных здесь предположениях.

Обозначим через N совокупность функций $u \in W_p^m(\Omega)$ таких, что

$$\forall v \in C^m(\Omega \cup S) \qquad \int\limits_S F_m(u, v, dS) = 0. \tag{11}$$

При $p = 2$ условие (11) — это однородное краевое условие (обобщенной) задачи Неймана для уравнения (9) [6, гл. 12].

Следующее ниже утверждение показывает, что если индуцируемая функционалом $\rho \in L_q^{m*}(\Omega)$ обобщенная функция на E^n является регулярной в некоторой окрестности S в Ω и имеет в некоторой окрестности S в Ω непрерывные производные порядка $2m$, то функция u из (3) принадлежит множеству N.

Теорема 3. *Пусть M — замкнутое множество в Ω, функция g непрерывна и суммируема на $\Omega \setminus M$, функционалы l, $\rho \in W_q^{m*}(\Omega)$ такие, что*

$$\forall \varphi \in C^m(\Omega \cup S), \quad \operatorname{supp}\varphi \subset \Omega \setminus M, \qquad (l, \varphi) = 0,$$

при этом функционал $\rho \in L_q^{m*}(\Omega)$ определен формулой

$$\forall v \in W_q^m(\Omega) \qquad (\rho, v) = \int\limits_{\Omega\setminus M} gv\, dx + (l, v). \tag{12}$$

Если функция $u \in W_p^m(\Omega)$ из (3) имеет в $\Omega \setminus M$ непрерывные производные порядка $2m$, то она принадлежит множеству N.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $g \equiv 0$. Из (9) следует, что в $\Omega \setminus M$

$$\Delta^m u = 0. \tag{13}$$

Предположим, что утверждение теоремы неверно: пусть при некоторой функции $v \in C^m(\Omega \cup S)$

$$\int\limits_S F_m(u, v, dS) \neq 0.$$

Выберем бесконечно дифференцируемую в Ω функцию η, равную единице в некоторой окрестности границы S и нулю в некоторой окрестности множества M. Из формулы (10) получим

$$(l, v\eta) = \langle u, v\eta\rangle = \int\limits_S F_m(u, v\eta, dS) = \int\limits_S F_m(u, v, dS) \neq 0. \tag{14}$$

Соотношения (14) невозможны, так как $v\eta = 0$ на M. Следовательно, для случая $g \equiv 0$ теорема 3 доказана.

Определим функционалы $\rho_1, \rho_2 \in W_q^{m*}(\Omega)$ и функции $u_1, u_2 \in W_p^m(\Omega)$ из равенств

$$\begin{gathered} \forall v \in W_q^m(\Omega) \quad (\rho_1, v) = (-1)^m \int\limits_\Omega \Delta^m(u\eta) v\, dx, \\ \rho_2 = \rho - \rho_1, \\ \forall v \in W_q^m(\Omega) \quad \langle u_i, v\rangle = (\rho_i, v) \quad (i = 1, 2). \end{gathered} \tag{15}$$

Функция u_1 может отличаться в Ω от $u\eta$ лишь на слагаемое, удовлетворяющее (13). Поэтому u_1 имеет в Ω непрерывные производные порядка $2m$ и $\Delta^m u_1 = (-1)^m \Delta^m(u\eta)$. В силу (10) и (15) имеем

$$\begin{aligned} \int\limits_S F_m(u_1, v, dS) &= \langle u_1, v\rangle - (-1)^m \int\limits_\Omega \Delta^m u_1 v\, dx \\ &= (\rho_1, v) - (-1)^m \int\limits_\Omega \Delta^m(u\eta) v\, dx = 0. \end{aligned}$$

Поэтому $u_1 \in N$. В тех точках $x \in \Omega$, где $\eta(x) = 1$, имеем $\Delta^m(u\eta) = (-1)^m q$ и $x \notin \operatorname{supp}\rho_2$. По доказанному утверждению теоремы 3 в случае функционалов (12) с $g \equiv 0$ получаем, что $u_2 \in N$. Поскольку $u_1, u_2 \in N$, $u = u_1 + u_2$, заключаем, что $u \in N$. Теорема 3 доказана.

Рассмотрим при $qm > n$ функционал ошибок $\rho \in L_q^{m*}(\Omega)$ кубатурной формулы, определенный следующим образом:

$$(\rho, v) = \int\limits_\Omega gv\,dx - \sum_{k=1}^{t} C_k v(x_k), \quad x_1, \dots, x_t \in \Omega,$$

где функция g имеет непрерывные первые производные в некоторой окрестности S в Ω. Тогда согласно доказанному свертка g с фундаментальным решением уравнения (13) выражает данное фундаментальное решение (см. [6, с. 521]) и имеет непрерывные производные порядка $2m$ в указанной выше окрестности. Поэтому для функционала ρ и соответствующей ему в теореме 3 функции u выполнены условия этой теоремы. Следовательно, $u \in N$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Соломяк М. З.** О пространствах, сопряженных к пространствам W_p^l С. Л. Соболева // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, № 6. С. 1289–1292.
2. **Половинкин В. И.** О реализации функционалов ошибок кубатурных формул в пространствах типа L_p^m // Краевые задачи для уравнений с частными производными. Новосибирск: Ин-т математики АН СССР. Сиб. отд-ние. 1988. С. 125–136.
3. **Соболев С. Л.** О формулах механических кубатур в n-мерном пространстве // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 3. С. 527–530.
4. **Соломяк М. З.** О разрешимости некоторых интегральных тождеств // Ученые записки / Ленингр. гос. пед. ин-т им. Герцена. Л., 1962. Т. 238. С. 141–148.
5. **Соболев С. Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
6. **Соболев С. Л.** Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.