

ПРОБЛЕМА ЭФФЕКТИВНОГО ВЫБОРА КОНСТРУКТИВИЗАЦИЙ

Ю. Г. Венцов

Одним из направлений исследований в теории конструктивных моделей, активно разрабатываемых в последние годы, является изучение строения вычислимых нумераций конструктивных моделей. Ведущую роль в формировании проблематики этого направления играет предложенная С. С. Гончаровым концепция построения семантики языков программирования с абстрактными типами данных на основе вычислимых семейств конструктивных моделей. Идею построения языка, ориентированного на решение проблем из заданного класса, можно уточнить и исследовать в рамках теории конструктивных моделей. Все необходимые нам понятия и определения даны в работах [1–3].

Пусть $\mathcal{M}$ — конструктивизируемая модель, $K(\mathcal{M})$ — класс всех конструктивизаций $\mathcal{M}$. Будем называть устойчивое относительно автоморфизмов отношение $R \subseteq |\mathcal{M}|^n$ *проблемой на $\mathcal{M}$* . Через W_e и f_e обозначим соответственно рекурсивно перечислимое множество и частично рекурсивную функцию с номером e [4]. Согласно [5] каждая проблема на $\mathcal{M}$ может быть выражена формулой языка $L_{\omega_1, \omega}$, где L — язык модели $\mathcal{M}$. Пусть $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ — класс всех проблем на $\mathcal{M}$. Так же, как и в [6], определим Σ_α - и Π_α -формулы языка $L_{\omega_1, \omega}$ следующим образом:

- Σ_0 -формулы, — это бескванторные формулы языка $L_{\omega, \omega}$,
- Π_0 -формулы — это бескванторные формулы языка $L_{\omega, \omega}$.

Зафиксируем гёделеву нумерацию формул из $L_{\omega, \omega}$. Тогда

- $\Sigma_{\alpha+1}$ -формулы — это формулы вида $\bigvee_{n \in S} \exists \bar{y}_n \Phi_n$, где Φ_n — Π_α -формула, $\bar{y}_n$ — конечная последовательность переменных, а S — некоторое счетное множество натуральных чисел;
- $\Pi_{\alpha+1}$ -формулы — это формулы вида $\bigwedge_{n \in S} \forall \bar{y}_n \Phi_n$, где Φ_n — Σ_α -формула.

Если δ — предельный ординал, то

- Σ_δ -формулы — это формулы вида $\bigvee_{n \in S} \Phi_n$, где Φ_n — Σ_β -формула для $\beta < \delta$;
- Π_δ -формулы — это формулы вида $\bigwedge_{n \in S} \Phi_n$, где Φ_n — Π_β -формула для $\beta < \delta$.

Пусть O — система обозначений Клини для ординалов и $<_O, +_O, |\cdot|_O$ — соответствующие отношение и функции на O (см. [4]). Будем пользоваться методом рекурсивной трансфинитной индукции Клини для

определения частично рекурсивных функций на O . Для $a \in O$ определим рекурсивные Σ_a -формулы и Π_a -формулы и их гёделевы номера относительно O методом рекурсивной трансфинитной индукции.

Если $a = 2^b$ и для каждого $n \in W_e$ имеем $f_e(n) = \langle i_n, j_n \rangle$, где i_n — гёделев номер Π_b -формулы Θ_n и j_n — канонический индекс для конечной последовательности переменных $\bar{y}_n$, то $\langle a, e, 0 \rangle$ есть гёделев номер Σ_a -формулы $\bigvee_{n \in W_e} \exists \bar{y}_n \Theta_n$. Аналогично, если каждый i_n есть гёделев номер некоторой Σ_b -формулы Θ_n , то $\langle a, e, 1 \rangle$ — гёделев номер Π_a -формулы $\bigwedge_{n \in W_e} \forall \bar{y}_n \Theta_n$. Если $a = 3 \cdot 5^k$, где $f_k(n) = a_n$, и для каждого n $f_e(n)$ есть гёделев номер некоторой Σ_{a_n} -формулы Θ_n , то $\langle a, e, 0 \rangle$ — гёделев номер Σ_a -формулы $\bigvee_{n \in W_e} \Theta_n$. Если же каждая Θ_n есть Π_{a_n} -формула, то $\langle a, e, 1 \rangle$ есть гёделев номер Π_a -формулы $\bigwedge_{n \in W_e} \Theta_n$.

Определим *рекурсивную Σ_α -формулу* как Σ_a -формулу для некоторого $a \in O$ такую, что $|a|_O = \alpha$. Будем говорить, что *семейство проблем $\Sigma = (R_0, R_1, \dots)$ вычислимо на $\mathcal{M}$* , если существуют последовательность $\Omega = (\Phi_0, \Phi_1, \dots)$ рекурсивных Σ_α -формул языка $L_{\omega_1, \omega}$, где $\alpha < \omega_1^{CK}$, L — язык модели $\mathcal{M}$ (причем $\mathcal{M} \models R_i \longleftrightarrow \Phi_i$ для $i \in \mathbb{N}$), и рекурсивная функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, которая по номеру $i \in \mathbb{N}$ формулы $\Phi_i \in \Omega$ дает гёделев номер формулы Φ_i относительно O , т.е. $f(i)$ — гёделев номер Φ_i .

Представляется интересным исследование вопроса о существовании единого метода, позволяющего по любой тройке объектов $(\mathcal{M}, \Sigma, \sigma)$, где $\mathcal{M}$ — модель, $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и $\sigma \in K(\mathcal{M})$, указать эффективную процедуру сопоставления каждой проблеме $R \in \Sigma$ такой конструктивизации $\nu \in \sigma$, что множество $\nu^{-1}(R)$ рекурсивно. Оказывается, что выбор подходящей конструктивизации существенно зависит от данной проблемы, так что общей равномерной процедуры выбора не существует. Здесь наблюдается тот же эффект, что и в [2]; а именно, справедлива следующая

Теорема. Существуют неавтоустойчивая конструктивизируемая модель $\mathcal{M}$ и вычислимый класс $\pi = (\nu_0, \nu_1, \dots)$ конструктивизаций этой модели такие, что для любой рекурсивной функции f в предположении, что класс $\sigma_f = (\nu_{f(0)}, \nu_{f(1)}, \dots)$ содержит не менее двух неэквивалентных конструктивизаций, существует вычислимое семейство проблем $\Sigma_f = (R_0, R_1, \dots)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- (i) для каждой проблемы R_i существует конструктивизация $\nu_{f(j)}$ такая, что множество $\nu_{f(j)}^{-1}(R_i)$ рекурсивно;
- (ii) не существует рекурсивной функции g такой, что множество R_i рекурсивно относительно $\nu_{f(g(i))}$ для всех $i \in \mathbb{N}$;
- (iii) любая конструктивизация γ модели $\mathcal{M}$ эквивалентна некоторой конструктивизации $\nu \in \pi$.

Доказательство. Рассмотрим жесткую конструктивную модель $\mathcal{M}$, имеющую вычислимый класс конструктивизаций $\pi = (\nu_0, \nu_1, \dots)$ такой, что ν_i неэквивалентна ν_j при $i \neq j$ и любая $\gamma \in K(\mathcal{M})$ эквивалентна некоторой $\nu \in \pi$. Существование такой модели можно доказать, пользуясь методом, разработанным в [3]. Таким образом, $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию (iii).

Допустим, что f — произвольная рекурсивная функция и $\sigma_f = (\nu_{f(0)}, \nu_{f(1)}, \dots)$ — вычислимый подкласс класса π , содержащий хотя бы две

неэквивалентные конструктивизации, скажем $\nu_{f(0)}$ и $\nu_{f(1)}$, что в силу свойств $\mathcal{M}$ равносильно соотношению $f(0) \neq f(1)$.

Построение семейства Σ_f будем осуществлять так, чтобы за возможным исключением конечного числа множеств R_i , выполнялось одно из следующих соотношений:

$$R_i = \Delta_{\nu_{f(0)}} = \{\langle \nu_{f(0)}(i_j), \nu_{f(0)}(i_{j+1}) \rangle \mid j \in \mathbb{N}\},$$

$$R_i = \Delta_{\nu_{f(1)}} = \{\langle \nu_{f(1)}(i_j), \nu_{f(1)}(i_{j+1}) \rangle \mid j \in \mathbb{N}\},$$

где $I = \{i_0 < i_1 < \dots\}$ и $\nu_{f(0)}(I) = \nu_{f(1)}(I) = S$ (см. [3]).

В процессе построения мы будем пользоваться метками типа $\langle k, l \rangle$ и рекурсивной функцией $\delta(k, t)$. Обозначим $\nu_{f(0)}$ и $\nu_{f(1)}$ через μ и η соответственно. Перейдем к построению семейства Σ_f .

Шаг 0. Для $i \in \mathbb{N}$ положим $R_i^0 = \{\langle \mu(i_0), \mu(i_1) \rangle\}$.

Шаг $t + 1$. Проверим, существует ли метка $\langle k, l \rangle \leq t + 1$ такая, что значение $f_l^{t+1}(k)$ определено и $\{0, \dots, \delta(l, t)\} \subseteq \delta f_l^t$, где $\lambda x f_l^t(x)$ — стандартное обозначение аппроксимации частично рекурсивной функции с номером l , причем

- ◇ на Σ_f метка $\langle k, l \rangle$ еще не стоит, а если стоит метка $\langle k, l' \rangle$, то $l < l'$;
- ◇ никакая метка $\langle k', l \rangle$ при $k' < k$ не стоит на Σ_f ;
- ◇ выполнено одно из следующих условий:

$$(a) f_l^{t+1}(k) = m, f(m) = f(0);$$

$$(б) f(m) = f(1) \vee f(m) \neq f(0) \ \& \ f(m) \neq f(1).$$

Если такой метки $\langle k, l \rangle$ не существует, то доопределим по правилу А:

$$R_i^{t+1} = R_i^t \cup \{\langle \kappa(i_{t+1}), \kappa(i_{t+2}) \rangle\} \quad \text{для } \langle \kappa(i_t), \kappa(i_{t+1}) \rangle \in R_i^t, \ \kappa \in \{\mu, \eta\}.$$

Перейдем к следующему шагу.

Если же такая метка $\langle k, l \rangle$ существует, то выберем $\langle k, l \rangle$ с наименьшим таким l , а для этого l выберем наименьшее k , удовлетворяющее условиям шага для $\langle k, l \rangle$. Если для $\langle k, l \rangle$ выполнено условие (а), то полагаем $R_k^{t+1} = R_k^t \cup \{\langle \eta(i_{t+1}), \eta(i_{t+2}) \rangle\}$ и доопределяем до R_i^{t+1} все остальные R_i^t по правилу А. Если же для метки $\langle k, l \rangle$ выполнено условие (б), то доопределим все R_i^t по правилу А.

В любом случае на семейство Σ_f поставим метку $\langle k, l \rangle$, снимем все метки $\langle k, l' \rangle$ при $l' > l$ и метки $\langle k', l \rangle$ при $k' > k$. Перейдем к следующему шагу. Построение закончено.

Проверим, что построенное таким образом семейство $\Sigma_f = (\cup_{i \in \mathbb{N}} R_i^t; i \in \mathbb{N})$ удовлетворяет условиям теоремы.

Лемма 1. Если функция f_l всюду определена, то существует число k такое, что метка $\langle k, l \rangle$ на некотором шаге t ставится на Σ_f и больше не снимается.

Доказательство. Пусть, напротив, существует l такое, что для любого k функция $f_l(k)$ определена, но метка $\langle k, l \rangle$ ни с какого шага t не стоит постоянно на Σ_f . Выберем наименьшее такое l . Тогда для любого $l' < l$, если $f_{l'}$ всюду определена, то существует k' такое, что начиная с некоторого шага t' метка $\langle k', l' \rangle$ ставится и постоянно стоит на Σ_f . Рассмотрим шаг t_0 , после которого все метки $\langle k', l' \rangle$ такие, что $l' < l$ и $f_{l'}$ всюду определена, постоянно будут стоять на Σ_f .

Для всех $l'' < l$ таких, что $f_{l''}$ не всюду определена, начиная с некоторого шага t'' не будет выполняться условие

$$\{0, \dots, \delta(l'', t)\} \subseteq \delta f_{l''}^t \quad \text{для всех } t > t''.$$

Пусть t_1 — наибольший из всех таких шагов t'' и $t_2 = \max\{t_0, t_1\}$. Тогда после шага t_2 никакая метка $\langle k', l' \rangle$ при $l' < l$ на Σ_f не ставится.

Пусть k — наименьшее такое число, что никакая метка $\langle k, l' \rangle$ при $l' < l$ не стоит на Σ_f после шага t_2 и t_3 ($t_3 > t_2$) — такой шаг, что $f_l^{t_3}(k)$ определено, $\langle k, l \rangle < t_3$, $\{0, \dots, \delta(l, t_k)\} \subseteq \delta f_l^{t_k}$. Такое t_3 существует в силу всюду определенности f_l . На шаге t_3 для $\langle k, l \rangle$ будут выполнены условия этого шага и метка $\langle k, l \rangle$ поставится и больше никогда не снимется. Противоречие с выбором l доказывает лемму 1.

Лемма 2. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что метка $\langle k, l \rangle$ стоит, начиная с некоторого шага, постоянно на Σ_f .

Доказательство. Предположим противное. Выберем наименьшее число $k \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $l \in \mathbb{N}$ метка $\langle k, l \rangle$ ни с какого шага не стоит постоянно на Σ_f . Тогда для каждого $k' < k$ существует l' такое, что метка $\langle k', l' \rangle$ с некоторого шага t' постоянно стоит на Σ_f . Пусть t_0 — шаг, после которого все такие метки $\langle 0, l_0 \rangle, \dots, \langle k-1, l_{k-1} \rangle$ постоянно стоят на Σ_f . Пусть l — наименьший номер всюду определенной функции, отличный от $l_0, \dots, l_{k-1}$. Рассмотрим шаг $t_1 > t_0$ такой, что значение $f_l^{t_1}(k)$ определено, $\langle k, l \rangle \leq t_1$, $\{0, \dots, \delta(l, t_1)\} \subseteq \delta f_l^{t_1}$.

Рассмотрим шаг $t_2 > t_1$, после которого для любого $l' < l$ либо существует k' такое, что $\langle k', l' \rangle$ стоит постоянно на Σ_f , либо ни для какого k' метка $\langle k', l' \rangle$ не ставится на Σ_f (в случае, когда $f_{l'}$ не всюду определена). Тогда после шага t_2 никакая метка $\langle k, l' \rangle$ для $l' < l$ никогда не ставится на Σ_f . Но тогда на шаге t_2 выполняются условия этого шага для $\langle k, l \rangle$, и метка $\langle k, l \rangle$ с этого шага будет стоять постоянно на Σ_f , что противоречит выбору числа k . Полученное противоречие доказывает лемму 2.

Лемма 3. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует единственное $l \in \mathbb{N}$ такое, что метки постоянно стоят на Σ_f , начиная с некоторого шага.

Доказательство следует из лемм 1, 2 и условий конструкции.

Лемма 4. Для любого $R_i = \cup_{t \in \mathbb{N}} R_i^t$ имеем

$$R_i = \{\langle \mu(i_{t_j}), \mu(i_{t_j+1}) \rangle \mid t_j \geq t_{j_0}\}$$

либо

$$R_i = \{\langle \eta(i_{t_j}), \eta(i_{t_j+1}) \rangle \mid t_i \geq t_{j_0}\},$$

за исключением, быть может, конечного множества, где t_{j_0} — шаг, начиная с которого метка $\langle i, l \rangle$ постоянно стоит на Σ_f при подходящем l .

Доказательство непосредственно следует из построения.

Лемма 5. Любое $R_i = \cup_{t \in \mathbb{N}} R_i^t$ либо рекурсивно относительно μ и не рекурсивно относительно η , либо рекурсивно относительно η и не рекурсивно относительно μ .

Доказательство следует из леммы 4 и неэквивалентности μ и η .

Из леммы 5 вытекает условие (i) теоремы. Покажем, что условие (ii) также выполнится для Σ_f . Пусть $g = \lambda x f_k(x)$ — такая рекурсивная функция, что $\nu_{f \circ g}^{-1}(R_i)$ рекурсивно для $i \in \mathbb{N}$. По лемме 1 при подходящем l метка $\langle l, k \rangle$ начиная с некоторого t_0 будет постоянно стоять на Σ_f . Но в этом случае, если для метки $\langle l, k \rangle$ выполнено условие (а), то $R_l = R_l^{t_0-1} \cup \{ \langle \eta(i_j), \eta(i_{j+1}) \rangle \mid j \geq t_0 \}$. Следовательно, R_l не рекурсивно относительно $\mu = \nu_{f \circ f_k}(l) = \nu_{f(0)}$. Если же начиная с некоторого шага k , выполнено условие (б), то $R_l = R_l^{t_0-1} \cup \{ \langle \mu(i_j), \mu(i_{j+1}) \rangle \mid j \geq t_0 \}$. Поэтому R_l не рекурсивно относительно $\eta = \nu_{f \circ f_k}(l) = \nu_{f(1)}$. Противоречие показывает, что такой функции g не существует. Тем самым доказана выполнимость условия (ii) для Σ_f .

Установим теперь вычислимость семейства $\Sigma_f = (R_0, R_1, \dots)$. Зафиксируем множество $B = \{ \langle k, l, t \rangle \mid \text{на шаге } t \text{ на } \Sigma_f \text{ ставится метка } \langle k, l \rangle \}$. Нетрудно заметить, что B рекурсивно. Рассмотрим множества

$$B^a = \{ \langle k, l, t \rangle \in B \mid \text{для } \langle k, l \rangle \text{ на шаге } t \text{ выполнен пункт (а)} \},$$

$$B^b = \{ \langle k, l, t \rangle \in B \mid \text{для } \langle k, l \rangle \text{ на шаге } t \text{ выполнен пункт (б)} \}.$$

Очевидно, что множества B^a, B^b рекурсивны и $B = B^a \cup B^b$.

Рассмотрим функтор $F_S: U_{n_S} \rightarrow K^\sigma(\mathcal{M}_S)$, осуществляющий эквивалентность категории однозначных вычислимых нумераций вычислимого семейства S и подкатегории конструктивных моделей некоторой фиксированной сигнатуры $\sigma = (A^1, \Delta_n^2, P_n^2, Q_n^2 \mid n \in \mathbb{N})$ (см. [3]).

Построенная модель $\mathcal{M}$ является элементом категории $K^\sigma(\mathcal{M}_S)$, поэтому можно воспользоваться следующей эквивалентностью: если $\mathcal{M} \models A(a)$, т.е. a является рекурсивно перечислимым множеством, то $\mathcal{M} \models \varphi_n(a) \longleftrightarrow n \in a$, где $\varphi_n(x) \equiv (\exists y) Q_n(x, y), n \in \mathbb{N}$.

В силу универсальности клиниевской нумерации рекурсивно перечислимых множеств для однозначных вычислимых нумераций $F_S^{-1}(\mu) = \mu'$, $F_S^{-1}(\eta) = \eta'$ существуют общерекурсивные функции g_μ и g_η такие, что $\mu(i_j) = \mu'(j) = W_{g_\mu(j)}$; $\eta(i_j) = \eta'(j) = W_{g_\eta(j)}$, $j \in \mathbb{N}$.

В силу однозначности нумераций и того факта, что множества семейства S не имеют бесконечных пересечений, имеем следующую эквивалентность:

$$x = \mu(i_j) \longleftrightarrow A(x) \& \bigwedge_{n \in W_{g_\mu(j)}} \varphi_n(x), \quad i_j \in I.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} x = \mu(i_j) \& y = \mu(i_{j+1}) \\ \longleftrightarrow A(x) \& A(y) \& \bigwedge_{n \in W_{g_\mu(j)}} \varphi_n(x) \& \bigwedge_{n \in W_{g_\mu(j+1)}} \varphi_n(y). \end{aligned}$$

В силу вышеизложенного нетрудно понять, что формула

$$\begin{aligned}\varphi_k(x, y) \Rightarrow & A(x) \& A(y) \& (\bigvee_{\langle k, l, j \rangle \in B^a} (\bigwedge_{n \in W_{g_\mu(j)}} \varphi_n(x) \& \bigwedge_{n \in W_{g_\mu(j+1)}} \varphi_n(y)) \\ & \bigvee_{\langle k, l, j \rangle \in B} (\bigwedge_{n \in W_{g_\mu(j)}} \varphi_n(x) \& \bigwedge_{n \in W_{g_\mu(j+1)}} \varphi_n(y)) \\ & \bigvee_{\langle k, l, j \rangle \in B^b} (\bigwedge_{n \in W_{g_\eta(j)}} \varphi_n(x) \& \bigwedge_{n \in W_{g_\eta(j+1)}} \varphi_n(y))\end{aligned}$$

определяет отношение R_k на $\mathcal{M}$ и эквивалентна некоторой рекурсивной Σ_3 -формуле. Нетрудно видеть, что для $\Omega = (\varphi_0, \varphi_1, \dots)$ существует равномерная эффективная процедура, определяющая по i гёделев номер рекурсивной Σ_3 -формулы, эквивалентной φ_i , а стало быть, Σ_f — вычислимое семейство проблем на $\mathcal{M}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
2. Венцов Ю. Г. Неравномерная автоустойчивость моделей // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 6. С. 684–714.
3. Гончаров С. С. Проблема числа неавтоустойчивых конструктивизаций // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 6. С. 621–639.
4. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
5. Scott D. Logic with denumerably long formulas and finite strings of quantifiers // The Theory of Models / Eds. J. W. Addison, J. Henkin, A. Tarski: Proc. of the 1963 Internat. Sympos. at Berkeley. Amsterdam: North-Holland, 1965. P. 329.
6. Ash C. J. Recursive labelling systems // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. V. 298, N 2. P. 497–514.