ОДНОРОДНЫЕ МОДЕЛИ СТАБИЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

К. Ж. Кудайбергенов

Введение

В классической теории моделей важное место занимают вопросы изучения моделей, допускающих синтаксическую характеризацию. Ключевое место как в структурной теории моделей, так и в разработке различных теоретико-модельных конструкций принадлежит классу однородных моделей. Основополагающими работами в этой области являются статьи [1, 2]. В настоящей статье изучаются однородные модели стабильных теорий. Результаты о существовании (D, λ)-простых моделей над множествами приведены в § 2. Указаны условия (см. § 3), при которых $\varkappa$-однородность влечет λ-однородность (где $\varkappa < \lambda$). Получены также условия, при которых стабильная теория имеет однородную модель данной мощности с фиксированным семейством реализуемых типов. В качестве следствия доказано, что если теория T λ-стабильна, то $H_T(\varkappa) = H_T^*(\lambda)$ для любого $\varkappa > \lambda$ такого, что теория T $\varkappa$-стабильна, где $H_T(\varkappa)$ — число однородных моделей мощности $\varkappa$ для теории T, а $H_T^*(\lambda)$ — число однородных моделей мощности λ, содержащих бесконечное неразличимое множество.

Результаты о числе однородных моделей ω-стабильных теорий изложены в § 5. В частности, доказано, что если теория T ω-стабильна и $H_T(\lambda) > \omega$ для некоторого $\lambda > \omega$, то $H_T(\varkappa) = 2^\omega$ для любого $\varkappa \geqslant \omega$. Абсолютно однородные модели (т.е. λ^+-однородные модели мощности λ) и гипероднородные модели изучаются в § 6, где получен критерий абсолютной однородности модели стабильной теории. Кроме того, дан ответ на один вопрос о гипероднородных моделях, поставленный в [3].

В статье автора [4] изучался вопрос о существовании элементарных расширений однородных моделей с тем же семейством реализуемых типов. Были введены так называемые D-насыщенные модели (в определенном смысле средние между однородными и насыщенными моделями [5]).

В настоящей работе получены некоторые результаты о существовании D-насыщенных моделей в различных мощностях для стабильных теорий. В § 8 изучаются элементарные цепи однородных моделей. Указаны условия, при которых объединение элементарной цепи (D, λ)-однородных моделей будет (D, λ)-однородным. Условия, при которых любая (D, λ)-однородная модель достаточно большой мощности является однородной (теорема о категоричности для класса (D, λ)-однородных моделей суперстабильной теории), получены в § 9. В § 10 с помощью результатов из § 3 доказана теорема Шелаха о минимальных моделях тотально трансцендентных теорий (с некоторой дополнительной информацией о таких моделях).

Результаты данной статьи частично анонсированы в [6, 7].

§ 1. Предварительные сведения

В основном используются общепринятые определения и обозначения. На протяжении всей статьи мы принимаем следующие обозначения:

α, β, γ, δ — ординалы;
$\varkappa$, λ, μ, ν — бесконечные кардиналы;
ω — первый бесконечный кардинал;
$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ и т. п. — модели;
M, N и т. п. — универсумы моделей $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ и т. д.
$|A|$ — мощность множества A;
T — полная теория.

Все рассматриваемые модели (множества, элементы) считаются элементарными подмоделями (подмножествами, элементами) некоторой насыщенной в подходящем смысле модели $\mathfrak{M}^*$ теории T. Будем использовать также следующие обозначения:

$x, y, z, \ldots$ — переменные;
$a, b, c, \ldots$ — элементы;
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots$ и $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$ — конечные наборы переменных и элементов;
A, B, C — множества (т. е. подмножества M^*);
φ, ψ — формулы;
p, q — типы;
$S^n(A)$ — множество всех полных n-типов над A;
$\bar{a} \in A$ означает $a_0, \ldots, a_n \in A$, где $\bar{a} = \langle a_0, \ldots, a_n\rangle$.

Пусть $S(A) = S^1(A)$, $D(T) = \bigcup_{n<\omega} S^n(\varnothing)$. Если $f\colon A \to M^*$ — элементарное отображение и $p \in S^n(A)$, то полагаем

$$f(p) = \{\varphi(\bar{x}, f(a_0), \ldots, f(a_m))\colon \varphi(\bar{x}, a_0, \ldots, a_m) \in p\}.$$

В записи $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ подразумевается, что все свободные переменные формулы φ входят в $\bar{x}$, а все параметры — в $\bar{a}$. Для типа p полагаем

$$p{\restriction}A = \{\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p\colon \bar{a} \in A\},$$

а для формулы $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$:

$$\varphi(A, \bar{a}) = \{\bar{b} \in A\colon \models \varphi(\bar{b}, \bar{a})\}.$$

Если F — элементарное отображение и $\mathfrak{M}$ — такая модель, что $M \subseteq \operatorname{dom} F$, то $F(\mathfrak{M})$ будет обозначать элементарную подмодель модели $\mathfrak{M}^*$ с универсумом $F(M) = \{F(a)\colon a \in M\}$.

Определение 1.1. Модель $\mathfrak{M}$ называется

- *λ-однородной*, если для любых множества $A \subseteq M$ мощности $|A| < \lambda$ и элемента $a \in M$ любое элементарное отображение $f\colon A \to M$ можно продолжить до элементарного отображения $g\colon A \cup \{a\} \to M$;
- *однородной*, если она $|M|$-однородна.

Через $D(A)$ обозначим множество всех типов над $\varnothing$, которые реализуются конечными последовательностями элементов множества A. Множество $D(\mathfrak{M}) = D(M)$ называется (*конечной*) *диаграммой модели* $\mathfrak{M}$. Буква D всегда будет обозначать множество вида $D(\mathfrak{M})$. Тип $p \in S(A)$

называется *D-типом над A*, если для любого элемента над a, реализующего p, имеем $D(A \cup \{a\}) \subseteq D$. Множество всех D-типов над A обозначается $S_D(A)$. Множество A (модель $\mathfrak{N}$) называется *D-множеством* (*D-моделью*), если $D(A) \subseteq D$ ($D(\mathfrak{N}) \subseteq D$).

Определение 1.2 [2]. λ-Однородная модель $\mathfrak{M}$ называется *(D,λ)-однородной*, если $D(\mathfrak{M}) = D$.

Часто будет использоваться следующая

Лемма 1.1 [1]. *Если модель $\mathfrak{M}$ (D,λ)-однородна и A есть D-множество мощности не более, чем λ, то существует элементарное отображение $f\colon A \to M$. Более того, если $B \subseteq A$ и $|B| < \lambda$, то любое элементарное отображение $f\colon B \to M$ можно продолжить до элементарного отображения $g\colon A \to M$.*

Лемма 1.2 [2]. *Модель $\mathfrak{M}$ (D,λ)-однородна тогда и только тогда, когда $D(\mathfrak{M}) = D$ и для любого множества $A \subseteq M$ мощности $|A| < \lambda$ любой тип из $S_D(A)$ реализуется в $\mathfrak{M}$.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть $A \subseteq M$, $|A| < \lambda$, $p \in S_D(A)$ и a реализует p. По лемме 1.1 существует элементарное отображение $f\colon A \cup \{a\} \to M$, тождественное на A. Тогда $f(a)$ реализует p в $\mathfrak{M}$.

Достаточность. Пусть $A \subseteq M$, $|A| < \lambda$, $a \in M$, $f\colon A \to M$ — элементарное отображение, $p = \mathrm{tp}(a, A)$. Очевидно, $f(p) \in S_D(f(A))$. Предположим, что $b \in M$ реализует $f(p)$. Продолжим f до $g\colon A \cup \{a\} \to M$, полагая $g(a) = b$. Ясно, что g элементарно. Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. 1. *Если $p \in S_D(A)$ и $B \subseteq A$, то $p{\restriction}B \in S_D(B)$.*

2. *Включение $p \in S_D(A)$ верно если и только если $p \in S_D(B)$ для любого конечного множества $B \subseteq A$.*

Доказательство.

1. Пусть a реализует p, а b реализует $p{\restriction}B$. Тогда

$$D(B \cup \{b\}) = D(B \cup \{a\}) \subseteq D(A \cup \{a\}) \subseteq D.$$

2. Докажем справедливость второго утверждения леммы.

Достаточность. Пусть a реализует p. Тогда

$$D(A \cup \{a\}) = \bigcup\{D(B \cup \{a\})\colon B \subseteq A, |B| < \omega\} \subseteq D.$$

Необходимость следует из первого утверждения.
Лемма 1.3 доказана.

§ 2. О (D,λ)-простых моделях

В этом параграфе исследуется существование (D,λ)-простых моделей над множествами.

Определение 2.1 [2]. Диаграмма D называется

- *λ-хорошей*, если существует (D,λ)-однородная модель мощности не меньше, чем λ;
- *хорошей*, если D λ-хорошая для всех λ;
- *λ-стабильной*, если $|S_D(A)| \leqslant \lambda$ для любого множества A мощности не больше λ и D λ^+-хорошая;
- *стабильной*, если D λ-стабильна для некоторого λ.

Определение 2.2. Модель $\mathfrak{M}$ называется *(D,λ)-простой над $B \subseteq M$*, если она (D,λ)-однородна и для любой (D,λ)-однородной модели $\mathfrak{N}$ любое элементарное отображение $f\colon B \to N$ можно продолжить до элементарного отображения $g\colon M \to N$.

Пусть ${}^{\alpha}2$ — множество всех функций из α в $\{0,1\}$ и ${}^{\alpha>}2 = \bigcup_{\beta<\alpha} {}^{\beta}2$. Введем следующие обозначения:

$\lambda^*(D)$ — наименьший кардинал λ, для которого неверно следующее утверждение: для любого $\eta \in {}^{\lambda>}2$ существуют $p_\eta \in S_D(A_\eta)$ и ψ_η такие, что $\psi_\eta \in p_{\eta^\frown\langle 0\rangle}$, $\neg\psi_\eta \in p_{\eta^\frown\langle 1\rangle}$, множество $A_{\eta^\frown\langle 0\rangle} \cup A_{\eta^\frown\langle 1\rangle}$ есть D-множество и $p_\tau \subseteq p_\eta$ при $\tau \subseteq \eta$;

$\lambda_3(T)$ — наименьший кардинал λ, для которого неверно следующее утверждение: для любого $\eta \in {}^{\lambda>}2$ существует тип $p_\eta \in S(A_\eta)$ такой, что $p_{\eta^\frown\langle 0\rangle} \cup p_{\eta^\frown\langle 1\rangle}$ несовместно и $p_\tau \subseteq p_\eta$ при $\tau \subseteq \eta$ [8].

Отметим, что утверждения «диаграмма D λ-хорошая, $\lambda < \lambda^*(D)$» и «диаграмма D удовлетворяет свойству $(B * \lambda)$» (см. [2]) эквивалентны.

Лемма 2.1. 1. $\lambda^*(D) \leqslant \lambda_3(T)$.

2. *Если теория T μ-стабильна и $\mu < 2^\lambda$, то $\lambda \geqslant \lambda_3(T)$.*

3. *Если теория T стабильна, то $\lambda_3(T) \leqslant |T|^+$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Относительно второго и третьего см. [8, теорема 2.15(2), с. 163] и [8, теорема 2.15(3), с. 163].

Лемма 2.2. *Если диаграмма D λ-хорошая и $\lambda \geqslant \lambda^*(D)$, то над любым D-множеством существует (D,λ)-простая модель.*

Доказательство следует из теорем 5.3 и 5.9 работы [2].

Заметим, что $(D,\lambda,1)$-однородные модели из [2] — это в точности (D,λ)-однородные модели. Поэтому $(D,\lambda,1)$-простые модели из [2] будут (D,λ)-простыми. Введем следующее обозначение:

$\lambda(T)$ — наименьший кардинал λ такой, что теория T λ-стабильна.

Теорема 2.3. *Пусть теория T стабильна и либо $\lambda > |T|$, либо $\lambda(T) < 2^\lambda$. Если диаграмма D λ-хорошая, то над любым D-множеством существует (D,λ)-простая модель.*

Доказательство следует из лемм 2.1 и 2.2.

§ 3. Критерий $\varkappa$-однородности

В этом параграфе будут получены условия, эквивалентные $\varkappa$-однородности модели.

Определим кардинал $\varkappa_T$ следующим образом:

$$\varkappa_T = \begin{cases} \omega, & \text{если теория } T \text{ тотально трансцендентна,} \\ k(T) + \omega_1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определение кардинала $k(T)$ можно найти в [8, с. 100]. Напомним, что если теория T стабильна, то $k(T) \leqslant |T|^+$. Стабильная теория T суперстабильна тогда и только тогда, когда $k(T) = \omega$. Следуя [8], введем обозначение

$$\mathrm{Av}(I, A) = \{\varphi(x, \bar{a})\colon \varphi \in L, \bar{a} \in A, |\varphi(I, \bar{a})| \geqslant \omega\},$$

где I — бесконечное неразличимое множество. Если теория T стабильна, то $\mathrm{Av}(I, A) \in S(A)$ [8].

Лемма 3.1. *Пусть теория T стабильна, B есть D-множество, $I \subseteq B$, I — неразличимое множество, $|I| \geqslant k(T)$. Тогда $\mathrm{Av}(I, B) \in S_D(B)$.*

Доказательство. В силу леммы 1.3(2) достаточно показать, что для любого конечного множества $A \subseteq B$ верно соотношение $\mathrm{Av}(I, A) \in S_D(A)$. Так как теория T стабильна, в силу [8, лемма 3.4, с. 102] существует множество $I_0 \subseteq I$ такое, что $|I_0| < k(T) \leqslant |I|$ и $I - I_0$ неразличимо над A. Пусть $a \in I - I_0$. Тогда $\mathrm{Av}(I, A) = \mathrm{tp}(a, A) \in S_D(A)$. Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. 1. *Если модель $\mathfrak{M}$ λ-однородна и I — максимальное бесконечное неразличимое множество в $\mathfrak{M}$, то $|I| \geqslant \lambda$.*

2. *Если модель $\mathfrak{M}$ λ-однородна и содержит бесконечное неразличимое множество, то $|M| \geqslant \lambda$.*

Доказательство.

1. Допустим, что $|I| < \lambda$. Пусть $a \in I, f\colon (I - \{a\}) \to I$ — биекция. Так как I неразличимо, f элементарно. Поскольку модель $\mathfrak{M}$ λ-однородна, f можно продолжить до элементарного отображения $g\colon I \to M$. Тогда $I \subsetneqq g(I) \subseteq M$ и множество $g(I)$ неразличимо, что противоречит максимальности I.

2. Утверждение следует из пункта 1 леммы. Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3. *Пусть теория T стабильна и модель $\mathfrak{M}$ является $(D, \varkappa_T)$-однородной. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *элемент $p \in S_D(M)$ не изолирован;*
2) *$p = \mathrm{Av}(I, M)$ для некоторого бесконечного неразличимого множества $I \subseteq M$.*

Доказательство.

$2 \Rightarrow 1$ Расширим I до максимального неразличимого множества I_0 в $\mathfrak{M}$. Очевидно, $\mathrm{Av}(I_0, M) = p$. Так как модель $\mathfrak{M}$ $\varkappa_T$-однородна, по лемме 3.2 (утверждение 1) $|I_0| \geqslant \varkappa_T \geqslant k(T)$. По лемме 3.1 $p \in S_D(M)$. $1 \Rightarrow 2$ Вначале рассмотрим случай $\varkappa_T > \omega$. Так как теория T стабильна, существует множество $A \subseteq M$ такое, что $|A| < k(T)$ и тип p не форкуется над A [8, следствие 3.2, с. 101]. Индукцией по $\alpha < \omega_1$ определим элементы $a_\alpha \in M$ такие, что a_α реализует $p{\restriction}A_\alpha$, где $A_\alpha = A \cup \{a_\beta\colon \beta < \alpha\}$. Это можно сделать, так как модель $\mathfrak{M}$ $(D, \varkappa_T)$-однородна и $p{\restriction}A_\alpha \in S_D(A_\alpha)$ по лемме 1.3. В силу [8, лемма 2.12, с. 98] тип $p{\restriction}A_\omega$ стационарен над A_ω. Ясно, что для любого $\alpha < \omega_1$ тип $p{\restriction}A_\alpha$ не форкуется над A_ω. В силу [8, лемма 1.10, с. 89] множество $I = \{a_\alpha \colon \omega \leqslant \alpha < \omega_1\}$ неразличимо и $p = \mathrm{Av}(I, M)$.

Пусть теперь $\varkappa_T = \omega$, т. е. теория T тотально трансцендентна. Тогда существует конечное множество $A \subseteq M$ такое, что тип p не форкуется над A и $p{\restriction}A$ стационарен (выбираем A так, что $R(p, L, \omega) = R(p{\restriction}A, L, \omega)$ и $\mathrm{Mlt}(p{\restriction}A, L, \omega) = 1$; см. [8]). Как и в случае $\varkappa_T > \omega$, индукцией по $\alpha < \omega$ определим элементы $a_\alpha \in M$ такие, что a_α реализует тип $p{\restriction}(A \cup \{a_\beta \colon \beta < \alpha\})$. Тогда множество $I = \{a_\alpha \colon \alpha < \omega\}$ неразличимо и $p = \mathrm{Av}(I, M)$. Лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4. *Пусть теория T стабильна и $\lambda > |T|$ либо $\lambda(T) < 2^\lambda$. Тогда $\lambda \geqslant \varkappa_T$.*

Доказательство. Если $\lambda > |T|$, то $\lambda \geqslant |T|^+ \geqslant k(T) + \omega_1 \geqslant \varkappa_T$. Пусть $\lambda(T) = \mu < 2^\lambda$. Если $\lambda = \omega$, то в силу [8, теорема 3.2, с. 42] теория T тотально трансцендентна и поэтому $\lambda \geqslant \varkappa_T$. Пусть $\lambda \geqslant \omega_1$. Если $\lambda < k(T)$, то $\mu^{<k(T)} \geqslant \mu^\lambda \geqslant 2^\lambda > \mu$, что противоречит равенству $\mu^{<k(T)} = \mu$, верному для μ-стабильной теории T. Поэтому $\lambda \geqslant k(T)$. Следовательно, $\lambda \geqslant \varkappa_T$. Лемма 3.4 доказана.

Теорема 3.5. *Пусть теория T стабильна и $\lambda > |T|$ либо $\lambda(T) < 2^\lambda$. Если $\varkappa > \lambda$, то следующие условия эквивалентны:*

1) *модель $\mathfrak{M}$ $\varkappa$-однородна;*
2) *модель $\mathfrak{M}$ λ-однородна и $|I| \geqslant \varkappa$ для любого максимального бесконечного неразличимого множества $I \subseteq M$.*

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$ Импликация следует из леммы 3.2.

$2 \Rightarrow 1$ Пусть $A \subseteq M$, $|A| < \varkappa$, $a \in M$, $f \colon A \to M$ — элементарное отображение, $p = \mathrm{tp}(a, A)$. Надо доказать, что $f(p)$ реализуется в $\mathfrak{M}$. Пусть $D = D(\mathfrak{M})$. Так как диаграмма D λ-хорошая, по теореме 2.3 существует (D, λ)-простая над A модель $\mathfrak{N}$. В силу (D, λ)-простоты модели $\mathfrak{N}$ над A можно считать, что $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}$, а f можно продолжить до элементарного отображения $h \colon N \to M$. Если $a \in N$, то $h(a)$ реализует $f(p)$ и импликация доказана.

Допустим, что $a \notin N$. Пусть $q = \mathrm{tp}(a, N)$. Так как $D(N \cup \{a\}) \subseteq D(M) = D$, получаем, что q — неизолированный тип из $S_D(N)$. Модель $\mathfrak{N}$ (D, λ)-однородна и по лемме 3.4 $\lambda \geqslant \varkappa_T$. Следовательно, модель $\mathfrak{N}$ $(D, \varkappa_T)$-однородна. По лемме 3.3 $q = \mathrm{Av}(I, N)$ для некоторого бесконечного неразличимого множества $I \subseteq N$. Поэтому $h(q) = \mathrm{Av}(h(I), h(N))$. Расширим $h(I)$ до максимального неразличимого множества $I_1 \subseteq M$. В силу утверждения 2 $|I_1| \geqslant \varkappa$. Так как теория T стабильна, существует множество $I_2 \subseteq I_1$ такое, что $|I_2| \leqslant k(T) + |h(A)|$ и $I_1 - I_2$ неразличимо над $h(A)$. По лемме 3.4 $k(T) \leqslant \varkappa_T \leqslant \lambda < \varkappa$. Кроме того, $|h(A)| = |A| < \varkappa$. Поэтому $|I_2| < \varkappa \leqslant |I_1|$. Так как $\mathrm{Av}(I_1 - I_2, h(A)) = \mathrm{Av}(I_1, h(A)) = \mathrm{Av}(h(I), h(A)) = h(q{\restriction}A) = f(p)$, любой элемент из $I_1 - I_2$ реализует $f(p)$. Теорема 3.5 доказана.

§ 4. О существовании однородных моделей в различных мощностях

Теорема 4.1. *Пусть теория T стабильна и $\lambda > |T|$ либо $\lambda(T) < 2^\lambda$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *для любого $\varkappa$ если теория T $\varkappa$-стабильна, то существует $(D,\varkappa)$-однородная модель мощности $\varkappa$;*
2) *существует (D,λ)-однородная модель мощности больше $\lambda(T)$;*
3) *существуют D-модели $\mathfrak{M} \precneqq \mathfrak{N}$ такие, что модель $\mathfrak{M}$ является (D,λ)-однородной;*
4) *существует (D,λ)-однородная модель, содержащая бесконечное неразличимое множество;*
5) *диаграмма D стабильна.*

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$ Как известно, если теория T стабильна, то существует сколь угодно большое $\varkappa$ такое, что T $\varkappa$-стабильна.

$2 \Rightarrow 4$ Импликация вытекает из следующей леммы.

Лемма 4.2 [8]. *Если теория T $\varkappa$-стабильна, то любое множество мощности больше, чем $\varkappa$, содержит неразличимое множество мощности больше, чем $\varkappa$.*

$4 \Rightarrow 5$ Пусть $\varkappa > \lambda$ и теория T $\varkappa$-стабильна. Тогда $|S_D(A)| \leqslant |S(A)| \leqslant \varkappa$ для любого множества A мощности $|A| \leqslant \varkappa$. Осталось доказать, что диаграмма D $\varkappa^+$-хорошая. Пусть модель $\mathfrak{M}$ есть (D,λ)-однородная модель, содержащая бесконечное неразличимое множество. По лемме 3.2(2) $|M| \geqslant \lambda$, поэтому диаграмма D λ-хорошая. Индукцией по $\alpha < \varkappa^+$ построим элементарную цепь $\{\mathfrak{M}_\alpha\colon \alpha < \varkappa^+\}$ такую, что модель $\mathfrak{M}_\alpha$ (D,λ)-однородна и для любого бесконечного неразличимого множества $I \subseteq M_\alpha$ тип $\mathrm{Av}(I, M_\alpha)$ реализуется в $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$. Полагаем $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$. Пусть для предельного $\delta < \varkappa^+$ уже построены D-модели $\mathfrak{M}_\alpha$, $\alpha < \delta$. Тогда $\bigcup_{\alpha<\delta} M_\alpha$ есть D-множество. По теореме 2.3 существует (D,λ)-однородная модель $\mathfrak{M}_\delta$ такая, что $\bigcup_{\alpha<\delta} M_\alpha \subseteq M_\delta$.

Допустим, что модель $\mathfrak{M}_\alpha$ построена. Построим $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$. Обозначим через $\{I_\beta\colon \beta < \gamma\}$ перечисление всех максимальных бесконечных неразличимых множеств в $\mathfrak{M}_\alpha$. Модель $\mathfrak{M}_\alpha$ λ-однородна и по лемме 3.4 $\lambda \geqslant \varkappa_T$. Поэтому в силу леммы 3.2(1) $|I_\beta| \geqslant \varkappa_T$ для всех $\beta < \gamma$. Индукцией по $\beta < \gamma$ определим элементы a_β следующим образом. Пусть a_β реализует тип $p_\beta = \mathrm{Av}(I_\beta, M_\alpha \cup \{a_\delta\colon \delta < \beta\})$. Так как $|I_\beta| \geqslant \varkappa_T$ и по индуктивному предположению $M_\alpha \cup \{a_\delta\colon \delta < \beta\}$ есть D-множество, получаем, что по лемме 3.1 p_β есть D-тип. Поэтому $M_\alpha \cup \{a_\delta\colon \delta \leqslant \beta\}$ есть D-множество. Таким образом, $M_\alpha \cup \{a_\beta\colon \beta < \gamma\}$ — D-множество. По теореме 2.3 существует (D,λ)-однородная модель $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$ такая, что

$$M_\alpha \cup \{a_\beta\colon \beta < \gamma\} \subseteq M_{\alpha+1}.$$

Полагаем $\mathfrak{N} = \bigcup_{\alpha<\varkappa^+} \mathfrak{M}_\alpha$. Так как модель $\mathfrak{M}_\alpha$ (D,λ)-однородна для любого $\alpha < \varkappa^+$, модель $\mathfrak{N}$ будет (D,λ)-однородной. Покажем, что модель $\mathfrak{N}$ $(D,\varkappa^+)$-однородна. Пусть I — максимальное бесконечное неразличимое множество в $\mathfrak{N}$. Если $|I| < \varkappa^+$, то $I \subseteq M_\alpha$ для некоторого $\alpha < \varkappa^+$. По построению некоторый элемент $a \in M_{\alpha+1}$ реализует $\mathrm{Av}(I, M_\alpha)$. Но тогда $I \cup \{a\}$ есть неразличимое множество и $a \notin I$, что противоречит максимальности I в $\mathfrak{N}$. Значит, $|I| \geqslant \varkappa^+$ для любого максимального бесконечного неразличимого множества $I \subseteq N$. Так как модель $\mathfrak{N}$ (D, λ)-однородна, по теореме 3.5 модель $\mathfrak{N}$ $(D, \varkappa^+)$-однородна. Поскольку модель $\mathfrak{M}$ (следовательно, и модель $\mathfrak{N}$) содержит бесконечное неразличимое множество, в силу леммы 3.2(2) имеем $|N| \geqslant \varkappa^+$. Итак, диаграмма D $\varkappa^+$-хорошая.

$5 \Rightarrow 1$ Пусть теория T $\varkappa$-стабильна и диаграмма D стабильна. Индукцией по $\alpha < \varkappa$ построим элементарную цепь $\{\mathfrak{M}_\alpha \colon \alpha < \varkappa\}$ такую, что $|M_\alpha| = \varkappa$, $D(\mathfrak{M}_\alpha) = D$ и все типы из $S_D(M_\alpha)$ реализуются в $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$. Пусть $\mathfrak{M}_{-1} = \varnothing$, $\mathfrak{M}_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} \mathfrak{M}_\alpha$ для предельного $\delta < \varkappa$. Допустим, что модель $\mathfrak{M}_\alpha$ построена. Построим модель $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$. Диаграмма D стабильна, поэтому она хорошая в силу [2, теорема 3.4]. Следовательно, существует $(D, \varkappa^+)$-однородная модель $\mathfrak{N}_\alpha$ мощности не меньше, чем $\varkappa$. В силу леммы 1.1 можно считать, что $\mathfrak{M}_\alpha \prec \mathfrak{N}_\alpha$. По лемме 1.2 все типы из $S_D(M_\alpha)$ реализуются в $\mathfrak{N}_\alpha$. Поскольку теория T $\varkappa$-стабильна, нужная нам модель $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$ существует по теореме Левенгейма — Сколема.

Пусть $\mathfrak{M} = \bigcup_{\alpha<\varkappa} \mathfrak{M}_\alpha$. Очевидно, $D(\mathfrak{M}) = D$ и $|M| = \varkappa$. Покажем, что модель $\mathfrak{M}$ однородна. Пусть $A \subseteq M$, $|A| < \varkappa$, $q \in S_D(A)$. Надо доказать, что тип q реализуется в $\mathfrak{M}$. Этот факт очевиден, если $\varkappa$ регулярен. Пусть $\varkappa$ сингулярен. Так как диаграмма D стабильна, в силу [2, теорема 3.3] существует тип $p \in S_D(M)$ такой, что $q \subseteq p$. Теория T стабильна, поэтому существует множество $B \subseteq M$ такое, что $|B| < k(T)$ и тип p не форкуется над B. Отметим, что $k(T) \leqslant \mathrm{cf}(\varkappa)$ (в противном случае $\varkappa^{<k(T)} \geqslant \varkappa^{\mathrm{cf}(\varkappa)} > \varkappa$, что противоречит равенству $\varkappa^{<k(T)} = \varkappa$, справедливому для $\varkappa$-стабильной теория T). Поэтому $B \subseteq M_\alpha$ для некоторого $\alpha < \varkappa$. По построению для каждого $\beta < \varkappa$ существует $a_\beta \in M_{\alpha+\beta+1}$, реализующий $p{\restriction}M_{\alpha+\beta}$. Итак, тип p не форкуется над B и a_β реализует $p{\restriction}(B \cup \{a_\gamma \colon \gamma < \beta\})$, $\beta < \varkappa$. Так как $\varkappa$ сингулярен, имеем $\varkappa > \omega$ и $\varkappa > \mathrm{cf}(\varkappa) \geqslant k(T)$. В силу [8, лемма 2.12, с. 98] тип $p{\restriction}(B \cup \{a_\gamma \colon \gamma < \omega\})$ стационарен, а ввиду [8, лемма 1.10, с. 89] множество $I = \{a_\beta \colon \omega \leqslant \beta < \varkappa\}$ неразличимо и $p = \mathrm{Av}(I, M)$. Поскольку теория T стабильна, существует множество $I_0 \subseteq I$ такое, что $|I_0| \leqslant k(T) + |A| < \varkappa$ и множество $I - I_0$ неразличимо над A. Поэтому любой элемент из $I - I_0$ реализует $p{\restriction}A = q$.

$3 \Rightarrow 4$ Пусть $a \in N - M$. Тогда $\mathrm{tp}(a, M)$ — неизолированный тип из $S_D(M)$. По лемме 3.3 модель $\mathfrak{M}$ содержит бесконечное неразличимое множество.

$5 \Rightarrow 3$ В силу [2, теорема 3.4] стабильная диаграмма D хорошая, поэтому существуют (D, α)-однородная модель $\mathfrak{M}$ и $(D, |M|^+)$-однородная модель $\mathfrak{N}$ такие, что $|N| \geqslant |M|^+$. В силу леммы 1.1 можно считать, что $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$. Так как $|N| > |M|$, имеем $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{N}$. Теорема 4.1 доказана.

Введем следующие обозначения:

$H_T(\lambda)$ — число однородных моделей (теории T) мощности λ,

$H_T^*(\lambda)$ — число однородных моделей мощности λ, содержащих бесконечную неразличимую последовательность.

Отметим, что из стабильности теории T вытекает, что любая неразличимая последовательность является неразличимым множеством (см. [8]).

Следствие 4.3. *Пусть теория T λ-стабильна. Тогда $H_T(\varkappa) = H_T^*(\lambda)$ для любого $\varkappa > \lambda$ такого, что T $\varkappa$-стабильна.*

Доказательство. Пусть $\varkappa > \lambda$ и теория T $\varkappa$-стабильна. Так как для любых D и μ любые две (D, μ)-однородные модели мощности μ изоморфны (см. [1]), теорема 4.1 влечет равенство $H_T^*(\varkappa) = H_T^*(\lambda)$. Поэтому в силу леммы 4.2 $H_T(\varkappa) = H_T^*(\varkappa) = H_T^*(\lambda)$. Следствие 4.3 доказано.

Следствие 4.4. *Если теория T суперстабильна, то для любого $\varkappa > \lambda(T)$ выполняется равенство $H_T(\varkappa) = H_T^*(\lambda(T))$.*

Следствие 4.5. *Если теория T ω-стабильна, то $H_T(\varkappa) = H_T^*(\omega)$ для любого $\varkappa > \omega$.*

§ 5. О числе однородных моделей

В этом параграфе будут получены результаты о числе счетных однородных моделей, содержащих бесконечную неразличимую последовательность. С их помощью делается вывод о числе несчетных однородных моделей ω-стабильных теорий.

Предположим, что теория T счетна. Обозначим через $F_n(T)$ множество всех формул теории T со свободными переменными из множества $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$. В этом параграфе термин «n-тип» означает «полный n-тип», т.е. максимальное совместное множество в $F_n(T)$. Если p — тип, то через $[p]^{x_i \dots x_j}_{x'_i \dots x'_j}$ обозначим тип, который получается из p заменой в каждой формуле $\varphi \in p$ свободных переменных $x_i, \dots, x_j$ на $x'_i, \dots, x'_j$ соответственно.

Обозначим через K^* множество всех (с точностью до изоморфизма) счетных однородных моделей для T, содержащих бесконечную неразличимую последовательность.

Лемма 5.1. *Если $|D(T)| > \omega$, то $H_T^*(\omega) = 2^\omega$.*

Доказательство. Как известно, если $|D(T)| > \omega$, то $|D(T)| = 2^\omega$. Для любого $p \in D(T)$ существует модель $\mathfrak{M} \in K^*$, в которой реализуется тип p. (Последовательно выбираем счетные модели $\mathfrak{M}_0 \prec \mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}$ такие, что модель $\mathfrak{M}_0$ содержит бесконечную неразличимую последовательность, тип p реализуется в $\mathfrak{M}_1$, модель $\mathfrak{M}$ однородна.) Осталось заметить, что в счетной модели реализуется только счетное число типов. Лемма 5.1 доказана.

Лемма 5.2 [9, с. 41]. *Существует счетная однородная модель $\mathfrak{M}$ с диаграммой $D(\mathfrak{M}) = D$ если и только если диаграмма D счетна и выполняются следующие условия:*

1) *если $p \in D$ есть n-тип и $m \leqslant n$, то $p \cap F_m(T) \in D$;*
2) *если $p \in D$ есть n-тип и σ есть перестановка множества $\{0, 1, \dots, n-1\}$, то $[p]^{x_0 \dots x_{n-1}}_{x_{\sigma(0)} \dots x_{\sigma(n-1)}} \in D$;*
3) *если $p \in D$ есть n-тип и $(\exists x_n)\varphi(x_0, \dots, x_n) \in p$, то существует $(n+1)$-тип $q \in D$ такой, что $p \cup \{\varphi(x_0, \dots, x_n)\} \subseteq q$;*

4) *если* $p_0, p_1 \in D$ *такие* $(n+1)$*-типы, что* $p_0 \cap F_n(T) = p_1 \cap F_n(T)$, *то* $p_0 \cup [p_1]^{x_n}_{x_{n+1}} \subseteq p$ *для некоторого* $(n+2)$*-типа* $p \in D$.

Пусть K — некоторое множество попарно не изоморфных однородных моделей (теории T) одинаковой мощности, $p \in D(T)$, $S \subseteq D(T)$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} K[S] &= \{\mathfrak{M} \in K \colon S \cap D(\mathfrak{M}) \neq \varnothing\}, \\ K^+(p) &= \{\mathfrak{M} \in K \colon p \in D(\mathfrak{M})\}, \\ K^-(p) &= \{\mathfrak{M} \in K \colon p \notin D(\mathfrak{M})\}. \end{aligned}$$

Лемма 5.3. *Пусть* $S \subseteq D(T)$, $|S| \leqslant \omega$, $|K[S]| > \omega$. *Тогда существует тип* $p \in S$ *такой, что* $|K^+(p)| > \omega$ *и* $|K^-(p)| > \omega$.

Доказательство. Пусть $L = L^+ \cup L^-$, где

$$L^\varepsilon = \bigcup \{K^\varepsilon(p) \colon p \in S, |K^\varepsilon(p)| \leqslant \omega\}, \qquad \varepsilon \in \{+,-\}.$$

Так как $|S| \leqslant \omega$, имеем $|L| \leqslant \omega$. Поэтому $|K[S] - L| > \omega$. Пусть $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1 \in K[S] - L$, $\mathfrak{M}_0 \not\cong \mathfrak{M}_1$. Модели $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1$ однородны и $|M_0| = |M_1|$, поэтому $D(\mathfrak{M}_0) \neq D(\mathfrak{M}_1)$. Можно считать, что $D(\mathfrak{M}_0) \not\subseteq D(\mathfrak{M}_1)$. Пусть $p \in D(\mathfrak{M}_0) - D(\mathfrak{M}_1)$. Если $|K^+(p)| \leqslant \omega$ или $|K^-(p)| \leqslant \omega$, то $\mathfrak{M}_0 \in L^+$ или $\mathfrak{M}_1 \in L^-$, что противоречит выбору моделей $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$. Следовательно, $|K^+(p)| > \omega$ и $|K^-(p)| > \omega$. Лемма 5.3 доказана.

Отметим, что в лемме 5.3 достаточно предположить, что K есть множество моделей с попарно различными диаграммами.

Введем еще одно обозначение: $\mathrm{ch}_n(I) = \mathrm{tp}(\langle a_0, \dots, a_{n-1}\rangle, \varnothing)$, где $I = \{a_i \colon i < \alpha\}$ — бесконечная неразличимая последовательность и $n < \omega$.

Лемма 5.4. *Пусть модель* $\mathfrak{M}$ ω*-однородна и для любого* $n < \omega$ *существует бесконечная неразличимая последовательность* I_n *такая, что* $p_n = \mathrm{ch}_n(I_n) \in D(\mathfrak{M})$ *и* $p_n \subseteq p_{n+1}$. *Тогда модель* $\mathfrak{M}$ *содержит бесконечную неразличимую последовательность* I *такую, что* $\mathrm{ch}_n(I) = p_n$ *для всех* $n < \omega$.

Доказательство очевидно.

Теорема 5.5. *Если* $H^*_T(\omega) > \omega$, *то* $H^*_T(\omega) = 2^\omega$.

Доказательство. В силу леммы 5.1 можно считать, что $|D(T)| \leqslant \omega$. Для $\eta \in {}^{\omega>}2$ индукцией по $l(\eta)$ будем строить несчетные семейства $K_\eta \subseteq K^*$ и конечные семейства $P_\eta \subseteq D(T)$, удовлетворяющие следующему условию:

(а) $P_\eta \subseteq D(\mathfrak{M})$ для любой модели $\mathfrak{M} \in K_\eta$.

Теорема будет доказана, если будут выполнены следующие условия:

(б) для любого $\tau \in {}^\omega 2$ множество $D_\tau = \bigcup_{n<\omega} P_{\tau \restriction n}$ есть диаграмма некоторой модели из K^*;

(в) если $\tau, \nu \in {}^\omega 2$ и $\tau \neq \nu$, то $D_\tau \neq D_\nu$.

Для каждой модели $\mathfrak{M} \in K^*$ зафиксируем бесконечную неразличимую последовательность $I_{\mathfrak{M}} \subseteq M$. Полагаем $K_{\langle\rangle} = K^*$, $P_{\langle\,\rangle} = \varnothing$. Занумеруем все пары натуральных чисел $\langle i,j\rangle$ натуральными числами так, чтобы каждая пара имела бесконечно много номеров. Пусть K_η и P_η построены (причем $l(\eta) = n$) и выполнено условие (a). Пусть $\langle i_0, j_0\rangle$ — пара с номером n и $P_\eta = \{p_i\colon i < m\}$, $p_i = \{\varphi_{ij}(\bar{x})\colon j < \omega\}$, $p_i \in S_{n_i}(\varnothing)$. Обозначим через Σ_i множество всех перестановок множества $\{0, 1, \ldots, n_i - 1\}$, $i < m$. Если $i_0 \geqslant m$ или $j_0 \geqslant m$, то полагаем $K_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle} = K_\eta$, $P_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle} = P_\eta$, $\varepsilon \in \{0,1\}$. Пусть $i_0, j_0 < m$. Полагаем

$$P^0_\eta = P_\eta \cup \{p_i \cap F_j(T)\colon j < n_i, i < m\} \\ \cup \{[p_i]^{x_0\ldots x_{n_i-1}}_{x_{\sigma(0)}\ldots x_{\sigma(n_i-1)}}\colon \sigma \in \Sigma_i,\ i < m\}. \tag{5.1}$$

Ясно, что $P^0_\eta \subseteq D(\mathfrak{M})$ для любой модели $\mathfrak{M} \in K_\eta$.

Так как $|K_\eta[D(T)]| = |K_\eta| > \omega$ и $|D(T)| \leqslant \omega$, по лемме 5.3 существует тип $p \in D(T)$ такой, что $|K^+_\eta(p)| > \omega$ и $|K^-_\eta(p)| > \omega$. Полагаем

$$K^0_{\eta\hat{}\langle 0\rangle} = K^+_\eta(p), \qquad K^0_{\eta\hat{}\langle 1\rangle} = K^-_\eta(p), \\ P^0_{\eta\hat{}\langle 0\rangle} = P^0_\eta \cup \{p\}, \qquad P^0_{\eta\hat{}\langle 1\rangle} = P^0_\eta. \tag{5.2}$$

Рассмотрим тип p_{i_0} и формулу $\varphi_{i_0j_0}(\bar{x}) \in p_{i_0}$. Можно считать, что $\varphi_{i_0j_0}$ имеет вид $(\exists x_{n_{i_0}})\psi$. Пусть $S_0 = \{q \in S_{n_{i_0}+1}(\varnothing)\colon p_{i_0} \cup \{\psi\} \subseteq q\}$ и $\varepsilon \in \{0,1\}$. Для любой модели $\mathfrak{M} \in K^0_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle}$ по условию (a) имеем $p_{i_0} \in D(\mathfrak{M})$, поэтому по лемме 5.2 существует $q \in D(\mathfrak{M})$ такой, что $p_{i_0} \cup \{\psi\} \subseteq q$. Отсюда следует, что $|K^0_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle}[S_0]| = |K^0_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle}| > \omega$. Так как $|S_0| \leqslant |D(T)| \leqslant \omega$, по лемме 5.3 существует тип $p_\varepsilon \in S_0$ такой, что $|K^{0+}_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle}(p_\varepsilon)| > \omega$. Полагаем

$$K^1_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle} = K^{0+}_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle}(p_\varepsilon), \\ P^1_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle} = P^0_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle} \cup \{p_\varepsilon\}, \quad \varepsilon \in \{0,1\}. \tag{5.3}$$

Рассмотрим типы p_{i_0} и p_{j_0}. Пусть $p_{i_0}, p_{j_0} \in S_{t+1}(\varnothing)$ для некоторого $t < \omega$ и $p_{i_0} \cap F_t(T) = p_{j_0} \cap F_t(T)$ (если эти условия не выполняются, то полагаем $K^2_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle} = K^1_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle}$, $P^2_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle} = P^1_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle}$, $\varepsilon \in \{0,1\}$). Пусть

$$S_1 = \{q \in S_{t+2}(\varnothing)\colon\ p_{i_0} \cup [p_{j_0}]^{x_t}_{x_{t+1}} \subseteq q\}.$$

Аналогично предыдущему существует $q_\varepsilon \in S_1$ такой, что $|K^{1+}_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle}(q_\varepsilon)| > \omega$. Полагаем

$$K^2_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle} = K^{1+}_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle}(q_\varepsilon), \\ P^2_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle} = P^1_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle} \cup \{q_\varepsilon\}, \quad \varepsilon \in \{0,1\}. \tag{5.4}$$

Пусть $S_2 = \{\mathrm{ch}_n(I_{\mathfrak{M}})\colon \mathfrak{M} \in K_\eta\}$. Так как $|K^2_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle}[S_2]| = |K^2_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle}| > \omega$ и $|S_2| \leqslant |D(T)| \leqslant \omega$, по лемме 5.3 существует тип $p^\varepsilon \in S_2$ такой, что $|K^{2+}_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle}(p^\varepsilon)| > \omega$. Полагаем

$$K_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle} = K^{2+}_{\eta\hat{}\langle\varepsilon\rangle}(p^\varepsilon),$$

$$P_{\eta^\frown\langle\varepsilon\rangle} = P^2_{\eta^\frown\langle\varepsilon\rangle}(p^\varepsilon), \quad \varepsilon \in \{0,1\}. \tag{5.5}$$

Ясно, что условие (a) выполняется.

Зафиксируем некоторую нумерацию множества $P_{\eta^\frown\langle\varepsilon\rangle}$, продолжающую нумерацию P_η, $\varepsilon \in \{0,1\}$. Для $\tau \in {}^\omega 2$ положим $D_\tau = \bigcup_{n<\omega} P_{\tau\upharpoonright n}$.

Пусть $\tau, \nu \in {}^\omega 2$ и $\tau \neq \nu$. Тогда для некоторого $\eta \in {}^{\omega>}2$ и $n < \omega$ имеем $\tau\upharpoonright n = \eta^\frown\langle 0\rangle$, $\nu\upharpoonright n = \eta^\frown\langle 1\rangle$ (или наоборот). В силу (5.2) и условия (a) существует $p \in D_\tau - D_\nu$, поэтому $D_\tau \neq D_\nu$. Из (5.1), (5.3), (5.4) следует, что D_τ удовлетворяет условиям 1–4 леммы 5.2, поэтому существует счетная однородная модель $\mathfrak{M}_\tau$ такая, что $D(\mathfrak{M}_\tau) = D_\tau$. В силу (5.5) и условия (a) для любых $n < \omega$ и $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in K_{\tau\upharpoonright n}$ имеем $p_n = \mathrm{ch}_n(I_\mathfrak{M}) = \mathrm{ch}_n(I_\mathfrak{N}) = D_\tau$ и $p_n \subseteq p_{n+1}$. По лемме 5.4 модель $\mathfrak{M}_\tau$ содержит бесконечную неразличимую последовательность, т. е. $\mathfrak{M}_\tau \in K^*$. Теорема 5.5 доказана.

Теорема 5.6. *Пусть теория T ω-стабильна. Если $H_T(\lambda_0) > \omega$ для некоторого $\lambda_0 > \omega$, то $H_T(\lambda) = 2^\omega$ для любого $\lambda \geqslant \omega$.*

Доказательство. По следствию 4.5 $H^*_T(\omega) = H_T(\lambda_0) > \omega$. Еще раз применяя следствие 4.5 и теорему 5.5, получаем $H_T(\lambda) = H^*_T(\omega) = 2^\omega$ для любого $\lambda \geqslant \omega$. Теорема 5.6 доказана.

Если из доказательства теоремы 5.5 убрать все упоминания о неразличимых последовательностях, то получится отличное от приведенного в [10] доказательство формулируемой ниже теоремы (в отличие от [10] здесь не используются результаты об аналитических множествах и о логике $L_{\omega_1\omega}$).

Теорема 5.7 [10]. *Если $H_T(\omega) > \omega$, то $H_T(\omega) = 2^\omega$.*

Лемма 5.8 [11]. *Пусть теория T счетна, суперстабильна и $\mathfrak{M}$ — счетная модель для T, содержащая бесконечное неразличимое множество. Если модель $\mathfrak{M}$ опускает тип $p \in S^n(A)$, $A \subseteq M$, $|A| < \omega$, то существует несчетная модель $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$, опускающая p.*

Лемма 5.9 [12]. *Пусть теория T счетна, суперстабильна и все ее несчетные модели являются ω-насыщенными. Тогда теория T категорична в ω или ω_1.*

Простое рассуждение с применением теоремы Левенгейма — Сколема показывает, что условие «все несчетные модели ω-насыщенны (ω-однородны)» равносильно условию «все модели мощности ω_1 являются ω-насыщенными (ω-однородными)».

Теорема 5.10. *Пусть теория T счетна, суперстабильна и все ее несчетные модели ω-однородны и содержат бесконечное неразличимое множество. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *теория T категорична в ω или ω_1;*
2) $H^*_T(\omega) = 1$;
3) $H^*_T(\omega) < \omega$.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$ Импликация очевидна, если теория T ω-категорична. Пусть теория T ω_1-категорична. Если $H^*_T(\omega) > 1$, то существуют неизоморфные счетные однородные модели $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$, содержащие бесконечное неразличимое множество. Тогда $D(\mathfrak{M}_0) \neq D(\mathfrak{M}_1)$. Можно считать, что существует тип $p \in D(\mathfrak{M}_0) - D(\mathfrak{M}_1)$. По лемме 5.8 существуют модели $\mathfrak{N}_0, \mathfrak{N}_1$ мощности ω_1 такие, что $p \in D(\mathfrak{N}_0) - D(\mathfrak{N}_1)$. Тогда модели $\mathfrak{N}_0$ и $\mathfrak{N}_1$ не изоморфны, что противоречит ω_1-категоричности T.

$2 \Rightarrow 3$ Импликация очевидна.

$3 \Rightarrow 1$ Заметим, что любая счетная модель теории T, содержащая бесконечное неразличимое множество, однородна. Действительно, неоднородная модель $\mathfrak{M}$ опускает некоторый тип $p \in S_{D(\mathfrak{M})}(A)$, где $A \subseteq M$, $|A| < \omega$. По лемме 5.8 существует несчетная модель $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$, опускающая p. Так как $D(\mathfrak{M}) \subseteq D(\mathfrak{N})$, имеем $p \in S_{D(\mathfrak{N})}(A)$. Поэтому модель $\mathfrak{N}$ не ω-однородна, что противоречит условию теоремы.

Пусть $\mathfrak{M}_0, \ldots, \mathfrak{M}_{n-1}$ — все (с точностью до изоморфизма) счетные однородные ненасыщенные модели для T, содержащие бесконечное неразличимое множество. Тогда $D(\mathfrak{M}_i) \neq D(T)$, $i < n$. Пусть $p_i \in D(T) - D(\mathfrak{M}_i)$, $\bar{a}_i$ реализует p_i, $\bar{a} = \bar{a}_0{}^\frown \cdots {}^\frown \bar{a}_{n-1}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная счетная модель для T, содержащая бесконечное неразличимое множество и реализующая $\mathrm{tp}(\bar{a})$. Тогда $\mathfrak{M} \not\cong \mathfrak{M}_i$ для всех $i < n$. Как было отмечено, модель $\mathfrak{M}$ однородная и, следовательно, насыщенная.

Итак, любая счетная модель теории $T(\bar{a}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \bar{a})$, содержащая бесконечное неразличимое множество, насыщенная. Допустим, что $T(\bar{a})$ имеет несчетную не ω-насыщенную модель $\mathfrak{N}$. По условию теоремы модель $\mathfrak{N}$ содержит бесконечное неразличимое множество, поэтому согласно теореме Левенгейма — Сколема существует счетная не ω-насыщенная модель $\mathfrak{N}_0 \prec \mathfrak{N}$, содержащая бесконечное неразличимое множество; противоречие.

Таким образом, любая несчетная модель для $T(\bar{a})$ является ω-насыщенной. Так как теория T суперстабильна, теория $T(\bar{a})$ также суперстабильна. По лемме 5.9 теория $T(\bar{a})$ категорична в ω или ω_1. Если теория $T(\bar{a})$ ω-категорична, то по теореме Рыль — Нардзевского в теории T имеем $|S^m(\bar{a})| < \omega$ для всех $m < \omega$. Но тогда $|S^m(\varnothing)| < \omega$ для всех $m < \omega$ и по теореме Рыль — Нардзевского теория T ω-категорична. Если теория $T(\bar{a})$ ω_1-категорична, то теория $T(\bar{a})$ ω-стабильна и одноразмерна. Но тогда теория T ω-стабильна и одноразмерна, поэтому теория T ω_1-категорична. Теорема 5.10 доказана.

Следствие 5.11. *Пусть теория T ω-стабильна и для некоторого λ все модели теории T мощности λ являются ω-однородными. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *теория T категорична в ω или ω_1;*
2) *$H_T(\varkappa) = 1$ для всех $\varkappa > \omega$;*
3) *$H_T(\varkappa_0) < \omega$ для некоторого $\varkappa_0 \geqslant \omega$.*

Кроме того, если $H_T(\omega) < \omega$, то теория T ω-категорична.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$ Пусть $\varkappa > \omega$. Ввиду ω-стабильности теория T имеет насыщенную модель мощности $\varkappa$ (см. [8]). Значит, $H_T(\varkappa) \geqslant 1$. Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ — однородные модели мощности $\varkappa$ для T. Если теория T ω_1-категорична, то $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$. Если теория T ω-категорична, то все типы из $D(T)$ главные. Тогда $D(\mathfrak{M}) = D(T) = D(\mathfrak{N})$. Поэтому $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$. Следовательно, $H_T(\varkappa) = 1$.

$2 \Rightarrow 3$ Импликация очевидна.

$3 \Rightarrow 1$ В силу [13, следствие 6.2] все несчетные модели теории T ω-однородны. По лемме 4.2 все несчетные модели теории T содержат бесконечное неразличимое множество. Если $\varkappa_0 = \omega$, то $H_T^*(\omega) \leqslant H_T(\varkappa_0) < \omega$. Если $\varkappa_0 > \omega$, то по следствию 4.5 $H_T^* = H_T(\varkappa_0) < \omega$. Остается применить теорему 5.10.

Итак, эквивалентность условий 1–3 доказана. Пусть $H_T(\omega) < \omega$. Ввиду доказанного теория T категорична в ω или ω_1. Если теория T ω_1-категорична, то все счетные модели для T однородны и T имеет либо одну, либо бесконечное число счетных моделей (см. [14]). Поэтому условие $H_T(\omega) < \omega$ влечет ω-категоричность T. Следствие 5.11 доказано.

Следствие 5.12. *Пусть теория T ω-стабильна и для некоторого $\lambda \geqslant \omega$ все модели для T мощности λ являются ω-однородными. Тогда функция H_T может быть только одной из следующих:*

$$H_T(\varkappa) = 1 \text{ для всех } \varkappa > \omega;$$
$$H_T(\varkappa) = \omega \text{ для всех } \varkappa > \omega;$$
$$H_T(\varkappa) = 2^\omega \text{ для всех } \varkappa > \omega.$$

Доказательство вытекает из теоремы 5.6 и следствия 5.11.

§ 6. Об абсолютно однородных моделях

Определение 6.1. Модель $\mathfrak{M}$ называется *абсолютно однородной*, если она $|M|^+$-однородна.

Обозначим через $\mathcal{K}(D)$ категорию, объектами которой являются D-множества, а морфизмами — элементарные отображения.

Предложение 6.1. *Для объекта $\mathfrak{M}$ категории $\mathcal{K}(D)$ следующие условия эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{M}$ — инъективный объект;*
2) *$\mathfrak{M}$ — абсолютно однородная модель.*

Доказательство. Напомним, что объект A некоторой категории K называется *инъективным*, если любая диаграмма может быть дополнена до коммутативной диаграммы указанным здесь способом:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[dl, dashed] \\ A & \end{tikzcd}$$

Теперь импликация 1-2 очевидна, а импликация 2-1 следует из леммы 1.1. Предложение 6.1 доказано.

Теперь импликация $1 \Rightarrow 2$ очевидна, а импликация $2 \Rightarrow 1$ следует из леммы 1.1. Предложение 6.1 доказано.

Теорема 6.2. *Пусть теория T стабильна и $\lambda > |T|$ либо $\lambda(T) < 2^\lambda$. Если $\mathfrak{M} \models T$, то следующие условия эквивалентны:*

1) *модель $\mathfrak{M}$ абсолютно однородна;*
2) *модель $\mathfrak{M}$ λ-однородна и не существует модели $\mathfrak{N} \succneqq \mathfrak{M}$ такой, что $D(\mathfrak{N}) = D(\mathfrak{M})$;*

3) *модель* $\mathfrak{M}$ λ*-однородна и не существует однородной модели* $\mathfrak{N} \supsetneq \mathfrak{M}$ *такой, что* $D(\mathfrak{N}) = D(\mathfrak{M})$;
4) *модель* $\mathfrak{M}$ λ*-однородна и не содержит бесконечных неразличимых множеств.*

Доказательство.

$1 \Rightarrow 4$ Если модель $\mathfrak{M}$ $|M|^+$-однородна и содержит бесконечное неразличимое множество, то по лемме 3.2(2) $|M| \geqslant |M|^+$; противоречие.

$4 \Rightarrow 1$ Импликация следует из теоремы 3.5.

$2 \Rightarrow 3$ Импликация очевидна.

$3 \Rightarrow 4$ Допустим, что модель $\mathfrak{M}$ содержит бесконечное неразличимое множество. Пусть $\varkappa > |M|$ и теория T $\varkappa$-стабильна. По теореме 4.1 существует $(D(\mathfrak{M}), \varkappa)$-однородная модель $\mathfrak{N}$ мощности $\varkappa$. В силу леммы 1.1 можно считать, что $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$. Так как $|M| < |N|$, имеем $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{N}$.

$4 \Rightarrow 2$ Пусть $\mathfrak{N} \supsetneq \mathfrak{M}$, $D(\mathfrak{N}) = D(\mathfrak{M})$, $a \in N - M$. Очевидно, что $\mathrm{tp}(a, M)$ — неизолированный тип из $S_{D(\mathfrak{M})}(M)$. По лемме 3.4 $\lambda \geqslant \varkappa_T$ и потому модель $\mathfrak{M}$ $\varkappa_T$-однородна. По лемме 3.3 модель $\mathfrak{M}$ содержит бесконечное неразличимое множество. Теорема 6.2 доказана.

Следствие 6.3. *Если теория T стабильна и модель $\mathfrak{M}$ абсолютно однородна, то* $|M| \leqslant 2^{|T|}$.

Доказательство вытекает из теоремы 6.2, леммы 4.2 и из того факта, что если теория T стабильна, то она $2^{|T|}$-стабильна.

Следствие 6.4. *Пусть теория T стабильна и либо $\lambda > |T|$, либо $\lambda(T) < 2^\lambda$. Тогда, если $\mathfrak{M}$ — абсолютно однородная модель для T, то любая λ-однородная элементарная подмодель в $\mathfrak{M}$ является абсолютно однородной.*

Доказательство вытекает из эквивалентности условий 1 и 4 теоремы 6.2.

В работе [15] была сформулирована гипотеза: если модель $\mathfrak{M}$ абсолютно однородна, то $|M| \leqslant 2^{|T|}$. Согласно следствию 6.3 гипотеза подтверждается для стабильных теорий. В работе [16] доказано, что в общем случае гипотеза не верна.

Определение 6.2 [3]. Модель $\mathfrak{M}$ называется *гипероднородной*, если любой изоморфизм между ее подсистемами можно продолжить до автоморфизма модели $\mathfrak{M}$.

Ясно, что гипероднородность влечет абсолютную однородность. В работе [3, с. 29] был поставлен вопрос: влечет ли существование гипероднородной модели некоторой теории существование других гипероднородных моделей этой теории?

Предложение 6.5. *Существует теория T, имеющая только одну (с точностью до изоморфизма) гипероднородную модель.*

Доказательство. Язык теории T содержит бинарный предикатный символ E и константные символы c_n, $n < \omega$. Аксиомы теории T утверждают, что E — отношение эквивалентности и для любого $n < \omega$ E-класс элемента c_n содержит ровно $n + 1$ элементов. Ясно, что теория T имеет модель $\mathfrak{M}$, в которой каждый E-класс конечен и содержит константу. Поэтому нетрудно понять, что $\mathfrak{M}$ гипероднородна. Пусть $\mathfrak{N} \models T$, $\mathfrak{N} \not\cong \mathfrak{M}$. Тогда в $\mathfrak{N}$ есть бесконечный E-класс A, не содержащий констант. Пусть $a \in A$, g — биекция из $(A - \{a\}) \cup \{c_n^{\mathfrak{N}}\colon n < \omega\}$ на $A \cup \{c_n^{\mathfrak{N}}\colon n < \omega\}$, тождественная на константах. Тогда g — изоморфизм подсистем модели $\mathfrak{N}$, который не продолжается до автоморфизма. Поэтому модель $\mathfrak{N}$ не гипероднородна.

Итак, $\mathfrak{M}$ — единственная гипероднородная модель теории T. Можно построить теорию T' конечного языка, имеющую единственную гипероднородную модель. Действительно, определим на M функцию f, полагая $f(c_0^{\mathfrak{M}}) = c_0^{\mathfrak{M}}$ и $f(a) = c_n^{\mathfrak{M}}$ для любого $a \in M$ такого, что $\mathfrak{M} \models E(a, c_{n+1})$, $n < \omega$. Полагаем $T' = \mathrm{Th}(\mathfrak{M}')$, где $\mathfrak{M}'$ есть обеднение модели $(\mathfrak{M}, f)$ до языка $\{E, f\}$. Нетрудно понять, что $\mathfrak{M}'$ будет единственной гипероднородной моделью для T'. Предложение 6.5 доказано.

Предложение 6.6. *Пусть теория T стабильна и допускает элиминацию кванторов. Допустим, что либо $\lambda > |T|$, либо $\lambda(T) < 2^{\lambda}$. Тогда, если $\mathfrak{M}$ — гипероднородная модель для T, то любая λ-однородная элементарная подмодель модели $\mathfrak{M}$ является гипероднородной.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}$ и модель $\mathfrak{N}$ λ-однородна. Так как $\mathfrak{M}$ гипероднородна, модель $\mathfrak{M}$ абсолютно однородна. По следствию 6.4 модель $\mathfrak{N}$ абсолютно однородна. Так как теория T допускает элиминацию кванторов, модель $\mathfrak{N}$ гипероднородна. Предложение 6.6 доказано.

Следующее предложение показывает, что в предложении 6.6 условия, наложенные на λ, в общем случае нельзя заменить условием $\lambda = |T|$.

Предложение 6.7. *Существует счетная суперстабильная теория T_0 такая, что*

1) *теория T_0 допускает элиминацию кванторов;*
2) *теория T_0 имеет гипероднородную модель $\mathfrak{M}$ мощности 2^{ω};*
3) *если модель $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}$, то модель $\mathfrak{N}$ ω-однородна;*
4) *если $\mathfrak{N} \models T_0$ и $|N| < 2^{\omega}$, то модель $\mathfrak{N}$ не гипероднородна.*

Доказательство. Языком теории T_0 будет $L = \{E_i\colon i < \omega\}$, где E_i — бинарные предикатные символы. Определим модель $\mathfrak{M}$ языка L следующим образом. Пусть $M = {}^{\omega}2$. Для $a, b \in {}^{\omega}2$ полагаем

$$\mathfrak{M} \models E_i(a, b) \iff a{\restriction}i = b{\restriction}i.$$

Пусть $T_0 = \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$. Хорошо известно, что теория T_0 суперстабильна и допускает элиминацию кванторов. Очевидно, $|M| = 2^{\omega}$. Покажем, что модель $\mathfrak{M}$ гипероднородна. В силу элиминации кванторов достаточно доказать, что $\mathfrak{M}$ абсолютно однородна. Пусть $A \subseteq M$, $a \in M$, $f\colon A \to M$ — элементарное отображение. Надо найти элемент $b \in M$ такой, что $\mathrm{tp}(a, A) = \mathrm{tp}(b, f(A))$. Если $a \in A$, то нечего искать. Пусть $a \notin A$ и $A = \{a_\alpha\colon \alpha < \alpha_0 \leqslant 2^{\omega}\}$. Для каждого $\alpha < \alpha_0$ существует $m_\alpha < \omega$ такое, что $a_\alpha{\restriction}m_\alpha = a{\restriction}m_\alpha$ и $a_\alpha{\restriction}(m_\alpha + 1) \neq a{\restriction}(m_\alpha + 1)$. В силу элементарности f для каждого $\alpha < \alpha_0$ существует $b_\alpha \in M$ такой, что $f(a_\alpha){\restriction}m_\alpha = b_\alpha{\restriction}m_\alpha$ и $f(a_\alpha){\restriction}(m_\alpha+1) \neq b_\alpha{\restriction}(m_\alpha+1)$. Если $m_\alpha \leqslant m_\beta$, то $a_\alpha{\restriction}m_\alpha = a{\restriction}m_\alpha = a_\beta{\restriction}m_\alpha$, поэтому $b_\alpha{\restriction}m_\alpha = f(a_\alpha){\restriction}m_\alpha = f(a_\beta){\restriction}m_\alpha = b_\beta{\restriction}m_\alpha$. Значит, существует

$b \in {}^{\omega}2$ такой, что $\bigcup_{\alpha<\alpha_0}(b_\alpha{\restriction}m_\alpha) \subseteq b$. Так как $M = {}^{\omega}2$, имеем $b \in M$. Из соотношений

$$f(a_\alpha){\restriction}m_\alpha = b{\restriction}m_\alpha,$$
$$f(a_\alpha){\restriction}(m_\alpha + 1) \neq b{\restriction}(m_\alpha + 1)$$

в силу элиминации кванторов выводим, что $\mathrm{tp}(a, A) = \mathrm{tp}(b, f(A))$.

Итак, модель $\mathfrak{M}$ гипероднородна. Аналогичное рассуждение показывает, что если $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}$, то модель $\mathfrak{N}$ ω-однородна. (Заменим модель $\mathfrak{M}$ на модель $\mathfrak{N}$ и положим $\alpha_0 < \omega$. Тогда $b' = \bigcup_{\alpha<\alpha_0}(b_\alpha{\restriction}m_\alpha) \in {}^{\omega>}2$ и потому существует $b \in N$ такой, что $b' \subseteq b$).

Пусть $\mathfrak{N} \models T_0$, $|N| < 2^\omega$. Покажем, что модель $\mathfrak{N}$ не гипероднородна. Пусть S — множество всех типов вида $\{E_n(x, a_n)\colon n < \omega\}$, где $\{a_n\colon n < \omega\} \subseteq N$, и

$$\mathfrak{N} \models E_n(a_n, a_{n+1})\&\neg E_{n+1}(a_n, a_{n+1}) \tag{6.1}$$

для всех $n < \omega$. Так как $|S| = 2^\omega$ и $|N| < 2^\omega$, модель $\mathfrak{N}$ опускает некоторый тип $\{E_n(x, a_n)\colon n < \omega\} \in S$. Пусть $b \in N$. Индукцией по $n < \omega$ определим элементы $b_n \in N$ такие, что $\mathfrak{N} \models E_n(b, b_n)\&\neg E_{n+1}(b, b_n)$ и

$$\mathfrak{N} \models E_n(b_n, b_{n+1})\&\neg E_{n+1}(b_n, b_{n+1}). \tag{6.2}$$

Это можно сделать, так как $\mathfrak{N} \models T_0$. Поскольку $E_j^{\mathfrak{N}} \subseteq E_i^{\mathfrak{N}}$ для $i < j < \omega$, в силу (6.1), (6.2) отображение $f\colon b_n \mapsto a_n$, $n < \omega$, изоморфное. Однако f не продолжается до автоморфизма модели $\mathfrak{N}$, так как тип $\{E_n(x, b_n)\colon n < \omega\}$ реализуется в $\mathfrak{N}$ (как элемент b), а $\{E_n(x, a_n)\colon n < \omega\}$ опускается. Значит, модель $\mathfrak{N}$ не гипероднородна. Предложение 6.7 доказано.

В [3, с. 29] отмечено, что М. Морли построил пример теории в конечном языке, которая имеет гипероднородную модель мощности 2^ω и не имеет счетных гипероднородных моделей. Однако этот пример не приводится и неизвестно, опубликован ли он. Поэтому мы построим свой пример такой теории.

Предложение 6.8. *Существует теория T_1 в конечном языке, которая имеет гипероднородную модель мощности 2^ω и не имеет гипероднородных моделей меньшей мощности.*

Доказательство. Положим $T_1 = \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M} = (M, \leqslant, \wedge, f, c)$ определяется следующим образом:

$M = {}^{\omega}2 \cup {}^{\omega>}2$,
$\leqslant\, = \{\langle a, b\rangle\colon a, b \in M,\ a \subseteq b\}$,
$\wedge$ — операция точной нижней грани,
$$f(b) = \begin{cases} b, & \text{если } b \in {}^{\omega}2 \cup \{c\}, \\ b{\restriction}n, & \text{если } b \in {}^{n+1}2,\ n < \omega, \end{cases}$$
c — наименьший элемент в $\mathfrak{M}$.

Мы не будем приводить доказательство того, что модель $\mathfrak{M}$ гипероднородна, а теория T_1 не имеет гипероднородных моделей мощности меньше, чем 2^ω. Заметим только, что при доказательстве применяются те же идеи, что и в предложении 6.7.

Предложение 6.8 доказано.

Следующее предложение показывает, что условия на λ в теореме 6.2, вообще говоря, нельзя заменить условием $\lambda = |T|$.

Предложение 6.9. *Существует счетная суперстабильная теория T_0 и счетная однородная модель $\mathfrak{M}_0 \models T_0$ такая, что*

1) *модель $\mathfrak{M}_0$ не содержит бесконечных неразличимых множеств;*
2) *модель $\mathfrak{M}_0$ не является абсолютно однородной.*

Доказательство. Пусть T_0 — теория, а $\mathfrak{M}$ — ее гипероднородная модель, построенные в предложении 6.7. Предположим, что $\mathfrak{M}_0 \prec \mathfrak{M}$, $|M_0| = \omega$. По предложению 6.7 модель $\mathfrak{M}_0$ однородна, но не гипероднородна. Так как теория T_0 допускает элиминацию кванторов, модель $\mathfrak{M}_0$ не абсолютно однородна. Покажем, что модель $\mathfrak{M}$ (а следовательно и $\mathfrak{M}_0$) не содержит бесконечных неразличимых множеств. Действительно, пусть $\{a_n\colon n < \omega\}$ — неразличимое множество в $\mathfrak{M}$. Так как $a_0 \neq a_1$, имеем $a_0{\restriction}m \neq a_1{\restriction}m$ для некоторого $m < \omega$, т.е. $\mathfrak{M} \models \neg E_m(a_0, a_1)$. В силу неразличимости $\mathfrak{M} \models \neg E_m(a_i, a_j)$ для всех $i < j < \omega$. Это противоречит тому, что E_m есть отношение эквивалентности с конечным числом (а именно, 2^m) классов эквивалентности. Предложение 6.9 доказано.

§ 7. D-насыщенные модели

В работе [4] было введено понятие D-насыщенной модели. В этом параграфе будут получены некоторые результаты о существовании D-насыщенных моделей в различных мощностях для стабильных теорий.

Для типа p обозначим через $p(\mathfrak{M})$ множество всех элементов из $\mathfrak{M}$, реализующих p.

Определение 7.1. Модель $\mathfrak{M}$ называется *D-насыщенной*, если $D(\mathfrak{M}) = D$ и $|p(\mathfrak{M})| = |M|$ для любого неалгебраического $p \in S_D(A)$ и любого $A \subseteq M$, $|A| < |M|$.

Очевидно, что любая насыщенная модель теории T является $D(T)$-насыщенной, а любая D-насыщенная модель является однородной.

Обозначим через $\operatorname{acl}(A)$ алгебраическое замыкание множества A.

Лемма 7.1. *Пусть теория T стабильна и $\mathfrak{M}$ — D-насыщенная модель мощности $\lambda > |T|$. Тогда $\mathfrak{M}$ содержит бесконечное неразличимое множество. Более того, если $A \subseteq M$, $|A| < \lambda$ и p — неалгебраический тип из $S_D(A)$, то существует неразличимое множество $I \subseteq p(\mathfrak{M})$ мощности λ.*

Доказательство. Пусть $A \subseteq M$, $|A| < \lambda$. Проверим, что в $S_D(A)$ существуют неалгебраические типы. Имеем $|\operatorname{acl}(A)| \leqslant |T|+|A| < \lambda$. Пусть $a \in M - \operatorname{acl}(A)$. Тогда $\operatorname{tp}(a, A)$ — неалгебраический тип из $S_D(A)$.

Пусть p — неалгебраический тип из $S_D(A)$. Покажем, что существует неалгебраический тип $q \in S_D(M)$ такой, что $p \subseteq q$. Положим $M = A \cup \{a_\alpha\colon \alpha < \lambda\}$, $A_\alpha = A \cup \{a_\beta\colon \beta < \alpha\}$. Индукцией по $\alpha < \lambda$ определим неалгебраические типы $p_\alpha \in S_D(A_\alpha)$ такие, что $p_\alpha \subseteq p_\beta$ для всех $\alpha <$

$\beta < \lambda$. Полагаем $p_0 = p$. Пусть p_α определен. Так как модель $\mathfrak{M}$ D-насыщенная, имеем $|p_\alpha(\mathfrak{M})| = \lambda$. В силу соотношения

$$|\mathrm{acl}(A_{\alpha+1})| \leqslant |T| + |A_{\alpha+1}| < \lambda$$

существует $a_\alpha \in p_\alpha(\mathfrak{M}) - \mathrm{acl}(A_{\alpha+1})$. Полагаем $p_{\alpha+1} = \mathrm{tp}(a_\alpha, A_{\alpha+1})$. Очевидно, что $p_\alpha \subseteq p_{\alpha+1} \in S_D(A_{\alpha+1})$ и тип $p_{\alpha+1}$ неалгебраический.

Для предельного $\delta < \lambda$ полагаем $p_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} p_\alpha$. Так как $p_\alpha \in S_D(A_\alpha)$ для всех $\alpha < \delta$, имеем $p_\delta \in S_D(A_\delta)$. Тип p_α неалгебраический для любого $\alpha < \delta$, следовательно, тип p_α не содержит алгебраических формул. Но тогда p_δ не содержит алгебраических формул, поэтому p_δ неалгебраический.

Теперь ясно, что $q = \bigcup_{\alpha<\lambda} p_\alpha$ — искомый неалгебраический тип из $S_D(M)$. Теория T стабильна, поэтому существует $B \subseteq M$ такое, что тип q не форкуется над B и $|B| < k(T) \leqslant |T|^+ \leqslant \lambda$. Индукцией по $\alpha < \lambda$ определим элементы $b_\alpha \in M$ такие, что b_α реализует $q_\alpha = q\restriction(A \cup B \cup \{b_\beta\colon \beta < \alpha\})$. Это можно сделать, поскольку q_α есть D-тип и модель $\mathfrak{M}$ D-насыщенная. Так как тип q_ω стационарен, множество $I = \{b_\beta\colon \omega \leqslant \beta < \lambda\}$ неразличимое. В силу равенства $p = q\restriction A$, имеем $I \subseteq p(\mathfrak{M})$. Лемма 7.1 доказана.

В этом параграфе нам понадобится тот факт, что (D,λ)-простые модели, о которых идет речь в теореме 2.3, являются $(D,\lambda,1)$-простыми. Напомним определение из [2]. Модель $\mathfrak{N}$ называется $(D,\lambda,1)$-*простой над* A, если $\mathfrak{N}$ (D,λ)-однородна и $N = A \cup \{a_\alpha\colon \alpha < \alpha_0\}$, где тип $p_\alpha = \mathrm{tp}(a_\alpha, A \cup \{a_\beta\colon \beta < \alpha\})$ $(D,\lambda,1)$-изолирован для всех $\alpha < \alpha_0$, т.е. существует множество $B_\alpha \subseteq A \cup \{a_\beta\colon \beta < \alpha\}$, $|B_\alpha| < \lambda$, такое, что для любого $C \subseteq A \cup \{a_\beta\colon \beta < \alpha\}$, тип $p_\alpha\restriction B_\alpha$ имеет единственное расширение в $S_D(B_\alpha \cup C)$.

Теорема 7.2. *Пусть теория T стабильна и любое множество в T алгебраически замкнуто. Пусть T имеет D-насыщенную модель $\mathfrak{M}$ мощности больше, чем $|T|$. Тогда для любого $\varkappa$ если T $\varkappa$-стабильна, то существует D-насыщенная модель мощности $\varkappa$.*

Доказательство. Пусть теория T $\varkappa$-стабильна. По лемме 7.1 модель $\mathfrak{M}$ содержит бесконечное неразличимое множество. Поэтому по теореме 4.1 существует $(D,\varkappa)$-однородная модель $\mathfrak{N}$ мощности $\varkappa$. Покажем, что модель $\mathfrak{N}$ D-насыщенная. Пусть $A \subseteq N$, $|A| < \varkappa$, p — неалгебраический тип из $S_D(A)$. Надо доказать, что $|p(\mathfrak{N})| = \varkappa$.

Допустим, что $\varkappa \leqslant |M|$. Тогда по лемме 1.1 существует элементарное отображение $f\colon A \to M$. Так как модель $\mathfrak{M}$ D-насыщенная, имеем $|f(p)(\mathfrak{M})| = |M| \geqslant \varkappa$. Пусть $B \subseteq f(p)(\mathfrak{M})$, $|B| = \varkappa$. По лемме 1.1 f^{-1} можно продолжить до элементарного отображения $g\colon f(A) \cup B \to N$. Тогда $g(B) \subseteq p(\mathfrak{N})$ и, следовательно, $|p(\mathfrak{N})| \geqslant |g(B)| \geqslant \varkappa$.

Пусть $\varkappa > |M|$, $\lambda = |T|^+$. По теореме 2.3 существует $(D,\lambda,1)$-простая над A модель $\mathfrak{N}_0$. Можно считать, что $\mathfrak{N}_0 \prec \mathfrak{N}$. Пусть $N_0 = A \cup \{a_\alpha\colon \alpha < \alpha_0\}$, где тип $p_\alpha = \mathrm{tp}(a_\alpha, A \cup \{a_\beta\colon \beta < \alpha\})$ $(D,\lambda,1)$-изолирован, $\alpha < \alpha_0$. Допустим, что некоторый элемент $a \in N_0$ реализует p. Так как тип p неалгебраический, имеем $a \notin A$. Таким образом, $a = a_\alpha$ для некоторого $\alpha < \alpha_0$ и, следовательно, $p \subseteq p_\alpha$. Тип p_α $(D,\lambda,1)$-изолирован, поэтому существует множество $B_\alpha \subseteq A \cup \{a_\beta\colon \beta < \alpha\}$, $|B_\alpha| < \lambda$, такое, что $(p_\alpha\restriction B_\alpha)(\mathfrak{N}) \subseteq p_\alpha(\mathfrak{N})$.

Так как в теории T все множества алгебраически замкнуты, тип $p_\alpha \restriction B_\alpha$ не алгебраический. Ввиду соотношения $|B_\alpha| < \lambda \leqslant |M|$ и леммы 1.1 существует элементарное отображение $f: B_\alpha \to M$. Модель $\mathfrak{M}$ D-насыщенная, следовательно, в силу леммы 7.1 существует бесконечное неразличимое множество $I \subseteq f(p_\alpha \restriction B_\alpha)(\mathfrak{M})$. Так как $|B_\alpha \cup I| \leqslant |M| < \varkappa$, по лемме 1.1 f^{-1} можно продолжить до элементарного отображения $g{:}f(B_\alpha) \cup I \to N$. Пусть $I_0 = g(I)$. Тогда $I_0 \subseteq (p_\alpha \restriction B_\alpha)(\mathfrak{N}) \subseteq p_\alpha(\mathfrak{N})$. Так как $p \subseteq p_\alpha$, имеем $p_\alpha(\mathfrak{N}) \subseteq p(\mathfrak{N})$, откуда $I_0 \subseteq p(\mathfrak{N})$. Ясно, что $p = \mathrm{Av}(I_0, A)$. Расширим I_0 до максимального неразличимого множества $I_1 \subseteq N$. Модель $\mathfrak{N}$ $\varkappa$-однородна, так что по лемме 3.2 $|I_1| \geqslant \varkappa$. Заметим, что $k(T) \leqslant |T|^+ \leqslant |M| < \varkappa$. Так как теория T стабильна, существует множество $I_2 \subseteq I_1$ такое, что $|I_2| \leqslant k(T) + |A| < \varkappa$ и $I_1 - I_2$ неразличимо над A. В силу равенств $\mathrm{Av}(I_1 - I_2, A) = \mathrm{Av}(I_1, A) = \mathrm{Av}(I_0, A) = p$ получаем $I_1 - I_2 \subseteq p(\mathfrak{N})$. Поэтому $|p(\mathfrak{N})| \geqslant |I_1 - I_2| \geqslant \varkappa$.

Допустим теперь, что тип p не реализуется в $\mathfrak{N}_0$. Так как модель $\mathfrak{N}$ $(D, \varkappa)$-однородна, некоторый элемент $a \in N$ реализует p. Пусть $q = \mathrm{tp}(a, N_0)$. Тогда q — неизолированный тип из $S_D(N_0)$, модель $\mathfrak{N}_0$ (D, λ)-однородна и $\lambda = |T|^+ \geqslant \varkappa_T$. В силу леммы 3.3 $q = \mathrm{Av}(I_0, N_0)$ для некоторого бесконечного неразличимого множества $I_0 \subseteq N_0$. Следовательно, $p = q \restriction A = \mathrm{Av}(I_0, A)$. Как и в предыдущем случае, заключаем $|p(\mathfrak{N})| \geqslant \varkappa$. Теорема 7.2 доказана.

Теорема 7.3. *Пусть теория T ω-стабильна. Если T имеет несчетную атомную D-насыщенную модель, то для любого $\varkappa \geqslant \omega$ теория T имеет D-насыщенную модель мощности $\varkappa$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — несчетная D-насыщенная атомная модель и $\varkappa \geqslant \omega$. Теория T ω-стабильна, следовательно, теория T $\varkappa$-стабильна. По лемме 7.1 модель $\mathfrak{M}$ содержит бесконечное неразличимое множество, поэтому по теореме 4.1 существует $(D, \varkappa)$-однородная модель $\mathfrak{N}$ мощности $\varkappa$. Покажем, что модель $\mathfrak{N}$ D-насыщенна. Пусть $A \subseteq N$, $|A| < \varkappa$ и p — неалгебраический тип из $S_D(A)$. Надо доказать, что $|p(\mathfrak{N})| = \varkappa$.

Если $\varkappa \leqslant |M|$, то дословно переносятся соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 7.2. Пусть $\varkappa > |M|$. Так как теория T ω-стабильна, существует модель $\mathfrak{N}_0 \prec \mathfrak{N}$, простая и атомная над A. Учитывая, что модель $\mathfrak{N}$ атомна (D — диаграмма атомной модели) и $\mathfrak{N}_0 \prec \mathfrak{N}$, получаем, что модель $\mathfrak{N}_0$ атомна и потому (D, ω)-однородна. Допустим, что p реализуется в $\mathfrak{N}_0$. Так как модель $\mathfrak{N}_0$ атомна над A, имеем $p \restriction B \vdash p$ для некоторого конечного $B \subseteq A$. Тип p неалгебраический, откуда следует, что тип $p \restriction B$ также неалгебраический. Далее дословно повторяем (заменив p_α на p и B_α на B) рассуждения из доказательства теоремы 7.2. Теорема 7.3 доказана.

Лемма 7.4. *Если теория T λ-стабильна, то она λ^+-стабильна.*

Доказательство. Как известно, теория T λ-стабильна тогда и только тогда, когда $\lambda = \lambda(T) + \lambda^{<k(T)}$ (см. [8]). Поэтому, если T λ-стабильна, то с помощью известного равенства $(\varkappa^+)^\mu = \varkappa^+ \cdot \varkappa^\mu$ (см. [17]) получаем

$$(\lambda^+)^{<k(T)} = \sum_{\mu<k(T)} (\lambda^+)^\mu = \sum_{\mu<k(T)} \lambda^+ \cdot \lambda^\mu$$

$$= \sum_{\mu<k(T)} \lambda^+ \cdot \lambda = \lambda^+ \cdot \lambda \cdot k(T) = \lambda^+,$$

т. е. теория T λ^+-стабильна. Лемма 7.4 доказана.

Индукцией по α определим $\lambda^{(\alpha)} = \lambda + \sum_{\beta<\alpha} \lambda^{(\beta)+}$.

Теорема 7.5. *Пусть теория T λ-стабильна и имеет D-насыщенную модель мощности λ^+. Тогда*

1) *если $\varkappa \leqslant \lambda$ и T $\varkappa$-стабильна, то T имеет D-насыщенную модель мощности $\varkappa$;*

2) *для любого $n < \omega$ теория T имеет D-насыщенную модель мощности $\lambda^{(n)}$;*

3) *если теория T суперстабильна, то T имеет D-насыщенную модель мощности $\lambda^{(\omega)}$.*

Доказательство.

1. Утверждение доказывается точно так же, как случай $\varkappa \leqslant |M|$ в доказательстве теоремы 7.2.

2. Доказательство проводится индукцией по n. Для $n = 0$ утверждение следует из п.1 теоремы. Для $n = 1$ следует из условия теоремы. Допустим, что для n утверждение доказано. Докажем для $n + 1$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — D-насыщенная модель мощности $\varkappa = \lambda^{(n)}$. По лемме 7.4 теория T $\varkappa^+$-стабильна, поэтому по теореме 4.1 и лемме 7.1 существует $(D, \varkappa^+)$-однородная модель $\mathfrak{N}$ мощности $\varkappa^+$. Покажем, что модель $\mathfrak{N}$ является D-насыщенной. Пусть $A \subseteq N$, $|A| = \mu < \varkappa^+$, p — неалгебраический тип из $S_D(A)$. Надо доказать, что $|p(\mathfrak{N})| = \varkappa^+$.

Пусть $A = \bigcup_{\alpha<\mu} A_\alpha$, $p_\alpha = p{\restriction}A_\alpha$, где $|A_\alpha| < \mu \leqslant \varkappa$ и $A_\alpha \subseteq A_\beta$ для всех $\alpha < \beta < \mu$. Заметим, что $|p_\alpha(\mathfrak{N})| \geqslant \varkappa$ для всех $\alpha < \mu$. (Действительно, по лемме 1.1 существует элементарное отображение f: $A_\alpha \to M$. Продолжим f^{-1} до элементарного отображения g: $M \to N$. Тогда $|p_\alpha(\mathfrak{N})| \geqslant |p_\alpha(g(\mathfrak{M}))| \geqslant \varkappa$, так как $\mathfrak{M}$ D-насыщенная.) Поэтому индукцией по $\alpha < \mu$ можно определить элементы $a_\alpha \in N$ такие, что $a_\alpha \in p_\alpha(\mathfrak{N}) - \{a_\beta\colon \beta < \alpha\}$. Если $\mu = \varkappa$, то положим $I = \{a_\alpha\colon \alpha < \mu\}$. Если $\mu < \varkappa$, то положим $I = p(\mathfrak{N})$. В любом случае $|I| \geqslant \varkappa$. Так как $\varkappa = \lambda^{(n-1)+}$ и (по лемме 7.4) теория T $\lambda^{(n-1)}$-стабильна, в силу леммы 4.2 существует $I_0 \subseteq I$ такое, что $|I_0| \geqslant \varkappa$ и I_0 неразличимо. Если $I = p(\mathfrak{N})$, то, очевидно, $p = \mathrm{Av}(I_0, A)$. Если $I = \{a_\alpha\colon \alpha < \mu\}$, то $\{\alpha < \mu\colon a_\alpha \in I_0\}$ конфинально в μ, так как $|I_0| \geqslant \varkappa = \mu$. Поэтому $p = \mathrm{Av}(I_0, A)$. Расширим I_0 до максимального неразличимого множества $I_1 \subseteq N$. Модель $\mathfrak{N}$ $\varkappa^+$-однородна, поэтому $|I_1| \geqslant \varkappa^+$ в силу леммы 3.2. Так как теория T стабильна, существует $I_2 \subseteq I_1$ такое, что $I_1 - I_2$ неразличимо над A и $|I_2| \leqslant k(T) + |A| \leqslant \varkappa$. Из равенств $\mathrm{Av}(I_1 - I_2, A) = \mathrm{Av}(I_1, A) = \mathrm{Av}(I_0, A) = p$ получаем $I_1 - I_2 \subseteq p(\mathfrak{N})$. Поэтому $|p(\mathfrak{N})| \geqslant |I_1 - I_2| \geqslant \varkappa^+$.

3. Если теория T суперстабильна, то T $\lambda^{(\omega)}$-стабильна. По лемме 7.1 и теореме 4.1 существует $(D, \lambda^{(\omega)})$-однородная модель $\mathfrak{M}$ мощности $\lambda^{(\omega)}$. Покажем, что модель $\mathfrak{M}$ D-насыщенная. Пусть $A \subseteq M$, $|A| < \lambda^{(\omega)}$, p — неалгебраический тип из $S_D(A)$. Существует $n < \omega$ такое, что $|A| < \lambda^{(n)}$. В силу утверждения 2 существует D-насыщенная модель $\mathfrak{N}_n$ мощности $\lambda^{(n)}$. По лемме 1.1 существует элементарное отображение f: $A \to N_n$. Продолжим f^{-1} до элементарного отображения

$g\colon N_n \to M$. Тогда $|p(\mathfrak{M})| \geqslant |p(g(\mathfrak{N}_n))| \geqslant \lambda^{(n)}$ для всех $n < \omega$, т.е. $|p(\mathfrak{M})| \geqslant \lambda^{(\omega)}$. Теорема 7.5 доказана.

§ 8. Об элементарных цепях однородных моделей

Теорема 8.1. *Пусть теория T стабильна, диаграмма D стабильна, $\mathfrak{M} = \bigcup_{\alpha<\delta} \mathfrak{M}_\alpha$ — объединение элементарной цепи (D,λ)-однородных моделей, $\mathrm{cf}(\delta) \geqslant k(T)$. Тогда модель $\mathfrak{M}$ (D,λ)-однородна.*

Доказательство. Пусть $A \subseteq M$, $|A| < \lambda$, $p \in S_D(A)$. Надо доказать, что p реализуется в $\mathfrak{M}$. Это очевидно, если $\lambda \leqslant \mathrm{cf}(\delta)$. Пусть $\lambda > \mathrm{cf}(\delta)$ и, следовательно, $\lambda > k(T)$. Учитывая стабильность диаграммы D и теорему 3.3 [2] получаем, что существует тип $q \in S_D(M)$ такой, что $p \subseteq q$. Если тип q реализуется в $\mathfrak{M}$, то и тип p реализуется в $\mathfrak{M}$. Допустим, что тип q не реализуется в $\mathfrak{M}$. Теория T стабильна, поэтому существует множество $B \subseteq M$ такое, что $|B| < k(T)$ и тип q не форкуется над B. Так как $k(T) \leqslant \mathrm{cf}(\delta)$, имеем $B \subseteq M_\alpha$ для некоторого $\alpha < \delta$, а поскольку тип q не реализуется в $\mathfrak{M}$, заключаем, что тип $q{\restriction}M_\alpha$ не алгебраический. Модель $\mathfrak{M}_\alpha$ (D,λ)-однородна и $\lambda > k(T)$ (а потому $\lambda \geqslant k(T) + \omega_1 = \varkappa_T$), откуда вытекает, что модель $\mathfrak{M}_\alpha$ $(D,\varkappa_T)$-однородна. По лемме 3.3 $q{\restriction}M_\alpha = \mathrm{Av}(I, M_\alpha)$ для некоторого бесконечного неразличимого множества $I \subseteq M_\alpha$. Если $\varphi(x,\bar a) \in \mathrm{Av}(I,M)$, то $\models \varphi(b,\bar a)$ для некоторого $b \in I \subseteq M_\alpha$. В силу [8, следствие 4.10(2), с. 111] $\mathrm{Av}(I,M)$ не форкуется над M_α. Так как тип $q{\restriction}M_\alpha$ стационарен и тип q не форкуется над M_α, имеем $q = \mathrm{Av}(I,M)$. Расширим I до максимального неразличимого множества $I_0 \subseteq M_\alpha$. Модель $\mathfrak{M}_\alpha$ (D,λ)-однородна, поэтому $|I_0| \geqslant \lambda$ по лемме 3.2(1). Так как теория T стабильна, существует $I_1 \subseteq I_0$ такое, что $|I_1| \leqslant k(T) + |A| < \lambda$ и $I_0 - I_1$ неразличимо над A. В силу соотношений $\mathrm{Av}(I_0 - I_1, A) = \mathrm{Av}(I_0, A) = \mathrm{Av}(I, A)$ и $\mathrm{Av}(I,M) = q$ любой элемент множества $I_0 - I_1$ реализует $q{\restriction}A = p$. Теорема 8.1 доказана.

Следствие 8.2. *Пусть теория T стабильна, $\mathfrak{M} = \bigcup_{\alpha<\delta} \mathfrak{M}_\alpha$— объединение элементарной цепи (D,λ)-однородных моделей, $\mathrm{cf}(\delta) \geqslant k(T)$ и либо $\mathrm{cf}(\delta) \geqslant |T|$, либо $\lambda > |T|$, либо $\lambda(T) < 2^\lambda$. Тогда $\mathfrak{M}$ (D,λ)-однородна.*

Доказательство. Это очевидно, если $\lambda \leqslant |T| \leqslant \mathrm{cf}(\delta)$ или $\mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{M}_\beta$ для всех $\alpha < \beta < \delta$. Пусть $\mathfrak{M}_\alpha \precneqq \mathfrak{M}_\beta$ для некоторых $\alpha < \beta < \delta$ и либо $\lambda > |T|$, либо $\lambda(T) < 2^\lambda$. Тогда по теореме 4.1 диаграмма D стабильна и по теореме 8.1 модель $\mathfrak{M}$ (D,λ)-однородна. Следствие 8.2 доказано.

Следствие 8.3. *Пусть теория T стабильна, $\mathfrak{M} = \bigcup_{\alpha<\delta} \mathfrak{M}_\alpha$ — объединение элементарной цепи однородных моделей, $D(\mathfrak{M}_\alpha) = D$ и $|M_\alpha| < |M_\beta|$ для всех $\alpha < \beta < \delta$, $\mathrm{cf}(\delta) \geqslant k(T)$ и либо $\mathrm{cf}(\delta) \geqslant |T|$, либо $|M_\alpha| \geqslant |T|$, либо $\lambda(T) < 2^{|M_\alpha|}$ для некоторого $\alpha < \delta$. Тогда $\mathfrak{M}$ однородна.*

Доказательство. По следствию 8.2 $\mathfrak{M}$ $|M_\alpha|$-однородна для $\alpha < \delta$. Так как $|M_\alpha| < |M_\beta|$ для $\alpha < \beta < \delta$, имеем $|M| = \sum_{\alpha<\delta} |M_\alpha|$. Поэтому модель $\mathfrak{M}$ однородна. Следствие 8.3 доказано.

Пусть $k_r(T)$ — наименьший регулярный кардинал $\geqslant k(T)$.

Теорема 8.4. *Предположим, что теория T и диаграмма D стабильны. Пусть $\mathfrak{M} = \bigcup_{\alpha<\delta} \mathfrak{M}_\alpha$ есть объединение элементарной цепи однородных моделей;*

$$D(\mathfrak{M}_\alpha) = D, \qquad |M_\alpha| < |M_\beta| \ \text{для всех}\ \alpha < \beta < \delta;$$

$$|M_{\beta_0}| \geqslant k_r(T) \ \text{для некоторого}\ \beta_0 < \delta.$$

Если модель $\mathfrak{M}$ $\mathrm{cf}(\delta)^+$-однородна, то она однородна.

Доказательство. Пусть $A \subseteq M$, $|A| < |M|$, $q \in S_D(A)$. Надо доказать, что тип q реализуется в $\mathfrak{M}$.

Диаграмма D стабильна. В силу [2, теорема 3.3] существует тип $p \in S_D(M)$ такой, что $q \subseteq p$. Если тип p реализуется в $\mathfrak{M}$, то и тип q реализуется в $\mathfrak{M}$. Пусть p не реализуется в $\mathfrak{M}$. Покажем, что для некоторого $\alpha < \delta$ тип p не форкуется над M_α. Допустим противное. Тогда для любого $\alpha < \delta$ существует формула $\varphi_\alpha(x, \bar{a}_\alpha) \in p$, которая форкуется над M_α. В силу [8, следствие 4.10(1), с. 111] $\varphi_\alpha(M_\alpha, \bar{a}_\alpha) = \varnothing, \alpha < \delta$. Выберем конфинальное в δ множество $\{\alpha_\beta \colon \beta < \mathrm{cf}(\delta)\}$. Пусть $A' = \bigcup_{\beta<\mathrm{cf}(\delta)} \bar{a}_{\alpha_\beta}$. Тогда $|A'| \leqslant \mathrm{cf}(\delta)$, $p{\restriction}A' \in S_D(A')$ и $p{\restriction}A'$ опускается в $\mathfrak{M}$, что противоречит $(D, \mathrm{cf}(\delta)^+)$-однородности модели $\mathfrak{M}$.

Итак, тип p не форкуется над M_{β_1} для некоторого $\beta_1 < \delta$. Так как $|A| < |M|$ и $|M_\alpha| < |M_\beta|$ для всех $\alpha < \beta < \delta$, получаем $|A| < |M_{\beta_2}|$ для некоторого $\beta_2 < \delta$. Поскольку $|M_1| > |M_0| \geqslant \omega$, имеем $|M_1| \geqslant \omega_1$. Пусть $\alpha = \max\{\beta_0, \beta_1, \beta_2, 1\}$. Тогда тип p не форкуется над M_α, $|A| < |M_\alpha|$ и $|M_\alpha| \geqslant \omega_1$. Теория T стабильна, из чего следует, что существует множество $B \subseteq M_\alpha$ такое, что $|B| < k(T)$ и тип $p{\restriction}M_\alpha$ не форкуется над B. Значит, тип p не форкуется над B. Поскольку модель $\mathfrak{M}_\alpha$ однородна, $D(\mathfrak{M}_\alpha) = D$ и $|M_\alpha| \geqslant k_r(T) > |B|$, индукцией по $\beta < |M_\alpha|$ можно определить элементы $a_\beta \in M_\alpha$ такие, что a_β реализует D-тип $p_\beta = p{\restriction}(B \cup \{a_\gamma \colon \gamma < \beta\})$. Напомним, что $|M_\alpha| \geqslant \omega_1$. Тип p_ω стационарен, а тип p не форкуется над B. Следовательно, множество $I = \{a_\gamma \colon \omega \leqslant \gamma < |M_\alpha|\}$ неразличимо и $\mathrm{Av}(I, M) = p$. Ввиду стабильности теории T существует множество $I_0 \subseteq I$ такое, что $I - I_0$ неразличимо над A. Кроме того, справедливы следующие утверждения:

◇ *если* $|A| \geqslant k_r(T)$, *то* $|I_0| \leqslant k(T) + |A| \leqslant |A| < |M_\alpha|$;

◇ *если* $|A| < k_r(T)$, *то* $|I_0| < k(T) \leqslant |M_\alpha|$.

В любом случае $|I_0| < |I|$. Так как $\mathrm{Av}(I - I_0, A) = \mathrm{Av}(I, A) = p{\restriction}A = q$, любой элемент из $I - I_0$ реализует q. Теорема 8.4 доказана.

Если в условии теоремы 8.4 цепь однородных моделей такова, что $\mathfrak{M}_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathfrak{M}_\alpha$ для любого предельного $\beta < \delta$, то для однородности модели $\mathfrak{M}$ достаточно ее ω_1-однородности.

Следствие 8.5. *Пусть теория T стабильна, $\mathfrak{M} = \bigcup_{\alpha<\delta} \mathfrak{M}_\alpha$ — объединение элементарной цепи однородных моделей, $D(\mathfrak{M}_\alpha) = D$ и $|M_\alpha| < |M_\beta|$ для всех $\alpha < \beta < \delta$, $|M_\alpha| > |T|$ для некоторого $\alpha < \delta$. Предположим, что $\mathfrak{M}$ — $\mathrm{cf}(\delta)^+$-однородная модель. Тогда модель $\mathfrak{M}$ однородна.*

Доказательство. По теореме 4.1 диаграмма D стабильна и $|M_\alpha| \geqslant |T|^+ \geqslant k_r\,(T)$, поэтому модель $\mathfrak{M}$ однородна по теореме 8.4. Следствие 8.5 доказано.

Следствие 8.6. *Пусть теория T стабильна, $\mathfrak{M} = \bigcup_{\alpha<\delta} \mathfrak{M}_\alpha$ — объединение элементарной цепи насыщенных моделей, $|M_\alpha| < |M_\beta|$ для всех $\alpha < \beta < \delta$. Если модель $\mathfrak{M}$ $\mathrm{cf}(\delta)^+$-насыщенная, то она насыщенная.*

Доказательство. В силу [8, теорема 5.14, с. 126] можно считать, что $|T| \leqslant |D(T)|$ и потому $|M_0| \geqslant |D(T)| \geqslant |T|$. Тогда $|M_1| > |T|$. По следствию 8.5 модель $\mathfrak{M}$ однородна. Так как $D(\mathfrak{M}) = D(T)$, модель $\mathfrak{M}$ насыщенная. Следствие 8.6 доказано.

§ 9. Однородность и λ-однородность

Этот параграф посвящен нахождению условий, при которых любая (D, λ)-однородная модель мощности больше λ является однородной.

Определение 9.1. Тип $p \in S_D(A)$ называется *D-минимальным*, если

1) тип p стационарный и неалгебраический;

2) существуют $(D, \varkappa_T)$-однородная модель $\mathfrak{M}$, множество $A \subsetneq M$ и бесконечное неразличимое множество $I \subsetneq p(\mathfrak{M}, A)$;

3) для любых $(D, \varkappa_T)$-однородной модели $\mathfrak{N}$ и неалгебраического типа $q \in S_D(N)$ верно неравенство $L(p) \leqslant L(q)$, где L — ранг Ласкара (см. [8, с. 301]).

Лемма 9.1. *Пусть теория T стабильна, модель $\mathfrak{M}$ $(D, \varkappa_T)$-однородна и тип $p \in S_D(M)$ неалгебраический. Тогда существует множество $A \subsetneq M$, $|A| < k(T)$, такое, что тип p не форкуется над A и $p{\restriction}A$ стационарен.*

Доказательство. Если $\varkappa_T = \omega$, т.е. теория T тотально трансцендентна, то выбираем конечное $A \subsetneq M$ такое, что $R(p, L, \omega) = R(p{\restriction}A, L, \omega)$ и $\mathrm{Mlt}(p{\restriction}A, L, \omega) = 1$ (см. [8]).

Пусть $\varkappa_T = k(T) + \omega_1$. Пусть $B \subsetneq M$, $|B| < k(T)$, p не форкуется над B. Индукцией по $\alpha \leqslant \omega$ определим элементы $a_\alpha \in M$ такие, что a_α реализует $p_\alpha = p{\restriction}(B \cup \{a_\beta\colon \beta < \alpha\})$. Это можно сделать, так как модель $\mathfrak{M}$ $(D, \varkappa_T)$-однородна и p_α есть D-тип. Пусть $E \in FE^1(B)$ (т.е. E — определимое над B отношение эквивалентности с конечным числом классов). Тогда $E(x, a_\alpha) \in p_\omega$ для некоторого $\alpha < \omega$ (в противном случае $\neg E(x, a_\alpha) \in p_\omega$ и потому $\neg E(x, a_\alpha) \in p_\beta$ для всех $\alpha < \beta < \omega$, т.е. $\models \neg E(a_\beta, a_\alpha)$ для всех $\alpha < \beta < \omega$, что противоречит конечности числа E-классов). Поэтому $\models E(a_\omega, a_\alpha)$ и $\models E(a, a_\alpha)$, где a реализует p. Значит, $\models E(a, a_\omega)$ для всех $E \in FE^1(B)$, т.е. $\mathrm{stp}(a_\omega, B) \subsetneq p{\restriction}(B \cup \{a_\omega\})$. Тип $\mathrm{stp}(a_\omega, B)$ стационарен, поэтому тип $p{\restriction}(B \cup \{a_\omega\})$ также стационарен. Тип p не форкуется над B и, следовательно, не форкуется над $B \cup \{a_\omega\}$. Лемма 9.1 доказана.

Лемма 9.2. *Пусть теория T суперстабильна, модель $\mathfrak{M}$ $(D, \varkappa_T)$-однородна и содержит бесконечное неразличимое множество. Тогда существуют конечное множество $A \subsetneq M$ и D-минимальный тип $p \in S_D(A)$.*

Доказательство. Так как модель $\mathfrak{M}$ $(D, \varkappa_T)$-однородна и содержит бесконечное неразличимое множество, по лемме 3.3 в $S_D(M)$ существуют неалгебраические типы. Выберем среди них тип p_0 с наименьшим $L(p_0)$. По лемме 9.1 существует конечное множество $A \subsetneq M$ такое, что p_0 не форкуется над A и $p_0{\restriction}A$ стационарен. Пусть $p = p_0{\restriction}A$. Покажем, что p D-минимален. Пусть $\mathfrak{N}$ $(D, \varkappa_T)$-однородна, $q \in S_D(N)$, q неалгебраический.

Надо доказать, что $L(p) \leqslant L(q)$. По лемме 3.3 $q = \mathrm{Av}(I, N)$ для некоторого бесконечного неразличимого множества $I \subseteq N$. Можно считать, что $|I| \leqslant \varkappa_T$. Пусть $B \subseteq N$, $|B| < \omega$, тип q не форкуется над B. Тогда $L(q) = L(q{\restriction}B)$. По лемме 1.1 существует элементарное отображение $f\colon I \cup B \to M$. Пусть $q_0 = \mathrm{Av}(f(I), M)$. По лемме 3.3 $q_0 \in S_D(M)$ и q_0 не алгебраический. В силу выбора p_0 имеем $L(p_0) \leqslant L(q_0)$. Так как $f(q{\restriction}B) \subseteq q_0$, имеем $L(q_0) \leqslant L(f(q{\restriction}B)) = L(q{\restriction}B) = L(q)$. Тип p_0 не форкуется над A, откуда $L(p) = L(p_0)$. Таким образом, $L(p) \leqslant L(q)$.

Покажем, что $p(\mathfrak{M})$ содержит бесконечное неразличимое множество. Индукцией по $n < \omega$ определим элементы $a_n \in M$ такие, что a_n реализует $p_{n+1} = p_0{\restriction}(A \cup \{a_i\colon i < n\})$. Это можно сделать, поскольку модель $\mathfrak{M}$ $(D, \varkappa_T)$-однородна и p_{n+1} есть D-тип. Тип $p_0{\restriction}A$ стационарен и тип p_0 не форкуется над A. Получаем, что $I_0 = \{a_n\colon n < \omega\}$ — неразличимое множество. Так как $p = p_0{\restriction}A$, имеем $I_0 \subseteq p(\mathfrak{M})$. Лемма 9.2 доказана.

Лемма 9.3. 1. *Пусть $\mathfrak{N}$ (D, λ)-однородна, модель $\mathfrak{M}$ (D, λ)-проста над A, $|A| \leqslant \lambda$. Тогда $|M| \leqslant |N|$.*

2. *Пусть теория T $\varkappa$-стабильна, $\varkappa \geqslant \lambda + |A|$, модель $\mathfrak{M}$ (D, λ)-проста над A и D стабильна. Допустим, что либо $\lambda > |T|$, либо $\lambda(T) < 2^\lambda$. Тогда $|M| \leqslant \varkappa$. Если теория T суперстабильна, то $|M| \leqslant |A| + \lambda + \lambda(T)$.*

Доказательство.

1. По лемме 1.1 существует элементарное отображение $f\colon A \to N$. Модель $\mathfrak{M}$ (D, λ)-проста над A, поэтому f можно продолжить до элементарного отображения $g\colon M \to N$. Следовательно, $|M| \leqslant |N|$.

2. Пусть теория T $\varkappa$-стабильна. По теореме 4.1 существует $(D, \varkappa)$-однородная модель $\mathfrak{N}$ мощности $\varkappa$. Так как $\varkappa \geqslant \lambda$, модель $\mathfrak{N}$ (D, λ)-однородна. В силу первого утверждения леммы $|M| \leqslant \varkappa$. Если теория T суперстабильна, то T $|A| + \lambda + \lambda(T)$-стабильна и потому $|M| \leqslant |A| + \lambda + \lambda(T)$. Лемма 9.3 доказана.

Определение 9.2. Тип $p \in S_D(A)$ называется

- $(D, \lambda, \varkappa, \mu)$-*недвукардинальным*, если для любых (D, λ)-однородных моделей $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ из условий $\mathfrak{M} \precneqq \mathfrak{N}$, $A \subseteq M$, $\varkappa \leqslant |M|$ и $|N| < \mu$ следует, что тип p реализуется в $N - M$;
- $(D, \lambda, \varkappa)$-*недвукардинальным*, если p $(D, \lambda, \varkappa, \mu)$-недвукардинален для любого $\mu > \varkappa$.

Замечание 9.1. Если p $(D, \lambda, \varkappa, \mu)$-недвукардинален, $\lambda \leqslant \lambda_0$ и $\varkappa \leqslant \varkappa_0 < \mu_0 \leqslant \mu$, то тип p $(D, \lambda_0, \varkappa_0, \mu_0)$-недвукардинален.

Замечание 9.2. Если существуют (D, λ)-однородные модели $\mathfrak{M} \precneqq \mathfrak{N}$, то согласно теореме 6.2 модель $\mathfrak{M}$ не является абсолютно однородной, т.е. $|M| \geqslant \lambda$ и потому диаграмма D λ-хорошая.

Предложение 9.4. *Пусть теория T суперстабильна и либо $\lambda > |T|$, либо $\lambda(T) < 2^\lambda$. Если $p \in S(A)$, $|A| + \lambda + \lambda(T) + \varkappa < \mu$, то из условия, что p $(D, \lambda, \varkappa, \mu)$-недвукардинален, вытекает, что p $(D, \lambda, \varkappa)$-недвукардинален.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда существуют $\mu_0 > \varkappa$ и (D, λ)-однородные модели $\mathfrak{M} \precneqq \mathfrak{N}$ такие, что $A \subseteq M$, $\varkappa \leqslant |M|$, $|N| < \mu_0$ и тип p не реализуется в $N - M$. В силу замечания 9.1 $\mu_0 > \mu$.

Выберем $a_0 \in N - M$ и $B \subseteq M$, $\varkappa \leqslant |B| < \mu$. Построим элементарные цепи (D, λ)-однородных моделей $\{\mathfrak{M}_n\colon n < \omega\}$ и $\{\mathfrak{N}_n\colon n < \omega\}$ такие, что для всех $n < \omega$ выполнены следующие условия:

1) $A \subseteq M_0$, $\mathfrak{M}_n \prec \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_n \prec \mathfrak{N}$;
2) $\mathfrak{M}_n \prec \mathfrak{N}_{n+1}$;
3) $|M_n| + |N_n| \leqslant \varkappa_1$, где $\varkappa_1 = |A| + |B| + \lambda + \lambda(T)$;
4) $a_0 \in N_n - M_n \subseteq N - M$.

В силу замечания 9.2 диаграмма D λ-хорошая. Поэтому по теореме 2.3 существуют модели $\mathfrak{N}_0$, $\mathfrak{M}_0$ такие, что

(а) модель $\mathfrak{N}_0$ (D, λ)-проста над $A \cup B \cup \{a_0\}$, $\mathfrak{N}_0 \prec \mathfrak{N}$;
(б) модель $\mathfrak{M}_0$ (D, λ)-проста над $N_0 \cap M$, $\mathfrak{M}_0 \prec \mathfrak{M}$.

По лемме 9.3(2) $|N_0| \leqslant \varkappa_1$ и $|M_0| \leqslant |N_0 \cap M| + \lambda + \lambda(T) \leqslant \varkappa_1$. Поскольку $a_0 \in N_0$, $a_0 \notin M$ и $M_0 \subseteq M$, верно включение $a_0 \in N_0 - M_0$. Ввиду соотношения $A \subseteq N_0 \cap M \subseteq M_0$ получаем $A \subseteq M_0$ и $N_0 - M_0 \subseteq N_0 - (N_0 \cap M) = N_0 - M \subseteq N - M$.

Допустим, что модели $\mathfrak{N}_n$ и $\mathfrak{M}_n$ построены, причем выполнены условия 1, 3, 4. По теореме 2.3 существуют модели $\mathfrak{N}_{n+1}$, $\mathfrak{M}_{n+1}$ такие, что

(в) модель $\mathfrak{N}_{n+1}$ (D, λ)-проста над $N_n \cup M_n$, $\mathfrak{N}_{n+1} \prec \mathfrak{N}$;
(г) модель $\mathfrak{M}_{n+1}$ (D, λ)-проста над $N_{n+1} \cap M$, $\mathfrak{M}_{n+1} \prec \mathfrak{M}$.

Как и выше, $a_0 \in N_{n+1} - M_{n+1} \subseteq N_{n+1} - (N_{n+1} \cap M) = N_{n+1} - M \subseteq N - M$. Ясно, что $M_n \subseteq N_{n+1}$, $M_n \subseteq M_{n+1}$, $N_n \subseteq N_{n+1}$. По лемме 9.3(2) в силу условия 3 имеем $|N_{n+1}| \leqslant |N_n| + |M_n| + \lambda + \lambda(T) \leqslant \varkappa_1$ и $|M_{n+1}| \leqslant |N_{n+1} \cap M| + \lambda + \lambda(T) \leqslant \varkappa_1$.

Полагаем $\mathfrak{N}' = \bigcup_{n<\omega} \mathfrak{N}_n$, $\mathfrak{M}' = \bigcup_{n<\omega} \mathfrak{M}_n$. По следствию 8.2 модели $\mathfrak{N}'$ и $\mathfrak{M}'$ (D, λ)-однородны. Имеем

- $\mathfrak{M}' \prec \mathfrak{N}'$ по условию 2,
- $\mathfrak{M}' \neq \mathfrak{N}'$ по условию 4,
- $A \subseteq M'$ по условию 1,
- $|N'| \leqslant \varkappa_1 < \mu$ по условию 3.

Так как $B \subseteq N_0 \cap M \subseteq M_0$ и $|B| \geqslant \varkappa$, получаем $|M'| \geqslant \varkappa$. Если $b \in N' - M'$, то $b \in N_n - M_n$ для некоторого $n < \omega$ и $b \in N - M$ по условию 4. Значит, $N' - M' \subseteq N - M$ и p не реализуется в $N' - M'$, так как тип p не реализуется в $N - M$. Это противоречит $(D, \lambda, \varkappa, \mu)$-недвукардинальности p. Предложение 9.4 доказано.

Теорема 9.5. *Пусть теория T суперстабильна, $\lambda + \lambda(T) + \varkappa < \mu$ и либо $\lambda > |T|$, либо $\lambda(T) < 2^\lambda$. Если существует D-минимальный $(D, \lambda, \varkappa, \mu)$-недвукардинальный тип над конечным множеством, то любая (D, λ)-однородная модель мощности больше μ однородна.*

Доказательство. Рассмотрим (D, λ)-однородную модель $\mathfrak{M}$ мощности $\varkappa_0 \geqslant \mu$. Так как теория T суперстабильна и $\varkappa_0 > \lambda(T)$, теория T будет $\varkappa_0$-стабильной. По теореме 4.1 существует $(D, \varkappa_0)$-однородная модель $\mathfrak{N}$ мощности $\varkappa_0$. Покажем, что $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$.

Пусть $\lambda_0 = \varkappa + \lambda$. Построим элементарную цепь (D, λ_0)-однородных моделей $\{\mathfrak{M}_\alpha\colon \alpha < \varkappa_0\}$ следующим образом. Пусть $M = \{a_\alpha\colon \alpha < \varkappa_0\}$. Так как диаграмма D $\varkappa_0$-хорошая и $\varkappa_0 \geqslant \mu > \lambda_0$, диаграмма D λ_0-хорошая. Поскольку $\lambda_0 \geqslant \lambda$, имеем либо $\lambda_0 > |T|$, либо $\lambda(T) < 2^{\lambda_0}$. По теореме 2.3 существует (D, λ_0)-простая над $\varnothing$ модель $\mathfrak{M}_0 \prec \mathfrak{M}$. Пусть модель $\mathfrak{M}_\alpha \prec \mathfrak{M}$ построена и b_α — элемент из $M - M_\alpha$ с наименьшим индексом. По теореме 2.3 существует (D, λ_0)-простая над $M_\alpha \cup \{b_\alpha\}$ модель $\mathfrak{M}_{\alpha+1} \prec \mathfrak{M}$. Для предельного $\delta < \varkappa_0$ полагаем $\mathfrak{M}_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} \mathfrak{M}_\alpha$. По следствию 8.2 модель $\mathfrak{M}_\delta$ (D, λ_0)-однородна. Индукцией по α с помощью леммы 9.3(2) легко доказать, что $|M_\alpha| \leqslant |\alpha| + \lambda_0 + \lambda(T) < \varkappa_0$ для всех $\alpha < \varkappa_0$. Ясно, что $\mathfrak{M} = \bigcup_{\alpha<\varkappa_0} \mathfrak{M}_\alpha$.

Построим элементарную цепь (D, λ_0)-однородных моделей $\{\mathfrak{N}_\alpha\colon \alpha < \varkappa_0\}$ следующим образом. Пусть p — D-минимальный $(D, \lambda, \varkappa, \mu)$-недвукардинальный тип над конечным множеством A. Согласно условию 2 из определения 9.1 $p = \mathrm{Av}(I, A)$ для некоторого бесконечного (можно считать счетного) неразличимого множества I. По теореме 2.3 существует (D, λ_0)-простая над $\varnothing$ модель $\mathfrak{N}_0$. В силу леммы 1.1 можно считать, что $I \cup A \subseteq N_0$. Так как диаграмма D λ_0-хорошая, существует D-множество мощности λ_0, которое по лемме 1.1 можно элементарно вложить в $\mathfrak{N}_0$. Следовательно, $|N_0| \geqslant \lambda_0 \geqslant \varkappa$. Допустим, что модель $\mathfrak{N}_\alpha$ построена. Пусть d_α реализует $p_\alpha = \mathrm{Av}(I, N_\alpha)$. По лемме 3.4 $\lambda_0 \geqslant \lambda \geqslant \varkappa_T$, поэтому модель $\mathfrak{N}_\alpha$ $(D, \varkappa_T)$-однородна. По лемме 3.3 $p_\alpha \in S_D(N_\alpha)$. Поэтому $N_\alpha \cup \{d_\alpha\}$ есть D-множество. По теореме 2.3 существует (D, λ_0)-простая над $N_\alpha \cup \{d_\alpha\}$ модель $\mathfrak{N}_{\alpha+1}$. Для предельного $\delta < \varkappa_0$ полагаем $\mathfrak{N}_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} \mathfrak{N}_\alpha$. По следствию 8.2 модель $\mathfrak{N}_\delta$ (D, λ_0)-однородна.

Пусть $\mathfrak{N}^* = \bigcup_{\alpha<\varkappa_0} \mathfrak{N}_\alpha$. Ясно, что $|N^*| \geqslant \varkappa_0$. Покажем, что $\mathfrak{N}^* \cong \mathfrak{M}$. Индукцией по $\alpha < \varkappa_0$ построим возрастающую цепь элементарных отображений $f_\alpha\colon N_\alpha \to M$. Так как модель $\mathfrak{N}_0$ (D, λ_0)-проста над $\varnothing$, существует элементарное отображение $f_0\colon N_0 \to M_0$. Для предельного $\delta < \varkappa_0$ полагаем $f_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} f_\alpha$. Допустим, что отображение f_α построено и $f_\alpha(N_\alpha) \subsetneqq M_\beta$, причем β наименьшее с таким условием. Построим $f_{\alpha+1}$. Так как $N_0 \subseteq N_\alpha$, имеем $|N_\alpha| \geqslant |N_0| \geqslant \varkappa$, а так как по предложению 9.4 тип p $(D, \lambda, \varkappa)$-недвукардинален, тип $f_\alpha(p)$ таков же и потому реализуется некоторым элементом $b \in M_\beta - f_\alpha(N_\alpha)$. Поскольку $p_\alpha \in S_D(N_\alpha)$ и p_α неалгебраический, имеем $L(p) \leqslant L(p_\alpha)$ в силу D-минимальности p. Однако $p \subseteq p_\alpha$, поэтому $L(p_\alpha) \leqslant L(p)$, т.е. $L(f_\alpha(p_\alpha)) = L(p_\alpha) = L(p)$. Аналогично $L(q) = L(p)$, где $q = \mathrm{tp}(b, f_\alpha(N_\alpha))$. Ввиду стационарности p получаем $f_\alpha(p_\alpha) = q$. Поэтому f_α можно продолжить до элементарного отображения $g_\alpha\colon N_\alpha \cup \{d_\alpha\} \to M_\beta$, полагая $g_\alpha(d_\alpha) = b$. Модель $\mathfrak{N}_{\alpha+1}$ (D, λ_0)-проста над $N_\alpha \cup \{d_\alpha\}$, следовательно, g_α можно продолжить до элементарного отображения $f_{\alpha+1}\colon N_{\alpha+1} \to M_\beta$.

Пусть $f = \bigcup_{\alpha<\varkappa_0} f_\alpha$. Тогда отображение f элементарно и $f(N^*) \subseteq M_\beta$. Для любого $\beta < \varkappa_0$ существует $\gamma < \varkappa_0$ такое, что $f_\gamma(N_\gamma) = M_\beta$ (в противном случае f элементарно отображает N^* в M_β, что противоречит условию $|N^*| \geqslant \varkappa_0 > |M_\beta|$). Поэтому $f(N^*) = M$, т.е. $\mathfrak{N}^* \cong \mathfrak{M}$.

Аналогично доказывается, что $\mathfrak{N}^* \cong \mathfrak{N}$. Таким образом, $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$, т.е. модель $\mathfrak{M}$ однородна. Теорема 9.5 доказана.

Теорема 9.6. *Пусть $p \in S_D(A)$, I — неразличимая последовательность над A, $I_0 \subseteq I$, $|I_0| \geqslant \lambda$, модель $\mathfrak{M}$ (D, λ)-однородна, $A \cup I_0 \subseteq M$,* *модель $\mathfrak{N}$ $(D,\lambda,1)$-проста над $A \cup I$. Если тип p реализуется в $\mathfrak{N}$, то он реализуется в $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Так как модель $\mathfrak{N}$ $(D,\lambda,1)$-проста над $A\cup I$, имеем $N = A\cup I\cup\{a_\alpha\colon \alpha < \alpha_0\}$, где тип $p_\alpha = \operatorname{tp}(a_\alpha, A\cup I\cup\{a_\beta\colon \beta < \alpha\})$ $(D,\lambda,1)$-изолирован для всех $\alpha < \alpha_0$. Индукцией по $n < \omega$ определим множества $A_n \subseteq N$ следующим образом. Пусть $a_{\alpha'}$ реализует p. Тип $p_{\alpha'}$ $(D,\lambda,1)$-изолирован, поэтому существует множество $A_0 \subseteq A \cup I \cup \{a_\beta\colon \beta < \alpha'\}$ такое, что $|A_0| < \lambda$ и $p_{\alpha'}$ $(D,1)$-изолирован над A_0, т.е. для любого $B \subseteq A \cup I \cup \{a_\beta\colon \beta < \alpha'\}$ тип $p_{\alpha'}{\restriction}A_0$ имеет единственное расширение в $S_D(A_0\cup B)$. Допустим, что A_n построено, $|A_n| \leqslant \lambda$. Для каждого $a_\alpha \in A_n$, пользуясь $(D,\lambda,1)$-изолированностью p_α, выберем $A_n^\alpha \subseteq A\cup I\cup\{a_\beta\colon \beta < \alpha\}$ такое, что $|A_n^\alpha| < \lambda$ и p_α $(D,1)$-изолирован над A_n^α. Полагаем $A_{n+1} = \bigcup\{A_n^\alpha\colon a_\alpha \in A_n\}$. Ясно, что $|A_{n+1}| \leqslant \lambda$.

Пусть $I_1 = I \cap \bigcup_{n<\omega} A_n$, $\{a_{\alpha(i)}\colon i \leqslant \alpha_1\} = \{a_\alpha\colon \alpha < \alpha_0\} \cap \bigcup_{n<\omega} A_n$, причем $\alpha(i) < \alpha(j) < \alpha_0$ для всех $i < j \leqslant \alpha_1$ и $\alpha(\alpha_1) = \alpha'$. По построению для любого $i \leqslant \alpha_1$ тип $q_i = \operatorname{tp}(a_{\alpha(i)}, A \cup I_1 \cup \{a_{\alpha(j)}\colon j < i\})$ $(D,\lambda,1)$-изолирован. Так как I неразличимо над A и $|I_1| \leqslant \lambda \leqslant |I_0|$, существует элементарное отображение $f\colon A\cup I_1 \to A\cup I_0$, тождественное на A. Типы q_i $(D,\lambda,1)$-изолированы для всех $i \leqslant \alpha_1$ и модель $\mathfrak{M}$ (D,λ)-однородна, поэтому индукцией по $i \leqslant \alpha_1 + 1$ можно построить элементарные отображения $f_i\colon A \cup I_1 \cup \{a_{\alpha(j)}\colon j < i\} \to M$ такие, что $f_0 = f$ и $f_i \subseteq f_j$ для всех $i < j \leqslant \alpha_1$. Поскольку $a_{\alpha(\alpha_1)} = a_{\alpha'}$ и $a_{\alpha'}$ реализует p, элемент $f_{\alpha_1+1}(a_{\alpha(\alpha_1)})$ реализует p в $\mathfrak{M}$. Теорема 9.6 доказана.

Замечание 9.3. Если в условии теоремы 9.6 модель $\mathfrak{M}$ (D,λ)-проста над $A \cup I_0$, то тип p реализуется в $\mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда тип p реализуется в $\mathfrak{M}$.

Предложение 9.7. *Пусть теория T $\varkappa$-стабильна, $\varkappa \geqslant \lambda$ и $\lambda > |T|$ либо $\lambda(T) < 2^\lambda$. Пусть модель $\mathfrak{N}$ (D,λ)-однородна, $I\cup A \subseteq N$, I неразличимо над A, $|I| \geqslant \lambda$, $p \in S_D(A)$. Если модель $\mathfrak{N}$ опускает p, то существует (D,λ)-однородная модель $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ мощности не больше $\varkappa$ такая, что $|I \cap M| \geqslant \lambda$ и $\mathfrak{M}$ опускает $p{\restriction}(A \cap M)$. Если теория T суперстабильна, то можно взять $\varkappa = \lambda + \lambda(T)$.*

Доказательство. Построим элементарную цепь $\{\mathfrak{M}_\alpha\colon \alpha < \varkappa\}$ индукцией по α. Пусть $I_0 \subseteq I$, $|I_0| = \lambda$. Ввиду неравенства $|N| \geqslant |I| \geqslant \lambda$, диаграмма D λ-хорошая. По теореме 2.3 существует (D,λ)-простая над I_0 модель $\mathfrak{M}_0 \prec \mathfrak{N}$. По лемме 9.3(2) $|M_0| \leqslant \varkappa$. Пусть модель $\mathfrak{M}_\alpha$ построена, причем $\mathfrak{M}_\alpha \prec \mathfrak{N}$ и $|M_\alpha| \leqslant \varkappa$. Так как модель $\mathfrak{N}$ опускает p, для любого $a \in M_\alpha$ существует формула $\varphi_a(x,\bar b_a) \in p$ такая, что $\models \neg\varphi_a(a,\bar b_a)$. По теореме 2.3 существует (D,λ)-простая над $M_\alpha \cup \{\bar b_a\colon a \in M_\alpha\}$ модель $\mathfrak{M}_{\alpha+1} \prec \mathfrak{N}$. По лемме 9.3(2) $|M_{\alpha+1}| \leqslant \varkappa$. Очевидно, $p{\restriction}(A \cap M_{\alpha+1})$ опускается в $\mathfrak{M}_\alpha$. Для предельного $\delta < \varkappa$ полагаем $\mathfrak{M}_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta}\mathfrak{M}_\alpha$. Ясно, что $|M_\delta| \leqslant \varkappa$ и $\mathfrak{M}_\delta \prec \mathfrak{N}$.

Полагаем $\mathfrak{M} = \bigcup_{\alpha<\varkappa}\mathfrak{M}_\alpha$. Заметим, что $\operatorname{cf}(\varkappa) \geqslant k(T)$ (в противном случае $\varkappa^{<k(T)} \geqslant \varkappa^{\operatorname{cf}(\varkappa)} > \varkappa$, что противоречит $\varkappa$-стабильности теории T). Модель $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$ (D,λ)-однородна для любого $\alpha < \varkappa$. По следствию 8.2 модель $\mathfrak{M}$ будет (D,λ)-однородной. Так как $|M_\alpha| \leqslant \varkappa$ для всех $\alpha < \varkappa$, имеем

$|M| \leqslant \varkappa$. Если $a \in M$ и a реализует $p\restriction(A \cap M)$, то $a \in M_\alpha$ для некоторого $\alpha < \varkappa$ и a реализует $p\restriction(A \cap M_{\alpha+1})$, что противоречит построению. Значит, модель $\mathfrak{M}$ опускает $p\restriction(A \cap M)$. Поскольку $I_0 \subseteq I \cap M$; получаем $|I \cap M| \geqslant |I_0| = \lambda$. Если T суперстабильна, то T $\lambda + \lambda(T)$-стабильна, поэтому в качестве $\varkappa$ можно взять $\lambda + \lambda(T)$. Предложение 9.7 доказано.

Теорема 9.8. *Пусть теория T стабильна и $\lambda > |T|$ либо $\lambda(T) < 2^\lambda$. Допустим, что существует (D, λ)-однородная модель мощности больше $\lambda(T)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *для любого μ такого, что $\mu = \nu^+$ или $\mu = \sum_{\alpha<\delta} \nu_\alpha$, где δ предельный, теория T ν-стабильна и ν_α-стабильна; кроме того, $\nu_\alpha < \nu_\beta$ для всех $\alpha < \beta < \delta$ и любая (D, λ)-однородная модель мощности μ однородна;*
2) *для некоторого $\varkappa > \varkappa_0$ такого, что теория T $\varkappa$-стабильна, где $\varkappa_0$ — наименьший кардинал не меньше, чем λ такой, что теория T $\varkappa_0$-стабильна, любая (D, λ)-однородная модель мощности $\varkappa$ однородна.*

Если теория T суперстабильна, то следующие условия эквивалентны:

3) *любая (D, λ)-однородная модель мощности больше $\lambda(T)$, однородна;*
4) *для некоторого $\varkappa > \lambda + \lambda(T)$ любая (D, λ)-однородная модель мощности $\varkappa$ однородна;*
5) *если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — (D, λ)-однородные модели мощности больше, чем $\lambda + \lambda(T)$, $\mathfrak{M} \precneqq \mathfrak{N}$, $p \in S_D(A)$, $A \subseteq M$ ($|A| < |M|$) и существует бесконечное неразличимое множество $I \subseteq p(\mathfrak{M})$, то тип p реализуется в $N - M$;*
6) *для некоторых $\mu > \varkappa > \lambda + \lambda(T)$ существует D-минимальный $(D, \lambda, \varkappa, \mu)$-недвукардинальный тип над конечным множеством;*
7) *для некоторого $\varkappa$ ($\varkappa > \lambda + \lambda(T)$) существует D-минимальный $(D, \lambda, \varkappa)$-недвукардинальный тип над конечным множеством.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что по теореме 4.1 диаграмма D стабильна и потому λ-хорошая.

$1 \Rightarrow 2$ Следует из леммы 7.4.

$2 \Rightarrow 1$ Допустим противное. Пусть модель $\mathfrak{N}$ — контрпример к условию 1. Тогда существуют множество $A \subseteq N$ ($|A| < |N| = \mu$) и тип $p \in S_D(A)$, который опускается в $\mathfrak{N}$. Так как $|A| < \mu$, имеем $|A| \leqslant \nu$ для некоторого $\nu < \mu$ такого, что теория T ν-стабильна. Тогда $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}, a)_{a \in A}$ ν-стабильна. Ввиду условия $|N| > \nu$ и леммы 4.2 существует бесконечное неразличимое над A множество $I \subseteq N$. Модель $\mathfrak{N}$ λ-однородна, поэтому по лемме 3.2(1) $|I| \geqslant \lambda$. По предложению 9.7 существует (D, λ)-однородная модель $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$, которая имеет мощность $|M| \leqslant \varkappa_0 < \varkappa$, опускает $p\restriction B$, где $B = A \cap M$, и такая, что $|I \cap M| \geqslant \lambda$. По теореме компактности существует неразличимое над B множество $I_0 \supseteq I \cap M$ мощности $\varkappa$. Очевидно, $D(I_0 \cup B) = D((I \cap M) \cup B) \subseteq D$. По теореме 2.3 существует $(D, \lambda, 1)$-простая над $I_0 \cup B$ модель $\mathfrak{N}_0$. По теореме 9.6 модель $\mathfrak{N}_0$ опускает D-тип $p\restriction B$. Так как $|B| \leqslant |M| < \varkappa = |I_0| \leqslant |N_0|$, модель $\mathfrak{N}_0$ неоднородна. По лемме 9.3(2) $|N_0| \leqslant \varkappa$. Поэтому $|N_0| = \varkappa$. Итак, $\mathfrak{N}_0$ есть (D, λ)-однородная, но не однородная модель мощности $\varkappa$, что противоречит условию 2.

Предположим, что теория T суперстабильна.

$3 \Rightarrow 5$ Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, p, A, I такие, как в условии 5. Надо доказать, что тип p реализуется в $N - M$. Пусть $\varkappa = |M|^+$. Индукцией по α построим элементарную цепь $\{\mathfrak{M}_\alpha\colon \alpha \leqslant \varkappa\}$ следующим образом. Пусть $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$, $a \in N - M$. По теореме 2.3 существует (D,λ)-простая над $M \cup \{a\}$ модель $\mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{N}$. Так как $|M| \leqslant |M_1|$ и по лемме 9.3(2) $|M_1| \leqslant |M \cup \{a\}| + \lambda + \lambda(T) = |M|$, имеем $|M_1| = |M|$. Кроме того, $D(\mathfrak{M}_1) = D = D(\mathfrak{M})$ и в силу условия 3 модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_1$ однородны. Следовательно, $\mathfrak{M}_1 \cong \mathfrak{M}$.

Пусть модель $\mathfrak{M}_\alpha$ построена, $1 \leqslant \alpha < \varkappa$, $\mathfrak{M}_\alpha \cong \mathfrak{M}$. Поскольку модель $\mathfrak{M}$ однородна и $|A| < |M|$, существует изоморфизм f_α модели $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}_\alpha$, тождественный на A. Продолжим f_α до элементарного отображения g_α такого, что $\mathrm{dom} g_\alpha = M_1$. Полагаем $\mathfrak{M}_{\alpha+1} = g_\alpha(\mathfrak{M}_1)$. Так как $\mathfrak{M} \precneqq \mathfrak{M}_1$, имеем $\mathfrak{M}_\alpha \precneqq \mathfrak{M}_{\alpha+1}$.

Для предельного $\delta \leqslant \varkappa$ полагаем $\mathfrak{M}_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} \mathfrak{M}_\alpha$. По индуктивному предположению $\mathfrak{M}_\alpha \cong \mathfrak{M}$ для всех $\alpha < \delta$, откуда получаем $|M| \leqslant |M_\delta| \leqslant |\delta| \cdot |M|$. Поэтому если $\delta < \varkappa$, то $|M_\delta| = |M|$. По следствию 8.2 модель $\mathfrak{M}_\delta$ (D,λ)-однородна. В силу равенства $D(\mathfrak{M}_\delta) = D = D(\mathfrak{M})$ и условия 3 модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_\delta$ однородны. Следовательно, $\mathfrak{M}_\delta \cong \mathfrak{M}$ для $\delta < \varkappa$.

Расширим I до максимального неразличимого множества $I_0 \subseteq M_\varkappa$. Так как модель $\mathfrak{M}_\varkappa$ однородна и $|M_\varkappa| \geqslant \varkappa$ (потому что $\mathfrak{M}_\alpha \precneqq \mathfrak{M}_{\alpha+1}$ для всех $\alpha < \varkappa$), по лемме 3.2(1) имеем $|I_0| \geqslant \varkappa$. Ввиду суперстабильности теории T существует множество $I_1 \subseteq I_0$ такое, что $|I_1| \leqslant \omega + |A| < \varkappa$ и $I_0 - I_1$ неразличимо над A. Из равенств $\mathrm{Av}(I_0 - I_1, A) = \mathrm{Av}(I_0, A) = \mathrm{Av}(I, A)$ и $I \subseteq p(\mathfrak{M})$ выводим соотношение $I_0 - I_1 \subseteq p(\mathfrak{M}_\varkappa)$. Поскольку $|I_0 - I_1| \geqslant \varkappa > |M_0|$, заключаем, что $I_0 - I_1 \nsubseteq M_0$. Значит, существуют число $\alpha < \varkappa$ и элемент $b \in M_{\alpha+1} - M_\alpha$ такой, что $b \in I_0 - I_1$, т.е. b реализует p. Так как g_α элементарно и тождественно на A, мы видим, что $g_\alpha^{-1}(b)$ реализует p. Ввиду равенств $g_\alpha(M) = M_\alpha$ и $g_\alpha(M_1) = M_{\alpha+1}$ заключаем $g_\alpha^{-1}(b) \in M_1 - M \subseteq N - M$.

$5 \Rightarrow 7$ Пусть модель $\mathfrak{M}$ (D,λ)-однородна и $|M| > \lambda(T)$. По лемме 4.2 модель $\mathfrak{M}$ содержит бесконечное неразличимое множество. По лемме 3.4 $\lambda \geqslant \varkappa_T$, откуда следует, что модель $\mathfrak{M}$ $(D,\varkappa_T)$-однородна. По лемме 9.2 существует D-минимальный тип p над конечным множеством $A \subseteq M$. Из условия 2 определения 9.1 и леммы 1.1 следует, что для любой (D,λ)-однородной модели $\mathfrak{M}'$ если $A \subseteq M'$, то существует бесконечное неразличимое множество $I \subseteq p(\mathfrak{M}')$. Поэтому в силу условия 5 тип p $(D,\lambda,\varkappa)$-недвукардинален.

$7 \Rightarrow 6$ Импликация очевидна.

$6 \Rightarrow 4$ Импликация следует из теоремы 9.5.

$4 \Rightarrow 3$ Импликация имеет место ввиду суперстабильности теории T и импликации $2 \Rightarrow 1$. Теорема 9.8 доказана.

Следствие 9.9. *Пусть теория T суперстабильна, недвукардинальна и $\lambda > |T|$ либо $\lambda(T) < 2^\lambda$. Тогда любая λ-однородная атомная модель мощности больше $\lambda(T)$ является однородной.*

Доказательство. Согласно теореме 9.8 для доказательства следствия достаточно показать, что если модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ λ-однородны и атомны, $\mathfrak{M} \precneqq \mathfrak{N}$, $A \subseteq M$, $|A| < \omega$ и $p \in S_{D(\mathfrak{M})}(A)$, то тип p реализуется в $N - M$. Так как модель $\mathfrak{M}$ атомна и $A \subseteq M$ конечно, модель $\mathfrak{M}$ атомна над A. Поскольку $p \in S_{D(\mathfrak{M})}(A)$ и модель $\mathfrak{M}$ λ-однородна, тип p реализуется в $\mathfrak{M}$. Поэтому существует формула $\varphi(x,\bar a) \in p$ такая, что $\varphi(x,\bar a) \vdash p$. Теория T недвукардинальна, следовательно, $\varphi(\mathfrak{M},\bar a) \subsetneqq \varphi(\mathfrak{N},\bar a)$. Так как $\varphi(x,\bar a) \vdash p$, любой элемент из $\varphi(\mathfrak{N},\bar a) - \varphi(\mathfrak{M},\bar a)$ реализует p. Следствие 9.9 доказано.

Обозначим через $\mathcal{H}(D,\lambda)$ класс всех (D,λ)-однородных моделей (теории T).

Следствие 9.10. *Пусть теория T суперстабильна и выполнено одно из следующих условий: $\lambda > |T|$, $\lambda(T) < 2^\lambda$. Допустим, что существует (D,λ)-однородная модель мощности больше $\lambda(T)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(а) $\mathcal{H}(D,\lambda)$ *$\varkappa$-категоричен для любого $\varkappa > \lambda(T)$;*

(б) $\mathcal{H}(D,\lambda)$ *$\varkappa$-категоричен для некоторого $\varkappa > \lambda + \lambda(T)$;*

(в) *любое из условий 3–5 теоремы 9.8.*

Доказательство. Из суперстабильности теории T следует, что теория T $\varkappa$-стабильна при любом $\varkappa \geqslant \lambda(T)$. По теореме 4.1 для любого $\varkappa \geqslant \lambda(T)$ существует $(D,\varkappa)$-однородная модель мощности $\varkappa$. Остается применить теорему 9.8. Следствие 9.10 доказано.

Приведем один результат об однородных моделях одноразмерных теорий. Среди множества определений одноразмерности выберем следующее (см. [8, с. 237]). Зафиксируем неразличимые множества I_λ такие, что $|I_\lambda| = \lambda$ и $I_\omega \subseteq I_\lambda$ для любого λ. Обозначим через $\mathfrak{M}(I_\lambda)$ $F^a_{k_r(T)}$-простую модель над I_λ.

Определение 9.3. Теория T называется *одноразмерной*, если теория T стабильна и любая $F^a_{k_r(T)}$-насыщенная модель изоморфна модели $\mathfrak{M}(I_\lambda)$ для некоторого λ.

Лемма 9.11. *Если теория T одноразмерна, то любая F^a_ω-насыщенная модель мощности больше $\lambda(T)$ является насыщенной.*

Доказательство. По теореме Хрущовского теория T суперстабильна, поэтому $k_r(T) = \omega$. Пусть $\mathfrak{M}$ — F^a_ω-насыщенная модель мощности $\varkappa > \lambda(T)$. Ввиду суперстабильности T существует насыщенная модель $\mathfrak{N}$ мощности $\varkappa$. Покажем, что $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$. В силу одноразмерности теории T

$$\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}(I_\lambda), \qquad \mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}(I_\mu)$$

для некоторых λ и μ. Достаточно показать, что $\lambda = \mu$.

Если $\lambda = \omega$, то $\varkappa = |M| = |M(I_\lambda)| \leqslant \lambda(T) < \varkappa$; противоречие. Значит, $\lambda \geqslant \omega_1$. Ввиду суперстабильности теории T существует насыщенная модель $\mathfrak{M}_0$ мощности $\lambda + \lambda(T)$. В силу равенства $|I_\lambda| = \lambda \leqslant |M_0|$ существует элементарное отображение $f\colon I_\lambda \to M_0$. Поскольку $|M_0| \geqslant \lambda \geqslant \omega_1$, модель $\mathfrak{M}_0$ F^a_ω-насыщенная. Поэтому f можно продолжить до элементарного отображения $g\colon M(I_\lambda) \to M_0$. Следовательно, $\lambda = |I_\lambda| \leqslant \varkappa = |M(I_\lambda)| \leqslant |M_0| = \lambda + \lambda(T)$. Соотношение $\varkappa > \lambda(T)$ влечет $\lambda = \varkappa$. Аналогично доказывается, что $\mu = \varkappa$. Лемма 9.11 доказана.

Будем говорить, что суперстабильная теория T *имеет ранг* 1, если ранг Ласкара любого типа не превосходит единицы (другими словами, неалгебраические типы не форкуются над $\varnothing$).

Теорема 9.12. *Пусть теория T — одноразмерная теория ранга 1 и либо $\lambda > |T|$, либо $\lambda(T) < 2^\lambda$. Тогда любая λ-однородная модель мощности больше $\lambda(T)$ однородна.*

Доказательство. Допустим, что существует λ-однородная, но не однородная модель $\mathfrak{M}$ мощности больше $\lambda(T)$. По теореме 3.5 существует максимальное бесконечное неразличимое множество $I \subseteq M$ мощности $|I| < |M|$. Предположим, что модель $\mathfrak{N}$ F^a_ω-проста над M. По лемме 9.11 модель $\mathfrak{N}$ насыщенная. В силу неравенства $|I| < |M| \leqslant |N|$ получаем, что $\mathrm{Av}(I, I)$ реализуется некоторым элементом $a \in N$. Ввиду максимальности I в $\mathfrak{M}$ имеем $a \notin M$, поэтому тип $q = \mathrm{tp}(a, M)$ не алгебраический. Так как теория T имеет ранг 1, тип q не форкуется над I и $\mathrm{Av}(I, M)$ не форкуется над I. Однако $\mathrm{Av}(I, I)$ стационарен (см. [8, лемма 4.17(3), с. 115]), следовательно, $q = \mathrm{Av}(I, M)$. Модель $\mathfrak{N}$ F^a_ω-проста над M и $a \in N - M$. Поэтому существует конечное множество $A \subseteq M$ такое, что $\mathrm{stp}(a, A) \vdash \mathrm{Av}(I, M)$. Ввиду суперстабильности теории T существует конечное множество $I_0 \subseteq I$ такое, что $I - I_0$ неразличимо над A. Поскольку $\mathrm{Av}(I - I_0, A) = \mathrm{Av}(I, A)$ и a реализует $q{\restriction}A = \mathrm{Av}(I, A)$, множество $I_1 = (I - I_0) \cup \{a\}$ неразличимо над A. Пусть $E \in FE^1(A)$. Тогда $\models E(b, a)$ для любого $b \in I_1$ (в противном случае $\models \neg E(b, c)$ для любых $b \neq c$ из I_1 в силу неразличимости I_1 над A, что противоречит конечности числа E-классов). Значит, любой элемент из $I - I_0$ реализует $\mathrm{stp}(a, A)$. Этот вывод противоречит соотношению $\mathrm{stp}(a, A) \vdash \mathrm{Av}(I, M)$ и $I \subseteq M$. Теорема 9.12 доказана.

§ 10. О минимальных моделях

Будем говорить, что модель $\mathfrak{M}$ *обладает свойством* P (например, минимальна) *над* $A \subseteq M$, если модель $(\mathfrak{M}, a)_{a \in A}$ обладает свойством P.

В следующей теореме утверждение об эквивалентности условий 1 и 2 есть теорема Шелаха (см., например, [8, теорема 4.2]). Здесь мы дадим другое доказательство импликации $2 \Rightarrow 1$.

Теорема 10.1. *Пусть теория T тотально трансцендентна, $\mathfrak{M} \models T$, $A \subseteq M$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *модель $\mathfrak{M}$ минимальна над A;*
2) *модель $\mathfrak{M}$ атомна над A и каждое неразличимое множество над A в $\mathfrak{M}$ конечно.*

Если $|T| < 2^\omega$, то каждое из условий 1, 2 влечет абсолютную однородность модели $\mathfrak{M}$ над A.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$ Допустим противное. Пусть I — бесконечное неразличимое множество над A в $\mathfrak{M}$, $a \in I$, $I_0 = I - \{a\}$, модель $\mathfrak{N}$ проста над $A \cup I_0$, $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}$. Так как модель $\mathfrak{M}$ минимальна над A, справедливо равенство $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$. Поэтому тип $p = \mathrm{tp}(a, A \cup I_0)$ главный и существует конечное множество $B \subseteq A \cup I_0$ такое, что $p{\restriction}B \vdash p$. Однако $I_0 - B$ неразличимо над B. Поэтому любой элемент из $I_0 - B$ реализует $\mathrm{Av}(I_0, B) = p{\restriction}B$ и, следовательно, реализует p. Наше заключение противоречит соотношению $p = \mathrm{Av}(I_0, A \cup I_0)$.

$2 \Rightarrow 1$ Допустим противное. Пусть $(\mathfrak{N}, a)_{a \in A} \precneqq (\mathfrak{M}, a)_{a \in A}$. Так как модель $\mathfrak{M}$ атомна над A, модель $\mathfrak{N}$ также атомна над A. Поэтому $D((\mathfrak{M}, a)_{a \in A}) = D((\mathfrak{N}, a)_{a \in A}) = D$ и модель $(\mathfrak{N}, a)_{a \in A}$ ω-однородна.

Пусть $b \in M - N$. Тогда $\mathrm{tp}(b, N)$ есть неизолированный D-тип. Поскольку теория T тотально трансцендентна, имеем $\varkappa_T = \omega$. По лемме 3.3 модель $(\mathfrak{N}, a)_{a \in A}$ содержит бесконечное неразличимое множество I. Итак, I — бесконечное неразличимое множество над A в $\mathfrak{M}$, что противоречит условию 2.

Пусть $|T| < 2^\omega$. Теория T тотально трансцендентна, поэтому $\lambda(T) = |T| < 2^\omega$. Если модель $\mathfrak{M}$ атомна над A, то модель $(\mathfrak{M}, a)_{a \in A}$ ω-однородна. Остается применить теорему 6.2. Теорема 10.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Keisler H. J., Morley M. D.** On the number of homogeneous models of a given power // Israel J. Math. 1967. V 5, N 2. P. 73–78.
2. **Shelah S.** Finite diagrams stable in power // Ann. Math. Logic. 1970. V 2, N 1. P. 69–118.
3. **Rose B. I., Woodrow R. E.** Ultrahomogeneous structures // Z. Math. Logik Grundlag. Math. 1981. Bd 27, N 1. S. 23–30.
4. **Кудайбергенов К. Ж.** О расширениях однородных моделей // Алгебра и логика. 1989. Т. 28, № 1. С. 61–74.
5. **Сакс Дж.** Теория насыщенных моделей. М.: Мир, 1976.
6. **Кудайбергенов К. Ж.** Об однородных моделях // 8-я Всесоюз. конф. по мат. логике. Москва, 16–18 сент. 1986 г.: Тез. докл. М., 1986. С. 93.
7. **Кудайбергенов К. Ж.** Об однородных моделях стабильных теорий // 9-я Всесоюз. конф. по мат. логике. Ленинград, 27–29 сент. 1988 г.: Тез. докл. Л.: Наука, 1988. С. 85.
8. **Shelah S.** Classification theory and the number of non-isomorphic models. Amsterdam: North-Holland, 1978.
9. **Ершов Ю. Л.** Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
10. **Libo Lo.** On the number of countable homogeneous models // J. Symbolic Logic. 1983. V. 48, N 3. P. 539–541.
11. **Steinhorn C.** A new omitting types theorem // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. V. 89, N 3. P. 480–486.
12. **Buechler S.** Kueker's conjecture for superstable theories // J. Symbolic Logic. 1984. V. 49, N 3. P. 930–934.
13. **Кудайбергенов К. Ж.** Элементарные расширения, опускание типов и однородные модели // Алгебра и логика. 1988. Т. 27, № 2. С. 148–171.
14. **Baldwin J. T., Lachlan A. H.** On strongly minimal sets // J. Symbolic Logic. 1971. V. 36. P. 79–96.
15. **Shelah S.** Stability, the f.c.p. and superstability // Ann. Math. Logic. 1971. V. 3, N 3. P. 271–362.
16. **Кудайбергенов К. Ж.** Об одной гипотезе Шелаха // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 2. С. 191–203.
17. **Йех Т.** Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.