

ТЕОРИИ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР С ВЫДЕЛЕННЫМИ ИДЕАЛАМИ, НЕ ИМЕЮЩИЕ ПРОСТОЙ МОДЕЛИ

Д. Е. Пальчунов

Введение

Настоящая работа является продолжением статьи [1]. Здесь изучаются элементарные теории булевых алгебр с выделенными идеалами (в дальнейшем они будут называться I -алгебрами). Приведен пример I -алгебры, элементарная теория которой не имеет простой модели. Для каждой счетной несуператомной булевой алгебры построен континуум ее обогащений одним идеалом, элементарные теории которых различны и не имеют простых моделей, а также континуум обогащений одним идеалом с различными элементарными теориями, имеющими счетно-насыщенную модель. Дано необходимое условие ω -насыщенности I -алгебры. Доказано, что элементарная теория любой суператомной булевой алгебры с выделенным идеалом имеет счетно-насыщенную модель.

Особая роль суператомных булевых алгебр в описании различных свойств элементарных теорий булевых алгебр с одним выделенным идеалом была отмечена автором в [2]. Именно, в [2] установлены следующие результаты.

Теорема. Теория счетной булевой алгебры $\mathfrak{A}$ с выделенным идеалом разрешима, если и только если $\mathfrak{A}$ суператомная.

Следствие. В счетной булевой алгебре $\mathfrak{A}$ можно выделить континуум идеалов с различными элементарными теориями тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ несуператомная.

Результат, сформулированный в следствии, был анонсирован в [3].

Используемые определения из теории булевых алгебр можно найти в [4, 5], а по теории моделей — в [6, 7]. Некоторые определения и обозначения приведены в [1], там же дан краткий обзор результатов по элементарным теориям I -алгебр. Как и в [1], мы фиксируем $\lambda \in \mathbb{N}$ и будем рассматривать I -алгебры в сигнатуре $\sigma \equiv \langle \cup, \cap, \neg, 0, 1, I_1, \dots, I_\lambda \rangle$, где $I_1, \dots, I_\lambda$ — символы унарных предикатов, выделяющих идеалы.

Изложение данной работы существенно опирается на результаты из [2, 8, 9]. В частности, в [8] (см. также сокращенный вариант — [10]) дана вся необходимая техника. Результаты настоящей работы частично анонсированы в [11, 12].

Автор признателен С. С. Гончарову за постановку задач по теории булевых алгебр с выделенными идеалами.

§ 1. Нелокальные I -алгебры с минимальными характеристиками

В этом параграфе мы изучим элементарные теории нелокальных I -алгебр, характеристики которых минимальны в классе нелокальных алгебр. Такие I -алгебры будут использованы в § 3.

Мы будем рассматривать функции $r: \mathbb{N} \rightarrow \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Напомним, что функция r называется

- *естественной* [8, с. 44], если $r = r_{\mathfrak{A}}$ для некоторой I -алгебры $\mathfrak{A}$,
- *локальной*, если она имеет конечный носитель.

На множестве функций $\mathbb{N} \rightarrow \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ введем частичный порядок:

$f \leq g$ означает, что $f(n) \leq g(n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$,
 $f < g$ означает, что $f \leq g$ и $f \neq g$.

В этом параграфе нас интересуют функции, которые являются минимальными в классе нелокальных естественных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Нелокальная естественная функция r называется *ступенчатой*, если существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел s_n , $n \in \mathbb{N}$, такая, что для любых $i, j, n \in \mathbb{N}$ если $i \leq s_n$, $j \geq s_{n+1}$, $r(i) \neq 0$ и $r(j) \neq 0$, то $V_i < V_j$.

Иными словами, множества $\{i \mid r(i) \neq 0, s_n \leq i \leq s_{n+1}\}$ образуют «ступеньки». Если j «выше» i по крайней мере на две ступеньки, то $V_i < V_j$.

Теорема 1.1. Функция r является минимальной в классе нелокальных естественных функций тогда и только тогда, когда она ступенчатая.

Для доказательства теоремы 1.1 нам потребуется следующая

Лемма 1.1. Пусть r — минимальная нелокальная естественная функция. Тогда для любого n существует число $k > n$ такое, что если $i \leq n$, $j \geq k$, $r(i) \neq 0$ и $r(j) \neq 0$, то $V_i < V_j$.

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество $M_n = \{i \leq n \mid r(i) \neq 0\}$. Предположим, что существует число $m \in M_n$, для которого множество $L = \{j \mid r(j) \neq 0 \text{ и } V_m \not< V_j\}$ бесконечно. Заметим, что множество L естественно. Действительно, если $i \in L$ и $V_j < V_i$, то $r(j) \neq 0$ и $V_m \not< V_j$. Очевидно также, что $L \subseteq M(r)$, $m \in M(r)$ и $m \notin L$. Для $i \in \mathbb{N}$ положим

$$r^L(i) = \begin{cases} 0, & i \notin L, \\ r(i), & i \in L. \end{cases}$$

Тогда $r^L < r$ и r^L — естественная нелокальная функция, что противоречит минимальности r . Поэтому для любого $m \in M_n$ множества L_m и $L = \bigcup_{m \in M_n} L_m$ конечны. Положим $k = (\max L) + 1$. Пусть $i \leq n$, $j \geq k$, $r(i) \neq 0$ и $r(j) \neq 0$. Тогда $i \in M_n$, $j \notin L_i$. Следовательно, $V_i < V_j$. Лемма 1.1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1.

Необходимость. Пусть r — минимальная нелокальная естественная функция. Определим последовательность s_n следующим образом:

$$s_1 \Leftarrow 1, \\ s_{n+1} \Leftarrow \min\{m > s_n \mid \text{для любых } i \leq s_n < m \leq j, \text{ если } r(i) \neq 0 \text{ и } r(j) \neq 0, \text{ то } V_i < V_j\}.$$

Последовательность s_n искомая. Следовательно, r ступенчатая.

Достаточность. Предположим, что имеется последовательность s_n и нелокальная естественная функция r не является минимальной. Пусть $r' < r$, где r' — нелокальная естественная функция. Тогда $r'(\ell) < r(\ell)$ и $r(\ell) \neq 0$ для некоторого ℓ . Поскольку последовательность s_n строго возрастающая, найдется n , для которого $\ell \leq s_n$, а так как функция r' нелокальная, найдется $m \geq s_{n+1}$ такое, что $r'(m) \neq 0$. Поэтому $r(m) \neq 0$ и $V_\ell \ll V_m$. Следовательно, если формула V_ℓ точечная, то $r'(\ell) = \infty$, что противоречит условию $r'(\ell) < r(\ell)$, а если формула V_ℓ сплошная, то $r'(\ell) = 1$, что противоречит условию $r(\ell) \leq 1$. Теорема 1.1 доказана.

Из леммы 1.1 и теоремы 1.1 вытекает

Следствие 1.1 (характеристическое свойство ступенчатых функций). *Нелокальная естественная функция r ступенчатая тогда и только тогда, когда для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется $m > n$ такое, что для всех $i, j \in \mathbb{N}$ если $i \leq n$, $j \geq m$, $r(i) \neq 0$ и $r(j) \neq 0$, то $V_i < V_j$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. I -алгебра $\mathfrak{A}$ называется *ступенчатой*, если ее характеристика $r_{\mathfrak{A}}$ ступенчатая.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Ступенчатая I -алгебра $\mathfrak{A}$ называется *строго ступенчатой*, если

$$\{j \leq \lambda \mid |\mathfrak{A}| \neq I_j^{\mathfrak{A}}\} \\ = \{j \leq \lambda \mid \text{для некоторого } n \text{ формула } V_n \text{ } j\text{-неидеальная и } r_{\mathfrak{A}}(n) \neq 0\}.$$

Определение 1.3 означает, что по характеристике $r_{\mathfrak{A}}$ строго ступенчатой I -алгебры $\mathfrak{A}$ мы для любого $j \leq \lambda$ можем ответить на вопрос « $1^{\mathfrak{A}} \in I_j^{\mathfrak{A}}?$ »

Известно [8, с. 44], что локальная I -алгебра $\mathfrak{A}$ обладает следующим свойством: для любой I -алгебры $\mathfrak{B}$ эквивалентность $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ имеет место тогда и только тогда, когда $r_{\mathfrak{A}} = r_{\mathfrak{B}}$. Аналогичным свойством обладают и строго ступенчатые I -алгебры.

Теорема 1.2. *Если I -алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ строго ступенчаты, то $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $r_{\mathfrak{A}} = r_{\mathfrak{B}}$.*

Доказательство вытекает из следующих предложения 1.1 и леммы 1.2.

Предложение 1.1. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — локальные I -алгебры, m — натуральное число. Если для любого n либо $r_{\mathfrak{A}}(n) = r_{\mathfrak{B}}(n)$, либо $r_{\mathfrak{A}}(n) \geq 2^m$ и $r_{\mathfrak{B}}(n) \geq 2^m$, то $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.

Доказательство. По условию $N = N(\mathfrak{A}) = N(\mathfrak{B})$ конечное. Кроме того, I -алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ локальные. Поэтому $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ можно разложить следующим образом:

$$\mathfrak{A} = \prod_{i \in N} \mathfrak{A}_i, \quad \mathfrak{B} = \prod_{i \in N} \mathfrak{B}_i,$$

где $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_i$ — i -простые алгебры. Тогда $r_{\mathfrak{A}_i}(i) = r_{\mathfrak{A}}(i) = r_{\mathfrak{B}}(i) = r_{\mathfrak{B}_i}(i)$ и по лемме 2(б),(в) [9, с. 442] $\mathfrak{A}_i \equiv_m \mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$. Предложение 1.1 доказано.

Лемма 1.2. Пусть ступенчатые I -алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ удовлетворяют следующим условиям: $r_{\mathfrak{A}} = r_{\mathfrak{B}}$,

$$\begin{aligned} \{j \leq \lambda \mid |\mathfrak{A}| = I_j^{\mathfrak{A}}\} &= \{j \leq \lambda \mid |\mathfrak{B}| \\ &= I_j^{\mathfrak{B}}\} = \{j \leq \lambda \mid V_{\ell} j\text{-идеальна для всех } \ell \in M(\mathfrak{A})\}. \end{aligned}$$

Тогда $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Доказательство. По условию найдутся $\ell_1, \dots, \ell_k$ такие, что

$$\begin{aligned} \{j \leq \lambda \mid |\mathfrak{A}| = I_j^{\mathfrak{A}}\} &= \{j \leq \lambda \mid V_{\ell_i} j\text{-идеальна для любого } i \leq k\}, \\ r_{\mathfrak{A}}(\ell_i) &\neq 0 \text{ при } i \leq k. \end{aligned}$$

Выберем $t \in \mathbb{N}$ такое, что $s_{t-1} > \ell_i$ при $i \leq k$. Тогда для любого $\ell \geq s_t$ если $r_{\mathfrak{A}}(\ell) \neq 0$, то $\{j \leq \lambda \mid |\mathfrak{A}| = I_j^{\mathfrak{A}}\} = \{j \leq \lambda \mid V_{\ell} j\text{-идеальна}\}$. Пусть $r_{\mathfrak{A}}$ — ступенчатая функция и s_n — последовательность из определения 1.1. Без ограничения общности можно считать, что для любого n существует ℓ такое, что $r_{\mathfrak{A}}(\ell) \neq 0$ и $s_n \leq \ell < s_{n+1}$. (В противном случае s_n можно перенумеровать.)

Построим критерий эквивалентности I -алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ [9, с. 441] (см. также введение). Пусть

$$\begin{aligned} S = \{(x, y, k, n) \mid x \in \mathfrak{A}, y \in \mathfrak{B}, k \leq n \text{ и либо } r_x(\ell) \neq 0, \\ r_y(\ell) \neq 0 \text{ для некоторого } \ell \geq s_{3(n-k+t)}, \text{ либо } x \equiv_{n-k} y\}. \end{aligned}$$

Убедимся, что S — критерий. Для этого проверим пять условий (см. [1] и введение).

1. Доказательство очевидно.

2. Имеем $(0, 0, 0, n) \in S$ и $(1, 1, 0, n) \in S$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

3. В силу выбора t и свойств характеристики r равенство $a = 0$ равносильно равенству $r_a = 0$ [8].

4. Пусть $(x, y, k, n) \in S$, $k < n$ и $0 < a < x$. Возможны два случая.

Случай 1: для некоторого $\ell \geq s_{3(n-k+t)}$ выполнены условия $r_x(\ell) \neq 0$ и $r_y(\ell) \neq 0$. Пусть $r_{x \setminus a}(\ell) \neq 0$.

Случай 1 а: $s_{3(n-k+t)-1} \geq m \geq s_{3(n-k+t-1)}$ и $r_a(m) \neq 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Выберем $b \leq y$ так, что $\mathfrak{A} \models V_m(b)$. Тогда $(a, b, k+1, n)$, $(x \setminus a, y \setminus b, k+1, n) \in S$.

Случай 1 б: для всех $m \in \mathbb{N}$ если $s_{3(n-k+t)-1} \geq m \geq s_{3(n-k+t-1)}$, то $r_a(m) = 0$. Предположим, что $r_a(i) \neq 0$ для некоторого $i \geq s_{3(n-k+t)-1}$. Выберем ℓ так, что $r_{\mathfrak{A}}(\ell) \neq 0$ и $s_{3(n-k+t-1)} \leq \ell < s_{3(n-k+t)-2}$. Тогда $V_i > V_{\ell}$ и $r_a(\ell) \neq 0$; противоречие. Следовательно, $r_a(i) = 0$ для всех

$i \geq s_{3(n-k+t)-1}$. Положим $r(\ell) = \min(r_a(\ell), 2^n)$ для $\ell \in \mathbb{N}$. Тогда найдется $b \leq y$ такое, что $r_b(\ell) = r(\ell)$ при $\ell \in N(r) \cup \overline{M(r)}$. В силу предложения 1.1 $a \equiv_n b$. Поэтому $(a, b, k+1, n), (x \setminus a, y \setminus b, k+1, n) \in S$.

Случай 2: $x \equiv_{n-k} y$, $k < n$, $0 < a < x$. По лемме 2 (а) [9, с. 442] найдется $b < y$ такое, что $b > 0$, $a \equiv_{n-k-1} b$ и $x \setminus a \equiv_{n-k-1} y \setminus b$. Тогда $(a, b, k+1, n), (x \setminus a, y \setminus b, k+1, n) \in S$.

5. Рассматривается так же, как 4.

Таким образом, S — критерий эквивалентности I -алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. По лемме 1 [9, с. 442] $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Лемма 1.2 доказана.

Для естественной функции r введем обозначение $K^r = \{\mathfrak{A} \mid r_{\mathfrak{A}} = r\}$. Заметим, что если I -алгебра $\mathfrak{A}$ принадлежит K^r и $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B} \in K^r$.

Следствие 1.2. Если функция r ступенчатая и для любого $j \leq \lambda$ найдется $n \in M(r)$ такое, что формула V_n j -неидеальна, то K^r — класс элементарной эквивалентности, т. е. $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K^r$.

Доказательство. Если $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K^r$, то $r_{\mathfrak{A}} = r_{\mathfrak{B}}$ и $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ строго ступенчатые. Поэтому $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Следствие 1.2 доказано.

Обозначим $a^1 \Rightarrow a$, $a^0 \Rightarrow \bar{a}$. Если $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$, $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, то полагаем $\vec{a}^{\vec{\varepsilon}} \Rightarrow a_1^{\varepsilon_1} \cap \dots \cap a_n^{\varepsilon_n}$.

Предложение 1.2. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — локальные либо строго ступенчатые I -алгебры, $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$ и $b_1, \dots, b_n \in \mathfrak{B}$. Эквивалентность $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n) \equiv (\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_n)$ имеет место тогда и только тогда, когда $r_{\vec{a}^{\vec{\varepsilon}}} = r_{\vec{b}^{\vec{\varepsilon}}}$ для любого $\vec{\varepsilon} \in \{0, 1\}^n$.

Доказательство.

Необходимость. Если $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n) \equiv (\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_n)$, то $r_{\vec{a}^{\vec{\varepsilon}}} = r_{\vec{b}^{\vec{\varepsilon}}}$, поскольку характеристика r формульная, а $\vec{a}^{\vec{\varepsilon}}$ — терм от $\vec{a}$.

Достаточность. Пусть $\{0, 1\}^n = \{\vec{\varepsilon}^1, \dots, \vec{\varepsilon}^{\ell}\}$, где $\ell \Rightarrow 2^n$. Обозначим $c_i \Rightarrow \vec{a}^{\vec{\varepsilon}^i}$, $d_i \Rightarrow \vec{b}^{\vec{\varepsilon}^i}$, $i \leq \ell$. Зафиксируем $i \leq \ell$. Тогда $r_{c_i} = r_{d_i}$. Следовательно, элементы c_i и d_i оба локальны или оба нелокальны. Если элемент c_i локален, то по теореме 4 [8, с. 44] $(c_i) \equiv (d_i)$. Предположим, что элемент c_i нелокальный. Поскольку $c_i \in \mathfrak{A}$, имеем $r_{c_i} \leq r_{\mathfrak{A}}$. Но функция $r_{\mathfrak{A}}$ минимальна в классе нелокальных функций, поэтому $r_{c_i} = r_{\mathfrak{A}}$. Аналогично $r_{d_i} = r_{\mathfrak{B}}$. Значит, r_{c_i} и r_{d_i} ступенчатые. Кроме того, если $j \leq \lambda$ и для любого $n \in M(\mathfrak{A}) = M(c_i)$ формула V_n j -идеальна, то $1^{\mathfrak{A}} \in I_j$ и $1^{\mathfrak{A}} \geq c_i \in I_j$, поскольку $\mathfrak{A}$ строго ступенчатая. Это означает, что I -алгебра (c_i) строго ступенчатая. Аналогично заключаем, что (d_i) строго ступенчатая; $r_{c_i} = r_{d_i}$. Следовательно, $(c_i) \equiv (d_i)$.

Таким образом, $(c_i) \equiv (d_i)$ для любого $i \leq \ell$. По построению последовательностей c_i и d_i имеем $\mathfrak{A} = (c_1) \times \dots \times (c_{\ell})$ и $\mathfrak{B} = (d_1) \times \dots \times (d_{\ell})$. Поэтому $(\mathfrak{A}, c_1, \dots, c_{\ell}) \equiv (\mathfrak{B}, d_1, \dots, d_{\ell})$, поскольку $(c_i) \equiv (d_i)$ и в обогащенной сигнатуре $\sigma_0 = \sigma \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell}\}$, где α_i — сигнатурный символ

для c_i или d_i . Действительно, для $i \leq \ell$ полагаем $\alpha_i^{(c_i)} \Rightarrow c_i$ и $\alpha_i^{(d_i)} \Rightarrow d_i$, а при $j \neq i$ полагаем $\alpha_j^{(c_i)} \Rightarrow 0$, $\alpha_j^{(d_i)} \Rightarrow 0$. Тогда

$$((c_i), \alpha_1^{(c_i)}, \dots, \alpha_\ell^{(c_i)}) \equiv ((d_i), \alpha_1^{(d_i)}, \dots, \alpha_\ell^{(d_i)}),$$

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}, c_1, \dots, c_\ell) &= ((c_1), \alpha_1^{(c_1)}, \dots, \alpha_\ell^{(c_1)}) \times \dots \times ((c_\ell), \alpha_1^{(c_\ell)}, \dots, \alpha_\ell^{(c_\ell)}) \\ &\equiv ((d_1), \alpha_1^{(d_1)}, \dots, \alpha_\ell^{(d_1)}) \times \dots \times ((d_\ell), \alpha_1^{(d_\ell)}, \dots, \alpha_\ell^{(d_\ell)}) = (\mathfrak{B}, d_1, \dots, d_\ell). \end{aligned}$$

Кроме того, $a_j = \cup \{c_i \mid \varepsilon_j^i = 1\}$ и $b_j = \cup \{d_i \mid \varepsilon_j^i = 1\}$ для любого $j \leq n$. Значит, $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n) \equiv (\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_n)$. Предложение 1.2 доказано.

Следствие 1.3. Если I -алгебры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ локальны либо строго ступенчатые, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ и $r_a^{\mathfrak{A}} = r_a^{\mathfrak{B}}$ для любого $a \in \mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$. (Здесь $r_a^{\mathfrak{A}}$ и $r_a^{\mathfrak{B}}$ — характеристики a как элемента I -алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно.)

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$. Тогда $r_{a_i}^{\mathfrak{A}} = r_{a_i}^{\mathfrak{B}}$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$.

В силу предложения 1.2 $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n) \equiv (\mathfrak{B}, a_1, \dots, a_n)$. Ввиду произвольности выбора $n \in \mathbb{N}$ и $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$ последняя эквивалентность означает, что $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$. Следствие 1.3 доказано.

Заметим, что для $m, n \in \mathbb{N}$, I -алгебры $\mathfrak{A}$ и $a \in \mathfrak{A}$ утверждение $r_a(n) \geq m$ записывается одной формулой.

Введем следующие обозначения:

$\sigma^e \Rightarrow \sigma \cup \{P_n^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$, P_n^m — символы одноместных предикатов;
 $T^e \Rightarrow \{(\forall x)(P_n^m(x) \leftrightarrow r_x(n) \geq m) \mid m, n \in \mathbb{N}\}$;
 $\mathfrak{A}^e$ (где $\mathfrak{A}$ — I -алгебра). — модель сигнатуры σ^e такая, что $\mathfrak{A}^e \models T^e$ и $\mathfrak{A}^e \upharpoonright_\sigma = \mathfrak{A}$; иными словами, для любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathfrak{A}$ истинность $\mathfrak{A}^e \models P_n^m(a)$ равносильна $r_a(n) \geq m$.

Следствие 1.4. Пусть I -алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ локальные либо строго ступенчатые. Соотношение $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}^e \subseteq \mathfrak{B}^e$.

Доказательство. Для любых $a \in \mathfrak{A}$ и $m, n \in \mathbb{N}$ справедливы следующие утверждения:

- ◇ $r_a(n) = 0$ равносильно $\mathfrak{A}^e \models \neg P_n^1(a)$;
- ◇ $r_a(n) = m$ равносильно $\mathfrak{A}^e \models P_n^m(a) \& \neg P_n^{m+1}(a)$;
- ◇ $r_a(n) = \infty$ равносильно истинности в $\mathfrak{A}^e$ множества формул $\{P_n^m(a) \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Остается применить следствие 1.3. Следствие 1.4 доказано.

Следствие 1.5 (об элиминации кванторов для локальных и строго ступенчатых I -алгебр). Если I -алгебра $\mathfrak{A}$ локальная или строго ступенчатая, то для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры σ найдется бескванторная формула $\psi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры σ^e такая, что $\text{Th}(\mathfrak{A}) \cup T^e \vdash \varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n)$.

Доказательство. Рассмотрим формулу $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Пусть $\ell = 2^n$, $y_1, \dots, y_\ell$ — новые переменные, и пусть $\{0, 1\}^n = \{\bar{\varepsilon}^1, \dots, \bar{\varepsilon}^\ell\}$. Положим $y_i = \bar{x}^{\bar{\varepsilon}^i}$, $i \leq \ell$. Тогда $x_j = d_j(\bar{y}) \Leftrightarrow \bigcup \{y_i \mid \varepsilon_j^i = 1\}$ для $j \leq n$, причем $d_j(\bar{y})$ — терм переменных $y_1, \dots, y_\ell$, где $j \leq n$. Обозначим

$$\theta(y_1, \dots, y_\ell) \Leftrightarrow \varphi(d_1(\bar{y}), \dots, d_n(\bar{y})) \& \left(\bigvee_{i \leq \ell} y_i = 1 \right) \& \bigwedge_{i \neq j} (y_i \cap y_j = 0).$$

Нетрудно заметить, что

$$\mathfrak{A} \models (\forall x_1, \dots, x_n) (\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \theta(\bar{x}^{\bar{\varepsilon}^1}, \dots, \bar{x}^{\bar{\varepsilon}^\ell})).$$

Поэтому достаточно найти бескванторную формулу, эквивалентную формуле $\theta(y_1, \dots, y_\ell)$.

Пусть m — длина формулы $\theta(y_1, \dots, y_\ell)$. Если I -алгебра $\mathfrak{A}$ строго ступенчатая, то рассмотрим последовательность натуральных чисел s_k ($k \in \mathbb{N}$) из определения 1.1 и возьмем $t \in \mathbb{N}$ так, чтобы для любого $k \geq s_t$ выполнялось следующее условие: если $r_{\mathfrak{A}}(k) \neq 0$, то $\{j \mid |\mathfrak{A}| = I_j^{\mathfrak{A}}\} = \{j \mid V_k \text{ — } j\text{-идеальна}\}$. (Существование такого t доказано в лемме 1.2.) Если I -алгебра $\mathfrak{A}$ локальная, то будем считать, что $t = 1$ и $s_k = \max\{i \mid r_{\mathfrak{A}}(i) \neq 0\} + 1$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Введем на $|\mathfrak{A}|^\ell$ отношение эквивалентности: для $\vec{a} = (a_1, \dots, a_\ell)$ и $\vec{b} = (b_1, \dots, b_\ell)$ пишем $\vec{a} \sim \vec{b}$, если для любого $i \leq \ell$ выполнено одно из следующих условий:

- (i) $r_{a_i}(s_3(m+t)) \neq 0$, $r_{b_i}(s_3(m+t)) \neq 0$,
- (ii) $r_{a_i}(s_3(m+t)) = r_{b_i}(s_3(m+t)) = 0$ и для любого $k \leq s_3(m+t)+1$ если $r_{a_i}(k) \neq r_{b_i}(k)$, то $(r_{a_i}(k) \geq 2^m, r_{b_i}(k) \geq 2^m)$.

Лемма 1.3. Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности. Оно разбивает $|\mathfrak{A}|^\ell$ на конечное число классов эквивалентности.

Доказательство. Первое утверждение легко проверяется. Далее, для каждого a_i , $i \leq \ell$, имеются не более $1 + (2^m)^{s_3(m+t)+1}$ возможных характеристик r_{a_i} , различных для отношения эквивалентности $\sim$, т.е. существуют не более $(1 + 2^{m \cdot s_3(m+t)+1})^\ell$ неэквивалентных кортежей из $|\mathfrak{A}|^\ell$. Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. Если $\vec{a}, \vec{b} \in \mathfrak{A}$, $\vec{a} \sim \vec{b}$, $\bigcup_{i \leq \ell} b_i = 1^{\mathfrak{B}}$, $b_i \cap b_j = 0$ и $\mathfrak{A} \models \theta(a_1, \dots, a_\ell)$, то $\mathfrak{A} \models \theta(b_1, \dots, b_\ell)$.

Доказательство. Достаточно доказать следующее утверждение: если $\vec{a}, \vec{b} \in \mathfrak{A}$, $\vec{a} \sim \vec{b}$, $a_i \cap a_j = 0$ и $b_i \cap b_j = 0$ при $i \neq j$, $\bigcup_{i \leq \ell} a_i = 1^{\mathfrak{A}}$ и $\bigcup_{i \leq \ell} b_i = 1^{\mathfrak{B}}$, то $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_\ell) \equiv_m (\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_\ell)$. Действительно, поскольку длина θ равна m и $\mathfrak{A} \models \theta(a_1, \dots, a_\ell)$, имеем $\mathfrak{A} \models \theta(b_1, \dots, b_\ell)$ (см. [9, с. 439, предложение 1 (б)]). Кроме того, из соотношения $\mathfrak{A} \models \theta(a_1, \dots, a_\ell)$ следует, что $\bigcup_{i \leq \ell} a_i = 1^{\mathfrak{A}}$ и $a_i \cap a_j = 0$ при $i \neq j$.

Предложение 1.3. Предположим, что $m \in \mathbb{N}$, I -алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ строго ступенчатые, $r_{\mathfrak{B}} = r_{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$, $r_{\mathfrak{B}_1}(s_3(m+t)) \neq 0$ и $r_{\mathfrak{C}_1}(s_3(m+t)) \neq 0$. Тогда $\mathfrak{B}_1 \equiv_m \mathfrak{C}_1$.

Здесь s_k — последовательность натуральных чисел из определения 1.1, а t такое, что для любого $k \geq s_t$ если $r_{\mathfrak{B}}(k) \neq 0$, то

$$\{j \leq \lambda \mid |\mathfrak{B}| = I_j^{\mathfrak{B}}\} = \{j \leq \lambda \mid V_k \text{ } j\text{-идеальна}\}.$$

Доказательство предложения 1.3. Построим критерий m -эквивалентности I -алгебр $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{C}_1$ (см. [9, с. 441] и введение):

$S^m = \{(x, y, k) \mid x \in \mathfrak{B}_1, y \in \mathfrak{C}_1, k \leq m \text{ и выполнено одно из следующих условий:}$

- (i) $r_x(i) \neq 0, r_y(i) \neq 0$ для некоторого $i \geq s_{3(m-k+t)}$,
- (ii) $x \equiv_{m-k} y$.

Легко видеть, что если в критерии S (см. доказательство леммы 1.2) $\mathfrak{A}$ заменить на $\mathfrak{B}_1$, а $\mathfrak{B}$ — на $\mathfrak{C}_1$, то $S^m = \{(x, y, k) \mid (x, y, k, m) \in S\}$. Кроме того, $(1, 1, 0) \in S^m$, $(0, 0, 0) \in S^m$. Так же, как в лемме 1.2, доказывается, что S^m — критерий m -эквивалентности I -алгебр $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{C}_1$. В силу леммы 1 (б) [9, с. 442] $\mathfrak{B}_1 \equiv_m \mathfrak{C}_1$. Предложение 1.3 доказано.

Пусть $\vec{a}, \vec{b} \in |\mathfrak{A}|^\ell$, $\vec{a} \sim \vec{b}$. Рассмотрим $i \leq \ell$. Возможны два случая.

СЛУЧАЙ 1: $r_{a_i}(s_{3(m+t)}) \neq 0$ и $r_{b_i}(s_{3(m+t)}) \neq 0$. В силу предложения 1.3 $(a_i) \equiv_m (b_i)$, поскольку $\mathfrak{A} = (d) \times (\vec{d})$ и $r_d = r_{\vec{d}}$ для любого $d \in \mathfrak{A}$.

СЛУЧАЙ 2: $r_{a_i}(s_{3(m+t)}) = r_{b_i}(s_{3(m+t)}) = 0$. Тогда для любого $k \geq s_{3(m+t)+1}$ если $r_{\mathfrak{A}}(k) \neq 0$, то $V_{3(m+t)} < V_k$. Следовательно, для $k \geq s_{3(m+t)+1}$, $r_{a_i}(k) = 0$ и $r_{b_i}(k) = 0$, элементы a_i, b_i локальные. Поскольку $\vec{a} \sim \vec{b}$, для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем либо $r_{a_i}(k) = r_{b_i}(k)$, либо $r_{a_i}(k) \geq 2^m$ и $r_{b_i}(k) \geq 2^m$. По лемме 2 (б) [9, с. 442] $a_i \equiv_m b_i$. Таким образом, $a_i \equiv_m b_i$ для любого $i \leq \ell$. Кроме того, $\bigcup_{i \leq \ell} a_i = 1^{\mathfrak{A}}$, $\bigcup_{i \leq \ell} b_i = 1^{\mathfrak{B}}$ и при $i \neq j$ имеем $a_i \cap a_j = 0$, $b_i \cap b_j = 0$. Следовательно, $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_\ell) = ((a_1) \times \dots \times (a_\ell), a_1, \dots, a_\ell) \equiv_m ((b_1) \times \dots \times (b_\ell), b_1, \dots, b_\ell) = (\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_\ell)$. Лемма 1.4 доказана.

Таким образом, множество

$$\Gamma = \{(a_1, \dots, a_\ell) \in |\mathfrak{A}|^\ell \mid \bigcup_{i \leq \ell} a_i = 1^{\mathfrak{A}} \text{ и } a_i \cap a_j = 0 \text{ для любых } i \neq j\},$$

содержащее все кортежи $(b_1, \dots, b_\ell)$, на которых $\mathfrak{A} \models \theta(b_1, \dots, b_\ell)$, разбито на конечное число классов эквивалентности $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_p$; причем для любых $\vec{a}, \vec{b} \in \Gamma_j$, $j \leq p$ если $\mathfrak{A} \models \theta(\vec{a})$, то $\mathfrak{A} \models \theta(\vec{b})$. Выберем $\vec{a}^j \in \Gamma_j$ для каждого $j \leq p$. При $j \leq p$ и $i \leq \ell$ положим

$$(i) \Delta_i^j(y_i) = P_{s_{3(m+t)}}^1(y_i), \text{ если } r_{a_i^j}(s_{3(m+t)}) \neq 0;$$

$$(ii) \Delta_i^j(y_i) = \bigwedge_{k \leq s_{3(m+t)+1}} \chi_k, \text{ если } r_{a_i^j}(s_{3(m+t)}) = 0,$$

где $\chi_k = P_k^q(a_i^j) \& \neg P_k^{q+1}(a_i^j)$ при $q = r_{a_i^j}(k) < 2^m$ и $\chi_k = P_k^{2^m}(a_i^j)$ при $r_{a_i^j}(k) \geq 2^m$.

Положим

$$\Delta^j(y_1, \dots, y_\ell) \Rightarrow \bigwedge_{i \leq \ell} \Delta_i^j(y_i) \& (\bigcup_{i \leq \ell} y_i = 1) \& \bigwedge_{i \neq j} (y_i \cap y_j = 0),$$

$$\Delta(y_1, \dots, y_\ell) \Rightarrow \bigvee \{ \Delta^j(y_1, \dots, y_\ell) \mid j \leq p, \mathfrak{A} \models \theta(\vec{a}^j) \}.$$

Лемма 1.5. Формула $\Delta(y_1, \dots, y_\ell)$ не зависит от выбора $\vec{a}^j \in \Gamma_j$, $j \leq p$. Для любых $a_1, \dots, a_\ell \in \mathfrak{A}$ и $j \leq p$ условие $(a_1, \dots, a_\ell) \in \Gamma_j$ равносильно истинности $\mathfrak{A}^e \models \Delta^j(a_1, \dots, a_\ell)$; условия $\mathfrak{A} \models \theta(a_1, \dots, a_\ell)$ и $\mathfrak{A}^e \models \Delta^j(a_1, \dots, a_\ell)$ равносильны.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из определения отношения $\sim$. Далее, для любого $\vec{a} \in |\mathfrak{A}|^\ell$ утверждение $\mathfrak{A}^e \models \Delta^j(a_1, \dots, a_\ell)$ равносильно $\vec{a} \in \Gamma$ и $\vec{a} \sim \vec{a}^j \in \Gamma_j$, что равносильно утверждению $\vec{a} \in \Gamma_j$. Следовательно, для любого $\vec{a} \in |\mathfrak{A}|^\ell$ утверждения $\mathfrak{A}^e \models \Delta(a_1, \dots, a_\ell)$ и $\vec{a} \in \bigcup \{ \Gamma_j \mid j \leq p, \mathfrak{A} \models \theta(\vec{a}^j) \}$ равносильны. Кроме того, в силу леммы 1.4, если $\mathfrak{A} \models \theta(a_1, \dots, a_\ell)$, то $\vec{a} \in \Gamma$. Значит $\vec{a} \in \Gamma_j$ для некоторого $j \leq p$, т.е. $\vec{a} \sim \vec{a}^j \in \Gamma$. Следовательно, $\mathfrak{A} \models \theta(\vec{a}^j)$. Обратно, если $\vec{a} \in \Gamma_j$ и $\mathfrak{A} \models \theta(\vec{a}^j)$, то $\vec{a} \sim \vec{a}^j$ и $\mathfrak{A} \models \theta(\vec{a})$. Таким образом, для любого $\vec{a} \in |\mathfrak{A}|^\ell$ утверждения $\mathfrak{A}^e \models \Delta^j(a_1, \dots, a_\ell)$ и $\mathfrak{A} \models \theta(a_1, \dots, a_\ell)$ равносильны. Лемма 1.5 доказана.

Для доказательства следствия 1.5 остается заметить, что $\text{Th}(\mathfrak{A}) \cup T^e \vdash \text{Th}(\mathfrak{A}^e)$, поскольку все предикаты из σ^e формульные и определяются эквивалентностями из T^e . Поэтому $\text{Th}(\mathfrak{A}) \cup T^e \vdash \theta(y_1, \dots, y_\ell) \leftrightarrow \Delta(y_1, \dots, y_\ell)$. Кроме того, $\text{Th}(\mathfrak{A}) \vdash \varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \theta(\vec{x}^{\vec{\varepsilon}^1}, \dots, \vec{x}^{\vec{\varepsilon}^\ell})$.

Таким образом,

$$\text{Th}(\mathfrak{A}) \cup T^e \vdash \varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \Delta(\vec{x}^{\vec{\varepsilon}^1}, \dots, \vec{x}^{\vec{\varepsilon}^\ell})$$

и $\psi(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \Delta(\vec{x}^{\vec{\varepsilon}^1}, \dots, \vec{x}^{\vec{\varepsilon}^\ell})$ — искомая бескванторная формула сигнатуры σ^e . Следствие 1.5 доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. I -алгебра $\mathfrak{A}$ называется *квазиступенчатой*, если $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \dots \times \mathfrak{A}_n$, где $\mathfrak{A}_i$ локальная либо строго ступенчатая для любого $i \leq n$.

Следствие 1.6. Пусть I -алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ квазиступенчатые. Тогда

- (а) $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $r_{\mathfrak{A}} = r_{\mathfrak{B}}$;
- (б) если $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $r_a^{\mathfrak{A}} = r_a^{\mathfrak{B}}$ для любого $a \in \mathfrak{A}$.

Доказательство.

(а) Пусть $r_{\mathfrak{A}} = r_{\mathfrak{B}}$. Покажем, что $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \times \dots \times \mathfrak{A}_m$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \times \dots \times \mathfrak{B}_n$. Без ограничения общности можно считать, что I -алгебры $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}_i$ нелокальны при $i \geq 1$ и, следовательно, строго ступенчатые. Поскольку $r_{\mathfrak{A}} = r_{\mathfrak{B}}$, имеем $r_{\mathfrak{A}_0} \leq r_{\mathfrak{B}}$ и $r_{\mathfrak{B}_0} \leq r_{\mathfrak{A}}$. Используя определение 1.1 и аналог леммы 6 [8, с. 19, 44] для случая λ выделенных идеалов можно доказать, что найдутся I -алгебры $A\mathfrak{A}_m$ и $A\mathfrak{B}_n$ такие, что

$\mathfrak{A} = A\mathfrak{A}m$ и $\mathfrak{B} = A\mathfrak{B}n$, $r_{\mathfrak{A}'_0} = r_{\mathfrak{B}'_0}$, а $\mathfrak{A}'_i$ и $\mathfrak{B}'_i$ при $i \geq 1$ нелокальны и строго ступенчатые.

Рассмотрим множество $R = \{r \leq r_{\mathfrak{A}} \mid r \text{ — минимальная в классе нелокальных естественных функций}\}$. Пусть $r \in R$, $\ell \leq m$, и пусть s_n и s'_n — последовательности из определения 1.1 для r и $\mathfrak{A}'_\ell$ соответственно. Предположим, что $r \neq r_{\mathfrak{A}'_\ell}$. Тогда $r(i) \neq r_{\mathfrak{A}'_\ell}(i)$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Нетрудно заметить, что $r(i) = 0$ либо $r(i) = 1$, если V_i — сплошная формула, и $r(i) = 0$, либо $r(i) = \infty$, если V_i — точечная формула. Те же утверждения справедливы для $r_{\mathfrak{A}'_\ell}$. Поэтому если $r(i) \neq 0$, то $r_{\mathfrak{A}'_\ell}(i) = 0$. Кроме того, найдется $k \in \mathbb{N}$ такое, что $s_k > i$. Тогда для любого $j > s_{k+1}$ из $r(j) \neq 0$ следует $V_j > V_i$ и $r_{\mathfrak{A}'_\ell}(j) = 0$. Аналогично, если $r_{\mathfrak{A}'_\ell}(i) \neq 0$, то найдется $k \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $j > s'_{k+1}$ из $r_{\mathfrak{A}'_\ell}(j) \neq 0$ следует $r(j) = 0$. В обоих случаях $M(r) \cap M(\mathfrak{A}'_\ell) \subseteq \hat{i}$ для некоторого t ($t = s_{k+1}$ либо $t = s'_{k+1}$). Поэтому если $r \neq r_{\mathfrak{A}'_\ell}$, то множество $M(r) \cap M(\mathfrak{A}'_\ell)$ конечно. Однако $M(r) \subseteq M(\mathfrak{A}) = \bigcup_{i \leq m} M(\mathfrak{A}'_i)$ и $M(r)$ бесконечно. Значит, $r = r_{\mathfrak{A}'_i}$ для некоторого $i \leq m$ и $R = \{r_{\mathfrak{A}'_i} \mid 1 \leq i \leq m\}$.

Если $r_{\mathfrak{A}'_i} = r_{\mathfrak{A}'_j}$, то $\mathfrak{A}'_i \times \mathfrak{A}'_j$ — строго ступенчатая I -алгебра и $r_{\mathfrak{A}'_i \times \mathfrak{A}'_j} = r_{\mathfrak{A}'_i}$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $r_{\mathfrak{A}'_i} \neq r_{\mathfrak{A}'_j}$ при $i \neq j$ и $r_{\mathfrak{B}'_i} \neq r_{\mathfrak{B}'_j}$. Тогда $\{r_{\mathfrak{A}'_i} \mid 1 \leq i \leq m\} = R = \{r_{\mathfrak{B}'_i} \mid 1 \leq i \leq n\}$. Следовательно, $m = n$ и после перенумерации $\mathfrak{B}'_i$ получаем $r_{\mathfrak{A}'_i} = r_{\mathfrak{B}'_i}$ для любого $i \leq n$. Так как I -алгебры $\mathfrak{A}'_i$ и $\mathfrak{B}'_i$ локальные либо строго ступенчатые, в силу теоремы 1.2 получаем $\mathfrak{A}'_i \equiv \mathfrak{B}'_i$ при $i \leq n$ и $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

(б) Из доказательства следствия 1.3 видно, что достаточно установить следующее утверждение: для любых $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$ и $b_1, \dots, b_n \in \mathfrak{B}$ эквивалентность $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n) \equiv (\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_n)$ верна тогда и только тогда, когда $r_{\vec{a}\vec{\varepsilon}} = r_{\vec{b}\vec{\varepsilon}}$ для любого $\vec{\varepsilon} \in \{0, 1\}^n$.

Пусть согласно (а) $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \times \dots \times \mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \times \dots \times \mathfrak{B}_n$. Требуется изменить доказательство предложения 1.2 в том месте, где рассматривается нелокальный c_i . В нашем случае $c_i = c_i^0 \cup \dots \cup c_i^n$, где $c_i^j \in \mathfrak{A}_j$. Тогда I -алгебра (c_i^j) либо локальная, либо строго ступенчатая (доказательство такое же, как для предложения 1.2). Следовательно, (c_i) и (d_i) — квазиступенчатые I -алгебры, $r_{c_i} = r_{d_i}$. Ввиду утверждения (а) $(c_i) \equiv (d_i)$. Следствие 1.6 доказано.

Квазиступенчатые I -алгебры будут рассмотрены в § 3.

§ 2. Булева алгебра с выделенными идеалами, теория которой не имеет простой модели

В этом параграфе мы построим I -алгебру $\mathfrak{A}$, элементарная теория которой не имеет простой модели. Рассмотрим естественное множество $M = M(\mathfrak{A})$ как на рис. 1. Узлы обозначают различные формулы из множества $\{V_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$, а прямые отрезки — связи между ними. Например,

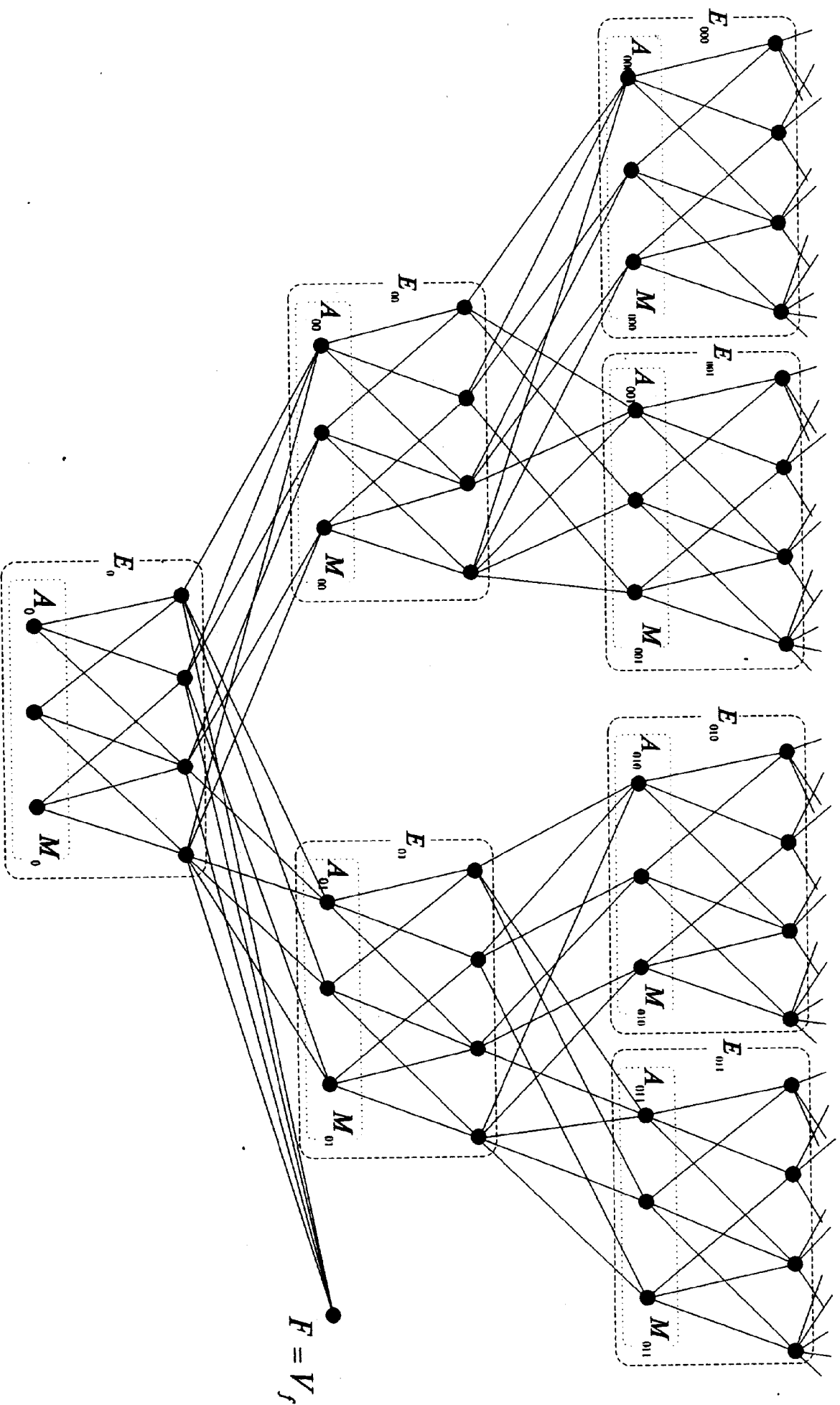
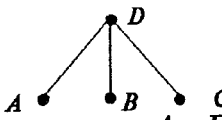


Рис. 1

диаграмма  имеет следующий смысл: формула D получена непосредственно из A , B и C , т.е. для любого $n \in \mathbb{N}$ если $V_n \neq D$, то $V_n < D$ тогда и только тогда, когда $V_n < A$, либо $V_n < B$, либо $V_n < C$ (см. [8, § 4]). На рис. 1 все формулы, лежащие «выше» A_0 считаются точечными.

Множество M_0 состоит из номеров трех неидеальных для всех идеалов попарно независимых формул; $F = V_f$ для некоторого $f \in \mathbb{N}$, $V_{a_\alpha} = A_\alpha$ и $a_\alpha \in M_\alpha \subset E_\alpha$.

Пусть α и β — последовательности из нулей и единиц, т.е. $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Запись $\alpha \sqsubseteq \beta$ означает, что последовательность α является началом последовательности β , а $\text{lh}(\alpha)$ — длиной последовательности α минус единица. Полагаем

$$\Sigma_k = \{\sigma \sqsupseteq \langle 0 \rangle \mid \text{lh}(\sigma) = k\} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\Sigma_0 = \{\langle 0 \rangle\}$. Причем, если $\text{lh}(\sigma) = k$, $n < k$, то $\sigma \upharpoonright n$ — первые $n + 1$ -е элементы σ ; если $\alpha \sqsubseteq \beta$, то $A_\alpha A_\beta$; для любых $k \in M_\alpha$ и $m \in M_\beta$ имеем $V_k < V_m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathfrak{A}$ — I -алгебра и $a \in \mathfrak{A}$, $n \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что формула V_n отделяется под a , если $r_a(n) = 0$ или существует n -простой элемент $b \leq a$ такой, что $r_{a \setminus b}(n) = 0$.

Для $k \in \mathbb{N}$ и $S \subseteq \Sigma_k$ введем обозначение

$$\begin{aligned} \varphi_S^k(x) = & \left(\bigwedge_{\sigma \in \Sigma_k \setminus S} \neg(\exists y \leq x)(A_\sigma(y)) \right) \& (F \text{ не отделяется под } x \\ & \& (x/\{y \mid F \text{ отделяется под } y\} \text{ — атом}) \\ & \& (\forall y \leq x) \left(\bigwedge_{\sigma \in S} (\neg(\exists z \leq y)(A_\sigma(z)) \rightarrow (F \text{ отделяется под } y)) \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} (F \text{ не отделяется под } x) &= \neg(\exists y \leq x)((y \text{ } f \text{ простой}) \& (r_{x \setminus y}(f) = 0)), \\ (F \text{ отделяется под } x) &= (\exists y \leq x)((y \text{ } f\text{-простой}) \& (r_{x \setminus y}(f) = 0)), \\ (x/\{y \mid F \text{ отделяется под } y\} \text{ — атом}) \\ &= (F \text{ не отделяется под } x) \& (\forall y \leq x)((F \text{ не отделяется под } y) \\ &\rightarrow (F \text{ отделяется под } x \setminus y)). \end{aligned}$$

Если F отделяется под x и $z \leq x$, то F отделяется под z (в определении для z в качестве y' берем $y \cap z$, где y взято из определения « F отделяется под x »).

Обозначим

$$M = \{k \mid V_k < F \text{ либо } V_k < A_\sigma \text{ для некоторых } n \in \mathbb{N} \text{ и } \sigma \in \Sigma_n\}.$$

Очевидно, что множество M естественное. Положим

$$\begin{aligned} r(n) &= 0, \text{ если } n \notin M; \\ r(n) &= 1, \text{ если } n \in M \text{ и формула } V_n \text{ сплошная;} \\ r(n) &= \infty, \text{ если } n \in M \text{ и формула } V_n \text{ точечная.} \end{aligned}$$

Тогда $M(r) = M$. Нетрудно заметить, что

$$M = \left(\bigcup_{\alpha \supseteq (0)} E_\alpha \right) \cup \{f\} \cup \{\ell \mid V_\ell < V_n \text{ для некоторого } n \in M_0\}.$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $S \subseteq \Sigma_k$. Введем строго возрастающую последовательность натуральных чисел t_n такую, что

$$\{t_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{\substack{\sigma \in S \\ \alpha \supseteq \sigma \text{ или } \alpha \sqsubseteq \sigma}} E_\alpha.$$

Рассмотрим последовательность I -алгебр $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{B}'_i \times \mathfrak{B}''_i$ ($i \in \mathbb{N}$), где $\mathfrak{B}'_i \models F(1)$ и $\mathfrak{B}''_i \models V_{t_i}(1)$. Пусть $\mathfrak{A}_S^k$ — ω -смешивание $\mathfrak{B}_i$ [8, с. 25; 2, с. 328].

Лемма 2.1. $\mathfrak{A}_S^k \models \varphi_S^k(1)$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} M(\mathfrak{A}_S^k) &= \{i \mid V_i < V_f \text{ либо } V_i < V_j \text{ для некоторых } \sigma \in S, \alpha \supseteq \sigma \text{ и } j \in E_\alpha\} \\ &= \{i \mid V_i < V_f \text{ или для некоторых } \sigma \in S \text{ и } j \in E_\sigma \\ &\quad \text{выполнено либо } V_i < V_j, \text{ либо } V_j < V_i\}. \end{aligned}$$

Пусть $\sigma \in \Sigma_k \setminus S$. Поскольку $S \subseteq \Sigma_k$, для любого $\alpha \in S$ имеем $\alpha \neq \sigma$ и формула A_σ независима с формулой F и со всеми формулами V_j , $j \in E_\alpha$. Поэтому истинно $\neg(\exists y \in \mathfrak{A}_S^k) A_\sigma(y)$. Далее, для любого локального элемента $a \in \mathfrak{A}_S^k$ элемент $\bar{a}$ нелокален и по построению $r_{\bar{a}}(f) = \infty$. Следовательно, F не отделяется под $1^{\mathfrak{A}_S^k}$.

По построению $\mathfrak{A}_S^k$, если элемент a , $a \in \mathfrak{A}_S^k$, то элемент $\bar{a}$ локальный. В силу предложения 1 [1] формула F отделяется под $\bar{a}$ (см. подробности ниже). Следовательно, $1/\{y \mid F \text{ отделяется под } y\}$ — атом.

Пусть $a \in \mathfrak{A}_S^k$ и $r_a(a_\sigma) = 0$ для некоторого $\sigma \in S$. Если элемент a нелокальный, то для некоторого n выполняется $1^{\mathfrak{B}_\ell} \leq a$ и для всех $\ell > n$. Поскольку множество $\{\alpha \mid \sigma \sqsubseteq \alpha\}$ бесконечно и $\{a_\alpha \mid \sigma \sqsubseteq \alpha\} \subseteq \{t_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, найдется $\ell > n$ такое, что $t_\ell = a_\alpha$, $\sigma \sqsubseteq \alpha$. Следовательно, $\mathfrak{B}''_\ell \models V_{t_\ell}(1) = V_{a_\alpha}(1)$. Поэтому $r_{1^{\mathfrak{B}_\ell}}(a_\alpha) \neq 0$ и $r_a(a_\alpha) \neq 0$. Однако $V_{a_\sigma} < V_{a_\alpha}$, поэтому $r_a(a_\sigma) \neq 0$, что противоречит предположению $r_a(a_\sigma) = 0$. Следовательно, элемент a локальный и F отделяется под a . Таким образом, $\mathfrak{A}_S^k \models \varphi_S^k$. Лемма 2.1 доказана.

Мы будем строить I -алгебру $\mathfrak{A}$, в которой если формула F отделяется под $a \in \mathfrak{A}$, то элемент a локальный. Утверждение, что элемент локальный, одной формулой записать нельзя. Однако можно записать одно важное следствие этого факта: если $i \neq j$, $i, j \in N(a)$, то V_i можно отделить от V_j под a , т. е. существует элемент $b \leq a$ такой, что $r_b(i) = 0$ и $r_{a \setminus b}(j) = 0$.

Пусть имеется конечное множество $L \subseteq M$, $L \neq \emptyset$, и формулы V_i , $i \in L$, попарно независимы. Положим

$$\begin{aligned} k^L &= \max\{i \mid \text{для некоторых } \sigma \text{ и } j \in L \text{ имеет место } j \in E_\sigma \text{ и } \sigma \in \Sigma_i\} + 2, \\ L^* &= \{i \mid V_i < F \text{ либо } V_i < V_j \text{ для } j \in \bigcup_{\sigma \in \Sigma_{k^L}} M_\sigma\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_L \Rightarrow (\forall x) & (((\text{формула } F \text{ отделяется под } x) \\
& (\bigwedge_{i,j \in L} \bigwedge_{t \in L^*} ((r_x(t) = 0) \vee (V_i \not\prec V_t) \vee (V_j \not\prec V_t)))) \\
& \mapsto (\exists_{i \in L} x_i) ((x = \bigwedge_{i \in L} x_i) \\
& \& \bigwedge_{\substack{i,j \in L \\ i \neq j}} (x_i \cap x_j = 0) \& \bigwedge_{\substack{i,j \in L \\ i \neq j}} (r_{x_i}(j) = 0))).
\end{aligned}$$

Лемма 2.2. Для любого конечного множества $L \subseteq M$ такого, что $L \neq \emptyset$ и $V_i, i \in L$, попарно независимы, имеет место соотношение $\mathfrak{A}_S^k \models \psi_L$.

Доказательство. Пусть $L \subseteq M$ — конечное множество номеров попарно независимых формул, $a \in \mathfrak{A}_S^k$ и F отделяется под a . Тогда элемент a локален (см. лемму 2.1). Поэтому существует разбиение $a = \bigcup_{\ell \in N(a)} a_\ell$, где $a_i \cap a_j = 0$ при $i \neq j$ и элемент a_i i -простой. Пусть для a выполнена посылка формулы ψ_L и $i, j \in L, i \neq j$. Допустим, что $r_{a_\ell}(i) \neq 0$ и $r_{a_\ell}(j) \neq 0$ для некоторого $\ell \in N(a)$. Тогда $V_i < V_\ell, V_j < V_\ell$ и $r_a(\ell) \neq 0$. Следовательно, $\ell \notin L^*$ и $\ell \not\prec F$. Кроме того, $\ell \in E_\sigma$, и $\text{lh}(\sigma) \geq k^L$. Поэтому найдутся $m, n \in E_{\sigma|(k^L-2)}$, такие, что $V_i < V_m$ и $V_j < V_n$, и существует $t \in M_{\sigma|k^L}$ такое, что $V_t < V_\ell$. Тогда $V_m < V_t, V_n < V_t$. Таким образом, $V_i < V_t$ и $V_j < V_t$. Кроме того, $r_a(t) \neq 0$, поскольку $V_t < V_\ell$, и $t \in L^*$, так как $t \in M_{\sigma|k^L}$. Приходим к противоречию с посылкой формулы ψ_L .

Таким образом, если $\ell \in N(a), i, j \in L, i \neq j$ и $r_{a_\ell}(i) \neq 0$, то $r_{a_\ell}(j) = 0$. Обозначим $b_i \doteq (\bigcup_{\substack{\ell \in N(a) \\ r_{a_\ell}(i) \neq 0}} a_\ell) \cup 0$. Тогда $r_{a \setminus b_i}(i) = 0$ и $r_{b_i}(j) = 0$

для любого $j \neq i, j \in L$. Положим $d_{i_0} \doteq b_{i_0} \cup \overline{\bigcup_{i \in L} b_i}$ при $i_0 \in L$ и $d_i \doteq b_i$ при $i \in L (i \neq i_0)$. Тогда $a = \bigcup_{i \in L} d_i, d_i \cap d_j = 0$ и $r_{d_i}(j) = 0$ при $i, j \in L (i \neq j)$. Таким образом, $\mathfrak{A}_L^k \models \psi_L$. Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. Если $S, S_1 \in \Sigma_k$ и $S \neq S_1$, то $\mathfrak{A}_S^k \not\models \varphi_{S_1}^k(1)$ и $\mathfrak{A}_S^k \neq \mathfrak{A}_{S_1}^k$.

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{A}_S^k \models \varphi_{S_1}^k(1)$. Тогда $\mathfrak{A}_S^k \models \varphi_S^k(1)$. Если $\sigma \in S_1 \setminus S$, то $r_{\mathfrak{A}_S^k}(a_\sigma) = 0$, поскольку $\mathfrak{A}_S^k \models \varphi_S^k(1)$. В силу $\mathfrak{A}_S^k \models \varphi_{S_1}^k(1)$ формула F отделяется под 1; противоречие. Предположив, что $\sigma \in S \setminus S_1$, опять придем к противоречию. Следовательно, $\mathfrak{A}_S^k \not\models \varphi_{S_1}^k(1)$ и $\mathfrak{A}_S^k \neq \mathfrak{A}_{S_1}^k$. Лемма 2.3 доказана.

Множество $\{\mathfrak{A}_S^k \mid S \subseteq \Sigma_k, k \in \mathbb{N}\}$ занумеруем как $\mathfrak{B}_n, n \in \mathbb{N}$, где $\mathfrak{B}_i \neq \mathfrak{B}_j$ при $i \neq j$ и $\{\mathfrak{B}_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\mathfrak{A}_S^k \mid S \subseteq \Sigma_k, k \in \mathbb{N}\}$. Пусть $\mathfrak{A}$ — ω -смешивание $\mathfrak{B}_n, n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.1. $\text{Th } \mathfrak{A}$ не имеет простой модели.

Доказательство. Нам потребуется ряд лемм, которые мы будем формулировать вместе с доказательствами по ходу рассуждений.

Лемма 2.4. $M(\mathfrak{A}) = M$, $r_{\mathfrak{A}} = r$.

Доказательство. Все $\mathfrak{B}_n$, $n \in \mathbb{N}$, нелокальные. Поэтому

$$M(\mathfrak{A}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M(\mathfrak{B}_n) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{S \subseteq \Sigma_k} M(\mathfrak{A}_S^k) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{S \subseteq \Sigma_k} \{i \mid V_i < V_f\}$$

либо для некоторых $\sigma \in S$ и $j \in E_\sigma$ выполнено $V_i < V_j\} = M$.

Кроме того, $N(\mathfrak{A}) = \{F\}$ и $r_{\mathfrak{A}}(f) = \infty$. Поэтому $r_{\mathfrak{A}} = r$. Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5. Элемент $a \in \mathfrak{A}$ локальный тогда и только тогда, когда F отделяется под a .

Доказательство. Если $a \in \mathfrak{A}$ и элемент a локальный, то формула F отделяется под a , поскольку $M(a) \subseteq M(\mathfrak{A})$ и $F \not\leq V_i$, $i \in M(\mathfrak{A})$.

Пусть элемент a нелокальный. В силу предложения 1 [1] для некоторого t либо $1^{\mathfrak{B}_t} \leq a$, либо $a \leq \bigcup_{i \leq t} 1^{\mathfrak{B}_i}$. Если $1^{\mathfrak{B}_t} \leq a$, то формула F не отделяется под a , поскольку F не отделяется в $\mathfrak{B}_t$. Если же $a \leq \bigcup_{i \leq t} 1^{\mathfrak{B}_i}$, то для некоторого $\ell \leq t$ элемент $a \cap 1^{\mathfrak{B}_\ell}$ нелокальный. Будем считать, что $s = a \cap 1^{\mathfrak{B}_\ell} \in \mathfrak{B}_\ell = \mathfrak{A}_S^k$ для некоторых k и $S \subseteq \Sigma_k$. В доказательстве леммы 2.1 мы отмечали, что в таком случае формула F не отделяется под s и, следовательно, формула F не отделяется под a . Лемма 2.5 доказана.

Отметим, что $J = \{a \in \mathfrak{A} \mid F \text{ отделяется под } a\}$ — идеал.

Лемма 2.6. Алгебра $\mathfrak{A}/J$ атомная и $\mathfrak{A}/J \big/ F(\mathfrak{A}/J)$ — атом, где F — идеал Фреше.

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{A}_S^k \models \varphi_S^k$ для некоторых $k \in \mathbb{N}$ и $S \subseteq \Sigma_k$. Поэтому $\mathfrak{A}_S^k/J$ и $\mathfrak{B}_n/J$ — атомы. В силу предложения 1 [1], если $a \in \mathfrak{A}$, то для некоторого ℓ либо $a \leq \bigcup_{j \leq \ell} 1^{\mathfrak{B}_j}$ (и тогда элемент a/J является атомным и содержит не более ℓ атомов), либо $\bar{a} \leq \bigcup_{j \leq \ell} 1^{\mathfrak{B}_j}$ (и тогда для любого $j > \ell$ выполнено $a \geq 1^{\mathfrak{B}_j}$, т.е. a/J содержит бесконечное число атомов и не является безатомным). Следовательно, алгебра $\mathfrak{A}/J$ является атомной, содержит бесконечное число атомов и, если $a \in \mathfrak{A}$ и a/J содержит бесконечное число атомов, то число атомов под $\bar{a}/J$ будет только конечным. Таким образом, $\mathfrak{A}/J \big/ F(\mathfrak{A}/J)$ — атом. Лемма 2.6 доказана.

Лемма 2.7. Пусть $m, \ell, n \in \mathbb{N}$, причем $\ell \geq m$, $n \geq m$, $S_1 \subseteq \Sigma_\ell$, $S_2 \subseteq \Sigma_n$ и $\{\sigma \mid m \mid \sigma \in S_1\} = \{\sigma \mid m \mid \sigma \in S_2\}$. Тогда $\mathfrak{A}_{S_1}^\ell \equiv_m \mathfrak{A}_{S_2}^n$.

Доказательство. Построим критерий m -эквивалентности $\mathfrak{A}_{S_1}^\ell$ и $\mathfrak{A}_{S_2}^n$ (см. [9, с. 441] и введение):

$S = \{(x, y, k) \mid k \leq m, x \in \mathfrak{A}_{S_1}^\ell, y \in \mathfrak{A}_{S_2}^n \text{ и выполнено одно из условий (а)–(в)}\}$:

- (а) F не отделяется под x и y ;
 (б) F отделяется под x и y , $r_x(f) = r_y(f) = 0$ и существует $\alpha \in \Sigma_{m-k}$ такое, что $r_x(a_\alpha) \neq 0$ и $r_y(a_\alpha) \neq 0$ и для всех σ если $\alpha \not\sqsubseteq \sigma$ и $\sigma \not\sqsubseteq \alpha$, то для всех $j \in E_\sigma$ выполнены равенства $r_x(j) = r_y(j) = 0$;
 (в) $(x) \equiv_{2m-k} (y)$.

Докажем, что S — критерий m -эквивалентности.

1. Очевидно.

2. $(0, 0, 0), (1, 1, 0) \in S$.

3. Пусть $(x, y, k) \in S$. В случаях (а), (б) $r_x(a_{\{0\}}) \neq 0$ и $r_y(a_{\{0\}}) \neq 0$. Поэтому $x \notin I_j$ и $y \notin I_j$ для всех $j \leq \lambda$. Если $x \equiv_{2m-k} y$, то выполнение условий критерия очевидно.

4. Пусть $(x, y, k) \in S$, $k < m$ и $0 < a < x$.

(а) Формула F не отделяется под x и y . Тогда формула не отделяется либо под a , либо под $x \setminus a$. Пусть, например, F не отделяется под $x \setminus a$. Поскольку $\mathfrak{A}_{S_1}^\ell / J$ — атом, формула F отделяется под a . Положим $a = c_0 \cup c$, $c_0 \cap c = 0$, где c_0 — f -простой элемент и $r_c(f) = 0$. Возможны два случая.

Случай 1: $r_c(a_\alpha) \neq 0$ для некоторого $\alpha \in \Sigma_{m-k}$. Рассмотрим множество $L \equiv \{a_\alpha \mid \alpha \in \Sigma_{m-k} \text{ и } r_c(a_\alpha) \neq 0\}$. Для любых $i, j \in L$ если $i \neq j$, то V_i и V_j независимы. Более того, для любого $t \in M(\mathfrak{A})$ если $V_i < V_t$, то $V_j \not\leq V_t$. Значит, $\mathfrak{A}_{S_1}^\ell \models \psi_L$ и для c выполнена посылка ψ_L . Следовательно, найдутся непересекающиеся элементы e_i ($e_i \leq c$, $i \in L$) такие, что $\bigcup_{i \in L} e_i = c$ и $r_{e_i}(j) = 0$ для любого $j \neq i$, $j \in L$. Для каждого $i \in L$ сделаем следующее: пусть $i \in L$, $i = a_\alpha$ и $\alpha \in \Sigma_{m-k}$. Рассмотрим

$$R_i(p) \equiv \{j \mid r_p(j) \neq 0, j \in E_\sigma, \alpha \not\sqsubseteq \sigma, \sigma \not\sqsubseteq \alpha\}.$$

Выберем $c_i \leq e_i$ так, что $r_{e_i \setminus c_i}(i) = 0$ и конечное множество $R_i(c_i)$ минимально по включению. Предположим, что $R_i(c_i) \neq \emptyset$. Выберем наибольший элемент $j \in R_i(c_i)$. Тогда $r_{c_i}(j) \neq 0$, $j \in E_\sigma$, $\alpha \not\sqsubseteq \sigma$ и $\sigma \not\sqsubseteq \alpha$. Следовательно, для любого $t \in M(\mathfrak{A})$ если $V_i < V_t$, то $V_j \not\leq V_t$. Таким образом, для c_i и $L^i \equiv \{i, j\}$ выполняется посылка формулы ψ_{L^i} . Поэтому найдется элемент c'_i ($c'_i \leq c_i$) такой, что $r_{c'_i}(j) = 0$, $r_{c_i \setminus c'_i}(i) = 0$. Тогда $R_i(c'_i) \subseteq R_i(c_i)$ и $j \in R_i(c_i) \setminus R_i(c'_i)$, что противоречит минимальности $R_i(c_i)$. Следовательно, $R_i(c_i) = \emptyset$. Ввиду выбора элемента c_i имеем $r_{e_i \setminus c_i}(j) = 0$ для любого $j \in L$. Следовательно, $r_{e_i \setminus c_i}(a_\alpha) = 0$ для любого $\alpha \in \Sigma_{m-k}$. Положим $c' \equiv \bigcup_{i \in L} e_i \setminus c_i$. Тогда для любого $\alpha \in \Sigma_{m-k}$, $r_{c'}(a_\alpha) = 0$. Поэтому элемент c' локальный и $r_{c'} \leq r_y$. Кроме того, для любых $i = a_\alpha \in L$, σ ($\alpha \not\sqsubseteq \sigma$ и $\sigma \not\sqsubseteq \alpha$) и $j \in E_\sigma$ выполнено равенство $r_{c_i}(j) = 0$.

Пусть $a_\alpha \in L$. Поскольку $c \in \mathfrak{A}_{S_1}^\ell$, в силу построения $\mathfrak{A}_{S_1}^\ell$ имеем

$$\begin{aligned} \alpha \in \{\sigma \upharpoonright (m-k) \mid \sigma \in S_1\} &= \{\sigma \upharpoonright (m-k) \mid \sigma = \alpha' \upharpoonright m, \alpha' \in S_1\} \\ &= \{\sigma \upharpoonright (m-k) \mid \sigma = \alpha' \upharpoonright m, \alpha' \in S_2\} = \{\sigma \upharpoonright (m-k) \mid \sigma \in S_2\}. \end{aligned}$$

Таким образом, $r_{\mathfrak{A}_{S_2}^n}(a_\alpha) \neq 0$ и $r_y(a_\alpha) \neq 0$, так как y/J — атом. Значит, найдутся элемент d' ($d' \leq y$), a_α -простые элементы d_i ($d_i \leq y$ для всех $i = a_\alpha \in L$) и f -простой элемент d_0 ($d_0 \leq y$) такие, что

$$d_i \cap d_j = 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad d' \cap d_i = 0 \quad \text{при всех } i,$$

$$r_{d_0}(f) = \min\{r_{c_0}(f), 2^{2m-k-1}\},$$

$$r_{d'}(n) = \min\{r_{c'}(n), 2^{2m-k-1}\} \quad \text{при } n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, $(d_0) \equiv_{2m-k-1} (c_0)$, $(d') \equiv_{2m-k-1} (c')$, $r_{c_i}(f) = r_{d_i}(f) = 0$ и формула F отделяется под c_i и d_i . Кроме того, формула F не отделяется под $x \setminus a$ и $y \setminus (d_0 \cup d_1)$ ввиду локальности $d_0 \cup d_1$. Таким образом, в силу доказанного выше, учитывая i -простоту d_i , имеем $(c', d', k+1), (c_i, d_i, k+1)$, $i \in L \cup \{0\}$, $(x \setminus (c' \cup \bigcup_i c_i), y \setminus (d' \cup \bigcup_i d_i), k+1) \in S$.

Случай 2: $r_c(a_\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in \Sigma_{m-k}$. Элемент c локален и $r_c \leq r_y$ и $r_a \leq r_y$ ввиду равенства $\{\sigma \upharpoonright m \mid \sigma \in S_1\} = \{\sigma \upharpoonright m \mid \sigma \in S_2\}$ и построения $\mathfrak{A}_{S_1}^\ell$ и $\mathfrak{A}_{S_2}^n$. Можно выбрать элемент $b \leq y$ так, что $r_b(i) = \min\{r_a(i), 2^{2m-k-1}\}$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Поэтому $(a) \equiv_{2m-k-1} (b)$ и формула F не отделяется под $x \setminus a$ и $y \setminus b$ в силу локальности b . Таким образом, $(a, b, k+1), (x \setminus a, y \setminus b, k+1) \in S$.

(б) Формула F отделяется под x и y , $r_x(f) = 0 = r_y(f)$, $r_x(a_\alpha) \neq 0$ и $r_y(a_\alpha) \neq 0$ для некоторого $\alpha \in \Sigma_{m-k}$ и для всех σ таких, что $\alpha \not\sqsubseteq \sigma$ и $\sigma \not\sqsubseteq \alpha$, выполнены равенства $r_x(j) = r_y(j) = 0$ для всех $j \in E_\sigma$. Возможны следующие случаи.

Случай 1: $r_a(a_\sigma) = 0$ для всех $\sigma \in \Sigma_{m-k-1}$ либо $r_{x \setminus a}(a_\sigma) = 0$ для всех $\sigma \in \Sigma_{m-k-1}$. Без ограничения общности предположим, что $r_a(a_\sigma) = 0$ для всех $\sigma \in \Sigma_{m-k-1}$. Значит, $r_a(a_\alpha) = 0$ и $r_{x \setminus a}(a_\alpha) \neq 0$. Нетрудно заметить, что тогда a — локальный элемент и для любой I -алгебры $\mathfrak{A}$ верно если $\mathfrak{A} \models V_{a_\alpha}(1)$, то $r_a \leq r_{\mathfrak{A}}$. Следовательно, найдется элемент $b \leq y$ такой, что $r_b(i) = \min\{r_a(i), 2^{2m-k-1}\}$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Поэтому $(a) \equiv_{2m-k-1} (b)$, $r_{x \setminus a}(a_\alpha) \neq 0$ и $r_{y \setminus b}(a_\alpha) \neq 0$. Положим $\alpha_1 \equiv \alpha \upharpoonright (m-k-1)$. Тогда $r_{x \setminus a}(a_{\alpha_1}) \neq 0$ и $r_{y \setminus b}(a_{\alpha_1}) \neq 0$. Кроме того, если $\alpha_1 \not\sqsubseteq \sigma$ и $\sigma \not\sqsubseteq \alpha_1$, то $\alpha \not\sqsubseteq \sigma$ и $\sigma \not\sqsubseteq \alpha$, так как если $\alpha_1 \sqsubseteq \alpha \sqsubseteq \sigma$, то $\alpha_1 \sqsubseteq \sigma$; если же $\sigma \sqsubseteq \alpha$, то $\sigma = \alpha$ либо $\sigma \sqsubseteq \alpha_1$.

Следовательно, $r_x(j) = r_y(j) = 0$ и $r_{x \setminus a}(j) = r_{y \setminus b}(j) = 0$ для любых σ ($\alpha_1 \not\sqsubseteq \sigma$, $\sigma \not\sqsubseteq \alpha_1$) и $j \in E_\sigma$. Поэтому $(a, b, k+1), (x \setminus a, y \setminus b, k+1) \in S$.

Случай 2: найдутся $\alpha_1, \alpha_2 \in \Sigma_{m-k-1}$ такие, что

$$r_a(a_{\alpha_1}) \neq 0, \quad r_{x \setminus a}(a_{\alpha_2}) \neq 0.$$

Учитывая условия критерия S на x и y , в силу построения $\mathfrak{A}_{S_1}^\ell$ получаем $\alpha_1 = \alpha \upharpoonright (m-k-1) = \alpha_2$. Выберем a_{α_1} -простой элемент b ($b \leq y$) такой, что $r_{y \setminus b}(a_{\alpha_1}) \neq 0$. Как показано в п. 1, $(a, b, k+1), (x \setminus a, y \setminus b, k+1) \in S$.

(в) Пусть $(x) \equiv_{2m-k} (y)$, $0 < a < x$. По лемме 2 (а) [9, с. 442] найдется элемент b ($b \leq y$) такой, что $(a) \equiv_{2m-k-1} (b)$ и $(x \setminus a) \equiv_{2m-k-1} (y \setminus b)$. Поэтому $(a, b, k+1), (x \setminus a, y \setminus b, k+1) \in S$. Условие 4 критерия проверено.

5. Доказывается аналогично условию 4.

Мы показали, что S — критерий m -эквивалентности $\mathfrak{A}_{S_1}^\ell$ и $\mathfrak{A}_{S_2}^n$. В силу леммы 1 (б) [9, с. 442] получаем $\mathfrak{A}_{S_1}^\ell \equiv_m \mathfrak{A}_{S_2}^n$. Лемма 2.7 доказана.

Лемма 2.8. Формула $\Phi(x) \equiv (x/J - \text{атом})$ является непополнимой в $\text{Th } \mathfrak{A}$.

Доказательство. Напомним, что $\Phi(x) = (x/J - \text{атом}) \equiv \neg(\exists y \leq x)((y \text{ } f \text{ простой}) \vee y = 0) \& (r_{x \setminus y}(f) = 0) \& (\forall z \leq x)([\neg(\exists y \leq z)((y \text{ } f \text{ простой}) \vee y = 0) \& (r_{z \setminus y}(f) = 0)]) \rightarrow (\exists y \leq (x \setminus z))((y = 0 \vee (y \text{ } f \text{-простой})) \& (r_{((x \setminus z) \setminus y)}(f) = 0)))$; $(y \text{ } f \text{-простой}) \equiv (\exists z \leq y)(F(z)) \& (\bigwedge_{i \in L_f} \neg(\exists z \leq y)(V_i(z)))$, где $L_f \equiv \{i \leq n_t \mid V_i \not\leq V_t\}$ и n_t — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее следующему условию: для любого j если $V_j \not\leq V_t$, то найдется $n_t, i \leq n_t$, такое, что $V_i < V_j$ и $V_i \not\leq V_t$. Действительно, такое n_t существует, поскольку из формул $V_i, i \leq t$, непосредственно (т.е. не используя формулы $V_j, j > t$) можно построить лишь конечное количество формул [8, § 4]. Наибольший из номеров этих формул мы возьмем в качестве n_t .

Итак, $\Phi(x) \equiv (x/J - \text{атом})$ — формула с одной свободной переменной языка булевых алгебр с выделенными идеалами $I_j, j \leq \lambda$. Из леммы 2.6 следует, что $\mathfrak{A} \models \exists x \Phi(x)$.

Предположим, что формула $\Phi(x)$ пополнима в $\text{Th } \mathfrak{A}$. Тогда существует полная формула $\Psi(x)$ такая, что $\text{Th } \mathfrak{A} \vdash \Psi \rightarrow \Phi$. Следовательно, $\text{Th } \mathfrak{A} \vdash \exists x \Psi(x)$ и $\mathfrak{A} \models \exists x \Psi(x)$. Пусть $\mathfrak{A} \models \Psi(a)$ для некоторого $a \in \mathfrak{A}$. Тогда $\text{Th } \mathfrak{A} \vdash \Psi \rightarrow \Phi$, откуда заключаем, что $\mathfrak{A} \models \Phi(a)$, т.е. a/J — атом. Используя доказательство леммы 2.6, получим, что $a \leq \bigcup_{j \leq \ell} 1^{\mathfrak{B}_j}$ для некоторого $\ell \in \mathbb{N}$. Поэтому найдутся $j \leq \ell$ и $c \leq 1^{\mathfrak{B}_j} \cap a$, такие, что c/J — атом. Используя лемму 2.1, нетрудно показать, что $\mathfrak{A} \models \varphi_S^k(1^{\mathfrak{B}_j})$, где $\mathfrak{B}_j = \mathfrak{A}_S^k$, для $k \in \mathbb{N}$ и $S \subseteq \Sigma_k$. Поскольку c/J — атом, в силу определения $\varphi_S^k(x)$ легко увидеть, что $\mathfrak{A} \models \varphi_S^k(c)$.

Предположим, что формула $\Psi(x)$ устойчива относительно m -эквивалентности. Возьмем n такое, что $n > m, n > k$ и для любого $i \leq \ell$ если $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{A}_{S_i}^t$, то $t < n$. Рассмотрим $S_1 \equiv \{\sigma \mid \sigma \upharpoonright k \in S, \sigma \in \Sigma_n\}$. Заметим, что

- ♦ если $\sigma \sqsubseteq \alpha$ и $\sigma \in S_1$, то $\sigma \upharpoonright k \in S$ и $\sigma \upharpoonright k \sqsubseteq \alpha$;
- ♦ если $\sigma \sqsubseteq \alpha$ и $\sigma \in S$, то для некоторого $\beta \in S_1$ имеем $\beta \sqsubseteq \alpha$ либо $\alpha \sqsubseteq \beta$;
- ♦ если $\alpha \sqsubseteq \sigma$ и $\sigma \in S_1$, то $\alpha \upharpoonright k \in S, \alpha \upharpoonright k \sqsubseteq \alpha$ при $\text{lh}(\alpha) \geq k, \alpha \sqsubseteq \sigma \upharpoonright k \in S$ при $\text{lh}(\alpha) < k$;
- ♦ если $\alpha \sqsubseteq \sigma$ и $\sigma \in S$, то существует β такое, что $\alpha \sqsubseteq \sigma \sqsubseteq \beta$ и $\beta \in S_1$.

Поэтому построение $\mathfrak{A}_S^k$ ничем не отличается от построения $\mathfrak{A}_{S_1}^n$ (множество $\{t_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ у них одно и то же!). Следовательно, можно считать, что $\mathfrak{A}_S^k \cong \mathfrak{A}_{S_1}^n$. Рассмотрим некоторое $\sigma_0 \in S_1$. Найдется $\sigma_1 \in S_1$ такое, что $\sigma_0 \upharpoonright (n-1) = \sigma_1 \upharpoonright (n-1)$, поскольку $n-1 \geq k$.

Положим $S_2 = S_1 \setminus \{\sigma_0\}$. Тогда $\{\sigma \upharpoonright m \mid \sigma \in S_1\} = \{\sigma \upharpoonright m \mid \sigma \in S_2\}$, $S_1, S_2 \subseteq \Sigma_n$ и $n \geq m$, так как $n-1 \geq m$. По лемме 2.7 $\mathfrak{A}_{S_1}^n \equiv_m \mathfrak{A}_{S_2}^n$ и

$\mathfrak{A}_S^k \equiv_m \mathfrak{A}_{S_2}^n$. Ввиду выбора n если $\mathfrak{B}_p = \mathfrak{A}_{S_2}^n$, то $p > \ell$.

Заметим, что формула F отделяется под $1^{\mathfrak{B}_j} \setminus c$, поэтому элемент $1^{\mathfrak{B}_j} \setminus c$ локален. Согласно построению алгебры $\mathfrak{A}_S^k$ верно $r_c = r_{\mathfrak{A}_S^k} = r_{\mathfrak{B}_j}$, откуда $(c) \equiv \mathfrak{B}_j \equiv_m \mathfrak{B}_p$ в силу теоремы 1 [1].

Рассмотрим $d \equiv (a \setminus c) \cup 1^{\mathfrak{B}_p}$. Имеем $d \cup c = a \cup 1^{\mathfrak{B}_p}$ и $(d) = (a \setminus c) \times \mathfrak{B}_p \equiv_m (a \setminus c) \times (c) = (a)$. Кроме того, $\bar{d} = (a \cup 1^{\mathfrak{B}_p}) \cup c$ и $\bar{a} = (a \cup 1^{\mathfrak{B}_p}) \cup 1^{\mathfrak{B}_p}$. Поэтому $(\bar{d}) = (a \cup 1^{\mathfrak{B}_p}) \times (c) \equiv_m (a \cup 1^{\mathfrak{B}_p}) \times \mathfrak{B}_p = (\bar{a})$. Следовательно, $((d) \times (\bar{d}), d) \equiv_m ((a) \times (\bar{a}), a)$, т.е. $(\mathfrak{A}, d) \equiv_m (\mathfrak{A}, a)$. Поскольку $\mathfrak{A} \models \Psi(a)$ и $\Psi(x)$ устойчива относительно m -эквивалентности, имеем $\mathfrak{A} \models \Psi(d)$. Истинность утверждения $\mathfrak{A} \models \varphi_{S_2}^n(1^{\mathfrak{A}_p})$ нетрудно вывести из свойств формулы $\varphi_{S_2}^n$. Поэтому $\mathfrak{A} \models (\exists y \leq d)(\varphi_{S_2}^n(y))$. Учитывая полноту $\Psi(x)$, получим $\text{Th}\mathfrak{A} \vdash \Psi(x) \rightarrow (\exists y \leq x)(\varphi_{S_2}^n(y))$ и $\mathfrak{A} \models (\exists y \leq a)(\varphi_{S_2}^n(y))$. Пусть $e \leq a$ и $\mathfrak{A} \models \varphi_{S_2}^n(e)$. Рассмотрим $e \cap c \leq e$. Поскольку $c \leq a$ и $a/J, c/J, e/J$ являются атомами, заключаем, что $e \cap c/J$ — атом. В силу $\mathfrak{A} \models \varphi_{S_2}^n(e)$ имеем $\mathfrak{A} \models \neg(\exists y \leq e \cap c)(A\sigma_0(y))$ для $\sigma_0 \in S_1 \setminus S_2$. Кроме того, $c \cap e \leq 1^{\mathfrak{B}_j}$, $\mathfrak{B}_j = \mathfrak{A}_S^k \cong \mathfrak{A}_{S_1}^n$ и $\mathfrak{A} \models \varphi_{S_1}^n(1^{\mathfrak{B}_j})$. Следовательно, F отделяется под $e \cap c$, поскольку $\sigma_0 \in S_1$. Мы пришли к противоречию с фактом, что $e \cap c/J$ — атом. Напомним, что мы предположили существование $\Psi(x)$ — полной формулы с $\text{Th}\mathfrak{A} \vdash \Psi \rightarrow \Phi$. Таким образом, формула $\Phi(x)$ является неполной в $\text{Th}\mathfrak{A}$. Лемма 2.8 доказана.

В силу леммы 2.6 $\mathfrak{A}/J$ содержит бесконечное число атомов и, в частности, $\mathfrak{A} \models \exists x \Phi(x)$, т.е. $\Phi(x)$ совместна с $\text{Th}\mathfrak{A}$. Таким образом, $\text{Th}\mathfrak{A}$ имеет совместную с ней неполную формулу $\Phi(x)$. Значит, $\text{Th}\mathfrak{A}$ не является атомной и $\text{Th}\mathfrak{A}$ не имеет простой модели. Теорема 2.1 доказана.

§ 3. Булевы алгебры, содержащие идеал с теорией, не имеющей простой модели

В этом параграфе мы будем рассматривать только счетные I -алгебры.

Теорема 3.1. Счетная булева алгебра $\mathfrak{A}$ несуператомная, если и только если выполнено одно из следующих условий:

- 1) существует идеал $I \subseteq |\mathfrak{A}|$ такой, что $\text{Th}(\mathfrak{A}, I)$ не имеет простой модели;
- 2) существует континуум идеалов $I \subseteq |\mathfrak{A}|$ с различными $\text{Th}(\mathfrak{A}, I)$, не имеющими простой модели;
- 3) существует идеал $I \subseteq |\mathfrak{A}|$ такой, что $\text{Th}(\mathfrak{A}, I)$ имеет простую модель, но не имеет счетно-насыщенной модели;
- 4) существует континуум идеалов $I \subseteq |\mathfrak{A}|$ с различными $\text{Th}(\mathfrak{A}, I)$, имеющими простую, но не имеющими счетно-насыщенной модели;
- 5) существует континуум идеалов $I \subseteq |\mathfrak{A}|$ с различными $\text{Th}(\mathfrak{A}, I)$, имеющими счетно-насыщенную модель.

Предварительно докажем некоторые леммы.

Лемма 3.1. Если счетная булева алгебра $\mathfrak{N}$ не атомная, то существует идеал $I \subseteq |\mathfrak{N}|$ с элементарной теорией $\text{Th}(\mathfrak{N}, I)$, не имеющей простой модели.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}$ не атомная. Тогда $\mathfrak{N} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, где $\mathfrak{B}$ — безатомная булева алгебра. Определим идеал $I \subseteq |\mathfrak{N}|$ следующим образом: $I \upharpoonright |\mathfrak{C}| = \{0\}$ на $\mathfrak{B}$ определим I , как в § 2, взяв M_0 так, что

$$\begin{aligned} \{V_i \mid i \in M_0\} = \{ & ((x \text{ безатомный}) \& (\forall y \leq x)(y = 0 \vee y \notin I)) \\ & ((x \text{ безатомный}) \& (x/I \text{ — атом})), ((x \text{ безатомный}) \\ & \& (0 \neq x/I \text{ безатомный}) \\ & \& (\forall y \leq x)(y \neq 0 \\ & \rightarrow (\exists z \leq y)(z \neq 0 \& z \in I))) \}. \end{aligned}$$

Положим $(\mathfrak{B}, I) \cong (\mathfrak{A}, I)$. Тогда формула $\Phi(x) \Leftrightarrow (x/I \text{ — атом})$ непополнимая в $\text{Th}(\mathfrak{N}, I)$. Этот факт доказывается так же, как и в теореме 2.1. Следовательно, если $(\mathfrak{N}, I) = (\mathfrak{B}, I) \times (\mathfrak{C}, \hat{0})$, то $\text{Th}(\mathfrak{N}, I)$ не имеет простой модели. Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. Если счетная булева алгебра $\mathfrak{N}$ атомная, но несуператомная, то существует идеал $I \subseteq |\mathfrak{N}|$ с элементарной теорией $\text{Th}(\mathfrak{N}, I)$, не имеющей простой модели.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}$ атомная, но не суператомная. В силу теоремы 1 [13, с. 33] найдутся булевы алгебры $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ и счетный ординал α такие, что $\mathfrak{N} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}/F_\alpha$ безатомная, где F_α — α -й идеал Фреше, и $\mathfrak{N}/F_\beta$ — атомная булева алгебра для любого $\beta < \alpha$. Значит, $\mathfrak{B}$ изоморфна булевой алгебре, порожденной порядком $L_{\eta \times \omega^\alpha}$. Теперь нетрудно показать, что если $\mathfrak{A}_n \cong \mathfrak{B}$ при $n \in \mathbb{N}$, то ω -смешивание $\mathfrak{A}^\omega$ и η -смешивание $\mathfrak{A}^\eta$ алгебр $\mathfrak{A}_n$ будут изоморфны $\mathfrak{B}:\mathfrak{A}^\omega \cong \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}^\eta$ (см. [1, доказательство теоремы 5; 5, гл. 1, § 4, 5]).

Возьмем M_0 такое, что

$$\begin{aligned} \{V_i \mid i \in M_0\} = \{ & (((x \text{ — атом}) \& (x \notin I)), ((x \text{ атомный}) \\ & \& (x/I \text{ — атом}) \& \neg(\exists y \leq x)((y \text{ — атом}) \\ & \& (y \notin I))), ((x \text{ атомный}) \& (0 \neq (x/I \text{ безатомный}))) \}. \end{aligned}$$

Будем строить $(\mathfrak{A}, I)$ так же, как в § 2. Формулы

$$\begin{aligned} & ((x \text{ атомный}) \& (x/I \text{ — атом}) \& (\dots)), \\ & ((x \text{ атомный}) \& (0 \neq (x/I \text{ безатомный}))) \end{aligned}$$

будем реализовывать на булевых алгебрах, изоморфных $\mathfrak{B}$. Тогда $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Определим I на $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ так же, как в доказательстве леммы 3.1. Тогда $\text{Th}(\mathfrak{N}, I)$ не имеет простой модели, $\Phi(x) \Leftrightarrow (x/I \text{ — атом})$ непополнима в $\text{Th}(\mathfrak{N}, I)$. Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3. Если булева алгебра $\mathfrak{N}$ несуператомная, то существует континуум идеалов $I \subseteq |\mathfrak{N}|$ с различными элементарными теориями $\text{Th}(\mathfrak{N}, I)$, каждая из которых не имеет простой модели.

Доказательство. Будем брать различные $\varepsilon: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$. В доказательствах лемм 3.1 и 3.2 использовалось построение алгебр из § 2 (см. рис. 1). Видоизменим взаимосвязь формул, изображенных на рис. 1, следующим

образом. Если $\varepsilon(k) = 1$, то для $\sigma = \langle 0 \dots 0 \rangle - k + 1$ нуль связь между формулами множеств M_σ и $M_{\sigma 1}$ (рис. 2) заменим на новую (рис. 3).

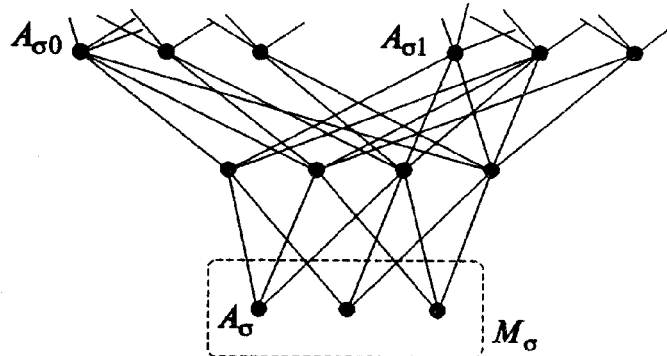


Рис. 2

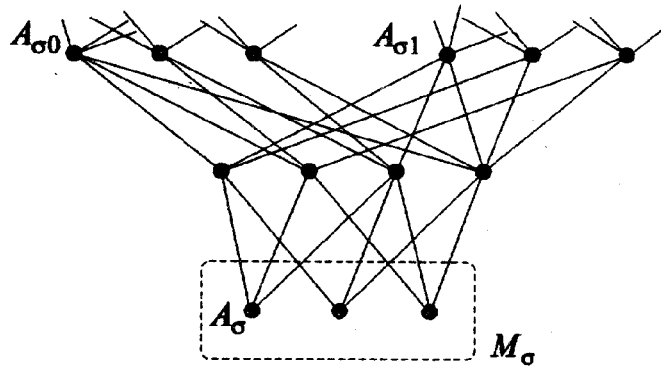


Рис. 3

Тогда все свойства множества формул сохранятся, но у получившихся I -алгебр $\mathfrak{A}^\varepsilon$ для различных $\varepsilon: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ множества $M(\mathfrak{A}^\varepsilon)$, естественно, будут разные. Соответственно разными будут и элементарные теории $\text{Th} \mathfrak{A}^\varepsilon$. Поэтому $\mathfrak{A}^\varepsilon \not\equiv \mathfrak{A}^\delta$ при $\varepsilon \neq \delta$ и $\text{Th} \mathfrak{A}^\varepsilon$ не имеет простой модели для любого $\varepsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Мощность множества $\{\varepsilon \mid \varepsilon: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$ равна континууму. Поэтому мы имеем континуум идеалов $I^\varepsilon \subseteq |\mathfrak{N}|$ с различными элементарными теориями, не имеющими простых моделей. Лемма 3.3 доказана.

Предложение 3.1. Пусть I -алгебра $\mathfrak{N}$ является ω -насыщенной. Тогда для любого $a \in \mathfrak{N}$ выполнены следующие условия:

- (а) для любого $n \in \mathbb{N}$ если $r_a(n) = \infty$, то найдется n -простой элемент $b \leq a$ такой, что $r_b(n) = \infty$ и $r_{a \setminus b}(n) = \infty$;
- (б) если элемент a нелокальный, то найдется нелокальный элемент $b \leq a$ такой, что $a \setminus b$ нелокальный.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}$ ω -насыщенная и $a \in \mathfrak{N}$.

(а) Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $r_a(n) = \infty$. Рассмотрим множество формул

$$\Gamma(x) = \{((x \text{ } n\text{-простой}) \& (x \leq a) \& (r_x(n) \geq k) \& (r_{a \setminus x}(n) \geq k)) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

сигнатуры $\sigma \cup \{a\}$. Напомним, что для фиксированных ℓ , n и k каждое из утверждений « x ℓ -простой» и « $r_x(n) \geq k$ » записывается одной формулой.

Поскольку $r_a(n) = \infty$, множество $\Gamma(x) \cup \text{Th}(\mathfrak{N}, a)$ локально совместно и, следовательно, совместно. Значит, $(\mathfrak{N}, a) \models \Gamma(b)$ для некоторого $b \in \mathfrak{N}$. Тогда $b \leq a$, b — n -простой элемент, $r_b(n) = \infty$ и $r_{a \setminus b}(n) = \infty$.

(б) Пусть a — нелокальный элемент. Тогда множество

$$M_0 = \{n \in M(a) \mid \text{найдется } m \in M(a), V_n < V_m, m \neq n\}$$

бесконечно. Кроме того, для любого $n \in M_0$ либо формула V_n сплошная, либо $r_a(n) = \infty$. Следовательно, множество формул

$$\Gamma(x) = \{((x \leq a) \& (\exists y \leq x)(V_n(y)) \& (\exists y \leq a \setminus x)(V_n(y))) \mid n \in M_0\}$$

сигнатуры $\sigma \cup \{a\}$ локально совместно с $\text{Th}(\mathfrak{N}, a)$. Поэтому множество формул $\Gamma(x) \cup \text{Th}(\mathfrak{N}, a)$ совместно и $\mathfrak{N} \models \Gamma(b)$ для некоторого $b \in \mathfrak{N}$. Тогда $b \leq a$. Следовательно, b и $a \setminus b$ нелокальны, поскольку M_0 бесконечно. Предложение 3.1 доказано.

Необходимое условие ω -насыщенности является и достаточным для счетных строго ступенчатых I -алгебр.

Теорема 3.2. Пусть I -алгебра $\mathfrak{N}$ локальная либо строго ступенчатая. Тогда

- 1) $\text{Th } \mathfrak{N}$ имеет счетно-насыщенную модель;
- 2) если $\mathfrak{N}$ счетна, то $\mathfrak{N}$ счетно-насыщенная тогда и только тогда, когда для любого $a \in \mathfrak{N}$ выполнены следующие условия:

- (а) для любого $n \in \mathbb{N}$ если $r_a(n) = \infty$, то найдется n -простой $b \leq a$ элемент такой, что $r_b(n) = \infty$ и $r_{a \setminus b}(n) = \infty$;
- (б) если элемент a нелокален, то найдется нелокальный элемент $b \leq a$ такой, что $a \setminus b$ нелокален.

Доказательство. Сначала докажем свойство 2 одновременно для локальных и строго ступенчатых I -алгебр. При использовании свойств строго ступенчатой I -алгебры подразумевается, что I -алгебра нелокальная.

Необходимость следует из предложения 3.1.

Достаточность. Достаточно показать, что $\mathfrak{N}$ однородна и универсальна. Докажем, что $\mathfrak{N}$ универсальна. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ для счетной I -алгебры $\mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{M}$ локальная либо строго ступенчатая, поскольку $r_{\mathfrak{M}} = r_{\mathfrak{N}}$ и (см. определения 1.1 и 1.3)

$$\begin{aligned} \{\ell \mid \text{если } r_{\mathfrak{M}}(n) \neq 0 \text{ для } n \in \mathbb{N}, \text{ то } V_n \ell\text{-идеальна}\} \\ = \{\ell \mid 1^{\mathfrak{N}} \in I_{\ell}^{\mathfrak{N}}\} = \{\ell \mid 1^{\mathfrak{M}} \in I_{\ell}^{\mathfrak{M}}\}. \end{aligned}$$

Покажем, что $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$. Построим условие Воота вложимости (см. [5, с. 28]) булевой алгебры I -алгебры $\mathfrak{M}$ в булеву алгебру I -алгебры $\mathfrak{N}$: $S = \{(x, y) \mid x \in \mathfrak{M}, y \in \mathfrak{N}, r_x = r_y\}$. Проверим, что S — условие вложимости булевых алгебр.

Ах.1. $(0, 0), (1, 1) \in S$, поскольку $r_1^{\mathfrak{N}} = r_{\mathfrak{N}} = r_{\mathfrak{M}} = r_1^{\mathfrak{M}}$.

Ах.2. Если $(x, y) \in S$, то $x = 0$ равносильно $r_x(n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Ах.3. Если $(x, y) \in S$, то $r_x(n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, равносильно $y = 0$.

Условия Ах 2 и Ах 3 проверяются просто. Пусть $(x, y) \in S$. Тогда $x = 0$ равносильно тому, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно равенство $r_x(n) = 0$, которое равносильно $y = 0$, поскольку $r_x = r_y$.

Ах.4. Пусть $(x, y) \in S$ и $a \leq x$. Найдем элемент $b \leq y$ такой, что $(a, b), (x \setminus a, y \setminus b) \in S$.

Случай 1: элемент x локален. Тогда элементы a , $x \setminus a$ и y тоже локальны. В силу леммы 10 [8, с. 39] найдутся элементы $x_1, \dots, x_\ell$ такие, что $x = x_1 \cup \dots \cup x_\ell$, $x_i \cap x_j = 0$ при $i \neq j$ и x_i простые при $i \leq \ell$. Пусть при $i \leq \ell$ элемент x_i n_i -простой. Можно считать, что $n_i \neq n_j$ при $i \neq j$. Тогда найдутся непересекающиеся элементы $y_1, \dots, y_\ell$ такие, что $y = y_1 \cup \dots \cup y_\ell$ и $r_{x_i} = r_{y_i}$ при $i \leq \ell$. Фиксируем $i \leq \ell$. Воспользовавшись леммой 10 [8], а также определением характеристики r и условием (а) теоремы 3.2, можно показать, что найдется элемент $b_i \leq y_i$ такой, что $r_{b_i} = r_{a_i}$ и $r_{y_i \setminus b_i} = r_{x_i \setminus a_i}$ (аналогичное доказательство приведено подробно в случае 2). Положим $b \equiv \cup_{i \leq \ell} b_i$. Тогда

$$r_b = r_{\cup_{i \leq \ell} b_i} = r_{\cup_{i \leq \ell} a_i} = r_a,$$

$$r_{y \setminus b} = r_{\cup_{i \leq \ell} (y_i \setminus b_i)} = r_{\cup_{i \leq \ell} (x_i \setminus a_i)} = r_{x \setminus a}.$$

Поэтому $(a, b), (x \setminus a, y \setminus b) \in S$.

Случай 2: x нелокален, но либо a , либо $x \setminus a$ локален. Без ограничения общности будем считать, что локален элемент a . Тогда найдутся непересекающиеся элементы $a_1, \dots, a_\ell$ такие, что $a = a_1 \cup \dots \cup a_\ell$ и при $i \leq \ell$ элемент a_i n_i -простой для некоторого n_i . Для каждого $i \leq \ell$ найдем элемент $b_i \leq y$ такой, что $r_{b_i} = r_{a_i}$. Для этого положим $b_0 \equiv 0$. Пусть элементы $b_0, \dots, b_{i-1}$ уже найдены, $i \geq 1$. Поскольку $r_{b_j} = r_{a_j}$, элементы b_j , $j \leq i-1$, локальны. Поэтому элемент $b \setminus \tilde{b}_i$ нелокальный, где $\tilde{b}_i \equiv b_0 \cup \dots \cup b_{i-1}$. Ввиду минимальности $r_{\mathfrak{M}}$ (теорема 1.1) $r_y = r_{\mathfrak{M}} = r_{y \setminus \tilde{b}_i}$. Кроме того, $r_{a_i} \leq r_a = r_y = r_{y \setminus \tilde{b}_i}$. Если $r_{a_i}(n_i) < \infty$, то согласно определению характеристики r найдется n_i -простой элемент $b_i \leq y \setminus \tilde{b}_i$ такой, что $r_{b_i}(n_i) = r_{a_i}(n_i)$. Если $r_{a_i}(n_i) = \infty$, то в силу условия (а) теоремы 3.2 найдется n_i -простой элемент $b_i \leq y \setminus \tilde{b}_i$ такой, что $r_{a_i}(n_i) = \infty$. В обоих случаях, учитывая n_i -простоту элементов a_i , b_i , имеем $r_{a_i} = r_{b_i}$. Проведя эту процедуру, мы получим непересекающиеся элементы $b_1, \dots, b_\ell$ такие, что $r_{b_i} = r_{a_i}$, $i \leq \ell$. Положим $b \equiv \cup_{i \leq \ell} b_i$. Тогда $r_b = r_a$. Отметим, что элемент b локален. Следовательно, элемент $y \setminus b$ нелокален и $r_{y \setminus b} = r_{\mathfrak{M}} = r_{\mathfrak{M}} = r_{x \setminus a}$. Таким образом, $(a, b), (x \setminus a, y \setminus b) \in S$.

Случай 3: элементы a , $x \setminus a$ нелокальны. Тогда элемент y также нелокален. В силу условия (б) теоремы 3.2, найдется нелокальный элемент $b \leq y$ такой, что $y \setminus b$ нелокален. Ввиду минимальности $r_{\mathfrak{M}}$ и $r_{\mathfrak{M}}$ имеем $r_a = r_{x \setminus a} = r_{\mathfrak{M}} = r_{\mathfrak{M}} = r_b = r_{y \setminus b}$. Поэтому $(a, b), (x \setminus a, y \setminus b) \in S$.

Мы доказали условия Ах.1–Ах.4. Следовательно, S есть условие вложимости булевой алгебры I -алгебры $\mathfrak{M}$ в булеву алгебру I -алгебры $\mathfrak{N}$. По следствию 1 [5, с. 29], существует изоморфное вложение $\varphi: \mathfrak{M} \upharpoonright \sigma^B \rightarrow \mathfrak{N} \upharpoonright \sigma^B$ такое, что для любого $a \in \mathfrak{M}$ найдутся непересекающиеся элементы

$a_1, \dots, a_\ell \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющие условиям $a = a_1 \cup \dots \cup a_\ell$, $(a_i, \varphi(a_i)) \in S$ при $i \leq \ell$. Кроме того, S удовлетворяет следующему условию:

Ах.* Если $(x, y) \in S$, то $x \in I_j$ равносильно $y \in I_j$ для любого $j \leq \lambda$.

Действительно, поскольку $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ строго ступенчаты, для $j \leq \lambda$ утверждение $x \in I_j$ равносильно тому, что для любого $n \in M(x)$ формула V_n j -идеальна; то же самое выполнено и для y . Однако $r_x = r_y$ и $M(x) = M(y)$. Поэтому $x \in I_j$ равносильно $y \in I_j$.

Пусть $a \in \mathfrak{M}$, $a = a_1 \cup \dots \cup a_\ell$, элементы $a_1, \dots, a_\ell$ не пересекаются и $(a_i, \varphi(a_i)) \in S$ при $i \leq \ell$. Тогда $\varphi(a) = \varphi(a_1) \cup \dots \cup \varphi(a_\ell)$, значит для любого $j \leq \lambda$ утверждение $a \in I_j$ равносильно $\varphi(a) \in I_j$, т.е. φ — изоморфное вложение I -алгебры $\mathfrak{M}$ в I -алгебру $\mathfrak{N}$. Кроме того, поскольку $r_{a_i} = r_{\varphi(a_i)}$, выполнено равенство $r_a = r_{\varphi(a)}$, т.е. φ сохраняет характеристику r . В силу следствия 1.3 φ — элементарное вложение и $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$ (с точностью до переобозначения).

Мы показали, что $\mathfrak{N}$ универсальна. Покажем, что $\mathfrak{N}$ однородна.

Пусть $a, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathfrak{N}$; $(\mathfrak{N}, a_1, \dots, a_n) \equiv (\mathfrak{N}, b_1, \dots, b_n)$; $\ell = 2^n$, $\{0, 1\}^n = \{\bar{\varepsilon}^1, \dots, \bar{\varepsilon}^\ell\}$. Положим $c_i \Leftarrow \bar{a}^{\bar{\varepsilon}^i}$ и $d_i \Leftarrow \bar{b}^{\bar{\varepsilon}^i}$. Тогда имеем равенства $c_i \cap c_j = d_i \cap d_j = 0$ при $i \neq j$, $\bigcup_{i \leq \ell} c_i = \bigcup_{i \leq \ell} d_i = 1$ и эквивалентность $(\mathfrak{N}, c_1, \dots, c_\ell) \equiv (\mathfrak{N}, d_1, \dots, d_\ell)$. Следовательно, $r_{c_i} = r_{d_i}$ для любого $i \leq \ell$. Точно так же, как при проверке условия Ах. 4, пользуясь условиями (а) и (б) теоремы 3.2, для любого $i \leq \ell$ можно найти $g_i \leq d_i$ такое, что $r_{c_i \cap a} = r_{g_i}$ и $r_{c_i \setminus a} = r_{d_i \setminus g_i}$. В силу предложения 1.2

$$(\mathfrak{N}, c_1 \cap a, c_1 \setminus a, \dots, c_\ell \cap a, c_\ell \setminus a) \equiv (\mathfrak{N}, g_1, d_1 \setminus g_1, \dots, g_\ell, d_\ell \setminus g_\ell).$$

Положим $b \Leftarrow \bigcup_{i \leq \ell} g_i$. Тогда $a = \bigcup_{i \leq \ell} (c_i \cap a)$. Следовательно,

$$(\mathfrak{N}, c_1, \dots, c_\ell, a) \equiv (\mathfrak{N}, d_1, \dots, d_\ell, b), (\mathfrak{N}, a_1, \dots, a_n, a) \equiv (\mathfrak{N}, b_1, \dots, b_n, b).$$

Мы доказали, что $\mathfrak{N}$ однородна и тем самым, что $\mathfrak{N}$ счетно-насыщенная. Вторая часть теоремы 3.2 доказана.

Перейдем к доказательству первой части теоремы. Покажем, что найдется счетно-насыщенная модель $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.

Лемма 3.4. Для любой естественной функции r найдется I -алгебра $\mathfrak{M}$ ($r_{\mathfrak{M}} = r$), удовлетворяющая условиям (а), (б) теоремы 3.2 и условию

$$\{j \leq \lambda \mid 1^{\mathfrak{M}} \in I_j\} \\ = \{j \leq \lambda \mid \text{для любого } n \in M(\mathfrak{M}) \text{ формула } V_n \text{ } j\text{-идеальна}\}.$$

Доказательство. Изменим доказательство теорем 2 и 4 [8, с. 25 и 44] следующим образом (ограничимся здесь случаем одного выделенного идеала, случай нескольких выделенных идеалов аналогичен): если $n = n_m$, $K = K_m$ [8, с. 27] и $i \in K$, то вместо (x_i, I_i) возьмем (x'_i, I'_i) — η -смешивание изоморфных копий (x_i, I_i) . Далее, в качестве (y_n^∞, I') возьмем η -смешивание (z_i, I_i) (см. [8, с. 26]). Наконец, если r — естественная функция и r нелокальная [8, с. 26], возьмем $(\mathfrak{B}, I)$ — η -смешивание I -алгебр $(y_{n_i}^{K_i}, I_{n_i}^{K_i})$. Аналогично действуем и в случае λ выделенных идеалов.

Таким образом, для характеристики r мы построили модель $\mathfrak{M}$ такую, что $r_{\mathfrak{M}} = r$. Нетрудно проверить, что $\mathfrak{M}$ будет удовлетворять условиям (а), (б) теоремы 3.2 и условию

$$\{j \leq \lambda \mid 1^{\mathfrak{M}} \in I_j^{\mathfrak{M}}\}$$

$$= \{j \leq \lambda \mid \text{для любого } n \in M(\mathfrak{M}) \text{ формула } V_n j\text{-идеальна}\}.$$

Лемма 3.4 доказана.

Итак, если $\mathfrak{N}$ локальная, то $\mathfrak{M}$ из леммы 3.4 счетно-насыщенная; если $\mathfrak{N}$ строго ступенчатая, то (поскольку $r_{\mathfrak{M}} = r_{\mathfrak{N}}$) I -алгебра $\mathfrak{M}$ строго ступенчатая и, следовательно, счетно-насыщенная. В обоих случаях $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ в силу равенства $r_{\mathfrak{M}} = r_{\mathfrak{N}}$ и теоремы 1.2. Теорема 3.2 доказана.

Следствие 3.1. Если функция r ступенчатая, то существует счетно-насыщенная строго ступенчатая I -алгебра $\mathfrak{M}$ такая, что $r_{\mathfrak{M}} = r$.

Следствие 3.2. Если булева алгебра $\mathcal{L}$ суператомная, то для любого идеала $I \subseteq |\mathcal{L}|$ теория $\text{Th}(\mathcal{L}, I)$ имеет счетно-насыщенную модель.

Доказательство. В силу [2, § 2] если $\mathcal{L}$ суператомная, то $(\mathcal{L}, I)$ локальная либо строго ступенчатая. Следствие 3.2 доказано.

Следствие 3.3. У любой счетной несуператомной булевой алгебры $\mathcal{A}$ существует континуум I -обогащений $\mathcal{C}$ с различными неступенчатыми характеристиками $r_{\mathcal{C}}$.

Доказательство. В доказательстве теоремы 5 [1] для несуператомной булевой алгебры $\mathcal{A}$ был построен континуум I -обогащений $\mathcal{C}$ с различными характеристиками $r_{\mathcal{C}}$, каждая из которых согласно следствию 10 [1] не имеет счетно-насыщенной модели $\mathfrak{M}$ такой, что $r_{\mathfrak{M}} = r_{\mathcal{C}}$. В силу следствия 3.1 все эти $r_{\mathcal{C}}$ не являются ступенчатыми. Следствие 3.3 доказано.

Следствие 3.4. Если I -алгебра $\mathfrak{N}$ квазиступенчатая, то $\text{Th } \mathfrak{N}$ имеет счетно-насыщенную модель.

Доказательство. Обратимся к доказательству теоремы 3.2. Сначала покажем, что если $\mathfrak{N}$ счетна и удовлетворяет условиям (а), (б) теоремы 3.2, то $\mathfrak{N}$ счетно-насыщенная.

Пусть $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, и пусть $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0 \times \cdots \times \mathfrak{N}_m$, где $\mathfrak{N}_0$ локальная, а $\mathfrak{N}_i$, $i \geq 1$, строго ступенчатые (см. доказательство следствия 1.6). Тогда $r_{\mathfrak{M}} = r_{\mathfrak{N}}$. Пусть $i \geq 1$. Тогда $r_{\mathfrak{N}_i} \leq r_{\mathfrak{M}}$. Кроме того, найдется $n_i \in M(\mathfrak{N}_i)$ такое, что $r_{\mathfrak{N}_j}(n_i) = 0$ для любого $j \neq i$. Рассмотрим предложение

$$X \equiv (\exists x_0, \dots, x_m)((1 = \bigcup_{i \leq m} x_i) \& \bigwedge_{i \neq j} (x_i \cap x_j = 0 \& r_{x_i}(n_j) = 0)).$$

Очевидно, что $\mathfrak{N} \models X$: можно взять $x_i \equiv 1^{\mathfrak{N}_i}$. Поэтому $\mathfrak{M} \models X$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \times \cdots \times \mathfrak{M}_m$, причем $r_{\mathfrak{M}_i}(n_j) = 0$ при $i \neq j$. Используя доказательство следствия 1.6, нетрудно показать, что тогда $r_{\mathfrak{N}_i} = r_{\mathfrak{M}_i}$ при $i \geq 1$ и все $\mathfrak{M}_i$ строго ступенчатые, а $\mathfrak{M}$ квазиступенчатая. Кроме того, найдутся $\mathfrak{N}'_0, \dots, \mathfrak{N}'_m$ и $\mathfrak{M}'_0, \dots, \mathfrak{M}'_m$ такие, что $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}'_0 \times \cdots \times \mathfrak{N}'_m$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'_0 \times \cdots \times \mathfrak{M}'_m$, где $\mathfrak{N}'_0$ и $\mathfrak{M}'_0$ локальные, I -алгебры $\mathfrak{N}'_i$, $\mathfrak{M}'_i$ (при $i \geq 1$) строго ступенчатые и $r_{\mathfrak{N}'_i} = r_{\mathfrak{M}'_i}$ для всех $i \geq 0$. По следствию 1.6 $\mathfrak{N}'_i \equiv \mathfrak{M}'_i$. В

силу теоремы 3.2 и нашего требования на I -алгебру $\mathfrak{N}$ для любого $i \leq m$ алгебра $\mathfrak{N}'_i$ счетно-насыщенная. Следовательно, $\mathfrak{M}'_i \leq \mathfrak{N}'_i$ при $i \leq m$ и $r_a^{\mathfrak{M}'_i} = r_a^{\mathfrak{N}'_i}$ для любого $a \in \mathfrak{M}'_i$. Используя аналог леммы 6 [8, с. 19, 44] для случая λ выделенных идеалов, имеем $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ и $r_a^{\mathfrak{M}} = r_a^{\mathfrak{N}}$ для любого $a \in \mathfrak{M}$. В силу следствия 1.6 это означает, что $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{N}$, т.е. $\mathfrak{N}$ универсальна.

Доказательство однородности $\mathfrak{N}$ аналогично доказательству теоремы 3.2, только вместо предложения 1.2 следует сослаться на доказательство утверждения (б) следствия 1.6 и использовать доказательство утверждения (а) следствия 1.6.

Итак, мы показали, что если $\mathfrak{N}$ счетна и удовлетворяет условиям (а), (б) теоремы 3.2, то $\mathfrak{N}$ счетно-насыщенная.

Пусть теперь $\mathfrak{N}$ квазиступенчатая, но не обязательно счетна, т.е. $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \times \cdots \times \mathfrak{N}_m$, где все $\mathfrak{N}_i$ локальные либо строго ступенчатые. По теореме 3.2 найдутся счетно-насыщенные $\mathfrak{M}_i \equiv \mathfrak{N}_i$. Положим $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \times \cdots \times \mathfrak{M}_m$. Нетрудно показать, что тогда счетная I -алгебра $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условиям (а), (б) теоремы 3.2. Поэтому $\mathfrak{M}$ счетно-насыщенная. Следствие 3.4 доказано.

Следствие 3.5. Прямое произведение конечного числа счетно-насыщенных квазиступенчатых I -алгебр счетно-насыщено.

Следствие 3.6. Если I -алгебра $\mathfrak{N}$ счетно-насыщенная, $\mathfrak{N} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ и $\mathfrak{B}$ квазиступенчатая (в частности, если $\mathfrak{B}$ локальная либо строго ступенчатая), то I -алгебра $\mathfrak{B}$ счетно-насыщенная.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{N}$ счетно-насыщенная, в силу предложения 3.1 для $\mathfrak{N}$ выполнены условия (а) и (б) теоремы 3.2. Нетрудно заметить, что условия (а), (б) выполнены и для I -алгебры $\mathfrak{B}$. В ходе доказательства следствия 3.4 показано, что тогда квазиступенчатая I -алгебра $\mathfrak{B}$ счетно-насыщенная. Следствие 3.6 доказано.

Предложение 3.2. У любой счетной несуператомной булевой алгебры $\mathfrak{A}$ существует континуум I -обогащений $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ с локальными либо строго ступенчатыми $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ и различными характеристиками $r_{\mathfrak{C}}$.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $\mathfrak{A}$ не атомная. Тогда $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{L}$ и $\mathfrak{B}$ безатомная. Рассмотрим формулы $A(x), B(x), C(x) \in \{V_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$, где

$$A(x) = (\hat{x} \cap I_1 = \hat{0}) \& (x \neq 0) \& (x \text{ безатомный}) \& \bigwedge_{j>1} (x \in I_j),$$

$$B(x) = (x/I_1 \text{— атом}) \& (x \text{ безатомный}) \& \bigwedge_{j>1} (x \in I_j),$$

$$C(x) = (0 \neq (x/I_1) \text{ безатомный}) \& (x \text{ безатомный}) \\ \& (\neg(\exists y \leq x)(A(y))) \& \bigwedge_{j>1} (x \in I_j)$$

(см. [8, с. 33–35]). Рассмотрим множество формул, связанных с A, B, C так, как это изображено на рис. 4. Линии, как и на рис. 1, означают следующее: условие $V_n \leq A_1$ равносильно условию $V_n < A$ или $V_n < B$

для любого $n \in \mathbb{N}$; условие $V_n \not\leq B_2$ равносильно условию $V_n < A_1$ или $V_n < C_1$ и т.д.

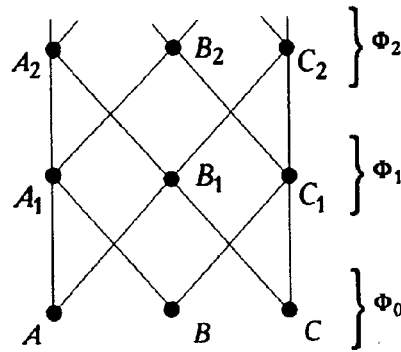


Рис. 4

Далее, для каждого $\varepsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ определим естественное множество M^ε следующим образом: для каждого $n \in \mathbb{N}$ если $\varepsilon(n) = 1$, то изменяем связь между формулами A_n, B_n, C_n и формулами $A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1}$ (см. рис. 5).

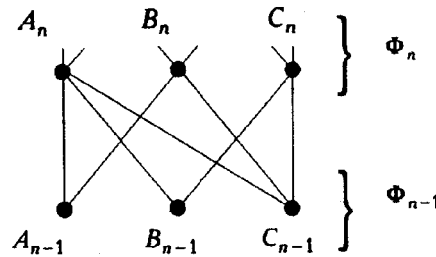


Рис. 5

Полагаем $M^\varepsilon = \{n \mid V_n \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Phi_j\}$,

$$r^\varepsilon(n) = \begin{cases} 0, & n \notin M^\varepsilon, \\ 1, & n \in M^\varepsilon \text{ и } V_n \text{ сплошная,} \\ \infty, & n \in M^\varepsilon \text{ и } V_n \text{ точечная.} \end{cases}$$

Несложно показать, что функция $r^\varepsilon: \mathbb{N} \rightarrow \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ естественная и ступенчатая. Очевидно, что если $\varepsilon \neq \delta$, то $r^\varepsilon \neq r^\delta$.

Определим I -обогащение $\mathfrak{L}^\varepsilon = \mathfrak{B}^\varepsilon \times \mathfrak{L}^\varepsilon$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ так, чтобы выполнялись соотношения $1^{\mathfrak{L}^\varepsilon} \in I_j^{\mathfrak{L}^\varepsilon}$ при $j \leq \lambda$, $r_{\mathfrak{B}^\varepsilon} = r^\varepsilon$ и $\mathfrak{B}^\varepsilon$ была строго ступенчатой (это возможно в силу следствия 1.6 и единственности, с точностью до изоморфизма, счетной безатомной булевой алгебры). Тогда $\mathfrak{L}^\varepsilon$ либо локальная (если $\text{ch}_1 \mathfrak{L}^\varepsilon < \infty$), либо строго ступенчатая (если $\text{ch}_1 \mathfrak{L}^\varepsilon = \infty$). Напомним, что ch_1 есть первая характеристика Ершова — Тарского булевой алгебры [14]. Действительно, нетрудно доказать, что если $n \in M(\mathfrak{L}^\varepsilon)$, то для некоторого $k \in \mathbb{N}$ выполнено одно из следующих условий:

$$V_n(x) \equiv \text{At}^k(x) \Leftrightarrow ((\text{ch}(x) = (k, 1, 0)) \& \bigwedge_{\ell \leq \lambda} (x \in I_\ell)),$$

$$V_n(x) \equiv \text{Al}^k(x) \Leftrightarrow ((\text{ch}(x) = (k, 1, 0)) \& \bigwedge_{\ell \leq \lambda} (x \in I_\ell))$$

(эквивалентность понимается относительно теории I -алгебр). Легко видеть, что

$$At^k \not\leq Al^k, Al^k \not\leq At^k; At^m, Al^m < At^k, At^m, Al^m < Al^k \text{ при } m < k.$$

Очевидно, что $r_{\mathfrak{C}^\varepsilon} \neq r_{\mathfrak{C}^\delta}$ при $\varepsilon \neq \delta$.

Случай 2: $\mathfrak{A}$ атомная, но несуператомная. Тогда $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{L}$, причем для некоторого счетного ординала α алгебра $\mathfrak{B}/F_\alpha$ безатомная и для любого $\beta < \alpha$ алгебра $\mathfrak{A}/F_\beta$ атомная (здесь F_α — α -й идеал Фреше, см. доказательство леммы 3.2). Рассмотрим формулы

$$A(x) \Rightarrow (x - \text{атом}) \& (x \notin I_1) \& \bigwedge_{\ell > 1} (x \in I_\ell),$$

$$B(x) \Rightarrow (x \text{ атомный}) \& (x/I_1 - \text{атом}) \& \neg(\exists y \leq x)(A(y)) \& \bigwedge_{\ell > 1} (x \in I_\ell),$$

$$C(x) \Rightarrow (x \text{ атомный}) \& (0 \neq (x/I_1) \text{ безатомный}) \& \bigwedge_{\ell > 1} (x \in I_\ell).$$

Определяем естественную ступенчатую функцию r^ε так же, как в случае 1. Аналогично лемме 3.2 доказывается, что у алгебры $\mathfrak{A}$ существует обогащение $\mathfrak{C}^\varepsilon = \mathfrak{B}^\varepsilon \times \mathfrak{L}^\varepsilon$ такое, что $r_{\mathfrak{B}^\varepsilon} = r^\varepsilon$ и $1^{\mathfrak{L}^\varepsilon} \in I_\ell^{\mathfrak{L}^\varepsilon}$ при любом $\ell \leq \lambda$. Нетрудно заметить, что тогда $\mathfrak{L}^\varepsilon$ локальная, $r_{\mathfrak{C}^\varepsilon} = r_{\mathfrak{B}^\varepsilon} = r^\varepsilon$ и $\mathfrak{C}^\varepsilon$ — строго ступенчатая I -алгебра. Кроме того, как и в случае 1, $r^\varepsilon \neq r^\delta$ при $\varepsilon \neq \delta$. Предложение 3.2 доказано.

Следствие 3.7. У любой счетной атомной, но несуператомной булевой алгебры $\mathfrak{A}$ существует континуум строго ступенчатых I -обогащений $\mathfrak{C}$ с различными характеристиками $r_{\mathfrak{C}}$; все эти характеристики будут минимальными в классе естественных нелокальных функций.

Следствие 3.8. У любой счетной несуператомной булевой алгебры $\mathfrak{A}$ существует континуум I -обогащений $\mathfrak{C}$ с различными характеристиками $r_{\mathfrak{C}}$ и $\text{Th } \mathfrak{C}$, имеющими счетно-насыщенную модель.

Доказательство вытекает из предложения 3.2 и следствия 3.4.

Доказательство теоремы 3.1. Если счетная булева алгебра $\mathfrak{A}$ несуператомная, то у нее существует континуум обогащений одним идеалом с различными элементарными теориями: а) не имеющими простой модели (лемма 3.3), б) имеющими простую модель, но не имеющими счетно-насыщенной модели [1, теорема 5], в) имеющими счетно-насыщенную модель (следствие 3.8).

Если булева алгебра $\mathfrak{A}$ суператомная, то она имеет только счетное число элементарно не эквивалентных обогащений одним идеалом [2, с. 345]. Все их элементарные теории имеют простую и счетно-насыщенную модели (следствие 3.2). Теорема 3.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пальчунов Д. Е. Простые и счетно-насыщенные модели теории булевых алгебр с выделенными идеалами // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. 1993. Т. 25. С. 82–103.

2. Пальчунов Д. Е. О неразрешимости теории булевых алгебр с выделенным идеалом // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 3. С. 326–346.
3. Jurie P.-F., Touraille A. Idéaux élémentairement équivalents dans une algèbre booléenne // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1984. Т. 299, № 10. Р. 415–418.
4. Сикорский Р. Булевы алгебры. М.: Мир, 1969.
5. Гончаров С. С. Счетные булевы алгебры. Новосибирск: Наука, 1988.
6. Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977.
7. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. М.: Наука, 1987.
8. Пальчунов Д. Е. Счетно категоричные булевы алгебры с выделенными идеалами. Новосибирск, 1986. (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 12).
9. Пальчунов Д. Е. Конечно аксиоматизируемые булевы алгебры с выделенными идеалами // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 4. С. 435–455.
10. Pal'chunov D. E. Countably-categorical boolean algebras with distinguished ideals // Studia Logica. 1987. Т. XLVI, N 2. Р. 121–135.
11. Пальчунов Д. Е. О простых и счетно насыщенных булевых алгебрах с выделенным идеалом // 8-я Всесоюз. конф. по мат. логике. Москва, 16–18 сент. 1986 г.: Тез. докл. М., 1986. С. 147.
12. Pal'chunov D. E. On the finitely axiomatizable and prime boolean algebras with distinguished ideals // Международная конф. по алгебре, посвященная памяти А. И. Мальцева. Новосибирск, 21–29 авг. 1989 г.: Тез. докл. по теории моделей и алгебраическим систем. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. С. 98.
13. Гончаров С. С. Конструктивизируемость суператомных булевых алгебр // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 1. С. 31–40.
14. Ершов Ю. Л. Разрешимость теории дистрибутивных структур с относительными дополнениями и теории фильтров // Алгебра и логика. 1964. Т. 3, № 3. С. 17–38.