

ПРОСТЫЕ И СЧЕТНО НАСЫЩЕННЫЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР С ВЫДЕЛЕННЫМИ ИДЕАЛАМИ

Д. Е. Пальчунов

Введение

В настоящей работе изучаются элементарные теории булевых алгебр с выделенными идеалами. В дальнейшем такие алгебры будем называть I -алгебрами.

В статье показано, что элементарные теории достаточно широкого класса I -алгебр имеют простую модель. Доказано, что у каждой счетной несуператомной булевой алгебры существует континуум обогащений выделенными идеалами, элементарные теории которых имеют простые модели, но не имеют счетно насыщенных моделей. Указаны признаки того, что I -алгебра является простой моделью, и признак отсутствия счетно насыщенной модели у элементарной теории I -алгебры.

В [1–15] изучались свойства элементарных теорий булевых алгебр и I -алгебр. В [1, 2] приведена элементарная классификация булевых алгебр; в [2, 3, 5, 9, 13] исследовалась разрешимость теорий I -алгебр. В частности, в [2] показана разрешимость элементарной теории I -алгебры $(\mathfrak{B}, I)$ при одном из следующих условий:

- (а) $\mathfrak{B}/I$ конечна; (б) $\mathfrak{B}$ атомна и существует $\sup\{x \mid x \in I\}$.

В [2] доказана также разрешимость класса алгебр, обладающих свойством (б). В [3] установлена неразрешимость теории класса I -алгебр. В [5] приведены примеры булевых алгебр с одним выделенным идеалом и неразрешимой элементарной теорией для любой ненулевой первой характеристики Ершова — Тарского. В [9] показано, что в булевой алгебре можно выделить идеал с неразрешимой элементарной теорией тогда и только тогда, когда она не является суператомной. В [13] дан критерий разрешимости элементарных теорий I -алгебр. В [4, 6–14] изучались теоретико-модельные свойства I -алгебр. В [4, 10, 12] описаны счетно категоричные I -алгебры, а в [13] — конечно аксиоматизируемые I -алгебры. В [6, 7, 9] показано, что существует континуум элементарно неэквивалентных I -алгебр. В [7, 9] охарактеризованы как несуператомные счетные булевы алгебры, имеющие континуум элементарно неэквивалентных обогащений выделенным идеалом. В [8, 13, 14] даны критерии элементарной эквивалентности I -алгебр. В [8, 14] предложено обогащение языка I -алгебр, допускающее элиминацию кванторов. В [11] изучались простые и счетно насыщенные I -алгебры.

Работы [4, 6–14] можно условно разделить на две группы. В [4, 7, 8, 14] изучаются булевы алгебры с выделенными идеалами на основе исследования псевдобулевой алгебры идеалов булевой алгебры и ее подалгебры формульно определимых идеалов; большая часть результатов формулируется на языке псевдобулевых алгебр формульных идеалов. В [6, 9–13] изучаются I -алгебры, начиная с элементарного: атома, принадлежащего (не принадлежащего) идеалу; безатомного элемента, под которым нет ненулевых элементов, принадлежащих идеалу и т.д. Исходные идеи подхода, реализованного в указанных работах, изложены в [2]. Для построения более сложных I -алгебр вводятся конструкции ω -смешивания и η -смешивания [9, 10, 12]. В этих конструкциях обобщается идея построения булевых алгебр по линейным порядкам. Одновременно рассматриваются формулы, описывающие простейшие I -алгебры, а также конструкции над этими формулами, позволяющие описать ω -смешивание и η -смешивание I -алгебр. Получены последовательность формул V_n и характеристика r .

Зафиксируем $\lambda \in \mathbb{N}$. Будем рассматривать I -алгебры в сигнатуре $\sigma = \langle \cup, \cap, -, 0, 1, I_1, \dots, I_\lambda \rangle$, где $I_1, \dots, I_\lambda$ — символы унарных предикатов. Обозначим через T теорию класса I -алгебр; она порождается аксиомами булевых алгебр и предложениями о том, что предикаты I_ℓ , $\ell \leq \lambda$, выделяют идеалы. Обозначим через $\sigma^B = \langle \cup, \cap, -, 0, 1 \rangle$ сигнатуру булевых алгебр. Символ $\equiv$ означает «равно по определению». Для произвольной алгебраической системы $\mathcal{A}$ сигнатуры σ' обозначим через $\text{Th } \mathcal{A}$ элементарную теорию $\mathcal{A}$, т.е. множество всех предложений сигнатуры σ' , истинных на $\mathcal{A}$. Выражение $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ означает, что $\text{Th } \mathcal{A} = \text{Th } \mathcal{B}$. Если $\sigma'' \subseteq \sigma'$, то $\mathcal{A} \upharpoonright \sigma''$ есть алгебраическая система сигнатуры σ'' , порождаемая $\mathcal{A}$. Пусть P, Q — формулы сигнатуры σ . Пишем $P \equiv Q$, если $T \vdash P \longleftrightarrow Q$. В дальнейшем мы используем также обозначения $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ и $\hat{n} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$, для $n \in \mathbb{N}$.

Если $\mathcal{A}$ — I -алгебра и $a \in \mathcal{A}$, то полагаем

$$\hat{a} = \{b \in \mathcal{A} \mid b \leq a\}, \quad (a) = \langle \hat{a}, \cup, \cap, -^a, 0, 1^a, I_1^a, \dots, I_\lambda^a \rangle,$$

где $\bar{b}^a = a \setminus b$ для $b \in \hat{a}$, $1^a = a$ и $I_\ell^a = I_\ell \cap \hat{a}$ для $\ell \leq \lambda$. Таким образом, (a) есть I -алгебра и $\mathcal{A} \cong (a) \times (\hat{a})$. Будем считать, что $\mathcal{A} = (a) \times (\hat{a})$. Если $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$, то предполагаем, что $1^{\mathcal{B}}, 1^{\mathcal{C}} \in \mathcal{A}$ и $\mathcal{B} = (1^{\mathcal{B}})$, $\mathcal{C} = (1^{\mathcal{C}})$. Введем обозначения $\prod_{i \in L} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i_1} \times \dots \times \mathcal{A}_{i_k}$, где $L = \{i_1, \dots, i_k\}$ и $i_j \neq i_\ell$ при $j, \ell \leq k$, $j \neq \ell$.

Пусть $\mathcal{A}$ — булева алгебра или I -алгебра; $F(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \mid a = a_1 \cup \dots \cup a_n, a_i \text{ — атомы, } i \leq n\}$ — идеал Фреше алгебры $\mathcal{A}$; $\{F_\alpha(\mathcal{A}) \mid \alpha \text{ — ординал}\}$ — последовательность идеалов Фреше алгебры $\mathcal{A}$ [16, с. 20]. Если ясно, о какой алгебре идет речь, вместо $F(\mathcal{A})$ и $F_\alpha(\mathcal{A})$ будем писать F и F_α . Булеву алгебру (I -алгебру) назовем *суператомной*, если все ее фактор-алгебры атомны. В [17, с. 33] доказано, что счетная булева алгебра $\mathcal{A}$ суператомна тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}/F_\alpha$ атомна для любого счетного ординала α . Обозначим через $\text{ch}(\mathcal{A}) = \langle \text{ch}_1(\mathcal{A}), \text{ch}_2(\mathcal{A}), \text{ch}_3(\mathcal{A}) \rangle$ элементарную характеристику Ершова — Тарского булевой алгебры $\mathcal{A}$ (см. [1, 2]).

Для I -алгебр $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ и числа $m \in \mathbb{N}$ пишем $\mathcal{M} \equiv_m \mathcal{N}$, если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ m -эквивалентны [13, с. 439]. В [10; 12; 13, с. 441] даны критерии элементарной эквивалентности и m -эквивалентности I -алгебр. Они являются модификациями критерия Воота изоморфизма булевых алгебр (см. [17]).

Критерий эквивалентности I -алгебр. Множество $S \subseteq |\mathfrak{M}| \times |\mathfrak{N}| \times \omega \times \omega$ называется *критерием эквивалентности I -алгебр $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$* , если выполнены следующие условия:

1. Если $(x, y, k, m) \in S$, то $k \leq m$.
2. Справедливо включение $(0, 0, 0, m) \in S$ для любого $m \in \omega$. Найдутся $n \in \omega$, $c_0, \dots, c_n \in |\mathfrak{M}|$, $d_0, \dots, d_n \in |\mathfrak{N}|$ такие, что $c_i \cap c_j = 0$, $d_i \cap d_j = 0$ при $i \neq j$ и $c_0 \cup \dots \cup c_n = 1^{\mathfrak{M}}$, $d_0 \cup \dots \cup d_n = 1^{\mathfrak{N}}$, $(c_i, d_i, 0, m) \in S$ для любого $i \leq n$.
3. Если $(x, y, k, m) \in S$, то $(x = 0$ равносильно $y = 0$ и $x \in I_n^{\mathfrak{M}}$ равносильно $y \in I_n^{\mathfrak{N}}$ для любого $n \leq \lambda$; если $k < m$, выполняется $(x, y, k+1, m) \in S$.
4. Если $(x, y, k, m) \in S$, $k < n$ и $0 < a < x$, то найдутся такие $n \in \omega$, $n_1 < n$, $c_0, \dots, c_n \in |\mathfrak{M}|$, $d_0, \dots, d_n \in |\mathfrak{N}|$, что $c_i \neq 0$, $d_i \neq 0$; $c_i \cap c_j = 0$ и $d_i \cap d_j = 0$ при $i \neq j$; $c_0 \cup \dots \cup c_{n_1} = a$, $c_0 \cup \dots \cup c_n = x$, $d_0 \cup \dots \cup d_{n_1} = y$; $(c_i, d_i, k+1, m) \in S$ для любого $i \leq n$.
5. Если $(x, y, k, m) \in S$, $k < m$ и $0 < b < y$, то найдутся $n \in \omega$, $n_1 < n$, $c_0, \dots, c_n \in |\mathfrak{M}|$, $d_0, \dots, d_n \in |\mathfrak{N}|$ такие, что $c_i \neq 0$, $d_i \neq 0$; $c_i \cap c_j = 0$ и $d_i \cap d_j = 0$ при $i \neq j$; $c_0 \cup \dots \cup c_n = x$, $d_0 \cup \dots \cup d_{n_1} = b$, $d_0 \cup \dots \cup d_n = y$; $(c_i, d_i, k+1, m) \in S$ для любого $i \leq n$.

Критерий m -эквивалентности I -алгебр. Множество $S \subseteq |\mathfrak{M}| \times |\mathfrak{N}| \times \omega$ называется *критерием m -эквивалентности I -алгебр $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$* , если для $S' = \{(x, y, k, m) \mid (x, y, k) \in S\}$ выполнены условия 1, 3–5 критерия эквивалентности, а также условие 2', отличающееся от условия 2 лишь отсутствием слов «для любого $m \in \omega$ ».

В [13, с. 442] доказана следующая

Лемма. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — I -алгебры и $m \in \omega$. Справедливы следующие утверждения:

- (а) $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда найдется критерий S эквивалентности $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$;
- (б) $\mathfrak{M} \equiv_m \mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда найдется критерий S m -эквивалентности $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Для $a \in \mathfrak{M}$ и $b \in \mathfrak{N}$ будем писать $a \equiv_m b$ вместо $(a) \equiv_m (b)$ и $a \equiv b$ вместо $(a) \equiv (b)$. В дальнейшем используем обозначения $a^0 \equiv \bar{a}$, $a^1 \equiv a$, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \equiv \{\varepsilon \mid \varepsilon : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$. Для I -алгебры $\mathfrak{A}$ и $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ полагаем $\vec{a} \equiv (a_1, \dots, a_n)$, $\vec{\varepsilon} \equiv (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, и $\vec{a}^{\vec{\varepsilon}} \equiv a_1^{\varepsilon_1} \cap \dots \cap a_n^{\varepsilon_n}$.

Формула $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры σ^0 называется *полной* в теории T^0 той же сигнатуры, если $T^0 \cup \{\Phi(c_1, \dots, c_n)\}$ порождает полную теорию сигнатуры $\sigma^0 \cup \{c_1, \dots, c_n\}$.

В [10, 12] введена последовательность формул $V_n^\lambda(x)$, $n \in \mathbb{N}$ (см. также [13, с. 436–439]). Поскольку мы зафиксировали λ , вместо $V_n^\lambda(x)$ будем писать $V_n(x)$.

Пусть даны формулы $P(x)$ и $Q(x)$ сигнатуры σ с одной свободной переменной. Пишем

- $P < Q$, если $T \vdash (\forall x)(Q(x) \rightarrow (\exists y \leq x)P(y))$;
 $P \not\leq Q$, если $T \vdash (\forall x)(Q(x) \rightarrow \neg(\exists y \leq x)P(y))$;
 $P \ll Q$, если для любого $n \in \mathbb{N}$

$$T \vdash (\forall x)(Q(x) \rightarrow (\exists y_1, \dots, y_n \leq x) \left(\bigwedge_{i \leq n} P(y_i) \right) \& \left(\bigwedge_{i \neq j} y_i \cap y_j = 0 \right)).$$

Формула $P(x)$ называется

- *сплошной*, если $T \vdash (\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y \leq x)(P(y) \& P(x \setminus y)))$;
- *точечной*, если $T \vdash (\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y \leq x)(P(y) \rightarrow (\forall z \leq y) \neg P(z)))$;
- ℓ -*идеальной*, если $T \vdash (\forall x)(P(x) \rightarrow x \in I_\ell)$;
- ℓ -*неидеальной*, если $T \vdash (\forall x)(P(x) \rightarrow x \notin I_\ell)$ для $\ell \leq \lambda$.

В лемме 9 [10] (см. также [12]) доказаны следующие утверждения.

- ◇ Для любого $n \in \mathbb{N}$ формула V_n сплошная либо точечная, ℓ -идеальна либо ℓ -неидеальна при любом $\ell \leq \lambda$.
- ◇ Для любых m, n ($m < n \in \mathbb{N}$) выполнены следующие условия: $V_n \not\leq V_m$, $V_m \ll V_n$ либо $V_m \not\ll V_n$.

Очевидно, что $P \ll Q$ влечет $P < Q$ для любых формул P и Q .

Формулы P, Q называются *независимыми*, если $P \not\leq Q$ и $Q \not\leq P$. Множество формул называется *независимым*, если все формулы этого множества попарно независимы.

Пусть дана I -алгебра $\mathfrak{A}$ и $a \in \mathfrak{A}$. Определим характеристику $r_a : \mathbb{N} \rightarrow \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ элемента a следующим образом. Для $n \in \mathbb{N}$ полагаем

- $r_a(n) = 0$, если $\mathfrak{A} \models (\forall x \leq a)(\neg V_n(x))$;
 $r_a(n) = 1$, если V_n сплошная и $\mathfrak{A} \models (\exists x \leq a)V_n(x)$;
 $r_a(n) = m$, если V_n точечная и m — наибольшее число такое, что

$$\mathfrak{A} \models \Psi_m(a) = (\exists x_1, \dots, x_m \leq a) \left(\bigwedge_{i \neq j} x_i \cap x_j = 0 \& \bigwedge_{i \leq m} V_n(x_i) \right);$$

$r_a(n) = \infty$, если V_n точечная и $\mathfrak{A} \models \Psi_m(a)$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

Введем обозначение $r_{\mathfrak{A}} \equiv r_1 \mathfrak{A}$.

Функция $r : \mathbb{N} \rightarrow \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ называется *естественной* при выполнении следующих условий: если $n \in \mathbb{N}$ и формула V_n сплошная, то $r(n) \leq 1$; если $m, n \in \mathbb{N}$, $V_m < V_n$ и $r(n) \neq 0$, то $r(m) \neq 0$; если, кроме того, формула V_m точечная, то $r(m) = \infty$. В [10, 12] доказано, что функция r естественная тогда и только тогда, когда $r = r_{\mathfrak{A}}$ для некоторой I -алгебры $\mathfrak{A}$.

Множество $M \subseteq \mathbb{N}$ называется *естественным*, если для любых $m, n \in \mathbb{N}$ из условий $m \in M$ и $V_m < V_n$ вытекает $n \in M$. Множество M естественное тогда и только тогда, когда $M = M(\mathfrak{A})$ для некоторой I -алгебры $\mathfrak{A}$.

Естественная функция r называется *локальной*, если она имеет конечный носитель, т. е. найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $r(n) = 0$ для любого $n > n_0$. I -алгебра $\mathfrak{A}$ называется *локальной*, если $r_{\mathfrak{A}}$ локальна. Элемент $a \in \mathfrak{A}$ называется *локальным*, если r_a локальна.

Для естественной функции r полагаем

$$M(r) = \{n \in \mathbb{N} \mid r(n) \neq 0\},$$

$$N(r) = \{n \in M(r) \mid V_n \not\leq V_m \text{ для любого } m \in M(r), m \neq n\};$$

для I -алгебры $\mathfrak{A}$ и элемента $a \in \mathfrak{A}$ примем обозначения

$$M(\mathfrak{A}) = M(r_{\mathfrak{A}}), \quad N(\mathfrak{A}) = N(r_{\mathfrak{A}}), \quad M(a) = M(r_a), \quad N(a) = N(r_a).$$

Очевидно, что функция r локальна тогда и только тогда, когда множество $M(r)$ конечно.

В [10, 12] показано, что теория $\text{Th}\mathfrak{A}$ I -алгебры $\mathfrak{A}$ счетно категорична тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ локальна и $r_{\mathfrak{A}}(n) < \infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Как установлено в [13], $\text{Th}\mathfrak{A}$ конечно аксиоматизируема если и только если $\mathfrak{A}$ локальна и $r_{\mathfrak{A}}(n) < \infty$ для любого $n \in N(\mathfrak{A})$. Согласно [10, 12] если I -алгебры $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ локальны, то тождество $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ имеет место тогда и только тогда, когда $r_{\mathfrak{A}} = r_{\mathfrak{B}}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — I -алгебра, $a \in \mathfrak{A}$ и $n \in \mathbb{N}$. Элемент a называется

- *n -простым*, если $r_a(n) \neq 0$ и $M(a) = \{m \in \mathbb{N} \mid V_m < V_n\}$;
- *простым*, если a m -простой для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

I -алгебра $\mathfrak{A}$ называется *n -простой* (*простой*), если элемент $1^{\mathfrak{A}}$ является n -простым (простым). Подчеркнем, что мы различаем понятия простой I -алгебры и простой модели ее элементарной теории.

Сформулируем утверждения, доказанные в [10, 12]:

- (а) если элемент $a \in \mathfrak{A}$ локальный, то $a = a_1 \cup \dots \cup a_n$ для некоторых непересекающихся простых элементов $a_1, \dots, a_n$;
- (б) если элемент $a \in \mathfrak{A}$ локальный, $m, n \in N(a)$ и $m \neq n$, то существует n -простой элемент $b \leq a$ такой, что $r_b(m) = 0$;
- (в) если $a, b \in \mathfrak{A}$, $a \geq b$ и $n \in \mathbb{N}$, то $r_a = r_{(a)}$, $r_b \leq r_a \leq r_{\mathfrak{A}}$, и соотношения $\mathfrak{A} \models V_n(b)$, $(a) \models V_n(b)$ равносильны;
- (г) если $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \dots \times \mathfrak{A}_m$ и $n \in \mathbb{N}$, то $r_{\mathfrak{A}}(n) = r_{\mathfrak{A}_1}(n) + \dots + r_{\mathfrak{A}_m}(n)$ в случае точечной формулы V_n и $r_{\mathfrak{A}}(n) = \max\{r_{\mathfrak{A}_i}(n) \mid i \leq m\}$ в случае сплошной формулы V_n ;
- (д) если элемент $a \in \mathfrak{A}$ локальный, то каждое из утверждений « $M(x) = M(a)$ », « $r_x = r_a$ » при $r_a < \infty$, «элемент x является n -простым» записывается одной формулой.

Предложение. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — I -алгебры, $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$, $b_1, \dots, b_n \in \mathfrak{B}$, причем $a_i \cap a_j = 0$ и $b_i \cap b_j = 0$ при $i \neq j$, $1^{\mathfrak{A}} = a_1 \cup \dots \cup a_n$ и $1^{\mathfrak{B}} = b_1 \cup \dots \cup b_n$. Тогда

- (а) если $a_i \equiv b_i$, $i \leq n$, то $(\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n) \equiv (\mathcal{B}, b_1, \dots, b_n)$;
 (б) если $m \in \mathbb{N}$ и $a_i \equiv_m b_i$, $i \leq n$, то $(\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n) \equiv_m (\mathcal{B}, b_1, \dots, b_n)$.

Доказательство. Утверждение (б) доказывается аналогично утверждению (а). Поэтому докажем (а). Полагаем $\sigma^0 = \sigma \cup \{c_1, \dots, c_n\}$; $c_i^{\mathcal{A}} = a_i$, $c_i^{\mathcal{B}} = b_i$, $c_i^{(a_i)} = a_i$, $c_i^{(b_i)} = b_i$ при $i \leq n$; $c_i^{(a_j)} = 0 = c_i^{(b_j)}$ при $i \neq j$. Тогда

$$(a_i, c_1^{a_i}, \dots, c_n^{a_i}) \equiv_m (b_i, c_1^{b_i}, \dots, c_n^{b_i}),$$

$$(\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n) = (\mathcal{A}, c_1^{\mathcal{A}}, \dots, c_n^{\mathcal{A}}) = \prod_{i \leq n} (a_i, c_1^{a_i}, \dots, c_n^{a_i}) \equiv_m$$

$$\equiv_m \prod_{i \leq n} (b_i, c_1^{b_i}, \dots, c_n^{b_i}) = (\mathcal{B}, c_1^{\mathcal{B}}, \dots, c_n^{\mathcal{B}}) = (\mathcal{B}, b_1, \dots, b_n),$$

т.е. $(\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n) \equiv_m (\mathcal{B}, b_1, \dots, b_n)$. Предложение доказано.

Используемые в статье определения по теории булевых алгебр можно найти в [16, 18], а по теории моделей — в [19] или [20]. Изложение существенно опирается на работы [9, 10, 13], поэтому знакомство с указанными статьями (особенно с [10] или ее кратким вариантом — [12]) необходимо для понимания предложенных доказательств. Основные результаты данной работы анонсированы в [11] (случай одного выделенного идеала) и частично — в [12] (общий случай).

§ 1. Прямые разложения, сохраняющие элементарную эквивалентность

Теорема 1.1. Пусть для I -алгебры $\mathcal{A}$ имеет место разложение $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$, $\mathcal{B}$ является локальной и $r_{\mathcal{A}} = r_{\mathcal{C}}$. Тогда $\mathcal{A} \equiv \mathcal{C}$.

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_i$ — k_i -простые алгебры, алгебра $\mathcal{B} = \prod_{i \leq \ell} \mathcal{B}_i$ локальна. Если формула V_{k_i} точечная, то $r_{\mathcal{C}} = \infty$, поскольку $r_{\mathcal{A}} = r_{\mathcal{C}}$. Существует разложение $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \times \prod_{i \leq \ell} \mathcal{C}_i$, где $\mathcal{C}_i \models V_{k_i}(1^{\mathcal{C}_i})$, если V_{k_i} сплошная; $r_{\mathcal{C}_i}(k_i) = 2^m$ и $\mathcal{C}_i$ k_i -простая, если V_{k_i} точечная. Поэтому $\mathcal{B}_i \times \mathcal{C}_i \equiv_m \mathcal{C}_i$ и $(\prod_{i \leq \ell} \mathcal{B}_i) \times (\prod_{i \leq \ell} \mathcal{C}_i) \equiv_m \prod_{i \leq \ell} \mathcal{C}_i$. Следовательно,

$$\mathcal{A} = (\prod_{i \leq \ell} \mathcal{B}_i) \times \mathcal{C}_0 \times (\prod_{i \leq \ell} \mathcal{C}_i) \equiv_m \mathcal{C}_0 \times \prod_{i \leq \ell} \mathcal{C}_i = \mathcal{C},$$

т.е. $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{C}$. Поскольку $m \in \mathbb{N}$ выбрано произвольно, имеем $\mathcal{A} \equiv \mathcal{C}$. Теорема 1.1 доказана.

Следствие 1.1. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — I -алгебры такие, что $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$, где алгебры $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$ локальны и $r_{\mathcal{A}_2} = r_{\mathcal{B}_2} = r_{\mathcal{A}}$. Тогда $\mathcal{A}_2 \equiv \mathcal{B}_2$.

Доказательство. Очевидно, что $r_{\mathcal{B}_2} = r_{\mathcal{A}_2} = r_{\mathcal{A}} = r_{\mathcal{B}}$ и $\mathcal{B}_2 \equiv \mathcal{B} \equiv \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_2$. Следствие 1.1 доказано.

Усилением следствия 1.1 является следующая

Теорема 1.2. Если I -алгебры $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{B}_1$ локальны, $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \equiv \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$ и $r\mathfrak{A}_2 = r\mathfrak{B}_2$, то $\mathfrak{A}_2 \equiv \mathfrak{B}_2$.

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Покажем, что $\mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_2$. Обозначим $M \equiv M(\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{B}_1)$. Рассмотрим множество формул

$$\begin{aligned} \Gamma \equiv & \{(\exists z)(M(z) \subseteq M \ \& \ \bar{z} \in I_j) \mid j \leq \lambda\} \cup \{M(1) \subseteq M\} \\ & \cup \{(\exists z)(M(z) \subseteq M \ \& \ r_{\bar{z}}(n) = 0) \mid n \in M\} \\ & \cup \{r_1(n) = \ell \mid n \in M, \ell \leq 2^m\} \cup \{r_1(n) \geq 2^m \mid n \in M\}. \end{aligned}$$

Выберем t' так, чтобы все формулы из Γ были устойчивыми относительно t' -эквивалентности. Положим $t \equiv t' + m$. Построим критерий S m -эквивалентности I -алгебр $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{B}_2$ [13, с. 441]. Докажем, что множество

$$\begin{aligned} S \equiv & \{(x, y, k) \mid k \leq m, x \in \mathfrak{A}_2, y \in \mathfrak{B}_2; \text{ для любого } n \in M \\ & \text{либо } r_x(n) = r_y(n), \text{ либо } (r_x(n) \geq 2^{m-k} \text{ и } r_y(n) \geq 2^{m-k}); \\ & (x) \times \mathfrak{C} \equiv_{t-k} (y) \times \mathfrak{L} \text{ и } (\mathfrak{C} \times \mathfrak{L}) \subseteq M \text{ для } I\text{-алгебр } \mathfrak{C} \text{ и } \mathfrak{L}\} \end{aligned}$$

является критерием m -эквивалентности (см. введение).

1. Очевидно из определения S .

2. По условию теоремы имеем $(0, 0, 0) \in S$ и $(1, 1, 0) \in S$.

3. Пусть $(x, y, k) \in S$ и $x = 0$. Тогда $M((x) \times \mathfrak{C}) \subseteq M$. Следовательно, $M((y) \times \mathfrak{L}) \subseteq M$ и $M(y) \subseteq M$. Значит, $M(x) = M(y)$ и $y = 0$. Обратное утверждение доказывается аналогично. Пусть $\ell \subseteq \lambda$ и $x \in I_\ell$. Ввиду выбора числа t существует элемент $z \in (y) \times \mathfrak{L}$ такой, что $M(z) \subseteq M$ и $\bar{z} \in I_\ell$. Если $y \notin I_\ell$, то $y \cap z \notin I_\ell$. Однако $M(y \cap z) \subseteq M$ и $M(y \cap z) \subseteq M(x)$. В силу локальности алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{B}_1$ множество M конечно. Значит, элемент $y \cap z$ локальный. Поскольку $y \cap z \notin I_\ell$, согласно лемме 10 [10, с. 39] найдется число $j \in \mathbb{N}$ такое, что формула V_j ℓ -неидеальна и $r_{y \cap z}(j) \neq 0$. Тогда $r_x(j) \neq 0$ и $x \notin I_\ell$; противоречие. Поэтому $y \in I_\ell$. Обратное утверждение доказывается по аналогии.

4. Пусть $(x, y, k) \in S$, $k < m$ и $0 < a < x$. Тогда найдутся I -алгебры $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ и элемент $b \leq y$ такие, что $(a) \times \mathfrak{C}_1 \equiv_{(t-k-1)} (b) \times \mathfrak{L}_1$ и $(x \setminus a) \times \mathfrak{C}_2 \equiv_{(t-k-1)} (y \setminus b) \times \mathfrak{L}_2$. При этом $M(\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2) \subseteq M$, $M(\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2) \subseteq M$ и число ℓ^b минимальное среди возможных $b \leq y$, где

$$\begin{aligned} \ell^b \equiv & \max\{i \in M \mid \text{условие } S \text{ нарушается на } (a, b), (x \setminus a, y \setminus b), \text{ т.е.} \\ & r_a(i) \neq r_b(i) \text{ и } \min(r_a(i), r_b(i)) < 2^{m-k} \text{ либо} \\ & r_{x \setminus a}(i) \neq r_{y \setminus b}(i) \text{ и } \min(r_{x \setminus a}(i), r_{y \setminus b}(i)) < 2^{m-k}\} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Пусть $\ell^b > 0$ (если $\ell^b = 0$, то b — искомый элемент). Положим $n \equiv \ell^b$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: формула V_n сплошная. Без ограничения общности можно предположить, что $r_a(n) \leq r_{x \setminus a}(n)$. Тогда $r_x(n) = r_y(n) = 1$, поскольку $M(x) \cap M = M(y) \cap M$.

Возможны следующие варианты.

Случай 1а: $r_a(n) = r_{x \setminus a}(n)$. Тогда $r_a(n) = 1$. Без ограничения общности считаем, что $r_b(n) \leq r_{y \setminus b}(n)$, $r_b(n) = 0$ и $r_{y \setminus b}(n) = 1$. В силу выбора $n \leq \ell^b$ имеем $r_a(n) = 1$, $(a) \times \mathfrak{C}_1 \equiv_{(t-k-1)} (b) \times \mathfrak{L}_1$. Следовательно, $r_{\mathfrak{L}_1}(n) = 1$. Пусть $c \leq y \setminus b$ и $\mathfrak{B}_2 \models V_n(c)$. Тогда существуют c_1 и c_2 такие, что $c = c_1 \cup c_2$, $c_1 \cap c_2 = 0$, $\mathfrak{B}_2 \models V_n(c_1)$, $\mathfrak{B}_2 \models V_n(c_2)$. Положим $b_1 \equiv b \cup c_1$. Тогда $y \setminus b_1 = ((y \setminus b_1) \setminus c) \cup c_2$. Кроме того, $r_{(b_1) \times \mathfrak{L}_1} = r_{(b) \times \mathfrak{L}_1}$, поскольку $r_{\mathfrak{L}_1}(n) = 1$; $r_{y \setminus b_1} = r_{y \setminus b}$, поскольку $y \setminus b = (y \setminus b_1) \cup c_1$, и $r_{y \setminus b_1}(n) = 1$. Имеем $(b_1) \times \mathfrak{L}_1 = (c_1) \times (b) \times \mathfrak{L}_1$, $M(c_1) \subseteq M$. По теореме 1.1 $(b_1) \times \mathfrak{L}_1 \equiv (b) \times \mathfrak{L}$, $(y \setminus b) \equiv (y \setminus b_1)$. Поэтому

$$\begin{aligned} (b_1) \times \mathfrak{L}_1 &\equiv (b) \times \mathfrak{L}_1 \equiv_{(t-k-1)} (a) \times \mathfrak{C}_1, (y \setminus b_1) \times \mathfrak{L}_2 \\ &\equiv (y \setminus b) \times \mathfrak{L}_2 \equiv_{(t-k-1)} (x \setminus a) \times \mathfrak{C}_2. \end{aligned}$$

Однако $r_{b_1}(n) = 1 = r_a(n)$, $r_{y \setminus b_1}(n) = 1 = r_{x \setminus a}(n)$. Так как $r_{b_1}(i) = r_b(i)$ и $r_{y \setminus b_1}(i) = r_{y \setminus b}(i)$ для $i > n$, имеем $\ell^{b_1} < \ell^b$, что противоречит выбору b . Следовательно, случай 1а невозможен.

Случай 1б: $r_a(n) < r_{x \setminus a}(n)$. Тогда $r_a(n) = 0$, $r_{x \setminus a}(n) = 1$. Так как $r_y(n) = 1$ и для n условие критерия S нарушается, имеем $r_b(n) = 1$ (если $r_b(n) = 0$, то $r_{y \setminus b}(n) = 1$). Поэтому $r_{(y \setminus b) \times \mathfrak{L}_2}(n) = 1$ и $(a) \times \mathfrak{C}_1 \models (\exists z)(M(z) \subseteq M \ \& \ r_z(n) = 0)$, поскольку $M(\mathfrak{C}_1) \subseteq M$. По определению числа t получаем $(b) \times \mathfrak{L}_1 \models (\exists c')(M(c') \subseteq M \ \& \ r_{c'}(n) = 0)$. Рассмотрим c' из последнего условия и положим $c'' \equiv b \cap c'$. Тогда $M(c'' \subseteq M$ и $b \setminus c' = b \setminus c''$, поэтому $r_{b \setminus c''}(n) = 0$. Элемент c'' локальный, поэтому можно найти n -простой элемент $c \leq c''$ такой, что $r_{c'' \setminus c}(n) = 0$. Тогда $r_{b \setminus c}(n) = r_{(b \setminus c'') \cup (c'' \setminus c)}(n) = 0$. Положим $b_1 \equiv b \setminus c$. Тогда $r_{(y \setminus b) \times \mathfrak{L}_2} = r_{(y \setminus b_1) \times \mathfrak{L}_2}$, $(y \setminus b_1) \times \mathfrak{L}_2 = (y \setminus b) \times (c) \times \mathfrak{L}_2$, $M(c) \subseteq M$. По теореме 1.1 $(y \setminus b_1) \times \mathfrak{L}_2 \equiv (y \setminus b) \times \mathfrak{L}_2 \equiv_{(t-k-1)} (x \setminus a) \times \mathfrak{C}_2$. Выберем I -алгебру $\mathfrak{N}$ такую, что $\mathfrak{N} \models V_n(1^{\mathfrak{N}})$. Тогда $(c) \equiv \mathfrak{N}$ и $(b_1) \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{L}_1 \equiv (b_1) \times (c) \times \mathfrak{L}_1 = (b) \times \mathfrak{L}_1 \equiv_{(t-k-1)} (a) \times \mathfrak{C}_1$. Кроме того, $r_{b_1}(n) = 0 = r_a(n)$, $r_{y \setminus b_1}(n) = 1 = r_{x \setminus a}(n)$ и $r_b(i) = r_{b_1}(i)$, $r_{y \setminus b}(i) = r_{y \setminus b_1}(i)$ для всех $i > n$. Поэтому $\ell^{b_1} < \ell^b$, что противоречит выбору b . Поэтому случай 1б невозможен.

Случай 2: формула V_n точечная. Возможны два варианта.

Случай 2а: $(r_b(n) < r_a(n) \text{ и } r_b(n) < 2^{m-k-1})$ либо $(r_{y \setminus b}(n) < r_{x \setminus a}(n) \text{ и } r_{y \setminus b}(n) < 2^{m-k-1})$. Пусть, например, $r_b(n) < r_a(n)$ и $r_b(n) < 2^{m-k-1}$. Для x и y условие S на $n \in \mathbb{N}$ выполнено, поэтому найдется n -простой элемент $c \leq y \setminus b$ такой, что $r_{b \cup c}(n) = \min\{r_a(n), 2^{m-k-1}\}$. Действительно, предположим противное: $r_y(n) < \min\{r_a(n), 2^{m-k-1}\}$. Тогда $r_y(n) < 2^{m-k}$ и $r_x(n) = r_y(n)$, но $r_y(n) < r_a(n) \leq r_x(n)$; противоречие.

Далее, если $r_{y \setminus (b \cup c)}(n) < \min\{r_{x \setminus a}(n), 2^{m-k-1}\}$, то $r_y(n) = r_{b \cup c}(n) + r_{y \setminus (b \cup c)}(n) < 2^{m-k}$. Следовательно, $r_x(n) = r_y(n)$. Однако $r_y(n) = r_{b \cup c}(n) + r_{y \setminus (b \cup c)}(n) < r_a(n) + r_{x \setminus a}(n) = r_x(n)$; противоречие. Стало быть, $r_{y \setminus (b \cup c)}(n) \geq \min\{r_{x \setminus a}(n), 2^{m-k-1}\}$.

Если $\min\{r_{x \setminus a}(n), 2^{m-k-1}\} = 2^{m-k-1}$ или $r_{y \setminus (b \cup c)}(n) = r_{x \setminus a}(n)$, то полагаем $h \Leftarrow c$ и $b_1 \Leftarrow b \cup h$. В противном случае имеем $r_{x \setminus a}(n) < 2^{m-k-1}$ и $r_{y \setminus (b \cup c)}(n) > r_{x \setminus a}(n)$. Поэтому $(x \setminus a) \models (\exists z)(M(z) \subseteq M \& r_{\bar{z}}(n) = 0)$, $(x \setminus a) \equiv_{(t-k-1)} (y \setminus b)$. Следовательно, согласно определению t заключаем $(y \setminus b) \models (\exists d_1)(M(d_1) \subseteq M \& r_{(y \setminus b) \setminus d_1}(n) = 0)$. Обозначим $d_2 \Leftarrow (y \setminus (b \cup c)) \cap d_1$. Тогда $M(d_2) \subseteq M$ и $r_{(y \setminus (b \cup c)) \setminus d_2}(n) = 0$. Значит, можно выбрать n -простой элемент $d \leq d_2$ такой, что $M(d) \subseteq M$ и $r_{d \setminus d}(n) = 0$. Поэтому $r_{(y \setminus (b \cup c)) \setminus d}(n) = r_{(y \setminus (b \cup c)) \setminus d_2}(n) + r_{d \setminus d}(n) = 0$, $d \leq y \setminus (b \cup c)$. Выберем $g \leq d$ такое, что $r_{d \setminus g}(n) = r_{x \setminus a}(n)$ и положим $b_1 = b \cup c \cup g$. Имеем

$$\begin{aligned} r_{y \setminus b_1}(n) &= r_{(y \setminus (b \cup c)) \setminus g}(n) = r_{((y \setminus (b \cup c)) \setminus d) \cup (d \setminus g)}(n) \\ &= r_{(y \setminus (b \cup c)) \setminus d}(n) + r_{d \setminus g}(n) = r_{x \setminus a}(n). \end{aligned}$$

Предположим, что $r_a(n) < 2^{m-k-1}$. Тогда $r_x(n) = r_a(n) + r_{x \setminus a}(n) < 2^{m-k}$. Следовательно, $r_x(n) = r_y(n)$. Однако $r_x(n) = r_a(n) + r_{x \setminus a}(n) < r_{b \cup c}(n) + r_{y \setminus (b \cup c)}(n) = r_y(n)$; противоречие. Таким образом, $r_a(n) \geq 2^{m-k-1}$; $r_{b_1}(n) \geq r_{b \cup c}(n) \geq 2^{m-k-1}$. Обозначим $h \Leftarrow c \cup g$ и $b \Leftarrow b_1 \cup h$. Напомним, что мы определили b_1 так: $b_1 \Leftarrow b \cup h$, где выше было принято $h \Leftarrow c$; здесь полагаем $h \Leftarrow c \cup g$. В обоих случаях элемент h n -простой,

$$\begin{aligned} \min\{r_a(n), 2^{m-k-1}\} &= \min\{r_{b_1}(n), 2^{m-k-1}\}, \\ \min\{r_{x \setminus a}(n), 2^{m-k-1}\} &= \min\{r_{y \setminus b_1}(n), 2^{m-k-1}\}. \end{aligned}$$

Предположим, что I -алгебра $\mathfrak{N}$ n -простая и $r_{\mathfrak{N}}(n) = \min\{r_h(n), 2^{(t-k-1)}\}$. Тогда $\mathfrak{N} \equiv_{(t-k-1)} (h)$. Поэтому

$$\begin{aligned} (a) \times \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{N} &\equiv_{(t-k-1)} (b) \times \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{N} \equiv_{(t-k-1)} (b) \times (h) \times \mathfrak{L}_1 = (b_1) \times \mathfrak{L}_1, \\ (x \setminus a) \times \mathfrak{C}_2 &\equiv_{(t-k-1)} (y \setminus b) \times \mathfrak{L}_2 = (y \setminus b_1) \times (h) \times \mathfrak{L}_2 \equiv_{(t-k-1)} (y \setminus b_1) \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{L}_2. \end{aligned}$$

Таким образом, поскольку элемент h n -простой, все условия критерия для $i \geq n$ выполняются и $\ell^{b_1} < \ell^b$, что противоречит выбору b . Значит, случай 2а невозможен.

Случай 2б: имеют место неравенства $r_b(n) \geq \min\{r_a(n), 2^{m-k-1}\}$ и $r_{y \setminus b}(n) \geq \min\{r_{x \setminus a}(n), 2^{m-k-1}\}$. Допустим, что $(r_b(n) = r_a(n)$ либо $r_a(n) \geq 2^{m-k-1}$) и $(r_{y \setminus b}(n) = r_{x \setminus a}(n)$ либо $r_{x \setminus a}(n) \geq 2^{m-k-1}$). Тогда условие критерия S для n должно выполняться. Однако это не так. Значит, либо $r_a(n) < r_b(n)$ и $r_a(n) < 2^{m-k-1}$, либо $r_{x \setminus a}(n) < r_{y \setminus b}(n)$ и $r_{x \setminus a}(n) < 2^{m-k-1}$. Пусть, например, $r_a(n) < r_b(n)$ и $r_a(n) < 2^{m-k-1}$. Имеем $(a) \times \mathfrak{C}_1 \models (\exists z)(M(z) \subseteq M \& r_{\bar{z}}(n) = 0)$, $(a) \times \mathfrak{C}_1 \equiv_{(t-k-1)} (b) \times \mathfrak{L}_1$. В силу выбора t найдется элемент $c_1 \leq b$ такой, что $r_{b \setminus c_1}(n) = r_a(n)$ и $M(c_1) \subseteq M$. Следовательно, найдется n -простой элемент $c \leq c_1$ такой, что $r_{b \setminus c}(n) = r_a(n)$. Обозначим $b_1 \Leftarrow b \setminus c$. Имеем $b = b_1 \cup c$. Предположим, что $r_{x \setminus a}(n) < 2^{m-k-1}$. Тогда $r_x(n) = r_a(n) + r_{x \setminus a}(n) < 2^{m-k}$. Значит,

$r_x(n) = r_y(n)$. Однако $r_x(n) = r_a(n) + r_{x \setminus a}(n) < r_b(n) + r_{y \setminus b}(n) = r_y(n)$; противоречие. Следовательно, $r_{x \setminus a}(n) \geq 2^{m-k-1}$ и $r_{y \setminus b}(n) \geq 2^{m-k-1}$. Тогда $r_{y \setminus b_1}(n) = r_{(y \setminus b_1) \cup c}(n) \geq r_{y \setminus b}(n) \geq 2^{m-k-1}$. Получаем, что условия критерия S для n на a, b_1 и на $x \setminus a, y \setminus b_1$ выполняются. Выберем n -простую I -алгебру $\mathfrak{N}$, подчиненную условию $r_{\mathfrak{N}}(n) = \min\{r_c(n), 2^{t-k-1}\}$. Тогда $\mathfrak{N} \equiv_{(t-k-1)} (c)$,

$$(a) \times \mathfrak{C}_1 \equiv_{(t-k-1)} (b) \times \mathfrak{L}_1 = (b_1) \times (c) \times \mathfrak{L}_1 \equiv_{(t-k-1)} (b_1) \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{L}_1,$$

$$(x \setminus a) \times \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{N} \equiv_{(t-k-1)} (y \setminus b) \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{L}_1 \equiv_{(t-k-1)} (y \setminus b) \times (c) \times \mathfrak{L}_1 = (y \setminus b_1) \times \mathfrak{L}_1.$$

Следовательно, $\ell^{b_1} < \ell^b$, что противоречит выбору b . Случай 2 также оказывается невозможным.

Мы пришли к противоречию, предположив, что $\ell^b > 0$ минимальное. Следовательно, $\ell^b = 0$ и $(a, b, k+1), (x \setminus a, y \setminus b, k+1) \in S$. Условие 4 критерия проверено.

5. Рассматривается аналогично условию 4.

Таким образом, мы доказали, что S — критерий m -эквивалентности $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{B}_2$. В силу леммы I(б) [13, с. 442] $\mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_2$. Учитывая произвольность выбора $m \in \mathbb{N}$ и предложение I(а) [13, с. 439], заключаем, что $\mathfrak{A}_2 \equiv \mathfrak{B}_2$. Теорема 1.2 доказана.

§ 2. Существование простой модели для любой характеристики

Покажем, что для любой естественной функции r существует простая модель $\mathfrak{A}$ такая, что $r_{\mathfrak{A}} = r$.

Теорема 2.1. Пусть каждое разложение $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ счетной I -алгебры $\mathfrak{A}$ удовлетворяет следующим условиям:

- (а) если $\mathfrak{B}$ локальна, то для любого $\ell \in N(\mathfrak{B})$ равенство $r_{\mathfrak{A}}(\ell) = \infty$ влечет неравенство $r_{\mathfrak{C}}(\ell) < \infty$;
- (б) если $\mathfrak{B}$ нелокальна, то $\mathfrak{C}$ локальна.

Тогда $\mathfrak{A}$ — простая модель.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $\mathfrak{A}$ нелокальна. Пусть $b_1, \dots, b_k \in \mathfrak{A}$, $n = 2^k - 1$ и $\{0, 1\}^k = \{\vec{\varepsilon}^0, \dots, \vec{\varepsilon}^n\}$. Положим $a_i = b^{\vec{\varepsilon}^i}$, $i \leq n$. Тогда элементы $a_0, \dots, a_n$ не пересекаются и $a_0 \cup \dots \cup a_n = 1$. Среди этих элементов имеется, по крайней мере, один нелокальный. Для определенности будем считать, что элемент a_0 нелокальный. Пусть $1 \leq i \leq n$. Тогда $a_0 \leq \bar{a}_i$. Следовательно, элемент $\bar{a}_i$ нелокальный. Элемент a_i локальный, так как $\mathfrak{A} = (a_i) \times (\bar{a}_i)$. Кроме того, если $\ell \in N(a_i)$ и $r_{a_i}(\ell) = \infty$, то $r_{\bar{a}_i}(\ell) < \infty$. Значит, $r_{a_j}(\ell) < \infty$ для любого $j \neq i$. При $i \geq 1$ обозначим

$$L_i = \{j \in N(a_i) \mid r_{a_i}(j) < \infty\}, \quad L_0 = \{j \in \bigcup_{i \geq 1} M(a_i) \mid r_{a_0}(j) < \infty\}.$$

Рассмотрим формулу

$$\psi(x_0, \dots, x_n) \equiv \left(\bigwedge_{1 \leq i} \bigwedge_{j \in L_i} (r_{x_i}(j) = r_{a_i}(j) \& M(x_i) = M(a_i)) \right) \\ \& \bigwedge_{j \in L_0} (r_{x_0}(j) = r_{a_0}(j)) \& \bigwedge_{i \neq j} (a_i \cap a_j = 0) \& \left(\bigcup_{i \leq n} a_i = 1 \right),$$

а также формулу $\varphi(y_1, \dots, y_k)$, полученную из $\psi(x_0, \dots, x_n)$ подстановкой вместо x_i термов $\bar{y}^{\bar{\epsilon}^i}$, $i \leq n$. Очевидно, что $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \dots, a_n)$ и $\mathfrak{A} \models \psi(b_1, \dots, b_n)$. Покажем, что формула $\varphi(y_1, \dots, y_k)$ будет полной в $\text{Th}(\mathfrak{A})$. Достаточно показать, что теория $\{\varphi(c_1, \dots, c_k)\} \cup \text{Th}(\mathfrak{A})$ полна в сигнатуре $\sigma \cup \{c_1, \dots, c_k\}$. Для последнего достаточно показать, что $(\mathfrak{B}, c_1, \dots, c_k) \models \text{Th}(\mathfrak{A}) \cup \varphi(c_1, \dots, c_k)$ влечет $(\mathfrak{B}, c_1, \dots, c_k) \equiv (\mathfrak{A}, b_1, \dots, b_k)$.

Пусть $d_i \equiv \bar{c}^{\bar{\epsilon}^i}$, $i \leq n$. Тогда $(\mathfrak{B}, d_0, \dots, d_n) \models \text{Th}(\mathfrak{A}) \cup \psi(d_0, \dots, d_n)$. Значит, $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, элементы $d_0, \dots, d_n$ не пересекаются, $d_0 \cup \dots \cup d_n = 1^{\mathfrak{B}}$ и $M(d_i) = M(a_i)$ для $i > 1$. Поэтому $\mathfrak{B}$ нелокальна, а все элементы d_i , $i \geq 1$, локальны.

Покажем, что $r_{d_i} = r_{a_i}$ для любого i . Имеем $r_{\mathfrak{A}} = r_{\mathfrak{B}}$. Пусть $1 \leq i \leq n$ и $j \in M(a_i) = M(d_i)$. Если формула V_j сплошная, то $r_{a_i}(j) = 1 = r_{d_i}(j)$. Пусть формула V_j точечная. Если $r_{a_i}(j) < \infty$, то $j \in N(a_i)$ и $j \in L_i$. Следовательно, $r_{d_i}(j) = r_{a_i}(j)$.

Пусть $r_{a_i}(j) = \infty$. Тогда для любого $\ell \geq 1$ либо $j \notin M(a_\ell)$ (следовательно, $r_{d_\ell}(j) = 0$), либо $j \in N(a_\ell)$ и $r_{a_\ell}(j) < \infty$. Поэтому $j \in L_\ell$ и $r_{d_\ell}(j) = r_{a_\ell}(j) < \infty$. Кроме того, $j \in M(a_i)$ и $r_{a_0}(j) < \infty$, откуда $j \in L_0$ и $r_{d_0}(j) = r_{a_0}(j) < \infty$. Следовательно, $r_{d_i}(j) = r_{(d_0 \cup \dots \cup d_n) \setminus d_i}(j) = \sum_{\ell \neq i} r_{d_\ell}(j) < \infty$. Однако $r_{\mathfrak{B}}(j) = r_{\mathfrak{A}}(j) = \infty$, поэтому $r_{d_i}(j) = \infty$.

Таким образом, $r_{d_i} = r_{a_i}$ для любого $i \geq 1$. Элементы a_i и d_i локальные. Следовательно, $(d_i) \equiv (a_i)$ по теореме 4 [10, с. 44].

Докажем теперь, что $r_{a_0} = r_{d_0}$. Имеем

$$a_0 = \overline{a_1 \cup \dots \cup a_n}, \quad b_0 = \overline{b_1 \cup \dots \cup b_n},$$

$$M(a_1 \cup \dots \cup a_n) = M(b_1 \cup \dots \cup b_n), \quad r_{\mathfrak{A}} = r_{\mathfrak{B}}.$$

Поэтому $r_{a_0}(j) = r_{d_0}(j)$ для $j \notin M(a_1 \cup \dots \cup a_n)$. Пусть $j \in M(a_1 \cup \dots \cup a_n) = \bigcup_{i \geq 1} M(a_i)$. Если $r_{a_i}(j) = \infty$ для некоторого $i \geq 1$, то $r_{a_0}(j) < \infty$, $j \in L_0$ и $r_{d_0}(j) = r_{a_0}(j)$. Пусть $r_{a_i}(j) < \infty$ для любого $i \geq 1$. Тогда

$$r_{a_1 \cup \dots \cup a_n}(j) = \sum_{i \geq 1} r_{a_i}(j) = r_{d_1 \cup \dots \cup d_n}(j) < \infty, \quad r_{\mathfrak{A}}(j) = r_{\mathfrak{B}}(j).$$

Если $r_{\mathfrak{A}}(j) = \infty$, то $r_{a_0}(j) = \infty$, $r_{\mathfrak{B}}(j) = \infty$ и $r_{d_0}(j) = \infty$. Если $r_{\mathfrak{A}}(j) < \infty$, то $r_{a_0}(j) = r_{\mathfrak{A}}(j) - r_{a_1 \cup \dots \cup a_n}(j) = r_{\mathfrak{B}}(j) - r_{d_1 \cup \dots \cup d_n}(j) = r_{d_0}(j)$. Таким образом, мы доказали, что $r_{a_0} = r_{d_0}$. Однако $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} = (a_0) \times (a_1 \cup \dots \cup a_n)$, $\mathfrak{B} = (d_0)(d_1 \cup \dots \cup d_n)$. Кроме того, $a_1 \cup \dots \cup a_n$ и $d_1 \cup \dots \cup d_n$ локальны. По теореме 1.2 $(a_0) \equiv (d_0)$.

Итак, $(a_i) \equiv (d_i)$ для любого i . В силу предложения, доказанного в введении, имеем $(\mathfrak{A}, a_0, \dots, a_n) \equiv (\mathfrak{B}, d_0, \dots, d_n)$.

Заметим, что $b_1, \dots, b_k$ термально выражаются через $a_0, \dots, a_n$, а $c_1, \dots, c_k$ — через $d_0, \dots, d_n$, причем таким же образом, как и $b_1, \dots, b_k$ через $a_0, \dots, a_n$. Следовательно, $(\mathfrak{A}, b_1, \dots, b_k) \equiv (\mathfrak{B}, c_1, \dots, c_k)$. Мы доказали этот факт, предположив, что $(\mathfrak{B}, c_1, \dots, c_k) \models \text{Th}(\mathfrak{A}) \cup \{\varphi(c_1, \dots, c_k)\}$. Значит, теория $\text{Th}(\mathfrak{A}) \cup \{\varphi(c_1, \dots, c_k)\}$ порождает полную теорию и формула $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ полна в $\text{Th}(\mathfrak{A})$. Таким образом, на любых элементах $b_1, \dots, b_k \in \mathfrak{A}$ реализуется формула $\varphi(x_1, \dots, x_k)$. Следовательно, $\mathfrak{A}$ — простая модель.

В случае локальной алгебры $\mathfrak{A}$ рассуждения упрощаются: все a_i , $0 \leq i \leq n$, локальны. Определим L_i , $i \geq 1$, так же, как в случае нелокальной $\mathfrak{A}$, а L_0 — как все другие L_i . Положим

$$\psi(x_0, \dots, x_n) \equiv \left(\bigwedge_i \left(\bigwedge_{j \in L_i} (r_{x_i}(j) = r_{a_i}(j)) \right) \& M(x_i) = M(x_j) = M(a_i) \right) \\ \& \left(\bigwedge_{i \neq j} (a_i \cap a_j = 0) \right) \& \left(\bigcup_i a_i = 1 \right).$$

Далее доказательство такое же, как в случае нелокальной $\mathfrak{A}$, только a_0 рассматривается как и другие a_i , $i \geq 1$. Теорема 2.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Условие (а) теоремы 2.1 необходимо, чтобы I -алгебра была простой моделью. Именно, для любого разложения $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ простой I -алгебры $\mathfrak{A}$ если $\mathfrak{C}$ локальна, то для любого $\ell \in N(\mathfrak{C})$ равенство $r_{\mathfrak{C}}(\ell) = \infty$ влечет $r_{\mathfrak{B}}(\ell) < \infty$. Действительно, пусть $\mathfrak{A}$ — простая модель, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}$ локальна, $\ell \in N(\mathfrak{C})$, $r_{\mathfrak{C}}(\ell) = \infty$ и $r_{\mathfrak{B}}(\ell) = \infty$. Тогда для некоторого ℓ -простого элемента $a \in \mathfrak{A}$ имеем $r_a(\ell) = \infty$ и $r_{\bar{a}}(\ell) = \infty$.

Пусть $\varphi(x)$ — полное предложение, $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$ и $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\varphi(x)$ устойчива относительно m -эквивалентности. Рассмотрим ℓ -простой элемент $b \leq a$ такой, что $r_b(\ell) = 2^m$. Тогда $(a) \equiv_m (b)$ и $(\bar{a}) \times (a) \equiv_m (\bar{a}) \times (b)$. Поскольку $r_{\bar{a}}(\ell) = \infty$ и элементы a, b ℓ -простые, имеем $r_{\mathfrak{A}} = r_{\bar{a}} = r_{\bar{a} \cup b}$. В силу теоремы 1.1 $\mathfrak{A} \equiv (\bar{a}) \equiv (\bar{a} \cup b)$. Поскольку $(a) \equiv_m (b)$ и $(\bar{a}) \times (a) \equiv_m (\bar{a}) \times (b)$, получаем $(\mathfrak{A}, a) \equiv_m ((\bar{a} \cup b), b)$ и $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$. Следовательно, $((\bar{a} \cup b), b) \models \varphi(b)$. Таким образом, $((\bar{a} \cup b), b) \models \text{Th}(\mathfrak{A}) \cup \varphi(b)$. Однако $((\bar{a} \cup b), b) \not\equiv (\mathfrak{A}, a)$, так как $r_a(\ell) = \infty \neq r_b(\ell) = 2^m$. Мы пришли к противоречию с тем, что $\varphi(x)$ — полная формула. Значит, $\mathfrak{A}$ — не простая модель.

Теорема 2.2. Для любой естественной функции r существует простая модель $\mathfrak{A}$ такая, что $r_{\mathfrak{A}} = r$.

Доказательство. Заметим сначала, что при доказательстве теоремы 2 [10, с. 24] и теоремы 5 [10, с. 44] для каждого $n \in \mathbb{N}$ была построена простая модель $\mathfrak{N}_n \models V_n(1)$. (В теореме 2 [10] рассматривался случай одного выделенного идеала и использовалось обозначение (x_n, I) вместо обозначения $\mathfrak{N}_n$, введенного здесь. Случай λ выделенных идеалов — теорема 5 [10] — аналогичен).

Здесь мы воспроизведем построение модели $\mathfrak{N}$ такой, что $r_{\mathfrak{N}} = r$, и покажем, что построенная модель простая. Определим последовательность $\mathfrak{A}_n$, $n \in M(r)$, следующим образом:

$\mathfrak{A}_n \equiv \mathfrak{N}_n$, если $n \in M(r)$ и $n \notin N(r)$;
 $\mathfrak{A}_n \equiv \mathfrak{N}_n \times \dots \times \mathfrak{N}_n$ — $r(n)$ раз, если $n \in N(r)$ и $r(n) < \infty$;
 $\mathfrak{A}_n$ — ω -смешивание (см. [10, с. 25] либо [9, с. 328]) счетного числа экземпляров $\mathfrak{N}_n$, если $n \in N(r)$ и $r(n) = \infty$; причем $I_j^{\mathfrak{A}_n} \equiv |\mathfrak{A}_n|$, если формула V_n j -идеальна для $j \leq \lambda$.

Из определения и свойств ω -смешивания [9, 10] вытекает

Предложение 2.1. Если $\mathfrak{A}$ — ω -смешивание I -алгебр $\mathfrak{A}_n$, то для любого элемента a найдется число $\ell \in \mathbb{N}$ такое, что либо $a \leq \bigcup_{j \leq \ell} 1^{\mathfrak{A}_j}$ и $\bar{a} \geq 1^{\mathfrak{A}_j}$ при $j > \ell$, либо $\bar{a} \leq \bigcup_{j \leq \ell} 1^{\mathfrak{A}_j}$ и $a \geq 1^{\mathfrak{A}_j}$ при $j > \ell$.

Если r локальна, т. е. $M(r)$ конечно, то полагаем $\mathfrak{A} \equiv \prod_{n \in M(r)} \mathfrak{A}_n$. Тогда $\mathfrak{A}$ простая. Действительно, пусть $a \in \mathfrak{A}$, $a = \bigcup_{n \in M(r)} a_n$, где $a_n \in \mathfrak{A}_n$. Если $r_{a_i}(j) = \infty$ для некоторого $j \in N(a)$, то $j \in N(a_i)$ и $r_{a_i}(j) = \infty$ для некоторого $i \in M(r)$. Если $r_{a_i}(i) < \infty$, то по построению $\mathfrak{A}_i$ существует элемент $c \in \mathfrak{N}_i$ такой, что $r_c(j) = \infty$ и $j \in N(c)$. Поэтому $V_j \ll V_i$ и $r_{1_{\mathfrak{N}_i \setminus c}}(j) = \infty$. Мы пришли к противоречию с тем, что модель $\mathfrak{N}_i$ простая. Следовательно, $r_{a_i}(i) = \infty$. Но тогда элемент a_i будет i -простым, поскольку $a_i \in \mathfrak{A}_i$. Таким образом, $j = i$, так как $j \in N(a_i)$. Поэтому $j \in N(r)$ и $r_{\mathfrak{A}_n}(j) = 0$, $r_{1_{\mathfrak{A}_i \setminus a_i}}(j) < \infty$ при $n \neq j$, поскольку $j = i \in N(r)$. Отсюда заключаем, что $r_{\bar{a}}(j) < \infty$. Значит, модель $\mathfrak{A}$ простая.

Пусть функция r нелокальна. В этом случае в качестве $\mathfrak{A}$ берем ω -смешивание I -алгебр $\mathfrak{A}_n$. Определяем для тех I_j , $j \leq \lambda$, для которых V_n будет j -идеальной при произвольном n образом. Полагаем $1^{\mathfrak{A}} \in I_j$ либо $1^{\mathfrak{A}} \notin I_j$.

Покажем, что модель $\mathfrak{A}$ простая. Пусть $a \in \mathfrak{A}$, $r_a(j) = \infty$ для $j \in N(a)$ и элемент a локальный. Тогда $a \in \prod_{n \in M(r)} \mathfrak{A}_n$ для некоторого ℓ . Как доказано выше, $j \in N(r)$. Поэтому $r_{\mathfrak{A}_n}(j) = 0$ для всех $n \neq j$, следовательно, найдется j -простой элемент $a_j \leq a$ такой, что $r_{1_{\mathfrak{A}_j \setminus a_j}}(j) < \infty$. Значит, $r_{\bar{a}}(j) < \infty$. По теореме 2.1 модель $\mathfrak{A}$ простая. Теорема 2.2 доказана.

Следствие 2.1. Для любой естественной функции r существует простая модель $\mathfrak{A}$ такая, что $r_{\mathfrak{A}} = r$, и выполнено равенство

$$\{j \leq \lambda \mid 1^{\mathfrak{A}} \in I_j^{\mathfrak{A}}\} = \{j \leq \lambda \mid V_n \text{ } j\text{-идеальна для любого } n \in M(r)\}.$$

Определение 2.1. Естественная функция r называется *идеально определенной*, если для любого $j \leq \lambda$ найдется число $n \in M(r)$ такое, что формула V_n j -неидеальная.

Следствие 2.2. Если нелокальная естественная функция r не является идеально определенной, то существуют простые модели $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ такие, что $r_{\mathfrak{A}} = r_{\mathfrak{B}} = r$ и $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$.

Доказательство. Пусть для $j \leq \lambda$ и любого $n \in M(r)$ формула V_n является j -идеальной. Рассмотрим построение простой модели с характеристикой r в теореме 2.2. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — ω -смешивания I -алгебр $\mathfrak{A}_n$, $n \in M(r)$, причем $1^{\mathfrak{A}} \in I_j$, $1^{\mathfrak{B}} \notin I_j$. Тогда модели $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ простые, но $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$. Следствие 2.2 доказано.

Следствие 2.3. Если для нелокальной естественной функции r найдется $m \in N(r)$ такое, что формула V_m сплошная либо $r(m) = \infty$, то существуют простые модели $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ такие, что $r_{\mathfrak{A}} = r_{\mathfrak{B}} = r$ и $\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B}$.

Доказательство. Пусть $m \in N(r)$ и формула V_m сплошная либо $r(m) = \infty$. Рассмотрим построение простой модели для r в доказательстве теоремы 2.2, а именно последовательность $\mathfrak{A}_n$. Положим

$$\mathfrak{B}_{2n} \equiv \mathfrak{A}_n, \quad n \neq m; \quad \mathfrak{B}_{2m} = \mathfrak{A}_m; \quad \mathfrak{B}_{2n-1} \equiv \mathfrak{A}_m.$$

Пусть $\mathfrak{A}$ — ω -смешивание $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B}$ — ω -смешивание $\mathfrak{B}_n$. Нетрудно проверить, что тогда $r_{\mathfrak{A}} = r_{\mathfrak{B}} = r$. Из доказательства теоремы 2.2 видно, что модель $\mathfrak{A}$ простая. Аналогично доказывается, что модель $\mathfrak{B}$ простая. Заметим, что $\mathfrak{A} \models (\exists z)$

$$((z \text{ } m\text{-простой}) \ \& \ r_{\bar{z}}(m) = 0).$$

В качестве z можно взять $1^{\mathfrak{A}_m}$. Кроме того,

$$\mathfrak{B} \models \neg(\exists z)((z \text{ } m\text{-простой}) \ \& \ r_{\bar{z}}(m) = 0).$$

Действительно, если элемент z m -простой, то он локальный, а $\bar{z}$ — нелокальный. По построению $\mathfrak{B}$ легко проверить, что если $b \in \mathfrak{B}$ b -нелокальный, то $r_b(m) = \infty$. Таким образом, $\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B}$. Следствие 2.3 доказано.

Следствие 2.4. Для любой естественной функции r существует простая модель $\mathfrak{A}$ такая, что любое разложение $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ удовлетворяет следующим условиям:

- (а) если $\mathfrak{B}$ локальна, то для любого $\ell \in N(\mathfrak{B})$ равенство $r_{\mathfrak{B}}(\ell) = \infty$ влечет $r_{\mathfrak{C}}(\ell) < \infty$;
- (б) если $\mathfrak{B}$ нелокальна, то $\mathfrak{C}$ локальна.

Следствие 2.5. Если булева алгебра $\mathfrak{A}$ суператомна, то $\text{Th}(\mathfrak{A}, I)$ имеет простую модель для любого идеала $I \subseteq |\mathfrak{A}|$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ суператомна, $I \subseteq |\mathfrak{A}|$, $(\mathfrak{B}, J)$ — простая модель и $r_{(\mathfrak{B}, J)} = r_{(\mathfrak{A}, I)}$. В силу следствия 2 [9, с. 343] имеем тождество $(\mathfrak{A}, I) \equiv (\mathfrak{B}, J)$. Поэтому $(\mathfrak{B}, J)$ — простая модель теории $\text{Th}(\mathfrak{A}, I)$. Следствие 2.5 доказано.

Следствие 2.6. Если I -алгебра $\mathfrak{A}$ локальна, то $\text{Th } \mathfrak{A}$ имеет простую модель.

Доказательство следует из теоремы 2.2 и теоремы 4 [10, с. 44].

Таким образом, у I -алгебр $\mathfrak{A}$ с достаточно «маленькой» характеристикой $r_{\mathfrak{A}}$ теория $\text{Th } \mathfrak{A}$ имеет простую модель. Таким же свойством обладает I -алгебра с самой большой характеристикой. Действительно, нетрудно доказать, что существует (единственная) естественная функция $r^{\max}$ такая, что $r' \leq r^{\max}$ для любой естественной функции r' , где $r^{\max}$ однозначно определяется свойством $r^{\max}(n) \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Следствие 2.7. Пусть функция r такая, что $r(n) \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда

- (а) для любых I -алгебр $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ если $r_{\mathfrak{A}} = r_{\mathfrak{B}} = r$, то $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$;
 (б) для любой I -алгебры $\mathfrak{A}$ если $r_{\mathfrak{A}} = r$, то $\text{Th } \mathfrak{A}$ имеет простую модель.

Доказательство. (а) Пусть $r_{\mathfrak{A}} = r_{\mathfrak{B}} = r$, $m \in \mathbb{N}$. Докажем, что $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$. В силу следствия 1(в) [13, с. 451], найдутся конечно аксиоматизируемые I -алгебры $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ такие, что $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{B} \equiv_m \mathfrak{B}_1$. По определению функции r имеем $r_{\mathfrak{A}_1} \leq r = r_{\mathfrak{B}}$ и $r_{\mathfrak{B}_1} \leq r = r_{\mathfrak{A}}$. Ввиду конечной аксиоматизируемости $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, а также теоремы 1(4) [13, с. 450] и аналога леммы 6 [10, с. 19, 44] для случая λ выделенных идеалов можно найти $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ и $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$ такие, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_2 \times \mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_2 \times \mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{B}_3$ и $\mathfrak{B}_1 \equiv \mathfrak{A}_3$. Поэтому $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{B}_2$. Кроме того, $r_{\mathfrak{A}_2} = r_{\mathfrak{A}} = r$ и $r_{\mathfrak{B}_2} = r_{\mathfrak{B}} = r$. В силу теоремы 1.1 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B}_2$. Поэтому $\mathfrak{A}_1 \equiv_m \mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{B}_1 \equiv_m \mathfrak{B}_2$. По лемме 2(в) [13, с. 442] $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_2 \times \mathfrak{A}_1 \cong \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{B}_2 \equiv \mathfrak{B}$, т.е. $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.

Итак, для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$. Следовательно, в силу предложения 1(а) [13, с. 439] $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

(б) Доказательство следует из утверждения (а) и теоремы 2.2.

Следствие 2.7 доказано.

Следствие 2.8. Если I -алгебра $\mathfrak{A}$ — простая модель, $\mathfrak{A} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ — локальная I -алгебра, то $\mathfrak{M}$ — простая модель.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{A}$ — простая модель, в силу замечания 2.1 $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию (а) теоремы 2.1. Нетрудно заметить, что этому условию удовлетворяет также I -алгебра $\mathfrak{M}$. Поскольку $\mathfrak{M}$ локальна, условие (б) теоремы 2.1 для нее выполнено автоматически. Таким образом, $\mathfrak{M}$ — простая модель. Следствие 2.8 доказано.

§ 3. Теории, не имеющие счетно насыщенной модели

В этом параграфе мы рассмотрим теории, имеющие простую модель, но не имеющие счетно насыщенной модели.

Предложение 3.1. Пусть для естественной функции r существует бесконечное множество $L \subseteq M(r)$ такое, что V_i , $i \in L$, попарно независимы. Тогда не существует счетно насыщенной модели $\mathfrak{N}$ такой, что $r_{\mathfrak{N}} = r$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}$ — счетная I -алгебра и $r_{\mathfrak{N}} = r$. Тогда $L \subseteq M(\mathfrak{N})$ и все V_i , $i \in L$, попарно независимы. Рассмотрим формулы $\psi_i(x) \equiv (\exists y \leq x) V_i(y)$, $i \in L$. Пусть $H \subseteq L$. Положим

$$t_H(x) \equiv \{\psi_i(x) \mid i \in H\} \cup \{\neg\psi_i(x) \mid i \in L \setminus H\}.$$

Поскольку V_i , $i \in L$, независимы, множество $\text{Th}(\mathfrak{N}) \cup t_H(x)$ локально. Следовательно, множество $\text{Th}(\mathfrak{N}) \cup t_H(x)$ совместно и существует тип $T_H(x) \supseteq t_H(x)$, совместный с $\text{Th } \mathfrak{N}$. Ясно, что если $H_1 \neq H_2$, то типы $T_{H_1}(x)$ и $T_{H_2}(x)$ различны. Множество L бесконечно, поэтому существует континуум различных $H \subseteq L$ и, соответственно, континуум различных типов $T_H(x)$, совместных с $\text{Th}(\mathfrak{N})$. Таким образом, модель $\mathfrak{N}$ не счетно насыщена. Предложение 3.1 доказано.

Следствие 3.1. Если для I -алгебры $\mathfrak{A}$ существует бесконечное множество $L \subseteq M(\mathfrak{A})$ такое, что $V_i, i \in L$, независимы, то $\text{Th}(\mathfrak{A})$ не имеет счетно насыщенной модели.

Доказательство. Если $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, то $r_{\mathfrak{A}} = r_{\mathfrak{B}}$. Поэтому $\mathfrak{B}$ не является счетно насыщенной. Следствие 3.1 доказано.

Если $\mathfrak{B}$ — булева алгебра, $\mathfrak{C} = (\mathfrak{B}, I_1, \dots, I_\lambda)$, то I -алгебра $\mathfrak{C}$ называется I -обогащением булевой алгебры $\mathfrak{B}$. В [21] анонсирована следующая

Теорема 3.1. Если счетная булева алгебра $\mathfrak{A}$ не суператомна, то существует континуум ее I -обогащений $\mathfrak{C}$ с различными $\text{Th} \mathfrak{C}$, имеющими простую, но не имеющими счетно насыщенной модели.

Доказательство.

Случай 1: $\mathfrak{A}$ не атомна. Тогда существует разложение $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{L}$, где алгебра $\mathfrak{B}$ безатомна. Чтобы выделить идеал I в алгебре $\mathfrak{A}$, достаточно его выделить в алгебрах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{L}$.

Определим множество $M(\mathfrak{B}, \mathfrak{L})$. Для этого выберем некоторые формулы $A(x), B(x), C(x)$ и будем строить $M(\mathfrak{B}, \mathfrak{L})$ из номеров n таких, что $V_n > A, V_n > B, V_n > C$ либо $V_n < P \in \{A, B, C\}$. Строение множества M иллюстрирует рис. 1.

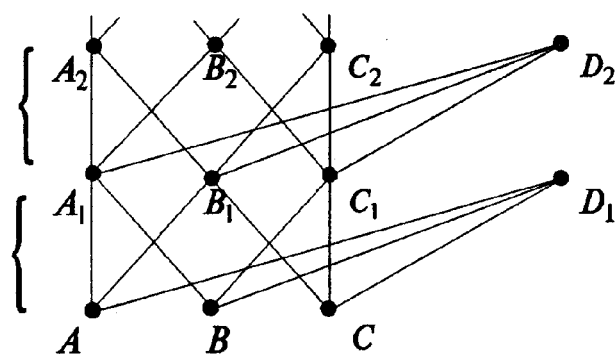
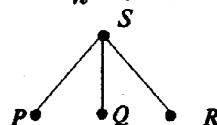


Рис. 1

На этом рисунке точки обозначают формулы, принадлежащие множеству $\{V_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$, линии — связь между ними. Например, пусть формула S построена непосредственно из формул P, Q, R (см. [10, §4]), т.е. для любого $n \in \mathbb{N}$ если $V_n \neq S$, то $V_n < S$ тогда и только тогда, когда либо $V_n < P$, либо $V_n < Q$, либо $V_n < R$. Тогда эту связь

будем изображать при помощи диаграммы



находящиеся «выше» A, B и C , будем считать точечными.

Предположим, что все формулы, находящиеся «выше» A, B , и C , являются точечными. В качестве A, B, C возьмем следующие формулы:

$$A(x) \Leftrightarrow (\hat{x} \cap I_1 = \hat{0}) \& (x \neq 0) \& (x \text{ безатомный}) \& \bigwedge_{j>i} (x \in I_j),$$

$$B(x) \Leftrightarrow (x/I_1 - \text{атом}) \& (x \text{ безатомный}) \& \bigwedge_{j>i} (x \in I_j),$$

$$C(x) \Leftrightarrow (0 \neq x / I_1 \text{ безатомный}) \& (x \text{ безатомный}) \& (\forall y \leq x) \\ (\neg A(y)) \& \bigwedge_{j>1} (x \in I_j)$$

(см. [10, с. 8 и § 4]; формулы рассматриваются с точностью до эквивалентности в теории T класса I -алгебр).

Для произвольной функции $\varepsilon : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ (далее будем использовать обозначение $\varepsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$) множество $M(S, I)$ и рис. 1 изменим следующим образом: для $n \in \mathbb{N}$ если $\varepsilon = 0$, то формулы A_n^ε , B_n^ε и C_n^ε связаны с A_{n-1}^ε , B_{n-1}^ε и C_{n-1}^ε так же, как формулы A_n , B_n и C_n связаны с A_{n-1} , B_{n-1} и C_{n-1} . Если $\varepsilon(n) = 1$, то A_n^ε , B_n^ε и C_n^ε связаны с A_{n-1}^ε , B_{n-1}^ε и C_{n-1}^ε так, как изображено на рис. 2.

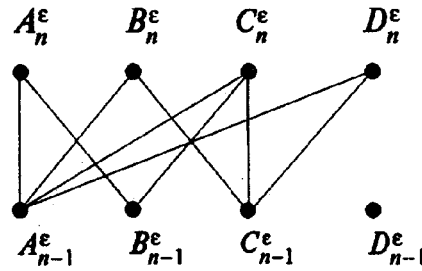


Рис. 2

Пусть

$$M^\varepsilon \Leftrightarrow \{n \mid V_n < A_m^\varepsilon, \text{ либо } V_n < B_m^\varepsilon, \text{ либо } V_n < C_m^\varepsilon, \\ \text{либо } V_n < D_m^\varepsilon \text{ для некоторого } m \in \mathbb{N}\},$$

$$L^\varepsilon \Leftrightarrow \{n \mid V_n = D_m^\varepsilon \text{ для некоторого } m \in \mathbb{N}\}; \quad L^\varepsilon \subseteq M^\varepsilon.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ положим

$$r^\varepsilon(n) \Leftrightarrow \begin{cases} 0, & \text{если } n \notin M^\varepsilon, \\ 1, & \text{если } n \in M^\varepsilon, V_n \text{ — сплошная формула,} \\ 1, & \text{если } n \in L^\varepsilon \\ \infty, & \text{если } n \in M^\varepsilon \setminus L^\varepsilon, V_n \text{ — точечная формула.} \end{cases}$$

Нетрудно доказать, что множество M^ε и функция r^ε естественные, $N(r^\varepsilon) = L^\varepsilon$, формулы V_n , $n \in L^\varepsilon$, независимы, $M(r^\varepsilon) = M^\varepsilon$ и $r^\varepsilon \neq r^\delta$ при $\varepsilon \neq \delta$.

В силу теоремы 2.2 для каждого $\varepsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ найдется простая модель $\mathfrak{B}^\varepsilon$ такая, что $r_{\mathfrak{B}^\varepsilon} = r^\varepsilon$. Согласно определению характеристики r модель $\mathfrak{B}^\varepsilon$ будет безатомной. Кроме того, $\mathfrak{B}^\varepsilon$ счетна. В силу предложения 1 [16, с. 30] $\mathfrak{B}^\varepsilon \upharpoonright_{\sigma b} \cong \mathfrak{B}$. Будем считать, что (после переобозначения) $\mathfrak{B}^\varepsilon \upharpoonright_{\sigma b} = \mathfrak{B}$. Обозначим через $\mathfrak{C}^*$ I -обогащение булевой алгебры $\mathfrak{C}$ такое, что $1^{\mathfrak{C}^*} \in I_\ell^{\mathfrak{C}^*}$ для любого $\ell \leq \lambda$. Это I -обогащение единственно.

Положим $\mathfrak{B}^\varepsilon \hat{=} \mathfrak{B}^\varepsilon \times \mathfrak{C}^*$. В силу следствия 2.1 найдется простая модель $\mathfrak{M}$ такая, что $r_{\mathfrak{M}} = r_{\mathfrak{C}^*}$ и

$$\{j \leq \lambda \mid 1^{\mathfrak{M}} \in I_j^{\mathfrak{M}}\}$$

$$= \{j \leq \lambda \mid V_n \text{ } j\text{-идеальна для любого } n \in M(r_{\mathfrak{C}^*})\} = \hat{\lambda}.$$

Поэтому $1^{\mathfrak{M}} \in I_\ell^{\mathfrak{M}}$ для любого $\ell \leq \lambda$. Нетрудно доказать (см. [10, с. 20]), что равенство $r_{\mathfrak{C}^*} = r_{\mathfrak{M}}$ означает, что величина

$$\text{ch}(\mathfrak{C}) = \text{ch}(\mathfrak{M} \upharpoonright_{\sigma b})(\text{ch}(\mathfrak{N}) = \langle \text{ch}_1(\mathfrak{N}), \text{ch}_2(\mathfrak{N}), \text{ch}_3(\mathfrak{N}) \rangle)$$

есть элементарная характеристика Ершова — Тарского булевой алгебры [2, с. 22]. В силу теоремы 3 [2, с. 25] $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{M}[\sigma b]$ и $\mathfrak{C}^* \equiv \mathfrak{M}$. Поэтому $\mathfrak{L}^\varepsilon \equiv \mathfrak{B}^\varepsilon \times \mathfrak{M}$. Обозначим $\mathfrak{N}^\varepsilon \equiv \mathfrak{B}^\varepsilon \times \mathfrak{M}$. Докажем, что $\mathfrak{N}^\varepsilon$ — простая модель.

Если $\text{ch}_1(\mathfrak{C}) < \infty$, то $\mathfrak{C}^*$ локальна (см. [10, с. 20–22]). Поэтому $\mathfrak{M}$ локальна. Несложно проверить, что I -алгебра $\mathfrak{N}^\varepsilon$ удовлетворяет условиям (а), (б) теоремы 2.1. Достаточно заметить, что если для $n \in \mathbb{N}$ выполняется условие $r_m(n) = \infty$, то $r_{\mathfrak{B}^\varepsilon}(n) = 0$ и если $r_{\mathfrak{B}^\varepsilon}(n) = \infty$, то $r_m(n) = 0$. Таким образом, $\mathfrak{N}^\varepsilon$ — простая модель.

Пусть $\text{ch}_1(\mathfrak{C}) = \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{N}^\varepsilon$. Полагаем $c_i \equiv a_i \cap 1^{\mathfrak{B}^\varepsilon}$, $d_i \equiv a_i \cap 1^{\mathfrak{M}}$. Предположим, что заданы $m \in \mathbb{N}$, формула $\chi(x_1, \dots, x_m)$ и переменная y , не входящая в $\chi(x_1, \dots, x_m)$. Обозначим через $\chi^0(x_1, \dots, x_m, y)$ формулу, полученную из $\chi(x_1, \dots, x_m)$ заменой $\bar{v}$ на $y \setminus v$ и кванторов $\exists v, \forall v$ на $(\exists v \leq y), (\forall v \leq y)$ соответственно. Очевидно, что для любых I -алгебры $\mathfrak{N}$ и $p, p_1, \dots, p_m \in N$ соотношение $\mathfrak{N} \models \chi^0(p_1, \dots, p_m, p)$ выполнено тогда и только тогда, когда $(p) \models \text{chi}(p_1, \dots, p_m)$.

Поскольку модели $\mathfrak{B}^\varepsilon, \mathfrak{M}$ простые и $c_1, \dots, c_n \in \mathfrak{B}^\varepsilon, d_1, \dots, d_n \in \mathfrak{M}$, найдутся полные (в теориях $\text{Th} \mathfrak{B}^\varepsilon$ и $\text{Th} \mathfrak{M}$ соответственно) формулы $\psi(x_1, \dots, x_n), \varphi(y_1, \dots, y_n)$ такие, что

$$\mathfrak{B}^\varepsilon \models \psi(c_1, \dots, c_n), \quad \mathfrak{M} \models \varphi(d_1, \dots, d_n).$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta(z_1, \dots, z_n) \equiv & (\exists x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, v) \\ & \left(\bigwedge_{i \leq n} (z_i = x_i \cup y_i \ \& \ x_i \leq \cup \ \& \ y_i \leq \bar{v}) \right) \ \& \ (v \text{ — безатомный элемент}) \\ & \ \& \ \bigwedge_{\ell \leq \lambda} (\bar{v} \in I_\ell \ \& \ \psi^0(x_1, \dots, x_n, v) \ \& \ \varphi^0(y_1, \dots, y_n, \bar{v})). \end{aligned}$$

Очевидно, что $\mathfrak{N}^\varepsilon \models \Delta(a_1, \dots, a_n)$, если $x_i \equiv c_i, y_i \equiv d_i, v \equiv 1^{\mathfrak{B}^\varepsilon}$.

Покажем, что $\Delta(z_1, \dots, z_n)$ — полная формула. Пусть $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}^\varepsilon$ и $\mathfrak{N} \models \Delta(g_1, \dots, g_n)$ для некоторых $g_1, \dots, g_n \in \mathfrak{N}$. Тогда найдутся $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, u \in \mathfrak{N}$, для которых выполнена бескванторная часть Δ ; $\mathfrak{N} = (u) \times (\bar{u})$. Будем считать, что $p_1, \dots, p_n \in (u)$ и $q_1, \dots, q_n \in (\bar{u})$. Нетрудно доказать, что $\text{ch}_1(\mathfrak{N}[\sigma b]) = \infty$. Кроме того, элемент u безатомный, поэтому $\text{ch}_1((\bar{u})[\sigma b]) = \infty$. Следовательно, $(\bar{u}) \equiv \mathfrak{M}$ [2, с. 25]. Покажем, что $(u) \equiv \mathfrak{B}^\varepsilon$. Пусть $(u) \models \Phi$ для некоторого предложения Φ . Тогда

$$\mathfrak{N} \models (\exists v)(\Phi^0(v) \ \& \ (v \text{ безатомный}) \ \& \ \bigwedge_{\ell \leq \lambda} (\bar{v} \in I_\ell)).$$

Значит, существует элемент $a \in \mathfrak{N}^\varepsilon$ такой, что $\mathfrak{N}^\varepsilon \models \Phi^0(a)$, a безатомный и $\bar{a} \in I_\ell$ для любого $\ell \leq \lambda$. Поэтому $a \setminus 1^{\mathfrak{B}^\varepsilon} = a \cap 1^{\mathfrak{M}} \in I_\ell, 1^{\mathfrak{B}^\varepsilon} \setminus a = 1^{\mathfrak{B}^\varepsilon} \cap \bar{a} \in I_\ell$ и оба эти элемента при $\ell \leq \lambda$ безатомные. Следовательно, элементы $a \setminus 1^{\mathfrak{B}^\varepsilon}$ и $1^{\mathfrak{B}^\varepsilon} \setminus a$ локальны. Обозначим $a' \equiv a \cup 1^{\mathfrak{B}^\varepsilon}$. Тогда $(a') = 1^{\mathfrak{B}^\varepsilon} \times (a \setminus 1^{\mathfrak{B}^\varepsilon}), a' = (a) \times (1^{\mathfrak{B}^\varepsilon} \setminus a)$ и $r_{a'} = r_a = r_{\mathfrak{B}^\varepsilon}$. По теореме 1.1 $\mathfrak{B}^\varepsilon \equiv (a') \equiv (a)$. Кроме того, $\text{ch}_1((\bar{a})[\sigma^B]) = \infty$ и $(\bar{a}) \equiv \mathfrak{M}$. Следовательно, $(\mathfrak{N}^\varepsilon, a) \equiv (\mathfrak{N}^\varepsilon, 1^{\mathfrak{B}^\varepsilon})$ и $\mathfrak{N}^\varepsilon \models \Phi^0(1^{\mathfrak{B}^\varepsilon})$. Поэтому $\mathfrak{B}^\varepsilon \models \Phi$. Таким образом, мы доказали, что $(u) \equiv \mathfrak{B}^\varepsilon$.

Ввиду вышеизложенного

$$(u) \equiv \mathfrak{B}^\varepsilon, \quad (\bar{u}) \equiv \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{N} \models \psi^0(p_1, \dots, p_n, u), \quad \mathfrak{N} \models \varphi^0(q_1, \dots, q_n, \bar{u}).$$

Следовательно, $(u) \models \psi(p_1, \dots, p_n)$ и $(\bar{u}) \models \varphi(q_1, \dots, q_n)$. Однако формула $\psi(x_1, \dots, x_n)$ полна в теории $\text{Th } \mathfrak{B}^\varepsilon = \text{Th}(u)$, а формула $\varphi(y_1, \dots, y_n)$ полна в теории $\text{Th } \mathfrak{M} = \text{Th}(\bar{u})$. Поскольку $\mathfrak{B}^\varepsilon \models \psi(c_1, \dots, c_n)$ и $\mathfrak{M} \models \varphi(d_1, \dots, d_n)$, имеем $(\mathfrak{B}^\varepsilon, c_1, \dots, c_n) \equiv ((u), p_1, \dots, p_n)$ и $(\mathfrak{M}, d_1, \dots, d_n) \equiv ((\bar{u}), q_1, \dots, q_n)$. Поэтому

$$(\mathfrak{N}^\varepsilon, c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n) \equiv (\mathfrak{N}, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n),$$

$$(\mathfrak{N}^\varepsilon, a_1, \dots, a_n) \equiv (\mathfrak{N}, g_1, \dots, g_n).$$

Итак, мы доказали, что для любых модели $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}^\varepsilon$ и элементов $g_1, \dots, g_n \in \mathfrak{N}$ соотношение $\mathfrak{N} \models \Delta(q_1, \dots, q_n)$ приводит к следующему тождеству: $(\mathfrak{N}, q_1, \dots, q_n) \equiv (\mathfrak{N}^\varepsilon, a_1, \dots, a_n)$. Поэтому $\Delta(z_1, \dots, z_n)$ — полная формула в теории $\text{Th } \mathfrak{N}^\varepsilon$, истинная на $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{N}^\varepsilon$. Следовательно, на любом кортеже формула $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{N}^\varepsilon$ истинная и полная в $\text{Th } \mathfrak{N}^\varepsilon$. Мы доказали, что $\mathfrak{N}^\varepsilon$ — простая модель.

Таким образом, для любого $\varepsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ и любого значения характеристики $\text{ch}_1(\mathfrak{C})$ существует I -алгебра $\mathfrak{L}^\varepsilon$ и простая модель $\mathfrak{N}^\varepsilon \equiv \mathfrak{L}^\varepsilon = \mathfrak{B}^\varepsilon \times \mathfrak{C}^*$, где $\mathfrak{L}^\varepsilon[\sigma^B = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C} = \mathfrak{A}]$. Как отмечалось выше, $r^\varepsilon \neq r^\delta$ и $M^\varepsilon \neq M^\delta$ при $\varepsilon \neq \delta$, $\varepsilon, \delta \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Поскольку для любого $\gamma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

$$M^\gamma \cap M(\mathfrak{C}^*) = \{(0 \neq x \text{ безатомный} \ \& \ (\bigwedge_{\ell \leq \lambda} x \in I_\ell))\},$$

имеем $M(\mathfrak{L}^\varepsilon) \neq M(\mathfrak{L}^\delta)$ и $\mathfrak{L}^\varepsilon \neq \mathfrak{L}^\delta$, $\varepsilon \neq \delta$. Кроме того, для любого $\varepsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ существует бесконечное множество номеров попарно независимых формул $L^\varepsilon \subseteq M^\varepsilon \subseteq M(\mathfrak{L}^\varepsilon)$. В силу следствия 3.1 при любом $\varepsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ теория $\text{Th } \mathfrak{L}^\varepsilon$ не имеет счетно насыщенной модели.

Таким образом, если булева алгебра $\mathfrak{A}$ не атомна, то существует континуум I -обогащений $\mathfrak{A}$ с различными элементарными теориями, имеющими простую модель, но не имеющими счетно насыщенной модели. Случай 1 рассмотрен.

Случай 2: $\mathfrak{A}$ атомна, но не суператомна. Из теоремы 1 [17, с. 33] вытекает, что найдется счетный ординал α такой, что $\mathfrak{A}/F_\beta$ атомна для любого $\beta < \alpha$, а $\mathfrak{A}/F_\alpha$ не атомна (F_β — β -й идеал Фреше). Кроме того, найдутся I -алгебры $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ такие, что $\mathfrak{B}/F_\alpha$ безатомная и $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$.

Рассмотрим конструкцию для случая 1. В качестве $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ возьмем следующие формулы:

$$A(x) = (x \text{ — атом}) \& (x \notin I_1) \& \bigwedge_{j>1} (x \in I_j),$$

$$B(x) = (x/I_1 \text{ — атом}) \& (x \text{ атомный}) \& (\forall y \leq x) (\neg A(y)) \& \bigwedge_{j>1} (x \in I_j),$$

$$C(x) = (0 \neq x/I_1 \text{ безатомный}) \& (x \text{ атомный}) \& \bigwedge_{j>1} (x \in I_j).$$

Все остальное оставим без изменений. Точно так же для $\varepsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ определим M^ε , L^ε и r^ε .

Далее мы модифицируем доказательство теоремы 2 [10, с. 24] (в цитируемой теореме изучается случай одного выделенного идеала, однако идеалы I_ℓ при $\ell > 1$ нас здесь не интересуют, поскольку у нас всегда будет $1 \in I_\ell$ для $\ell > 1$). Для каждого $m \in \mathbb{N}$ возьмем I -алгебру $\mathfrak{A}^m$ такую, что $\mathfrak{A}^m[\sigma^b \cong \mathfrak{B}$ и $1^{\mathfrak{A}^m} \in I_\ell^m$ для $\ell \leq \lambda$. В качестве (x_7, I^7) возьмем ω -смешивание $\mathfrak{A}^m$, $m \in \mathbb{N}$, а в качестве (x_8, I^8) — η -смешивание $\mathfrak{A}^m$, $m \in \mathbb{N}$ (см. шаг 0 [10, с. 27]). Остальное в доказательстве теоремы 2 [10] оставим без изменений.

Заметим, что если I -алгебры $\mathfrak{A}^m$ такие, что $\mathfrak{A}^m[\sigma^b \cong \mathfrak{B}$ для любого $m \in \mathbb{N}$, и $\mathfrak{A}^*$ есть ω -смешивание (η -смешивание) $\mathfrak{A}^m$, $m \in \mathbb{N}$, то $\mathfrak{A}^*/F_\beta$ атомна для любого $\beta < \alpha$, а $\mathfrak{A}^*/F_\alpha$ безатомна. Поэтому (см. упражнение 3 [16, с. 34]) $\mathfrak{A}^*[\sigma^B \cong \mathfrak{B}$. Следовательно, указанная модификация доказательства теоремы 2 [10, с. 24–39] для каждого $\varepsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ строит I -алгебру $\mathfrak{B}^\varepsilon$ такую, что $r_{\mathfrak{B}^\varepsilon} = r^\varepsilon$ и $\mathfrak{B}^\varepsilon[\sigma^b \cong \mathfrak{B}$.

Будем считать, что (после переобозначения) $\mathfrak{B}^\varepsilon[\sigma^b = \mathfrak{B}$. Рассмотрим I -обогащение $\mathfrak{C}^*$ булевой алгебры $\mathfrak{C} : 1^{\mathfrak{C}^*} \in I_\ell$ при $\ell \leq \lambda$. Положим $\mathfrak{L}^\varepsilon \Leftarrow \mathfrak{B}^\varepsilon \times \mathfrak{C}^*$. Нетрудно заметить, что $\mathfrak{C}^*$ локальна ($r_{\mathfrak{C}^*}(n) \neq 0$ только для формулы $V_n(x) \equiv (x - \text{атом}) \& \bigwedge_{\ell \leq \lambda} (x \in I_\ell)$). Поэтому $r_{\mathfrak{L}^\varepsilon} = r_{\mathfrak{B}^\varepsilon}$. По теореме 1.1 $\mathfrak{L}^\varepsilon \equiv \mathfrak{B}^\varepsilon$. Следовательно, $\mathfrak{L}^\varepsilon \neq \mathfrak{L}^\delta$ при $\varepsilon \neq \delta$.

В силу следствия 2.1 для каждого ε найдется простая модель $\mathfrak{M}^\varepsilon$ такая, что $r_{\mathfrak{M}^\varepsilon} = r^\varepsilon$ и

$$\{j \leq \lambda \mid 1^{\mathfrak{M}^\varepsilon} \in I_j^{\mathfrak{M}^\varepsilon}\}$$

$$= \{j \leq \lambda \mid V_n \text{ } j\text{-идеальна для любого } n \in M(r^\varepsilon)\} = \hat{\lambda} \setminus \{1\},$$

т.е. $1^{\mathfrak{M}^\varepsilon} \in I_\ell^{\mathfrak{M}^\varepsilon}$ для любого $\ell > 1$.

Лемма 3.1. Для любых $\varepsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ и I -алгебр $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ таких, что $r_{\mathfrak{M}} = r_{\mathfrak{N}} = r^\varepsilon$, из условий $1^{\mathfrak{M}} \in I_\ell^{\mathfrak{M}}$ и $1^{\mathfrak{N}} \in I_\ell^{\mathfrak{N}}$ при $\ell > 1$ вытекает $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$M_n^\varepsilon \Leftarrow \{m \mid V_m \equiv A_n^\varepsilon, \text{ либо } V_m \equiv B_n^\varepsilon, \text{ либо } V_m \equiv C_n^\varepsilon, \text{ либо } V_m \equiv D_n^\varepsilon\}, \quad p(n) \Leftarrow \max M_n^\varepsilon.$$

В силу определения последовательности формул V_n (см. [10, с. 37, 38]; там аналогичные формулы обозначаются V_n^m , где m — число выделенных идеалов), точнее, в силу свойств последовательности множеств K_n [10, с. 9] нетрудно доказать, что $M_n^\varepsilon = \{m \in M^\varepsilon \mid p(n-1) < m \leq p(n)\}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Из последнего соотношения легко заметить, что для любых $n \in \mathbb{N}$, I -алгебры $\mathfrak{M}$ такой, что $r_{\mathfrak{M}} = r^\varepsilon$, и элемента $a \in \mathfrak{M}$ имеют место следующие утверждения:

- (а) если $r_a(m) = 0$ при $p(n) < m \leq p(n+1)$, то $r_a(m) = 0$ для любого $m > p(n)$;
- (б) если $r_a(m) \neq 0$ и $p(n+1) < m \leq p(n+2)$, то $r_a(k) \neq 0$ для любого $k \in (M^\varepsilon \setminus L^\varepsilon) \cap p(n)$.

Пусть $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ — I -алгебры и $r_{\mathfrak{M}} = r_{\mathfrak{N}} = r^\varepsilon$. Покажем, что $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$. Построим критерий эквивалентности $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ [13, с. 441]. Полагаем

$$S = \{(x, y, k, n) \mid k \leq n, x \in \mathfrak{M}, y \in \mathfrak{N} \text{ и для любого } \ell \leq p(2(n-k)+2) \text{ либо } (r_x(\ell) = r_y(\ell), \text{ либо } r_x(\ell) \geq 2^{n-k} \text{ и } r_y(\ell) \geq 2^{n-k})\}.$$

Покажем, что S — критерий эквивалентности. Для этого проверим выполнение условий критерия (см. введение).

1. Выполнено по определению.

2. Имеем $r_0(\ell) = 0$ для $\ell \in \mathbb{N}$ и $(1, 1, 0, n) \in S$, так как $r_{\mathfrak{M}} = r_{\mathfrak{N}}$.

3. Если $(x, y, k, n) \in S$, то $x = 0$ и $r_x = 0$ равносильны [10, с. 8, 35].

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. На с. 8 [10] в определениях базиса и квазибазиса, п. 1 допущена опечатка. Следует читать $(\forall x \neq 0)(\bigvee_{i \leq k}(\exists z)(z \leq x \& V_i(z)))$, т.е. если $x \neq 0$, то $r_x \neq 0$. Эти условия равносильны условию $r_y = 0$ и $y = 0$. Для любого $\ell > 1$ имеем $x \in I_\ell$ и $y \in I_\ell$. Включение $x \in I_1$ равносильно равенству $r_x(\ell) = 0$ для любого $V_\ell(x) \equiv F(x) \in \{A(x), B(x), C(x)\}$, что равносильно $y \in I_1$.

4. Пусть $(x, y, k, n) \in S$, $k < n$ и $0 < a < x$. Возможны три случая.

Случай 1: найдутся $t, q \in M_{2(n-k)+2}^\varepsilon$ такие, что $r_a(t) \neq 0$ и $r_{x \setminus a}(q) \neq 0$. Заметим, что формула V_ℓ точечная, $r_x(\ell) \leq 1$ для любого $\ell \in L^\varepsilon$ и $2^{n-k} \geq 2$. Поэтому найдется $b \leq y$ такое, что $r_b(t) \neq 0$, $r_{y \setminus b}(q) \neq 0$ и $r_b(\ell) = r_a(\ell)$, $r_{y \setminus b}(\ell) = r_{x \setminus a}(\ell)$ для любого $\ell \in L^\varepsilon \cap p(2(n-k)+2)$. Нетрудно заметить, что тогда $(a, b, k+1, n), (x \setminus a, y \setminus b, k+1, n) \in S$.

Случай 2: $r_x(t) \neq 0$ для некоторого $t \in M_{2(n-k)+2}^\varepsilon$; $M(a) \cap M_{2(n-k)+2}^\varepsilon = \emptyset$ либо $M(x \setminus a) \cap M_{2(n-k)+2}^\varepsilon = \emptyset$. Без ограничения общности считаем $M(a) \cap M_{2(n-k)+2}^\varepsilon = \emptyset$. Тогда элемент a локальный. Для $\ell \in \mathbb{N}$ полагаем

$$r_a^*(\ell) = \begin{cases} \min\{r_a(\ell), 2^{n-k-1}\} & \text{при } \ell \in N(a), \\ 1, & \text{если } \ell \in M(a) \text{ и } V_\ell \text{ сплошная,} \\ \infty, & \text{если } \ell \in M(a) \setminus N(a) \text{ и } V_\ell \text{ точечная.} \end{cases}$$

Нетрудно доказать, что r_a^* — локальная естественная функция, $r_a^* \leq r_y$ и найдется $b \leq y$ такой, что $r_b = r_a^*$. Тогда $r_{y \setminus b}(t) \neq 0$. В силу построения M^ε и точечности V_ℓ , $\ell \in L^\varepsilon$, имеем $(a, b, k+1, n), (x \setminus a, y \setminus b, k+1, n) \in S$.

Случай 3: $M(x) \cap M_{2(n-k)+2}^\varepsilon = \emptyset$. Тогда $M(y) \cap M_{2(n-k)+2}^\varepsilon = \emptyset$ и x, y локальные. Используя аналог леммы 6 [10, с. 19] для случая λ выделенных идеалов и действуя как при доказательстве теоремы 1 [10, с. 23, 24], можно найти элемент $b \leq y$ такой, что $(a, b, k+1, n), (x \setminus a, y \setminus b, k+1, n) \in S$.

Итак, найдется $b \leq y$ такой, что $(a, b, k+1, n), (x \setminus a, y \setminus b, k+1, n) \in S$.

5. Рассматривается так же, как 4.

Мы доказали, что S — критерий эквивалентности $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Согласно лемме 1(a) [13, с. 442] имеем $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$. Лемма 3.1 доказана.

В силу леммы 3.1 $\mathfrak{N}^\varepsilon \equiv \mathfrak{L}^\varepsilon$. Итак, для каждого $\varepsilon \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$ мы построили I -обогащение $\mathfrak{L}^\varepsilon$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$, для которого существует

простая модель $\mathfrak{M}^\varepsilon \equiv \mathfrak{L}^\varepsilon$. Кроме того, $r_{\mathfrak{L}^\varepsilon} = r_{\mathfrak{M}^\varepsilon} = r^\varepsilon$, поэтому существует бесконечное множество $L^\varepsilon \subseteq M(\mathfrak{L}^\varepsilon) = M(r^\varepsilon)$ такое, что V_i , $i \in L^\varepsilon$, независимы. По следствию 3.1 $\text{Th } \mathfrak{L}^\varepsilon$ не имеет счетно насыщенной модели. Наконец, поскольку $r_{\mathfrak{L}^\varepsilon} = r^\varepsilon$ и $r^\varepsilon \neq r^\delta$ при $\varepsilon \neq \delta$, имеем $\mathfrak{L}^\varepsilon \neq \mathfrak{L}^\delta$. Таким образом, мы построили континуум I -обогащений $\mathfrak{A}$ с различными элементарными теориями, имеющими простую модель, но не имеющими счетно насыщенной модели. Теорема 3.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tarski A. Arithmetical classes and types of boolean algebras // Bull. Amer. Math. Soc. 1949. V. 55. P. 64.
2. Ершов Ю. Л. Разрешимость теории дистрибутивных структур с относительными дополнениями и теории фильтров // Алгебра и логика. 1964. Т. 3, № 3. С. 17–38.
3. Rabin M. O. Decidability of the second order theories and automata on infinity trees // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 141. P. 1–35.
4. Macintyre A. and Rosenstein J. G. $\aleph_0$ -Categoricity for rings without nilpotent elements and for boolean structures // J. Algebra. 1976. V. 43, N 1. P. 129–154.
5. Морозов А. С. О разрешимости теорий булевых алгебр с выделенным идеалом // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 1. С. 199–201.
6. Пальчунов Д. Е. К вопросу о характеристизации булевых алгебр с выделенными идеалами // 7-я Всесоюз. конф. по мат. логике. Новосибирск, 5–6 сент. 1984 г.: Тез. докл. Новосибирск, 1984. С. 135.
7. Jurie P.-F. Touraille A. Idéaux élémentairement équivalents dans une algèbre booléenne // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1984. T. 299, N 10. P. 415–418.
8. Touraille A. Élimination des quantificateurs dans la théorie élémentaire des algèbres de Boole munies d'une famille d'idéaux distingués // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1985. N 5. P. 125–128.
9. Пальчунов Д. Е. О неразрешимости теорий булевых алгебр с выделенным идеалом // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 3. С. 326–346.
10. Пальчунов Д. Е. Счетно категоричные булевы алгебры с выделенными идеалами. Новосибирск, 1986. (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 12).
11. Пальчунов Д. Е. О простых и счетно насыщенных булевых алгебрах с выделенным идеалом // 8-я Всесоюз. конф. по мат. логике. Москва, 16–18 сент. 1986 г.: Тез. докл. М., 1986. С. 147.
12. Pal'chunov D. E. Countably categorical boolean algebras with distinguished ideals // Studia Logica. 1987. V. XLVI, N 2. P. 121–135.
13. Пальчунов Д. Е. Конечно аксиоматизируемые булевы алгебры с выделенными идеалами // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, N 4. С. 435–455.
14. Touraille A. Théories d'algèbres de Boole munies d'idéaux distingués. I: Théories élémentaires // J. Symbolic. Logic. 1987. V. 52, N 4. P. 1027–1043.
15. Пальчунов Д. Е. О псевдобулевых алгебрах с конечным числом плотных элементов // Вычислимые инварианты в теории алгебраических систем. Новосибирск, 1987. С. 35–45.
16. Гончаров С. С. Счетные булевы алгебры. Новосибирск: Наука, 1988.
17. Гончаров С. С. Конструктивизируемость суператомных булевых алгебр // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 1. С. 31–40.
18. Сикорский Р. Булевы алгебры. М.: Мир, 1969.
19. Кейслер Г., Чен Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977.
20. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: Наука, 1987.
21. Pal'chunov D. E. On the finitely axiomatizable and prime boolean algebras with distinguished ideals // International Conf. on Algebra: Abstracts. Novosibirsk, 1989. P. 98.