КОНСТРУКТИВНЫЕ АБЕЛЕВЫ p-ГРУППЫ

Н. Г. Хисамиев

Введение

В теории конструктивных моделей одной из основных проблем является проблема существования (сильной) конструктивизации у заданной модели [1, с. 300]. Для различных классов моделей этот вопрос исследовался многими авторами. Ю. Л. Ершовым доказана теорема о ядре [1, с. 326], которая позволяет переносить конструктивизации алгебры на ее «замыкание» (алгебраическое и вещественное замыкания, пополнение группы и т.д.). В [2, 3] найдены критерии сильной конструктивизируемости однородной модели. В [4, 5] доказана сильная конструктивизируемость любой счетной модели ω_1-категоричной разрешимой теории.

Указанная проблема изучалась и для конкретных классов алгебр: полей, линейных порядков, булевых алгебр и т.д. В частности, доказана сильная конструктивизируемость алгебраически замкнутого поля [5, 6]. В [7, 8] получен критерий (сильной) конструктивизируемости суператомных булевых алгебр. Доказано, что любые счетная насыщенная и простая булевы алгебры конструктивизируемы (см. [8, 9]).

Большой интерес представляет характеризация (сильно) конструктивизируемых групп. А. И. Мальцевым в [10] описаны конструктивизируемые абелевы группы без кручения ранга 1, случаи конечных и любых рангов рассмотрены соответственно в [11, 12]. В [13] даны достаточные условия конструктивизируемости абелевых p-групп, а также доказано, что ульмов тип конструктивной абелевой p-группы есть конструктивный ординал. В [14] найдены критерии сильной конструктивизируемости абелевой p-группы в терминах порождающих и определяющих соотношений.

По теореме Ульма [15, с. 79] каждая счетная редуцированная абелева p-группа однозначно определяется числовыми инвариантами. Ю. Л. Ершов обратил внимание автора на важность нахождения критериев в терминах этих инвариантов для (сильной) конструктивизируемости абелевой p-группы, имеющей конечный ульмов тип. В [14, 16–19] получены такие критерии для абелевых p-групп, ульмов тип которых не превосходит 2. Автор предложил конструкцию, описывающую конструктивизируемые абелевы p-группы с конечными ульмовыми типами через наличие специальных обобщенно вычислимых функций. С. С. Гончаров высказал гипотезу о возможности упрощения доказательства посредством установления связи между степенями конструктивизируемости группы и ее фактор-группы, которая позволяет по индукции получить общий критерий конструктивизируемости через указанные инварианты. Доказательству этой гипотезы и нахождению критерия в этих терминах и посвящена эта работа.

Результаты работы анонсированы в [20, 21].

План статьи следующий. В § 1 приведены вспомогательные сведения. В § 2 сформулированы основная теорема и ее следствия. В частности, в следствиях 2.1–2.3 даны критерии (сильной) конструктивизируемости абелевой p-группы, ульмов тип редуцированной части которой конечен.

Остальные параграфы работы посвящены доказательству основной теоремы 2.1.

Автор выражает благодарность Ю. Л. Ершову и С. С. Гончарову за постановку задачи и полезные обсуждения.

§ 1. Определения, обозначения и некоторые результаты

В статье используются общепринятые определения и обозначения (см., например, [1, 8, 15, 22–24]). Поясним лишь некоторые: N — множество натуральных чисел; p — простое число; Z_{p^n} — циклическая группа порядка p^n; Z_{p^∞} — квазициклическая p-группа; $Z_{p^\infty}^{(\omega)}$ — счетная прямая степень группы Z_{p^∞}; $\sum$, $\bigoplus$ — прямые суммы; $\langle x_0, \dots, x_{n-1}\rangle$ и $[\langle x_0, \dots, x_{n-1}\rangle]$ — упорядоченная n-ка чисел $x_i \in N$, $i \leqslant n-1$; $[x_0, \dots, x_{n-1}]$ — номер n-ки чисел $\langle x_0, \dots, x_{n-1}\rangle$ в некоторой геделевской нумерации всех конечных наборов натуральных чисел; Y — подмножество множества натуральных чисел; Σ_n^Y, Π_n^Y, Δ_n^Y — классы релятивизированной арифметической иерархии множеств; $Y^{(n)}$ — n-й скачок множества Y; символ $\rightleftharpoons$ означает равенство по определению, т. е. выражение $a \rightleftharpoons b$ эквивалентно утверждению «a по определению есть b». Все числа, если не оговорено противное, принадлежат N. Области определения и области значений всех рассматриваемых функций суть подмножества множества N. Зафиксирована канторовская нумерация пар натуральных чисел [23, с. 60].

Полагаем $\langle m,n\rangle < \langle r,s\rangle \Leftrightarrow [m,n] < [r,s]$. На тройках чисел введем следующий порядок. Для $\xi = \langle k,m,n\rangle$, $\eta = \langle \ell, r, s\rangle$, $|\xi| = k+m+n$, полагаем $\xi < \eta$, если выполнено одно из следующих условий: либо $|\xi| < |\eta|$, либо $|\xi| = |\eta|$ и $n > s$, либо $|\xi| = |\eta|$, $n = s$ и $\langle k,m\rangle < \langle r,s\rangle$.

Пусть $\xi_0 < \xi_1 < \dots$ — последовательность всех троек чисел. *Номером тройки* ξ_n назовем число n.

Функция $f(i,x)$ называется *s-функцией*, если функция $\lambda x f(i,x)$ неубывающая и для любого i существует предел $\lim_x f(i,x) = m_i$. Если, кроме того, $m_0 < m_1 < \dots$, то f называется *s_1-функцией*.

Положим $\bar{\rho} f = \{\langle m,k\rangle \mid \exists i_1 \dots i_k (m_{i_1} = \dots = m_{i_k} = m \;\&\; i_1 < i_2 < \dots < i_k)\}$. Пусть задана геделевская нумерация γ всех формул $\mathfrak{A}(v_0, \dots, v_{s-1})$ со свободными переменными $v_0, \dots, v_{s-1}$, $s \in N$, сигнатуры σ, состоящей из одного символа «$+$» двухместной операции. Под термином «группа» понимается в этой работе не более, чем счетная абелева p-группа. Отображение ν множества N на группу A называется *нумерацией* группы A, а пара (A,ν) — *нумерованной группой*. Полагаем

$$D_\nu(A) = \{\langle m,n\rangle \mid A \models (\nu m = \nu n)\},$$

$$D_\nu^*(A) = \{\langle m, n_0, \dots, n_{s-1}\rangle \mid A \models \mathfrak{A}(\nu n_0, \dots, \nu n_{s-1}),\ \gamma m = \mathfrak{A}(v_0, \dots, v_{s-1})\}.$$

Пара (A,ν) называется (*сильно*) *Y-конструктивной группой*, если существует рекурсивная функция $s(x,y)$ такая, что $\nu x + \nu y = \nu s(x,y)$, и множество $(D_\nu^*(A))$ $D_\nu(A)$ является Y-рекурсивным.

Группа A называется (*сильно*) *Y-конструктивизируемой*, если существует нумерация ν группы A такая, что пара (A,ν) (сильно) Y-конструктивная группа. Если Y — рекурсивное множество, то вместо «Y-конструктивная» и «Y-конструктивизируемая» пишем просто «конструктивная» и «конструктивизируемая».

Пусть группа C есть $\sum_i Z_{p^{n_i}}$. *Характеристикой* $X(C)$ группы C называется множество $\{\langle m,k\rangle \mid \exists i_1\dots i_k(n_{i_1}=\dots=n_{i_k}=m \mathbin{\&} i_1<i_2<\dots<i_k)\}$. Для группы A через A^1 обозначим ее подгруппу, состоящую из элементов бесконечной высоты. Положим $A^0=A$, $A^n=(A^{n-1})^1$, $n>1$. Если $n\in N$ — наименьшее число такое, что $A^n=0$, то будем говорить, что *ульмов тип* $\tau(A)$ группы A равен n. Пусть $\tau(A)=n$. Для любого i, $i<n$, фактор-группа $\bar{A}^i=A^i/A^{i+1}$ называется *i-й ульмовой фактор-группой группы A*. По теореме Прюфера $\bar{A}^i$ есть прямая группа циклических p-групп. По теореме Ульма [15, с. 79] счетная редуцированная абелева p-группа однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется своими факторами $\bar{A}^i$. Все введенные выше понятия можно определить для любого ординала.

Приведем некоторые результаты, необходимые в дальнейшем.

Теорема А. *Пусть G — прямая сумма циклических p-групп неограниченных порядков.*

(а) *Группа G является Y-конструктивизируемой в том и только том случае, когда характеристика $X(G)$ принадлежит Σ_2^Y и существует Y-рекурсивная s_1-функция $f(i,x)$ такая, что $\bar{\rho} f\subseteq X(G)$.*

(б) *Группа G сильно Y-конструктивизируема в том и только том случае, когда характеристика $X(G)$ является Y-рекурсивным множеством.*

Утверждение (а) для случая $Y=\varnothing$ доказано в [18]. Доказательство общего случая есть релятивизация доказательства из [18]. Утверждение (б) доказано в [17].

Теорема В. *Пусть G — прямая сумма циклических p-групп. Группа G является Y-конструктивизируемой в том и только том случае, когда существует Y-рекурсивная s-функция $f(i,x)$ такая, что*

$$\lim_x f(i,x)=m_i\,,\quad G\simeq\sum_{i=0}^{\infty} Z_{p^{m_i}}.$$

В [19] доказан более общий результат, чем теорема В для случая, когда $Y=\varnothing^{(n)}$.

Теорема С. *Пусть абелева p-группа G есть $B\oplus Z_{p^\infty}^{(\omega)}$, где B — прямая сумма циклических p-групп. Группа G Y-конструктивизируема в том и только том случае, когда характеристика $X(B)$ является Σ_2^Y-множеством.*

Теорема С при $Y=\varnothing$ доказана в [14].

Следствие А. *Пусть Y-конструктивизируемая группа A является прямой суммой циклических p-групп, порядки которых не ограничены. Тогда существуют Y-конструктивизируемые группы B_0 и B_1 такие, что*

$A = B_0 \oplus B_1$ и порядки элементов группы B_i, $i = 0, 1$, не ограничены в совокупности.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость при $Y = \varnothing$. Общий случай есть релятивизация этого доказательства. Пусть группа A конструктивизируема. По теореме А $X(A) \in \Sigma_2^0$ и, кроме того, существует рекурсивная s_1-функция $f(i, x)$ такая, что $\bar{\rho} f \subseteq X(A)$. Положим

$$g(i,x) = f(2i,x), \quad h(i,x) = f(2i+1,x), \tag{1.1}$$

$$M_0 = \bar{\rho} g, \quad M = X(A), \quad M_1 = M \backslash M_0. \tag{1.2}$$

Тогда

$$\bar{\rho} h \subseteq M_1. \tag{1.3}$$

Покажем, что $M_1 \in \Sigma_2^0$. Действительно, так как f является s_1-функцией, имеет место эквивалентность

$$x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M \ \& \ \forall i \leqslant x+1 \, \exists y \, \forall z \geqslant y \, (g(i,z) \neq x).$$

Поэтому в силу $M \in \Sigma_2^0$ получаем

$$M_1 \in \Sigma_2^0. \tag{1.4}$$

Пусть группа B_i, $i = 0, 1$ является такой прямой суммой циклических p-групп, что $X(B_i) = M_i$. Из (1.1)–(1.4) по теореме А приходим к требуемому утверждению.

§ 2. Формулировка основного результата и некоторые его следствия

Цель работы — доказать следующий результат.

Теорема 2.1. *Пусть счетная абелева p-группа A не является прямой суммой циклических и квазициклических групп. Группа A (сильно) Y-конструктивизируема тогда и только тогда, когда ее подгруппа A^1, состоящая из элементов бесконечной высоты, $(Y^{(1)}$-$)$ $Y^{(2)}$-конструктивизируема, а ее фактор-группа A/A^1 (сильно) Y-конструктивизируема.*

Доказательство основного результата и его следствий (см. ниже) будет проводиться для случая, когда $Y = \varnothing$. Общий случай есть простая релятивизация этого доказательства.

Следствие 2.1. *Пусть A — счетная редуцированная абелева p-группа, имеющая конечный ульмов тип $\tau(A) = n$. Группа A сильно Y-конструктивизируема тогда и только тогда, когда существует система s-функций $\{ f_i(x,y) \mid i \leqslant n-1 \}$ такая, что*

1) *функция $f_i(x,y)$ $(Y^{(2i-1)}$-$)$ $Y^{(2i)}$-рекурсивна, где $Y^{-1} = \varnothing$;*
2) *$\bar{A}^i \simeq \sum_{i=0}^{\infty} Z_{p^{m_{ir}}}$, где $\lim_x f_i(r,x) = m_{ir}$.*

В случае сильной Y-конструктивности функция $f_0(x,y)$ не зависит от y и $f_0(x,y) < f_0(x+1,y)$.

Доказательство проведем для случая конструктивизируемости индукцией по n. При $n = 1$ следствие 2.1 есть теорема B. Пусть для всех n, $n < m$, утверждение верно. Докажем его для $n = m$. Допустим, что группа A конструктивизируема. Тогда по теореме 2.1 подгруппа A^1 будет $\varnothing^{(2)}$-конструктивизируемой, а фактор-группа $\bar{A}^0$ — конструктивизируемой. Ульмов тип $\tau(A^1)$ равен $m-1$. В силу индукционного предположения получаем требуемое утверждение. Докажем достаточность. Пусть существует система s-функций $\{ f_i(x,y) \mid i \leqslant m-1 \}$ такая, что выполнены условия 1, 2. По индукционному предположению подгруппа A^1 является $\varnothing^{(2)}$-конструктивизируемой, а по теореме B группа $\bar{A}^0$ — конструктивизируемой. Применяя теорему 2.1, получаем требуемое утверждение.

В случае сильной конструктивности вместо теоремы B нужно применить утверждение (б) теоремы A. Следствие 2.1 доказано.

Следствие 2.2. *Пусть абелева p-группа A равна $C \oplus Z_{p^\infty}^{(\omega)}$, где C — редуцированная подгруппа, ульмов тип которой равен n. Группа A (сильно) Y-конструктивизируема тогда и только тогда, когда фактор-группа $\bar{C}^i$, $i < n-1$, является $(Y^{(2i-1)}$-$)$ $Y^{(2i)}$-конструктивизируемой, а характеристика $X(\bar{C}^{n-1})$ принадлежит классу (Σ_{2n-1}^Y) Σ_{2n}^Y в арифметической иерархии множеств. В случае сильной Y-конструктивизируемости вышеприведенные условия при $i = 0$ и $n = 1$ нужно заменить на следующее: «$\bar{C}^0$ сильно Y-конструктивизируема».*

Доказательство проведем индукцией по n. Рассмотрим сначала случай конструктивности. При $n = 1$ следствие 2.2 есть теорема C. Пусть для всех n, $n < m$, утверждение доказано. Докажем его для $n = m$.

Необходимость. Пусть группа A конструктивизируема. По теореме 2.1 подгруппа $A^1 = C^1 \oplus Z_{p^\infty}^{(\omega)}$ будет $\varnothing^{(2)}$-конструктивизируемой, а фактор-группа $\bar{A}^0 = \bar{C}^0$ — конструктивизируемой. Ульмов тип $\tau(C^1)$ равен $m-1$. Ввиду теоремы об иерархии [24, с. 403] и определения ульмовых подгрупп справедливы равенства

$$\Sigma_s^{Y^{(r)}} = \Sigma_{s+r}^Y, \quad Y^{(2)^{(2i)}} = Y^{(2(i+1))}, \quad \left(\overline{C^1}\right)^i = \bar{C}^{i+1}, \quad i,s,r \in N. \qquad (2.1)$$

В силу индукционного предположения получаем требуемое утверждение.

Достаточность. Пусть фактор-группа $\bar{C}^i$, $i < m-1$, $\varnothing^{(2i)}$-конструктивизируема, а характеристика $X(\bar{C}^{m-1})$ принадлежит классу Σ_{2m}^0. Из (2.1) по индукционному предположению получаем, что группа A^1 будет $\varnothing^{(2)}$-конструктивизируемой. По теореме 2.1 группа A конструктивизируема.

Докажем следствие для случая сильной конструктивизируемости.

Необходимость. Пусть группа A сильно конструктивизируема. Ввиду разрешимости теории $\mathrm{Th}(A)$ группы A характеристика $X(\bar{A}^0)$ рекурсивна. Следовательно, в силу утверждения (б) теоремы A фактор-группа $\bar{A}^0$ сильно конструктивизируема. По теореме 2.1 подгруппа $A^1 = C^1 \oplus Z_{p^\infty}^{(\omega)}$ будет $\varnothing^{(1)}$-конструктивизируемой. Применяя доказанную часть следствия в случае конструктивности к группе A^1, получаем требуемое утверждение.

Достаточность. Пусть фактор-группа $\bar{A}^0$ сильно конструктивизируема, фактор-группа $\bar{C}^i$, $1 \leqslant i < m-1$, является $\varnothing^{(2i-1)}$-конструктивизируемой, а характеристика $X(C^{m-1})$ принадлежит Σ^0_{2m-1}. Из доказанной части следствия и равенств (2.1) следует, что группа A^1 будет $\varnothing^{(1)}$-конструктивизируемой. По теореме 2.1 группа A сильно конструктивизируема. Следствие 2.2 доказано.

Следствие 2.2 при $n = 2$ в случае сильной конструктивизируемости доказано в [16].

Следствие 2.3. *Пусть абелева p-группа A есть $C \oplus Z^{(k)}_{p^\infty}$, $k < \omega$, и пусть C — редуцированная часть группы A, ульмов тип которой конечен. Группа A является Y-конструктивизируемой тогда и только тогда, когда ее редуцированная часть C является Y-конструктивизируемой.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Доказательство необходимости проведем индукцией по n. Пусть группа A конструктивизируема. Если $n = 1$, то C есть прямая сумма циклических p-групп. По теореме B достаточно построить рекурсивную s-функцию $f(i,x)$ такую, что $C \simeq \sum_{i=o}^{\infty} Z_{p^{m_i}}$, где $\lim_x f(i,x) = m_i$. Используя конечность ранга делимой части $Z^{(k)}_{p^\infty}$ группы A, требуемое построение функции f можно проводить аналогично доказательству теоремы B по конструктивизации группы A для подгруппы C. В случае $n = 1$ необходимость доказана.

Допустим, что $n = m + 1$. По теореме 2.1 подгруппа $A^1 = C^1 \oplus Z^{(k)}_{p^\infty}$ является $\varnothing^{(2)}$-конструктивизируемой. Ульмов тип $\tau\left(C^1\right)$ равен m.. Поэтому по индукционному предположению группа C^1 будет $\varnothing^{(2)}$-конструктивизируемой. По теореме 2.1 группа C конструктивизируема. Следствие 2.3 доказано.

Следствие 2.3 в случае сильной Y-конструктивизируемости верно для любой абелевой p-группы [14].

Следствие 2.4. *Пусть A — (сильно) Y-конструктивизируемая абелева p-группа, ульмов тип $\tau(C)$ редуцированной части которой больше единицы (не обязательно конечный). Тогда существуют (сильно) Y-конструктивизируемые группы B_1 и E такие, что $A = B_1 \oplus E$ и группа B_1 есть прямая сумма циклических p-групп, порядки которых не ограничены.*

Доказательство. Пусть A — конструктивизируемая группа. По теореме 2.1 подгруппа A^1 является $\varnothing^{(2)}$-конструктивизируемой, фактор-группа $\bar{A}^0$ — конструктивизируемой. Из условия $\tau(C) > 1$ вытекает, что порядки элементов группы $\bar{A}^0$ не ограничены в совокупности. По следствию A существуют конструктивизируемые группы B_0 и B_1 такие, что $\bar{A}^0 = B_0 \oplus B_1$. По теореме 2.1 существует конструктивизируемая группа E такая, что $E^1 \simeq A^1$, $\bar{E}^0 \simeq B_0$. По теореме Ульма группы A и $B_1 \oplus E$ изоморфны.

Для случая сильной конструктивности доказательство аналогично. Следствие 2.4 доказано.

Легко показать, что группа B_1 из следствия 2.4 не автоустойчива. Тогда конструктивизируемая p-группа, которая не является прямой суммой циклических и квазициклических p-групп, не автоустойчива. Автоустойчивые абелевы p-группы описаны в [25, 26].

Следствие 2.5. *Пусть ульмов тип редуцированной части C абелевой p-группы A конечен. Тогда конечная прямая степень $A^{(k)}$ группы A (сильно) Y-конструктивизируема в том и только том случае, когда группа A (сильно) Y-конструктивизируема.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Доказательство необходимости проведем индукцией по типу $\tau(C) = n$. Пусть группа $A^{(k)}$ конструктивизируема. Докажем, что группа A конструктивизируема. При $n = 1$ этот факт непосредственно следует из теорем А, С и следствия 2.3. Докажем индукционный шаг при $n = m+1$, предполагая следствие выполненным для m. По теореме 2.1 группа $(A^{(k)})^1 = (A^1)^{(k)}$ будет $\varnothing^{(2)}$-конструктивизируемой, а фактор-группа $\overline{A^{(k)}}{}^0 = (\bar{A}^0)^{(k)}$ — конструктивизируемой. По индукционному предположению группа A^1 является $\varnothing^{(2)}$-конструктивизируемой, а группа $\bar{A}^0$ — конструктивизируемой. По теореме 2.1 группа A конструктивизируема.

Аналогично проводится доказательство в случае сильной конструктивности. Следствие 2.5 доказано.

В [27] установлено, что для абелевых групп без кручения следствие 2.5 не верно. Из результатов работы [14] вытекает, что в следствии 2.5 нельзя заменить k на ω.

Следствие 2.6. *Пусть ульмов тип $\tau(C)$ редуцированной части C группы A равен n, $n < \omega$. Если группа A сильно Y-конструктивизируема, то для любого s, $s < n$, фактор-группа A/A^s (сильно) Y-конструктивизируема.*

Доказательство. Пусть группа A (сильно) конструктивизируема, $s < n$ и $B \leftrightharpoons A/A^s$. Легко проверить справедливость равенств $\bar{B}^i = \bar{A}^i$ при $i \leqslant s-1$. Ввиду следствий 2.1–2.3 группа B сильно конструктивизируема. Следствие 2.6 доказано.

Доказательство теоремы 2.1. Достаточность доказывается в § 3–12.

Необходимость. Пусть группа (A, μ) (сильно) конструктивна. Согласно определению подгруппы A^1 имеет место эквивалентность $x \in A^1 \Leftrightarrow \forall n \exists y (x = p^n y)$. Поэтому подгруппа A^1 будет $(\varnothing^{(1)}$-$)$ $\varnothing^{(2)}$-рекурсивной. Следовательно, она $(\varnothing^{(1)}$-$)$ $\varnothing^{(2)}$-конструктивизируема. Характеристика $X(\bar{A}^0)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\langle m, k\rangle \in X(\bar{A})^0$$

$\Leftrightarrow$ в группе A содержится сервантная подгруппа, изоморфная $Z_{p^m}^{(k)}$

$$\Leftrightarrow A \models \exists x_0 \dots x_{k-1} \Big(\mathop{\&}_{i=0}^{k-1} p^m x_i = 0 \;\&\; \forall \alpha_0 \dots \alpha_{k-1} \leqslant p^m \Big(\sum\nolimits_i \alpha_i x_i = 0$$

$$\to \mathop{\&}_i (\alpha_i x_i = 0) \Big) \;\&\; \forall y \Big(\sum\nolimits_i \alpha_i x_i \neq 0 \to p^{m+1} y \neq \sum\nolimits_i \alpha_i x_i \Big) \Big).$$

Таким образом, если группа (A,μ) сильно конструктивна, то характеристика $X(\bar{A}^0)$ рекурсивна. Согласно утверждению (б) теоремы А группа $\bar{A}^0$ сильно конструктивизируема. Если же группа (A,μ) конструктивна, то

$$X(\bar{A}^0) \in \Sigma_2^0. \tag{2.2}$$

В [18] доказано, что если редуцированная абелева p-группа B конструктивизируема, то ее фактор-группа $\bar{B}^0$ также конструктивизируема. В доказательстве используется существование элемента $g \in B$ бесконечной высоты такого, что для любого $h \in B$ равенство $ph = g$ влечет конечность высоты h. По условию теоремы 2.1 группа A не разлагается в прямую сумму циклических и квазициклических p-групп. Следовательно, в группе A такой элемент g существует. Повторяя доказательство из [18], можно построить рекурсивную s_1-функцию $f(i,x)$ такую, что $\bar{\rho} f \subseteq X\left(\bar{A}^0\right)$. В силу (2.2) и теоремы А фактор-группа $\bar{A}^0$ конструктивизируема.

§ 3. Основная конструкция

Для доказательства достаточности условий теоремы 2.1 в случае конструктивности нам понадобится следующее

Предложение 3.1. *Пусть даны $\varnothing^{(2)}$-конструктивная абелева p-группа (A^1,ν) и рекурсивная s_1-функция $f(i,x)$. Тогда существует конструктивизируемая абелева p-группа G, удовлетворяющая следующим условиям:*

(а) $G^1 \simeq A^1$;

(б) $G/G^1 \simeq \sum\limits_{i=0}^{\infty} Z_{p^{m_i}}$,

где $m_i = \lim_x f(i,x)$.

Доказательство. Для удобства ссылок мы разбиваем доказательство на пункты.

/3.1/ Пусть (A^1,ν) — $\varnothing^{(2)}$-конструктивная абелева p-группа. Тогда операция сложения $s(x,y)$, определяемая равенством $\nu x + \nu y = \nu s(x,y)$, будет рекурсивной, а предикат равенства $\{\langle x,y\rangle \mid \nu x = \nu y\}$ — $\varnothing^{(2)}$-рекурсивным. Поэтому существует рекурсивная функция $g(m,n,x,y)$, принимающая лишь значения 0, 1 и такая, что имеет место эквивалентность

$$\nu m = \nu n \Leftrightarrow \lim_x \lim_y g(m,n,x,y) = 1. \tag{3.1}$$

Нам нужно построить группу G со свойствами (а), (б). Объясним «неформально» как будем проводить это построение.

По шагам t строится группа $G = \bigcup_t G^t$. Группа G^t порождается элементами вида ξ, $\bar{\xi}^t$, d_ℓ^t, $\ell \in N$, где $\xi = \langle k,m,n\rangle$, $[\xi] \leqslant t$. Между элементами ξ и $\eta = \langle \ell,r,s\rangle$, $k \leqslant \ell$, $m = r + \ell - k \pm \varepsilon$, $n = s \pm \varepsilon$, $\varepsilon = 0,1$ вводятся соотношения по следующему правилу: $\xi = \eta \Leftrightarrow g(k,\ell,r,s) = 1$. Тогда будет существовать предел $\lim_m \lim_n \xi = b_k$ и группа, порожденная элементами b_i, $i \leqslant k-1$, будет изоморфна подгруппе $(\{\nu i \mid i \leqslant k-1\})$ группы (A^1,ν). Чтобы было выполнено требуемое соотношение $G^1 \simeq \text{гр}(\{b_k \mid k \in N\})$, поступаем следующим образом. Допустим, что элемент ξ определился на шаге t. Тогда определяем числа $\hat{\xi}^t$, $\check{\xi}^t$ и вводим определяющие соотношения $p^s\bar{\xi}^t = \xi$, $s = f(\hat{\xi}^t, \check{\xi}^t)$, с помощью которых добьемся чтобы элемент b_k имел в группе G бесконечную высоту. Далее, на каждом шаге будет определена подгруппа $H^t = \left(G^t\right)^1$, состоящая из элементов «t-бесконечной» высоты. Используя s_1-функцию f на каждом шаге, мы добиваемся выполнения соотношения $G^t/H^t \simeq \sum\{Z_{p^{\widetilde{\xi}^t}} \mid [\xi] \leqslant t\}$, где $\widetilde{\xi}^t = f(\hat{\xi}^t, \check{\xi}^t)$. Тогда $G/G^1 \simeq \sum_{i=0}^{\infty} Z_{p^{m_i}}$.

/3.2/ В этом пункте доказательства опишем построение. Пусть сделаны t шагов, определены конечные группы C^t, E^t, B^t и $B^t \subseteq C^t$, $G^t = C^t \oplus E^t$. Группа B^t порождается элементами вида $\langle x, y, z\rangle$, $x, y, z \in N$. При этом некоторые элементы $\langle x, y, z\rangle$ могут быть не определены и элемент $\langle 0, x, y\rangle$ всегда равен нулю группы B. Каждая тройка чисел будет рассматриваться одновременно как элемент. Тройки чисел $\langle k, m, n\rangle$, $\langle \ell, r, s\rangle, \langle x, y, z\rangle, \langle w, u, v\rangle, \langle k_0, m_0, n_0\rangle, \ldots$ будут обычно обозначаться через ξ, η, χ, θ, $\xi_0, \ldots$ соответственно. Если ξ и η равны как элементы группы B, то пишем $\xi = \eta$; если же они равны как тройки чисел, то пишем $\xi \equiv \eta$. На шаге t будут определены числа w^t, u_i^t, v_i^t, $i \leqslant w^t$. Элементы вида $\langle i, u_i^t, v_i^t\rangle$ будем обозначать через c_i^t. Элементами бесконечной высоты группы G^t на шаге t считаются по определению элементы подгруппы, порожденной элементами c_i^t, $i \leqslant w^t$. Если на шаге t определен элемент ξ, то будут определены элемент $\bar{\xi}^t$ и пара чисел $\hat{\xi}^t$, $\check{\xi}^t$. Число $\hat{\xi}^t$ называется *использованным для подгруппы* B^t. Если $\hat{\xi}^t \neq \hat{\xi}^{t+1}$, то число $\hat{\xi}^t$ на шаге $t+1$ считается *освобожденным*. На дальнейших шагах оно не используется для подгруппы B^t. Для элементов ξ и $\bar{\xi}^t$-существует число q такое, что $p^q\bar{\xi}^t = \xi$. Подгруппа C^t порождается элементами вида $\bar{\xi}^t$. На шаге t также определено некоторое множество натуральных чисел K^t и группа E^t задана кодом

$$\langle \{d_k^t \mid k \in K^t\};\ p^{f(k,t)}d_k^t = 0\rangle.$$

Наконец, определены некоторое конечное множество натуральных чисел N^t и нумерация $\mu^t\colon N^t \to G^t$.

Шаг $t+1$. Пусть $t+1 = [k, m, n]$. Проделаем на этом шаге следующие действия.

/3.3/ В этом пункте определим элемент ξ. Для j, $j \leqslant k$, положим $m_j = m + k - j$. Элементы $\langle j, m_j, n\rangle$ обозначим через ξ_j. Допустим, что для каждого j, $j < k$, известно какие из элементов ξ_j определены. Далее, пусть для каждого j, $j < k$, определены число ξ_j^*, множество $N(\xi_j) \subseteq N$ и нумерованная группа $(F(\xi_j), \nu^*(\xi_j))$, где $\nu^*(\xi_j)\colon N(\xi_j) \to F(\xi_j)$. Вместо $X(\xi_j)$ будем писать X_j, где X обозначает один из символов N, F, ν^*. Определим значение символов ξ, ξ^* и $X(\xi)$

Число k зафиксировано. Рассмотрим форму от символов λ_j вида

$$x = \sum_{j=0}^{k} \ell_j \lambda_j \tag{3.2}$$

и определим по ней форму

$$\bar{x} = \sum_{j=0}^{k} \ell_j \nu(j)$$

от элементов $\nu(j)$ группы (A^1, ν). Исходя из номеров j и функции сложения s в группе (A^1, ν) (см. /*3.1*/), можно однозначно найти число r такое, что $\nu r = \bar{x}$. При этом если $\ell_j = 0$, то считаем, что $0 \cdot \nu(j)$ имеет номер 0 и $\nu y + \nu 0 = \nu y$ для любого $y \in N$. Число r будем называть ν_k^*-*номером* как для формы x, так и для формы $\bar{x}$, и обозначать его через x^*.

Определим число ξ^*. Пусть форма $p^i \lambda_k$ имеет ν_k^*-номер q_i. Проверим, существуют ли числа $i \leqslant m$ и $y_i \in N_{k-1}$ такие, что

$$g(y_i, q_i, m, n) = 1, \tag{3.3}$$

где функция g определена в /*3.1*/. Если такие числа существуют, то через ξ^* обозначим наименьшее i, а через ξ' — наименьшее y_i, для которых справедливо (3.3) при $i = \xi^*$. Если таких чисел нет, то полагаем $\xi^* = m + 1$. Пусть $\bar{\mu} \leftrightharpoons p^{\xi^*}$.

Определим теперь значение символа $\alpha\lambda_k$, где $\alpha < \bar{\mu}$. Если $\xi^* = m + 1$, то считаем значение символа $\alpha\lambda_k$ и элемент ξ не определенными. Если $\xi^* < m+1$, то значение символа $\alpha\lambda_k$ есть элемент $\alpha\xi$. Если $\xi^* < m+1$, то считаем, что элемент $\bar{\mu}\xi$ равен элементу $\nu_k^*\xi'$. Другими словами, вводим следующее *определяющее соотношение типа* I:

$$\text{(I)} \qquad \bar{\mu}\xi = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \xi_j,$$

где $\nu_k^*\xi' = \sum\limits_{j=0}^{k-1} \alpha_j \xi_j$.

Пусть $\xi^* = m + 1$. Тогда вводим следующее *определяющее соотношение типа* K:

$$\text{(K)} \qquad 0 = p^{m+1}\xi.$$

Заметим, что если в соотношении (I) правая часть равна нулю, то (I) приобретает вид $0 = p^{\xi^*}\xi$, где $\xi^* \leqslant m$. Поэтому (I) отличается от (K) показателями числа p.

Определим теперь группу $F(\xi)$. Элементами группы $F(\xi)$ будут формы вида

$$\tilde{x} = \sum_{j=0}^{k} \ell_j \xi_j,$$

где $\ell_j < p^{\xi_j^*}$, т. е. $F(\xi)$ порождается элементами $\xi_j, j \leqslant k$, где $\xi_k \equiv \xi$. Если элемент ξ_j не определен, то полагаем $\ell_j = 0$ и $0 \cdot \xi_j = 0$. Если элемент ξ не определен, то $F(\xi) = F(\xi_{k-1})$. Далее, полагаем

$$N(\xi) = \{x^* \mid \tilde{x} \in F(\xi)\}, \quad \nu^*(\xi)(x^*) = \tilde{x}.$$

/3.4/ Опишем связи между элементами $\langle k,m,n\rangle$ и $\langle k,m,n-1\rangle$, $\langle k,m-1,n+1\rangle$. Условимся в дальнейшем равенство $\xi=\eta$ элементов ξ и η понимать так: либо оба элемента ξ и η определены и равны, либо оба они не определены. Будем также считать для удобства, что элементы $\langle x,y,-1\rangle$ и $\langle x,-1,y\rangle$, $x,y\in N$, не определены и отличны от любых элементов $\langle w,u,v\rangle$, $w,u,v\in N$. Для i, $i\leqslant m$, через n_i обозначим наибольшее число s такое, что $[k,i,s]\leqslant t+1$. Пусть тройка чисел $\chi\equiv\langle k,y,z\rangle$ равна либо $\eta_0\equiv\langle k,m,n-1\rangle$, либо $\eta_1\equiv\langle k,m-1,n+1\rangle$. Зададим отображение $\varphi(\chi)\colon F(\chi)\to F(\xi)$ следующим образом:

$$\varphi(\chi)(\chi_j)=\xi_j,$$

где $\chi_j=\langle j,y_j,z\rangle$, $y_j=y+k-j$, $j\leqslant k$. Так как элементами множеств $F(\chi)$ и $F(\xi)$ являются формы соответственно от элементов χ_j и ξ_j, $j\leqslant k$, отображение $\varphi(\chi)$ множества $F(\chi)$ в $F(\xi)$ определено. При этом считаем выполненным следующее условие: если либо $m=0$, либо $n=0$, либо лишь один из символов χ_j, ξ_j определен, то считаем, что $\varphi(\chi)$ не определено. Рассмотрим следующие возможности.

Случай 1a: для любых чисел $j<k$ и $s<m$ справедливы равенства

$$\langle j,m_j,n-1\rangle=\xi_j,\ \langle k,s,n_s-1\rangle=\langle k,s,n_s\rangle,$$

где $n_s=n+m-s$, отображение $\varphi(\eta_0)\colon F(\eta_0)\to F(\xi)$ определено и является изоморфизмом групп $F(\eta_0)$ и $F(\xi)$. Тогда вводим *определяющее соотношение типа* J,

$$\text{(J)}\qquad \eta_0=\xi,$$

и переходим к */3.9/*.

Случай 1b: случай 1a не выполнен, для каждого j, $j<k$, справедливы равенства

$$\langle j,m_j-1,n+1\rangle=\xi_j,\qquad \eta_1^*=\xi^*\leqslant m-1,$$

и отображение $\varphi(\eta_1)\colon F(\eta_1)\to F(\xi)$ является изоморфизмом групп $F(\eta_1)$ и $F(\xi)$.

Если элемент ξ не определен, то переходим к выполнению */3.9/*. В ином случае вводим *определяющее соотношение типа* J,

$$\text{(J)}\qquad \eta_1=\xi,$$

и переходим к выполнению следующего пункта.

Случай 2: случаи 1a и 1b не имеют места. Рассмотрим следующие возможности:

Случай 2a: оба элемента c_k^t и ξ не определены. Переходим к выполнению п. 3.9.

Случай 2b: либо оба элемента c_k^t и ξ определены, либо c_k^t определен, а ξ — нет. Переходим к выполнению */3.5/*.

Случай 2c: элемент c_k^t не определен, а элемент ξ определен. Переходим к */3.8/*.

/3.5/ Определим группу R^{t+1} и число $\sigma(c_k^t)$. Сначала полагаем

$$w^{t+1} = \max\{w^t, k\}, \quad u_i^{t+1} = u_i^t, \quad v_i^{t+1} = v_i^t, \quad c_i^{t+1} = c_i^t, \ i \neq k, \ i \leqslant w^{t+1},$$

$$u_k^{t+1} = m, \quad v_k^{t+1} = n, \quad c_k^{t+1} \equiv \xi.$$

Группа R^{t+1} порождается элементами c_i^{t+1}, $i \leqslant w^{t+1}$. Через $\sigma(c_k^t) \leftrightharpoons \sigma^{t+1}$ обозначим наименьшее число s такое, что элемент $p^s c_k^t$ принадлежит группе R^{t+1}.

/3.6/ В данном пункте рассмотрим операцию консервации $\mathrm{OK}(\eta, \sigma)$. Если $\sigma^{t+1} = 0$, то переходим к */3.7/*. Пусть $\sigma \leftrightharpoons \sigma^{t+1} > 0$ и $c_k^t \leftrightharpoons \eta$. На шаге t элемент η считался элементом «бесконечной» высоты. На шаге $t+1$ элемент η будет рассматриваться как элемент «конечной» высоты, а σ — наименьшее число такое, что $p^\sigma \eta$ считается на шаге $t+1$ элементом «бесконечной высоты», т. е. на шаге $t+1$ элементы $\eta, 2\eta, \ldots, (p^\sigma - 1)\eta$ как бы меняют «значения» высот. Пусть на шаге t порядок смежного класса $a_0 = \bar{\eta}^t + R^t$ равен p^{s^t}, $s^t = f(\hat{\eta}^t, \check{\eta}^t)$. На шаге $t+1$ порядок смежного класса $a_1 = \bar{\eta}^t + R^{t+1}$ равен $p^{s^t + \sigma}$. Мы хотим так определить элемент $\bar{\eta}^{t+1}$, чтобы выполнялись следующие условия:

(a) порядок смежного класса $a_2 = \bar{\eta}^{t+1} + R^{t+1}$ равен $p^{s^{t+1}}$, где $s^{t+1} = f(\hat{\eta}^{t+1}, \check{\eta}^{t+1})$;
(b) $a_1 \in (a_2)$.

Для этого определим числа $\hat{\eta}^{t+1}$, $\check{\eta}^{t+1}$.

Для каждого χ, $[\chi] \leqslant t$, через $\lambda^{t+\varepsilon}(\chi)$, $\varepsilon = 0, 1$, обозначим наибольшее число q такое, что в группе, построенной до этого момента времени, определен элемент $\bar{\chi}^{t+\varepsilon}$ и выполнено равенство $p^q \bar{\chi}^{t+\varepsilon} = \chi$. Пусть $s = \max\{\lambda^{t+\varepsilon}(\chi) \mid [\chi] \leqslant t, \ \varepsilon = 0, 1\}$, $u = s + \sigma + 1$. Выберем число v так, чтобы $f(u, v) > u$. Это возможно, поскольку f является s_1-функцией. Теперь положим $\hat{\eta}^{t+1} = u$, $\check{\eta}^{t+1} = v$ и введем следующее *определяющее соотношение типа* L:

$$\text{(L)} \qquad p^{f(\hat{\eta}^{t+1}, \check{\eta}^{t+1}) - \lambda^t(\eta) - \sigma} \bar{\eta}^{t+1} = \bar{\eta}^t.$$

Отсюда, учитывая определение чисел $\lambda^t(\eta)$ и σ, получаем

$$p^{f(\hat{\eta}^{t+1}, \check{\eta}^{t+1})} \bar{\eta}^{t+1} = p^\sigma \eta,$$

т. е. смежный класс a_2 имеет порядок $p^{s^{t+1}}$.

Число $\hat{\eta}^t$ освобождаем, а число $\hat{\eta}^{t+1} = u$ считаем использованным для подгруппы B^t. Это действие назовем *операцией консервации элемента* $\bar{\eta}^t$ (или, короче, η) *относительно числа* σ и обозначим через $\mathrm{OK}(\eta, \sigma)$.

/3.7/ В этом пункте рассмотрим операцию расконсервации $\mathrm{OR}(\chi, s)$. Если выполнен случай 2, */3.4/*, то переходим к */3.8/*. Поэтому на шаге $t+1$ реализуется случай 1b, */3.4/*. Имеем

$$c_k^{t+1} = \eta_1, \quad \eta_1 \equiv \langle k, m-1, n+1 \rangle, \quad \eta_1 < c_k^{t+1}.$$

Выберем наибольшую тройку чисел η такую, что $\eta = \eta_1$ и $c_k^q \equiv \eta$ для некоторого $q < t+1$. Существование такой тройки η следует из */3.4/*, */3.5/*.

Пусть χ_i, $i \leqslant \ell - 1$, — все такие элементы, для которых выполнены следующие условия:

1) существуют числа r_i, α_{ij}, $j \leqslant w^{t+1}$, такие, что

$$p^{r_i}\chi_i = \sum_{j \neq k} \alpha_{ij} c_j^{t+1} + \alpha_{ik}\eta, \quad \alpha_{ik} \neq 0;$$

2) если шаг e, $e < t+1$, наибольший такой, что $c_k^e = \chi$, то $c_k^e \equiv \chi$;

3) последняя операция, выполненная до этого момента времени для χ_i, есть либо $\mathrm{OK}(\chi_i, s_i)$, либо $\mathrm{OR}(\chi_i, s_i)$, где $s_i > r_i$.

Фиксируем некоторое число $i \leqslant \ell - 1$ и полагаем $\chi_i \leftrightharpoons \chi$, $r_i \leftrightharpoons r$, $s_i \leftrightharpoons s$. На шаге t элементы $\chi, 2\chi, \ldots, (p^s-1)\chi$ считаются элементами «конечных» высот, а $p^s\chi$ — элементом «бесконечной» высоты. Поэтому, как и в предыдущем пункте, нам необходимо «поправить» порядок смежного класса $\bar{\chi}^t + R^{t+1}$.

Для χ_i выберем наименьшие числа r_i такие, что справедливы условия 1–3. Выполняем по порядку операции $\mathrm{OK}(\chi_0, r_0), \ldots, \mathrm{OK}(\chi_{\ell-1}, r_{\ell-1})$. Операцию $\mathrm{OK}(\chi_i, r_i)$ назовем *расконсервацией элемента* χ_i *относительно числа* r_i и обозначим $\mathrm{OR}(\chi_i, r_i)$.

/3.8/ Рассмотрим элемент $c_k^{t+1} \equiv \xi$. Пусть числа u' и v' определены так же, как и числа u и v в */3.6/*, где считаем $\sigma^{t+1} = 0$. Положим

$$\hat{\xi}^{t+1} = u', \qquad \check{\xi}^{t+1} = v'$$

и введем следующее *определяющее соотношение типа* M:

$$\text{(M)} \qquad p^{f(\hat{\xi}^{t+1}, \check{\xi}^{t+1})}\bar{\xi}^{t+1} = \xi.$$

Число $\hat{\xi}^{t+1}$ считаем использованным для подгруппы B^t. Это действие назовем *введением нового пути* $\mathrm{W}_m(\bar{\xi}^{t+1}, \xi)$ или просто $\mathrm{W}_m(\xi)$.

/3.9/ В заключительном пункте обозначим через x один из символов w, c_i, u_i, v_i, $\hat{\chi}$, где $i \leqslant w^t$, $i \neq k$, и число $\hat{\chi}^t$ определено. Если значение x^{t+1} еще не определено, то полагаем $x^{t+1} = x^t$. Затем для каждой такой тройки χ, для которой число $\hat{\chi}^{t+1}$ определено, а $\check{\chi}^{t+1}$ еще нет, полагаем $\check{\chi}^{t+1} = \check{\chi}^t + 1$ и вводим следующее *определяющее соотношение типа* L:

$$\text{(L)} \qquad p^{f(\hat{\chi}^{t+1}, \check{\chi}^{t+1}) - f(\hat{\chi}^t, \check{\chi}^t)}\bar{\chi}^{t+1} = \bar{\chi}^t.$$

Определим теперь группу E^{t+1}. Пусть

$$s_0^{t+1} = \max\{\hat{\chi}^{t+1} \mid \hat{\chi}^{t+1} \text{ определено}\},$$
$$S^{t+1} = \{0, \ldots, s_0^{t+1}\} \backslash K^t = \{k_0, \ldots, k_{\alpha-1}\}.$$

Тогда полагаем $K^{t+1} = K^t \cup S^{t+1}$.

Для любых k, ℓ, $k \in K^t$, $\ell \in S^{t+1}$, вводим следующие *определяющие соотношения типов* R и S:

(R) $$p^{f(k,t+1)-f(k,t)} d_k^{t+1} = d_k^t,$$

(S) $$p^{f(\ell,t+1)} d_\ell^{t+1} = 0$$

и полагаем

$$E^{t+1} = \sum\{(d_k^{t+1}) \mid k \in K^{t+1}\}, \quad G^{t+1} = C^{t+1} \oplus E^{t+1}.$$

Определим нумерацию μ^{t+1} группы G^{t+1}. Пусть

$$G^{t+1} = G^t \cup \{g_0, \dots, g_{q-1}\}, \quad n^t = \max N^t.$$

Положим

$$N^{t+1} = N^t \cup \{n^t + 1, \dots, n^t + q\},$$

$$\mu^{t+1} y = \begin{cases} \mu^t y, & \text{если } y \in N^t, \\ g_{i-1}, & \text{если } y = n^t + i. \end{cases}$$

Шаг $t+1$ закончен.

Полагаем $Y = \bigcup_t Y^t$, при Y равном B, C, E, G, μ.

Построение закончено.

§ 4. Определение чисел φ_k, ψ_{km} и элемента b_k

4.1. Напомним, что все пары и тройки чисел упорядочены по их номерам (см. § 1). Для каждой пары чисел $\bar{x} = \langle x_0, x_1 \rangle$ индукцией по $\bar{x}$ определим число $\psi_{\bar{x}} \leftrightharpoons \psi_{x_0 x_1}$. Если $\bar{x} = \langle 0, 0 \rangle$, то полагаем $\psi_{\bar{x}} = 0$. Пусть $\bar{u} = \langle k, m \rangle$. Для всех $\bar{x}$, $\bar{x} < \bar{u}$, числа $\psi_{\bar{x}}$ определены и $\gamma = \max\{\psi_{\bar{x}} \mid \bar{x} < \bar{u}\}$. Рассмотрим тройки вида $\langle k, m, n \rangle$, где k и m фиксированы, а n меняется. Для любых j, n ($j \leqslant k$, $n \geqslant \gamma$) полагаем $\xi_j^n = \langle j, m_j, n \rangle$, $m_j = m + k - j$. Пусть числа ξ_j^{n*}, элементы ξ_j^n и множества $F(\xi_j^n)$, $N(\xi_j^n)$ определены так же, как в */3.3/*. Поскольку

$$\xi_j^{n*} \leqslant m_j + 1 \leqslant m + k + 1, \tag{4.1}$$

множества $F(\xi_j^n)$, $N(\xi_j^n)$ конечны. Пусть $\lambda_k^\gamma = \max N(\xi_k^\gamma)$. Через $\psi_{\bar{u}}$ обозначим наименьшее число n ($n \geqslant \gamma - 1$) такое, что $[k, m, n] \geqslant \lambda_k^\gamma$ и для любых чисел $x, y \in N(\xi_k^n)$ и $z \geqslant n$ справедливо равенство $g(x, y, m, n) = g(x, y, m, z)$.

Лемма 4.1. *Пусть $\bar{u} = \langle k, m \rangle$ — некоторая фиксированная пара и $\xi_z = \langle k, m, z \rangle$, $z \in N$. Тогда число $\psi_{\bar{u}} \leftrightharpoons e$ существует и для любого z, $z \geqslant e$, справедливы равенства*

$$\xi_e^* = \xi_z^*, \quad \xi_e = \xi_z, \quad F(\xi_e) = F(\xi_z), \quad N(\xi_e) = N(\xi_z).$$

Доказательство проведем индукцией по $\bar{u}$. Пусть для всех $\bar{x}$, $\bar{x} < \bar{u}$, лемма доказана и число γ определено так, как указано выше. Тогда для всех j, z ($j < k$, $z \geqslant \gamma$) верны равенства $\xi_j^{\gamma^*} = \xi_j^{z^*}$, $\xi_j^\gamma = \xi_j^z$, $X(\xi_j^\gamma) = X(\xi_j^z)$, где $X = F, N$. Докажем, что число $\psi_{\bar{u}}$ существует. Пусть Φ_k^m — множество форм вида

$$x = \sum_{j=0}^{k} \ell_j \lambda_j,$$

где $\ell_j \leqslant p^{m+k+1}$ и $\bar{\Phi}_k^m = \{x^* \in N \mid x \in \Phi_k^m\}$ (см. */3.3/*). Множество $\bar{\Phi}_k^m$ конечно и зависит только от чисел m, k. В силу (4.1) для любого z верно включение $N(\xi_j^z) \subseteq \bar{\Phi}_k^m$. Поэтому из (3.1) следует, что существует искомое число $\psi_{\bar{u}} \leftrightharpoons e$. По индукционному предположению группы $F(\xi_{k-1}^e)$ и $F(\xi_{k-1}^z)$ равны при любом $z \geqslant e$. Отсюда ввиду определения числа e имеем $\xi_e^* = \xi_z^*$ для любого z, $z \geqslant e$. Теперь докажем, что $\xi_e = \xi_{e+1}$. Если элемент ξ_e не определен, то элемент ξ_{e+1} также не определен. Пусть элемент ξ_e определен. Тогда для любого z, $z \geqslant e$, элемент ξ_z определен. Из индукционного предположения и определений числа e и группы $F(\xi_{e+1})$ заключаем, что на шаге $r = [k, m, \ell + 1]$ имеет место случай 1a, */3.4/*. Поэтому $\xi_e = \xi_{e+1}$. Учитывая индукционное предположение, приходим к равенствам $F(\xi_e) = F(\xi_{e+1})$, $N(\xi_e) = N(\xi_{e+1})$. Лемма 4.1 доказана.

4.2. Пусть k — некоторое фиксированное число. Индукцией по k определим число φ_k. Для $k = 0$ полагаем $\varphi_k \leftrightharpoons 0$. Пусть для всех j, $j < k$, числа φ_j определены и $\beta = \max\{\varphi_j \mid j < k\}$. Для $j, z \in N$ полагаем $\langle j, z, \psi_{jz}\rangle \leftrightharpoons \eta_{jz}$, $X(\eta_{jz}) \leftrightharpoons X_{jz}$, $X = F, N$. Через φ_k обозначим наименьшее число r такое, что 1) $r \geqslant \beta$; 2) $\eta_{kr}^* \leqslant r$; 3) для всех чисел $x, y \in N_{kr}$ и $z \geqslant r$ верны равенства $\lim_u g(x, y, r, u) = \lim_u g(x, y, z, u)$.

Лемма 4.2. *Пусть k — некоторое фиксированное число, A_k — подгруппа группы (A^1, ν), порожденная элементами $\nu(0), \ldots, \nu(k)$. Тогда число $\varphi \leftrightharpoons \varphi_k$ существует и при любом z, $z \geqslant \varphi$, справедливы следующие утверждения:*

(A) *отображение $\omega_{k\varphi}\colon F_{k\varphi} \to A_k$, определяемое равенствами $\omega_{k\varphi}(\eta_{j\varphi}) = \nu(j)$, $j \leqslant k$, есть изоморфизм группы $F_{k\varphi}$ и A_k;*

(B) $\eta_{k\varphi} = \eta_{kz}$;

(C) $\eta_{k\varphi}^* = \eta_{kz}^* \leqslant \varphi$, $\quad F_{k\varphi} = F_{kz}$, $\quad N_{k\varphi} = N_{kz}$.

Доказательство проведем индукцией по k. Пусть для всех j, $j < k$, лемма доказана, и число β определено так же, как выше. Тогда по индукционному предположению для любого z, $z \geqslant \beta$, имеем

$$F_{k-1\,\beta} = F_{k-1\,z}, \tag{4.2}$$

причем группа $F_{k-1\,\beta}$ изоморфна A_{k-1}. Рассмотрим элемент νk группы (A^1, ν). Пусть порядок этого элемента равен p^δ, $\varepsilon = \max\{\beta + 1, \delta\}$ и множество $\Phi_{k\varepsilon}$ состоит из форм вида

$$z = \sum_{j=0}^{k} \ell_j \lambda_j,$$

где $\ell_j < p^\varepsilon$, $\bar{\Phi}_{k\varepsilon} = \{z^* \mid z \in \Phi_{k\varepsilon}\}$ (см. */3.3/*). Так как по индукционному предположению $\eta^*_{jz} = \eta^*_{j\beta} \leqslant \beta < \varepsilon$ для любых j, z ($j < k$, $z \geqslant \beta$), имеем $N_{(k-1)z} \subseteq \bar{\Phi}_{k\varepsilon}$. Множества $\Phi_{k\varepsilon}$ и $\bar{\Phi}_{k\varepsilon}$ конечны. Поэтому существует ε', ($\varepsilon' \geqslant \varepsilon$) такое, что для всех $x, y \in \bar{\Phi}_{k\varepsilon}$ и $z \geqslant \varepsilon'$

$$\lim_u g(x, y, \varepsilon', u) = \lim_u g(x, y, z, u). \tag{4.3}$$

В силу (3.1)

$$\nu x = \nu y \iff \lim_u g(x, y, \varepsilon', u) = 1. \tag{4.4}$$

Так как $p^\delta \nu k = 0$ и $\delta \leqslant \varepsilon$, имеем $\eta^*_{k\varepsilon'} \leqslant \delta \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon'$. Поэтому из (4.2), (4.3) по лемме 4.1 для любого z, $z \geqslant \varepsilon'$, получим $\eta^*_{k\varepsilon'} = \eta^*_{kz}$. Следовательно, $N_{k\varepsilon'} = N_{kz} \subseteq \bar{\Phi}_{k\varepsilon}$. Таким образом, для числа ε' справедливы все условия 1–3 определения φ_k. Значит, искомое число $\varphi_k \leftrightharpoons \varphi$ существует.

Докажем утверждение (А). По индукционному предположению отображение $\omega_{k-1\,\varphi}\colon F_{k-1\,\varphi} \to A_{k-1}$ есть изоморфизм. В силу условий 2, 3 определения φ_k число $\eta^*_{k\varphi} \leftrightharpoons \pi$ будет наименьшим из чисел таких, что элементы $p^\pi \eta_{k\varphi}$ и $p^\pi \nu k$ принадлежат соответственно группам $F_{k-1\,\varphi}$ и A_{k-1}. Ввиду определения группы $F_{k\varphi}$ (см. */3.3/*) отображение $\omega_{k\varphi}\colon F_{k\varphi} \to A_k$ (см. (А)) есть изоморфизм.

Из индукционного предположения и условий 1–3 определения числа φ_k непосредственно вытекает, что

$$\eta^*_{k\varphi} = \eta^*_{kz} \leqslant \varphi \tag{4.5}$$

для любого $z \geqslant \varphi$.

Доказательство утверждения (В) проведем индукцией по z, $z \geqslant \varphi$. Пусть для всех z, $\varphi \leqslant z \leqslant q$, утверждение (В) доказано и $z = q + 1$. Если $\eta^*_{k\varphi} = 0$, то элементы η_{kz} и $\eta_{k\varphi}$ не определены и, следовательно, утверждение (В) для них справедливо. Пусть $\eta^*_{k\varphi} > 0$. Тогда для любого z, $z \geqslant \varphi$, элементы η_{kz} определены. Рассмотрим шаг $t + 1 = [k, q + 1, \psi]$, где $\psi \leftrightharpoons \psi_{k\,q+1}$. Ввиду определения числа ψ на этом шаге имеет место случай 1b, */3.4/*. Следовательно,

$$\eta_{k\,q+1} = \langle k, q, \psi + 1\rangle. \tag{4.6}$$

По индукционному предположению

$$\eta_{kq} = \eta_{k\varphi}. \tag{4.7}$$

Так как $\psi \geqslant \psi_{kq} - 1$, по лемме 4.1

$$\langle k, q, \psi + 1\rangle = \eta_{kq}. \tag{4.8}$$

Из (4.6)–(4.8) получаем

$$\eta_{k\,q+1} = \eta_{kq}.$$

Утверждение (В) доказано.

Теперь из (4.5) непосредственно вытекает, что $F_{kz} = F_{k\varphi}$, $N_{kz} = N_{k\varphi}$ для любого z, $z \geqslant \varphi$. Лемма 4.2 доказана.

В дальнейшем через ψ_k обозначаем число $\psi_{k\varphi_k}$, а через b_k — элемент $\langle k, \varphi_k, \psi_k\rangle$.

Лемма 4.3. *Пусть определен элемент b_k. Тогда он имеет бесконечную высоту в группе C.*

Доказательство. Через α_z обозначим $\psi_k(\varphi_k+z)$. Ввиду определений чисел φ_k, α_z на шаге $t_z+1=[k,\varphi_k+z,\alpha_z]$ имеет место случай 1b, */3.4/*. Согласно */3.8/* для элемента $\theta_z \equiv \langle k,\varphi_k+z,\alpha_z\rangle$ вводится новый путь $\mathrm{W}_{\varphi_k+z}(\theta_z)$, т.е. вводится соотношение

$$p^{s_z}\bar{\theta}_z^{t_z+1}=\theta_z, \tag{4.9}$$

где $s_z=f(\hat{\theta}_z^{t+1},\check{\theta}_z^{t+1})$. По лемме 4.2

$$\theta_z=b_k. \tag{4.10}$$

Из */3.8/* непосредственно вытекает, что если $z_1<z_2$, то $s_{z_1}<s_{z_2}$. Тогда в силу (4.9), (4.10) элемент b_k имеет бесконечную высоту. Лемма 4.3 доказана.

§ 5. Некоторые свойства соотношений между элементами вида χ

Наша цель — доказать, что подгруппа C^1 группы C порождается элементами b_k, $k\in N$. Для этого необходимо более подробно изучить свойства определяющих соотношений, введенных при построении группы C. В дальнейшем вместо «определяющее соотношение» будем писать просто «соотношение».

Между элементами $\chi\equiv\langle x,y,z\rangle$, где $x,y,z\in N$, на каждом шаге $t=[x,y,z]$ могут быть введены соотношения следующих типов (см. § 3):

тип I: $$\sum_{i=0}^{\nu}\alpha_i\theta_i=p^{\ell}\chi,$$

где $0<\ell=\chi^*\leqslant y$, $\theta_i=\langle w_i,u_i,z_i\rangle$, $w_i<x$, $u_i=y+x-w_i$ (см. */3.3/*);

тип K: $$0=p^{\ell}\chi,$$

где $\ell=\chi^*=y+1$ (см. */3.3/*);

тип J: $$\theta=\chi,$$

где $\theta\equiv\langle x,u,v\rangle$ и пара чисел $\langle u,v\rangle$ равна либо $\langle y-1,\ z+1\rangle$, либо $\langle y,z-1\rangle$ (см. */3.4/*).

Соотношения будем писать таким образом, чтобы тройка чисел из правой части была больше тройки чисел из левой части (когда это известно). Если в левой части соотношения X встречается элемент ξ, а в правой — η, то соотношение X обозначаем через $X(\xi\mid\eta)$.

Лемма 5.1. *Пусть определен элемент $\xi\equiv\langle k,m,n\rangle$. Существует не более одного соотношения $X(\ \mid\xi)$ типа* W = I, J, K. *Соотношение $X(\ \mid\xi)$ типа* I *вводится тогда и только тогда, когда соотношение $Y(\ \mid\xi)$ типа* K *не вводится. Существует не более одного соотношения $Z(\xi\mid\ )$ типа* J.

Доказательство. Соотношение $X(\ \mid\xi)$ типа W вводится в */3.3/*, */3.4/* только на шаге $t=[\xi]$. При этом соотношения $X(\ \mid\xi)$ типа I (типа K) вводятся тогда и только тогда, когда $\xi^*\leqslant m$ ($\xi^*=m+1$). Соотношение $Z(\xi\mid\ )$ типа J может быть введено только на шаге $t+1$ в */3.4/*. Лемма 5.1 доказана.

Лемма 5.2. *На любом шаге $t = [k, m, n]$ справедливы следующие утверждения:*

1) $[k, u_k^t, v_k^t] \leqslant t$;
2) $[k, u_k^t, v_k^t] \leqslant [k, u_k^{t+1}, v_k^{t+1}]$;
3) *неравенство $[k, u_k^t, v_k^t] < t$ верно тогда и только тогда, когда элемент $\langle k, m, n-1\rangle$ равен $\langle k, m, n\rangle$.*

Доказательство. Элементы $c_k^t \equiv \langle k, u_k^t, v_k^t\rangle$ определяются в */3.5/*, */3.9/* на шаге t. Если имеет место случай 1a, */3.4/*, то $\langle k, m, n-1\rangle = \langle k, m, n\rangle$ и $\langle u_k^t, v_k^t\rangle = \langle u_k^{t-1}, v_k^{t-1}\rangle$. Если случай 1a, */3.4/* не имеет места, то $[k, u_k^t, v_k^t] = t$. Доказательство завершается легкой индукцией по t. Лемма 5.2 доказана.

Лемма 5.3. *Пусть даны числа k, m, n. Если шаг t наименьший такой, что $u_k^t = m$, $v_k^t = n$, то $t = [k, m, n]$.*

Доказательство. Пусть $t = [k, r, s]$. По лемме 5.2 $[k, m, n] \leqslant t$. Допустим, что $[k, m, n] < t$. Тогда по лемме 5.2 $\langle k, r, s-1\rangle = \langle k, r, s\rangle$. Следовательно, на шаге $t = [k, r, s]$ имеет место случай 1a, */3.4/*. Поэтому числа u_k^t, v_k^t определяются в */3.9/* и верны равенства $u_k^{t-1} = u_k^t$, $v_k^{t-1} = v_k^t$, что противоречит условию леммы. Лемма 5.3 доказана.

Лемма 5.4. *Допустим, что элемент $\xi \equiv \langle k, m, n\rangle$ определен и $\xi \equiv c_k^t$, $t = [\xi]$. Если не существует соотношения $X(\ |\ \xi)$ типа I, то $\xi^* = m+1$ и существует такой шаг $t^* > t$, что*

(a) *если $n > 0$, то $t^* = [k, m+1, n-1]$;*
(b) *если $n = 0$, то существует число $e \leqslant m+1$ такое, что $t^* = [k, e, m+1-e]$;*
(c) *для любого s, $t \leqslant s \leqslant t^*$, верно равенство $c_k^s \equiv c_k^t$;*
(d) $c_k^{t^*} \not\equiv c_k^t$.

Доказательство. Пусть соотношения $X(\ |\ \xi)$ типа I не существует. Тогда согласно */3.3/* имеем $\xi^* = m+1$. По лемме 5.2

$$\langle k, m, n-1\rangle \neq \xi. \tag{5.1}$$

Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1: $n > 0$. Тройка $\langle k, m+1, n-1\rangle$ будет наименьшей среди троек $\langle k, x, y\rangle$, бо́льших, чем тройка $\langle k, m, n\rangle$. Пусть $t^* = [k, m+1, n-1]$. Согласно определению элемента c_k^s (см. */3.5/*, */3.9/*) для любого s, $t \leqslant s \leqslant t^*$, верно равенство $c_k^s \equiv c_k^t$, т.е. в рассматриваемом случае справедливо утверждение (c). Докажем (d). Из (5.1) ввиду */3.4/* имеем

$$\langle k, m+1, n-2\rangle \neq \langle k, m+1, n-1\rangle.$$

В силу */3.4/* получим

$$c_k^{t^*} = \langle k, m+1, n-1\rangle,$$

т.е. справедливо свойство (d).

Случай 2: $n = 0$. Пусть e — наименьшее число такое, что на шаге $t^* = [k, e, m+1-e]$ выполнено соотношение

$$\langle k, e, m-e\rangle \neq \langle k, e, m+1-e\rangle. \tag{5.2}$$

Очевидно, что $e \leqslant m+1$. Тогда на любом шаге s, $t \leqslant s \leqslant t^*$, если s есть номер тройки $\langle k, x, y\rangle$, то $x < e$ и $y = m+1-x$. Ввиду выбора числа e получим равенство

$$\langle k, x, y\rangle = \langle k, x, y-1\rangle.$$

Отсюда по лемме 5.2 $c_k^s \equiv c_k^{s-1} \equiv \ldots \equiv c_k^t$. Из (5.2) в силу */3.4/* имеем

$$c_k^{t^*} = \langle k, e, m+1-e\rangle \not\equiv \langle k, m, 0\rangle.$$

Лемма 5.4 доказана.

Лемма 5.5. *Пусть определены элементы $\xi \equiv \langle k, m, n\rangle$, $\eta \equiv \langle k, r, s\rangle$ и введено соотношение*

$$\eta = \xi. \tag{5.3}$$

Тогда

(a) *пара $\langle r, s\rangle$ равна либо $\langle m,\ n+\varepsilon\rangle$, либо $\langle m+\varepsilon,\ n-\varepsilon\rangle$, где $\varepsilon \pm 1$;*

(b) $\eta^* = \xi^*$;

(c) *если пара $\langle r, s\rangle$ равна $\langle m,\ n+\varepsilon\rangle$, то соотношение $X_0(\ \mid \eta)$ типа I введено тогда и только тогда, когда введено соотношение $X_1(\ \mid \xi)$ типа I;*

(d) *если пара $\langle r, s\rangle$ равна $\langle m+\varepsilon,\ n-\varepsilon\rangle$, то $\eta^* = \xi^* \leqslant \min\{r, m\}$ и введены соотношения $X_0(\ \mid \eta)$ и $X_1(\ \mid \xi)$ типа I.*

Доказательство. Соотношение (5.3) вводится в */3.4/*. Отсюда непосредственно следует свойство (a).

Докажем свойство (c). Пусть, например, пара $\langle r, s\rangle$ равна $\langle m, n-1\rangle$. Тогда имеет место случай 1a, */3.4/*. Согласно */3.4/* существует изоморфизм групп $F(\eta)$ и $F(\xi)$, при этом изоморфизме η переходит в ξ. Следовательно, $\xi^* = \eta^*$, откуда получаем свойство (c).

Докажем свойство (d). Пусть, например, пара $\langle r, s\rangle$ равна $\langle m-1,\ n+1\rangle$. Тогда на шаге $t+1 = [\xi]$ имеет место случай 1b, */3.4/*. По условию */3.4/* $\xi^* = \eta^* \leqslant m-1$. Поэтому существуют соотношения $X_0(\ \mid \eta)$ и $X_1(\ \mid \xi)$ типа I. Лемма 5.5 доказана.

Лемма 5.6. *Пусть для элементов $\xi \equiv \langle k, m, n\rangle$ и $\eta \equiv \langle k, r, s\rangle$ введены соотношения*

$$0 = p^\alpha \xi, \tag{5.4}$$

$$\xi = \eta, \tag{5.5}$$

имеющие соответственно типы K и J. Тогда пара $\langle r, s\rangle$ равна $\langle m,\ n+\varepsilon\rangle$, где $\varepsilon = \pm 1$.

Доказательство. Так как введено соотношение (5.4), в силу лемм 5.1, 5.4 имеем $\xi^* = m+1$. Из (5.5) и леммы 5.5 получаем требуемое утверждение. Лемма 5.6 доказана.

Лемма 5.7. *Не существуют одновременно соотношения*

$$a' = p^{\alpha}\xi, \tag{5.6}$$

$$\xi = \eta, \tag{5.7}$$

$$0 = p^{\beta}\eta, \tag{5.8}$$

имеющие соответственно типы I, J, K.

Доказательство. Допустим противное, т. е. предположим, что соотношения (5.6)–(5.8) существуют. Ввиду (5.8) и леммы 5.1 не существует соотношения $Y(\ \mid \eta)$ типа I. В силу (5.6), (5.7) и леммы 5.5 существует соотношение $Y(\ \mid \eta)$ типа I; противоречие. Лемма 5.7 доказана.

§ 6. Пути

Элементами группы B являются формы вида

$$x = \sum_{i=o}^{\nu} \alpha_i \xi_i,$$

где $\xi_i \equiv \langle k_i, m_i, n_i \rangle$, $\alpha_i \in N$. Пусть X — некоторое соотношение. Левую часть соотношения X обозначим X^{-1}, а правую — X^1. Пусть в форме x выделено некоторое вхождение $W(x)$, равное X^{-1}. Если вместо $W(x)$ в x подставим X^1, то получим некоторую форму y. Будем говорить, что y *получена из пары* $(x,\ W(x))$ (или просто из x) *левым применением соотношения* X и будем писать

$$x \overset{X^{-1}}{\text{———}} y.$$

Таким же образом определяется правое применение соотношения X к паре $(x,\ W(x))$. Пусть равенство $a = b$ получается из соотношений, введенных при построении группы G. Тогда существует путь или цепочка

$$a = a_0 \overset{X_0^{\varepsilon_0}}{\text{———}} a_1 \text{———} \cdots \overset{X_{\sigma-1}^{\varepsilon_{\sigma-1}}}{\text{———}} a_\sigma = b,$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $i \leqslant \sigma - 1$. Каждый элемент a_{i+1} получен из a_i применением соотношения X_i. При этом соотношения, соответствующие аксиомам абелевой группы, в схеме не указываются.

Лемма 6.1. *Пусть дан путь*

$$a = a_0 \overset{X_0^{-1}}{\text{———}} a_1 \overset{X_1}{\text{———}} a_2 \overset{X_2^1}{\text{———}} b, \tag{6.1}$$

где соотношения X_0, X_2 *имеют тип* I, *а* X_1 — *тип* J, *и* X_0, X_1, X_2 *соответственно равны*

$$a' = p^{\xi^*}\xi, \quad \eta = \xi, \quad b' = p^{\eta^*}\eta. \tag{6.2}$$

Тогда

(a) $\xi^* = \eta^*$;

(b) *существует путь*

$$a = b_0 \overset{Y_0}{\text{———}} b_1 \text{———} \cdots \overset{Y_{\pi-1}}{\text{———}} b_\pi = b, \tag{6.3}$$

где соотношения Y_s, $s \leqslant \pi - 1$, *имеют тип* J.

Доказательство. Пусть элементы a' и b' соответственно равны

$$a' = \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i \xi_i, \tag{6.4}$$

$$b' = \sum_{j=0}^{\mu} \beta_j \eta_j, \tag{6.5}$$

где

$$\xi_i \equiv \langle k_i, m_i, n_i \rangle, \quad \eta_j \equiv \langle \ell_j, r_j, s_j \rangle, \quad i \leqslant \nu; \ j \leqslant \mu, \tag{6.6}$$

$$\xi \equiv \langle k, m, n \rangle, \quad \eta \equiv \langle \ell, r, s \rangle. \tag{6.7}$$

Так как соотношение X_1 имеет тип J, то

$$k = \ell \tag{6.8}$$

(см. */3.4/*). Из (6.2) и леммы 5.5 имеем $\xi^* = \eta^* \leftrightharpoons \gamma$. Соотношения X_0, X_2 имеют тип I. Поэтому ввиду (6.4)-(6.8) и */3.3/*

$$m_i = m + k - k_i, \quad n_i = n, \tag{6.9}$$

$$r_j = r + \ell - \ell_j, \quad s_j = s. \tag{6.10}$$

Ввиду симметрии ξ и η можно считать $\xi > \eta$. Тогда по лемме 5.5 пара $\langle r, s \rangle$ равна либо $\langle m,\ n - 1 \rangle$, либо $\langle m - 1,\ n + 1 \rangle$. Рассмотрим эти случаи отдельно.

Случай 1:

$$r = m - 1, \ s = n + 1. \tag{6.11}$$

Тогда соотношение X_1 есть

$$\langle k,\ m - 1,\ n + 1 \rangle = \xi. \tag{6.12}$$

Это соотношение вводится на шаге $t+1 = [k, m, n]$. Поэтому на этом шаге имеет место случай 1b, */3.4/*, по условию которого выполнены равенства

$$\langle \ell_j,\ r'_j - 1,\ n + 1 \rangle = \langle \ell_j,\ r'_j,\ n \rangle, \tag{6.13}$$

где

$$r'_j = m + k - \ell_j, \ j \leqslant \mu. \tag{6.14}$$

На шаге $t + 1$ также введено соотношение

$$\sum_j \beta_j \xi'_j = p^\gamma \xi, \tag{6.15}$$

где $\xi'_j \equiv \langle \ell_j, r'_j, n \rangle$. По лемме 5.1 можно ввести только одно соотношение $X(\ \mid \xi)$ типа I. Поэтому соотношения X_0 и (6.15) совпадают. Следовательно,

$$\nu = \mu, \quad \alpha_i = \beta_i, \quad k_i = \ell_i, \quad m_i = r'_i, \quad n_i = n. \tag{6.16}$$

В силу (6.9)–(6.11)

$$m_i = r_i + 1, \quad s_i = s = n + 1. \tag{6.17}$$

Поэтому

$$b' = \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i \, \langle k_i,\, m_i - 1,\, n+1\rangle. \tag{6.18}$$

Из (6.9), (6.14), (6.16) вытекает, что соотношения (6.13) и X_0 можно соответственно записать в виде

$$\langle k_i,\, m_i - 1,\, n+1\rangle = \langle k_i, m_i, n_i\rangle, \tag{6.19}$$

$$\sum_i \alpha_i \, \langle k_i, m_i, n\rangle = p^\gamma \xi. \tag{6.20}$$

В силу (6.18)–(6.20) существует путь

$$a' = c_0 \xrightarrow{\quad Z_0 \quad} c_1 \xrightarrow{\qquad} \cdots \xrightarrow{\quad Z_{\lambda-1} \quad} c_\lambda = b',$$

где соотношение Z_s, $s < \lambda$, равно соотношению (6.19) при некотором значении i, т. е. Z_s имеет тип J. Элементы из пути (6.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
a &= \cdots + a' + \cdots + (p^\gamma - 1)\eta + \cdots,\\
a_1 &= \cdots + p^\gamma\xi + \cdots + (p^\gamma - 1)\eta + \cdots,\\
a_2 &= \cdots + (p^\gamma - 1)\xi + \eta + \cdots + (p^\gamma - 1)\eta + \cdots,\\
b &= \cdots + (p^\gamma - 1)\xi + \cdots + b' + \cdots.
\end{aligned}$$

Таким образом, путь (6.1) можно заменить на путь

$$a = b_0 \xrightarrow{\ Z_0\ } b_1 \xrightarrow{\qquad} \cdots \xrightarrow{\ Z_{\lambda-1}\ } b_\lambda \xrightarrow{\ X_1\ } b_{\lambda+1} \xrightarrow{\ X_1\ } \cdots \xrightarrow{\ X_1\ } b_\pi = b,$$

где b_λ получается из a заменой a' на b', а b_π получается из b_λ заменой $(p^\gamma - 1)\eta$ на $(p^\gamma - 1)\xi$.

Случай 2: $r = m$, $\quad s = m + 1$. Рассуждаем так же, как в случае 1.

Лемма 6.1 доказана.

§ 7. Пути элементов

Для заданного элемента $\xi \equiv \langle k, m, n\rangle$ тройку чисел $\langle k, m, n\rangle$ назовем *индексом элемента* ξ. Пусть равенство $a = b$ $(a, b \in B)$ есть следствие определяющих соотношений, введенных при построении группы C. Покажем, что в формах a и b существуют элементы ξ и η, для индексов которых выполнены некоторые числовые соотношения. Для этого нам потребуется ввести понятие *пути элементов*.

Пусть дана некоторая форма

$$a = \cdots + \alpha\xi + \cdots.$$

Элемент ξ имеет α вхождений в форме a. Эти вхождения будем обозначать через ξ^i, $i \leqslant \alpha - 1$. Положим

$$\bar{a} = \{\, \xi^i \mid a = \cdots + \alpha\xi + \cdots,\ \alpha > 0,\ i \leqslant \alpha - 1 \,\}.$$

Будем считать, что 0 имеет единственное вхождение. Пусть дан путь W, равный

$$a = a_0 \xrightarrow{\quad X_0^{\varepsilon_0} \quad} a_1 \xrightarrow{\qquad} \cdots \xrightarrow{\quad X_{\sigma-1}^{\varepsilon_{\sigma-1}} \quad} a_\sigma = b. \tag{7.1}$$

Предполагается, что в форме a_s выделено некоторое вхождение V_s формы $X_s^{\varepsilon_s}$. В дальнейшем это вхождение V_s будем также обозначать через $X_s^{\varepsilon_s}$. Пусть в формах a и $X_s^{-\varepsilon_s}$ выделены соответственно некоторые вхождения ξ^r и $\eta_s^{i_s}$. В дальнейшем верхние индексы r и i_s будем опускать, подразумевая под ξ и η_s некоторые вхождения элементов ξ и η_s в соответствующие формы. Последовательность π, равную $\eta_0, \ldots, \eta_{\sigma-1}$, назовем *последовательностью выбора элементов для пути* W. По пути W, вхождению $\xi \in \bar{a}$ и последовательности π индукцией по σ построим путь элементов

$$\xi \equiv \theta_0 \xrightarrow{\quad X'_0 \quad} \theta_1 \xrightarrow{\qquad} \cdots \xrightarrow{\quad X'_{\sigma-1} \quad} \theta_\sigma. \tag{7.2}$$

Пусть $\sigma = 1$. Если вхождение ξ не содержится в $X_0^{\varepsilon_0}$, т.е. $\xi \notin \overline{X}_0^{\varepsilon_0}$, то данное вхождение ξ в форме a есть и в форме a_1. Это вхождение обозначим через θ_1. Соотношение X'_0 равно $\xi = \xi$. Поэтому в этом случае $\theta_1 \equiv \xi$. Если $\xi \in \overline{X}_0^{\varepsilon_0}$, то полагаем $\theta_1 \equiv \eta_0$ и $X'_0 = X_0$. Таким образом, в любом случае $\theta_1 \in \bar{a}_1$. Пусть для путей длины меньше σ требуемые пути элементов определены и дан путь W длины σ. В форме a_1 найдем некоторое вхождение θ_1, как в предыдущем случае. Рассмотрим путь W_1, равный

$$a_1 \xrightarrow{\quad X_1^{\varepsilon_1} \quad} a_2 \xrightarrow{\qquad} \cdots \xrightarrow{\quad X_{\sigma-1}^{\varepsilon_{\sigma-1}} \quad} a_\sigma = b,$$

и выбор элементов π_1, равный $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\sigma-1}$. По пути W_1, вхождению $\theta_1 \in \bar{a}_1$ и выбору π_1 согласно индукционному предположению определен путь элементов

$$\theta_1 \xrightarrow{\quad X'_1 \quad} \theta_2 \xrightarrow{\qquad} \cdots \xrightarrow{\quad X'_{\sigma-1} \quad} \theta_\sigma.$$

Тогда путь

$$\xi \equiv \theta_0 \xrightarrow{\quad X'_0 \quad} \theta_1 \xrightarrow{\quad X'_1 \quad} \theta_2 \xrightarrow{\qquad} \cdots \xrightarrow{\quad X'_{\sigma-1} \quad} \theta_\sigma$$

и будет искомым путем. Его назовем *путем элементов, определенным по пути* W, *вхождению* $\xi \in \bar{a}$, *выбору* π и обозначим $\mathrm{WI}(\xi, \pi)$.

Замечание 7.1. Из определения пути $\mathrm{WI}(\xi, \pi)$ непосредственно вытекают следующие свойства:

I_1 Если $\theta_s \notin \overline{X}_s^{\varepsilon_s}$, то $\theta_{s+1} \equiv \theta_s$ и $X'_s = (\theta_s = \theta_s)$.

I_2 Если $\theta_s \in \overline{X}_s^{\varepsilon_s}$, то $\theta_{s+1} \in \overline{X}^{-\varepsilon_s}$.

I_3 Соотношение X'_s равно либо X_s, либо $\theta_s = \theta_s$. Поэтому $X_s'^{\varepsilon_s}$ есть некоторое вхождение в форму a_s.

I_4 Если X'_s имеет тип I или K, то $X'_s = X_s$.

I_5 Имеет место включение $\theta_s \in \overline{X}_s'^{\varepsilon_s}$.

Лемма 7.1. *Пусть даны путь* W *и путь элементов* $\mathrm{WI}(\xi,\pi)$, *равные* (7.1) *и* (7.2) *соответственно. Тогда* $\theta_\sigma \in \bar{b}$.

Доказательство проводится индукцией по σ. Если $\sigma = 1$, то по определению пути $\mathrm{WI}(\xi,\pi)$ имеем $\theta_1 \in \bar{a}_1$. Отсюда по индукции легко получаем требуемое утверждение. Лемма 7.1 доказана.

Лемма 7.2. *Пусть дан путь* W, *равный* (7.1), *и некоторое вхождение* $\eta \in \bar{b}$. *Тогда существуют такие вхождение* $\xi \in \bar{a}$ *и выбор элементов* π *для пути* W, *что путь* $\mathrm{WI}(\xi,\pi)$ *равен*

$$\xi \equiv \theta_0 \;\text{———}\; \theta_1 \;\text{———}\; \cdots \;\text{———}\; \theta_\sigma \equiv \eta.$$

Доказательство проведем индукцией по σ. Рассмотрим путь W_1, равный

$$a_1 \;\overset{X_1}{\text{———}}\; a_2 \;\text{———}\; \cdots \;\overset{X_{\sigma-1}}{\text{———}}\; a_\sigma = b.$$

По индукционному предположению существуют вхождение $\theta_1 \in \bar{a}_1$ и выбор π_1 для пути W_1 такие, что путь элементов $\mathrm{W}_1\mathrm{I}(\xi,\pi_1)$ равен

$$\theta_1 \;\overset{X'_1}{\text{———}}\; \theta_2 \;\text{———}\; \cdots \;\overset{X'_{\sigma-1}}{\text{———}}\; \theta_\sigma \equiv \eta.$$

Допустим, что $\theta_1 \in \overline{X}_0^{-\varepsilon_0}$. Положим $\pi \leftrightharpoons \langle\theta_1,\pi_1\rangle$, а в качестве ξ возьмем некоторое вхождение элемента из $\overline{X}_0$. Если $\theta_1 \notin \overline{X}_0^{-\varepsilon_0}$, то $\theta_1 \in \bar{a}_0$. В качестве ξ возьмем некоторое вхождение η_1 из $\overline{X}_0^{-\varepsilon_0}$ и положим $\pi = \langle\eta_1,\pi_1\rangle$. Легко проверить, что путь $\mathrm{WI}(\xi,\pi)$ будет искомым. Лемма 7.2 доказана.

§ 8. s-Пути

Пусть дан путь W, равный

$$a = a_0 \;\overset{X_0^{\varepsilon_0}}{\text{———}}\; a_1 \;\text{———}\; \cdots \;\overset{X_{\sigma-1}^{\varepsilon_{\sigma-1}}}{\text{———}}\; a_\sigma = b, \tag{8.1}$$

где $\varepsilon_0 = -1$, $\varepsilon_{\sigma-1} = 1$, $\varepsilon_s = \pm 1$, $1 \leqslant s < \sigma - 1$. Соотношения $X_0, \ldots, X_{\sigma-1}$ соответственно равны

$$a' = p^{\xi^*}\xi, \quad \eta_0 = \eta_1, \quad \eta_2 = \eta_3, \ldots, \quad \eta_{2\sigma-2} = \eta_{2\sigma-1}, \quad b' = p^{\eta^*}\eta. \tag{8.2}$$

Рассмотрим укороченный путь W_1, равный

$$a_1 \;\overset{X_1^{\varepsilon_1}}{\text{———}}\; a_2 \;\text{———}\; \cdots \;\overset{X_{\sigma-2}^{\varepsilon_{\sigma-2}}}{\text{———}}\; a_{\sigma-1}, \tag{8.3}$$

и некоторый выбор элементов π_1 для пути W_1.

Определение 8.1. Если существует вхождение ξ в форму a_1 такое, что путь элементов $\mathrm{W}_1\mathrm{I}(\xi, \pi_1)$ равен

$$\xi \equiv \theta_1 \overset{X'_1}{\text{———}} \theta_2 \text{———} \cdots \overset{X'_{\sigma-2}}{\text{———}} \theta_{\sigma-1}, \tag{8.4}$$

где $\theta_{\sigma-1} \equiv \eta$, то путь W называется *s-путем.*

Замечание 8.1. Так как $\overline{X}_s^{\pm 1}$ $(1 \leqslant s < \sigma - 1)$ одноэлементны, то определение s-пути не зависит от выбора π_1. Поэтому путь $\mathrm{W}_1\mathrm{I}(\xi, \pi)$ будем обозначать через $\mathrm{W}_1\mathrm{I}(\xi)$.

Лемма 8.1. *Пусть дан s-путь* W, *равный* (8.1), *где соотношения* X_0, $X_{\sigma-1}$ *имеют тип* I. *Тогда существует путь*

$$a = b_0 \overset{Y_0}{\text{———}} b_1 \text{———} \cdots \overset{Y_{\lambda-2}}{\text{———}} b_{\lambda-1} = b,$$

где соотношения Y_s $(s \leqslant \lambda - 1)$ *имеют тип* J.

Доказательство. Рассмотрим путь W_1, равный (8.3). Пусть $\bar{a}_1 = \{\, \chi_i \mid i \leqslant \alpha - 1 \,\}$ (см. § 7) и пути элементов $\mathrm{W}_1\mathrm{I}(\chi_i)$ равны

$$\chi_i \equiv \theta_{i0} \overset{X'_{i0}}{\text{———}} \theta_{i1} \text{———} \cdots \overset{X'_{i\,\sigma-2}}{\text{———}} \theta_{i\,\sigma-1}. \tag{8.5}$$

Так как путь W является s-путем, то существует i_0 $(i_0 \leqslant \alpha - 1)$ такое, что $\theta_{i_0 0} \equiv \xi$ и $\theta_{i_0\sigma-1} \equiv \eta$. Поэтому существует путь

$$p^{\xi^*}\xi \overset{Z_0}{\text{———}} \cdots \overset{Z_{\mu-1}}{\text{———}} p^{\xi^*}\eta,$$

где соотношения Z_s, $s \leqslant \mu - 1$, имеют тип J. Из (8.5) при $i = i_0$, применяя лемму 5.5 σ раз, получаем равенство $\xi^* = \eta^* \rightleftharpoons \gamma$. Рассмотрим путь

$$a' \overset{X_0}{\text{———}} p^\gamma\xi \overset{Z_0}{\text{———}} \cdots \overset{Z_{\mu-1}}{\text{———}} p^\gamma\eta \overset{X_{\sigma-1}}{\text{———}} b'. \tag{8.6}$$

Применяя к пути (8.6) лемму 6.1 μ раз, заключаем, что существует путь

$$a' = c_0 \overset{V_0}{\text{———}} c_1 \text{———} \cdots \overset{V_{\nu-1}}{\text{———}} c_\nu = b, \tag{8.7}$$

где соотношения V_s, $s \leqslant \nu - 1$, имеют тип J.

Легко видеть, что если $i < i' \leqslant \alpha - 1$, то для любых s, s' $(s < s' \leqslant \sigma - 1)$ вхождения θ_{is} и $\theta_{i's'}$ из пути (8.5) не пересекаются. Поэтому путь (8.1) можно заменить на путь

$$\begin{gathered} a_1 = d_0 \overset{X'_{00}}{\text{———}} d_1 \text{———} \cdots \overset{X'_{0\,\sigma-2}}{\text{———}} d_{\sigma-1} \overset{X'_{10}}{\text{———}} d_\sigma \\ \text{———} \cdots \overset{X'_{(\alpha-1)(\sigma-2)}}{\text{———}} d_{(\alpha-1)(\sigma-1)}. \end{gathered} \tag{8.8}$$

Порядок нумераций элементов χ_i, $i \leqslant \alpha - 1$, произвольный. Пусть

$$a = \cdots + a' + \cdots, \tag{8.9}$$

$$a_1 = \cdots + p^\gamma \xi + \cdots . \tag{8.10}$$

Форма a_1 получена из a заменой a' на $p^\gamma\xi$. Все вхождения ξ^i элемента ξ в $p^\gamma\xi$ из (8.10) обозначим через $\chi_{\alpha-\gamma}$, $\chi_{\alpha-\gamma+1}, \dots, \chi_{\alpha-1}$. Пусть пути $\mathrm{W_1I}(\chi_{\alpha-\gamma+i})$, $i \leqslant \gamma - 1$, преобразуют форму $p^\gamma\xi$ в форму $v = r\xi + s\eta + \eta_0 + \ldots + \eta_{q-1}$, где

$$r + s + (q-1) = p^\gamma. \tag{8.11}$$

Тогда

$$a_{\sigma-1} = \ldots + r\xi + s\eta + \eta_0 + \ldots + \eta_{q-1} + \ldots + (p^\gamma - s)\eta + \ldots . \tag{8.12}$$

Так как в (8.1) к форме $a_{\sigma-1}$ применяется соотношение $X_{\sigma-1}$, в форме $a_{\sigma-1}$ должна быть, по крайней мере, форма $p^\gamma\eta$. Это и указано в (8.12). Обозначим вхождение формы v в (8.12) через V. Положим $\alpha - 1 - \gamma \rightleftharpoons \beta$ и рассмотрим путь

$$\begin{gathered} a = e_0 \xrightarrow{\;X'_{00}\;} e_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\;X'_{0\,\sigma-2}\;} e_{\sigma-1} \xrightarrow{\;X'_{10}\;} e_\sigma \\ \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\;X'_{\beta(\sigma-2)}\;} e_{\beta(\sigma-1)} = e. \end{gathered} \tag{8.13}$$

Форма e отличается от формы (8.12) тем, что в $a_{\sigma-1}$ находится a' вместо V. Теперь рассмотрим путь

$$e = x_0 \xrightarrow{\;V_0\;} \cdots \xrightarrow{\;V_{\mu-1}\;} x_\mu = x. \tag{8.14}$$

Форма x отличается от формы (8.12) тем, что в $a_{\sigma-1}$ находится b' вместо V, т. е.

$$x = \cdots + b' + \cdots + (p^\gamma - 1)\eta + \cdots . \tag{8.15}$$

Форма a_σ получена из (8.12) заменой $s\eta$ и $(p^\gamma - s)\eta$ на b', т. е.

$$a_\sigma = \cdots + r\xi + \eta_0 + \cdots + \eta_{q-1} + \cdots + b' + \cdots . \tag{8.16}$$

Нам остается показать, что форму (8.16) можно получить из (8.15) соотношениями типа J. Для этого поступаем следующим образом. Применяя соотношения пути (8.5) при $i = i_0$ в обратном порядке к вхождениям η из $(p^\gamma - s)\eta$ в (8.15), получаем форму

$$x' = \cdots + b' + \cdots + (p^\gamma - s)\xi + \cdots .$$

Теперь, применяя к вхождениям ξ из $(p^\gamma - s)\xi$ в этой форме соотношения подходящих путей $\mathrm{W_1I}(\chi_{\alpha-\gamma+i})$, $i \leqslant \gamma + 1$, заменим $(p^\gamma - s)\xi$ на $r\xi + \eta_0 + \cdots + \eta_{q-1}$, т. е. получаем требуемую форму a_σ. При этом мы пользовались только соотношениями типа J. Лемма 8.1 доказана.

Лемма 8.2. *Не существует s-пути* W, *равного* (8.1), *где соотношения* X_0 *и* $X_{\sigma-1}$ *имеют соответственно типы* I *и* K.

Доказательство. Допустим противное, т.е. пусть существует s-путь W, равный (8.1), где соотношения X_0, $X_{\sigma-1}$ имеют соответственно типы I и K. Рассмотрим путь (8.4). Все соотношения $X'_1, \dots, X'_{\sigma-2}$ имеют тип J и соответственно равны

$$\xi = \theta_1, \quad \theta_1 = \theta_2, \dots, \theta_{\sigma-2} = \eta. \tag{8.17}$$

При нашем предположении, применив лемму 5.5 $(\sigma - 1)$ раз, получим, что существует соотношение $Y(\ \mid \eta)$ типа I. Поэтому для элемента η существуют как соотношение $Y(\ \mid \eta)$ типа I, так и соотношение $X_{\sigma-1}(\ \mid \eta)$ типа K. Это противоречит лемме 5.1. Лемма 8.2 доказана.

Лемма 8.3. *Пусть дан s-путь* W, *равный* (8.1), *где соотношения* X_0 *и* $X_{\sigma-1}$ *имеют тип* K. *Тогда существует путь*

$$a = b_0 \xrightarrow{\;Y_0\;} b_1 \xrightarrow{\qquad} \cdots \xrightarrow{\;Y_{\pi-1}\;} b_\pi = b,$$

где соотношения Y_s, $s \leqslant \pi - 1$, *имеют тип* J.

Доказательство. Так как W есть s-путь, существуют соотношения (8.17). Применяя лемму 5.5 $(\sigma - 1)$-раз, получим, что $\xi^* = \eta^* \leftrightharpoons \gamma$, и соотношения X_0, $X_{\sigma-1}$ соответственно равны

$$0 = p^\gamma \xi, \qquad 0 = p^\gamma \eta.$$

Далее доказательство проводится аналогично доказательству леммы 8.1. Лемма 8.3 доказана.

§ 9. G-пути

9.1. Пусть даны путь W, равный

$$a = a_0 \xrightarrow{\;X_0^{\varepsilon_0}\;} a_1 \xrightarrow{\qquad} \cdots \xrightarrow{\;X_{\sigma-1}^{\varepsilon_{\sigma-1}}\;} a_\sigma = b, \tag{9.1}$$

и числа e_0, e_1 $(e_0 \leqslant e_1 \leqslant \sigma)$. Тогда путь

$$a_{e_0} \xrightarrow{\;X_{e_0}\;} \cdots \xrightarrow{\;X_{e_1-1}\;} a_{e_1} \tag{9.2}$$

называется *подпутем пути* W.

Определение 9.1. Путь W называется *G-путем*, если он не содержит s-подпути.

Лемма 9.1. *Для любого пути* W *вида* (9.1), *существует G-путь* W′, *равный*

$$a = b_0 \xrightarrow{\;Y_0\;} b_1 \xrightarrow{\qquad} \cdots \xrightarrow{\;Y_{\pi-1}\;} b_\pi = b.$$

Доказательство. Допустим, что путь W не является G-путем. Тогда он содержит s-подпуть W_1, равный (9.2), где соотношения X_{e_0}, X_{e_1-1} имеют типы I или K, а соотношения $X_{e_0+1}, \ldots, X_{e_1-2}$ — тип J. Тогда по леммам 8.1–8.3 путь W_1 можно заменить путем W_1', равным

$$a_{e_0} = c_0 \overset{Z_0}{\overline{\qquad\qquad}} c_1 \overline{\qquad\qquad} \cdots \overset{Z_{\nu-2}}{\overline{\qquad\qquad}} c_{\nu-1} = a_{e_1},$$

где соотношения Z_s $(s \leqslant \nu - 1)$ имеют тип J. Следовательно, путь W_1 является G-путем. Лемма 9.1 доказана.

Предположим, что даны путь W, равный (9.1), и путь элементов $\mathrm{WI}(\xi, \pi)$, равный

$$\xi \equiv \theta_0 \overset{X_0'}{\overline{\qquad\qquad}} \theta_1 \overline{\qquad\qquad} \cdots \overset{X_{\sigma-1}'}{\overline{\qquad\qquad}} \theta_\sigma. \tag{9.3}$$

Определение 9.2. Путь (9.3) назовем *G-путем элементов*, если не существует чисел e_0, e_1 таких, что выполнены следующие условия:

◇ $e_0 < e_1 \leqslant \sigma$;

◇ $\varepsilon_{e_0} = -1, \quad \varepsilon_{e_1-1} = 1$;

◇ соотношения X_{e_0}', X_{e_1-1}' имеют тип I либо тип K;

◇ соотношения $X_{e_0+1}', \ldots, X_{e_1-2}'$ имеют тип J.

Лемма 9.2. *Пусть даны G-путь W и путь элементов $\mathrm{WI}(\xi, \pi)$, соответственно равные* (9.1) *и* (9.3). *Тогда $\mathrm{WI}(\xi, \pi)$ есть G-путь элементов.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. допустим, что существует подпуть $\mathrm{W}_1\mathrm{I}$ пути (9.3), равный

$$\theta_{e_0} \overset{X_{e_0}'}{\overline{\qquad\qquad}} \theta_{e_0+1} \overline{\qquad\qquad} \cdots \overset{X_{e_1-1}'}{\overline{\qquad\qquad}} \theta_{e_1},$$

где соотношения X_s' $(e_0 \leqslant s \leqslant e_1 - 1)$ и числа e_0, e_1, ε_{e_0}, ε_{e_1-1} удовлетворяют условиям определения 9.2. Рассмотрим путь

$$a_{e_0} \overset{X_{e_0}}{\overline{\qquad\qquad}} a_{e_0+1} \overline{\qquad\qquad} \cdots \overset{X_{e_1-1}}{\overline{\qquad\qquad}} a_{e_1}. \tag{9.4}$$

По свойству I_4 (см. замечание 7.1) имеем $X_{e_0}' = X_{e_0}$, $X_{e_1-1}' = X_{e_1-1}$. Ввиду свойства I_5 получим $\theta_{e_1-1} \in \overline{X}_{e_1-1}^1$. Поэтому если соотношение X_{e_1-1} есть $b' = p^{\eta^*}\eta$, то $\theta_{e-1} \equiv \eta$. Следовательно, путь (9.4) является s-подпутем пути W. Это противоречит тому факту, что W является G-путем. Лемма 9.2 доказана.

9.2. Пусть дано соотношение $X(\xi \mid \eta)$ типа I или типа K. Тогда будем говорить, что *уровень элемента ξ меньше уровня элемента η* и писать $\xi \prec \eta$. Если это соотношение $X(\xi \mid \eta)$ имеет тип J, то будем говорить, что *элементы ξ, η имеют одинаковый уровень* и писать $\xi \approx \eta$. Выражение $\xi \preccurlyeq \eta$ означает либо $\xi \prec \eta$, либо $\xi \approx \eta$. Так как нет соотношений $X(\xi \mid 0)$ типа W = I, J, K, для любого элемента ξ, отличного от нуля, неверно, что $\xi \preccurlyeq 0$.

Лемма 9.3. *Пусть даны G-путь W и путь элементов $\mathrm{WI}(\xi,\pi)$, соответственно равные (9.1) и (9.3). Тогда для пути $\mathrm{WI}(\xi,\pi)$ справедливо одно из следующих условий:*

(A) $\theta_0 \succcurlyeq \theta_1 \succcurlyeq \ldots \succcurlyeq \theta_\sigma$;

(B) *существует число $e \leqslant \sigma$ такое, что*

$$\theta_0 \succcurlyeq \ldots \succcurlyeq \theta_e, \qquad \theta_e \preccurlyeq \theta_{e+1} \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq \theta_\sigma.$$

Доказательство. По лемме 9.2 путь $\mathrm{WI}(\xi,\pi)$ является G-путем элементов. По определению G-путей элементов получаем требуемое утверждение. Лемма 9.3 доказана.

Определение 9.3. Если для пути элементов $\mathrm{WI}(\xi,\pi)$, равного (9.3), справедливо условие (A) [условие (B)] леммы 9.3, то будем говорить, что *путь* $\mathrm{WI}(\xi,\pi)$ *имеет тип* A [*тип* B].

§ 10. Нормальная форма

Определение 10.1. Форма

$$x = \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i \xi_i$$

называется *нормальной*, если выполнены следующие условия:

- элемент ξ_i определен, $\xi_i \neq \xi_j$ при $i < j \leqslant \nu$;
- $\alpha_i < p^{\xi_i^*}$, при $i \leqslant \nu$.

Лемма 10.1. *Для любой формы*

$$x = \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i \xi_i,$$

где $\alpha_i \xi_i \neq 0$, существует нормальная форма y, равная x.

Доказательство. Пусть $\xi_r = \max\{\, \xi_i \mid \alpha_i \geqslant p^{\xi_i^*},\ i \leqslant \nu \,\}$. Тройку чисел ξ_r назовем *λ-тройкой формы* x и обозначим через $\lambda(x)$. Доказательство будем вести индукцией по порядку тройки ξ_r. Если элемент ξ_r не определен, то форма x нормальна. Пусть ξ_r определен и $\xi_r \equiv \langle k_r, m_r, n_r \rangle$. Если $\xi_r^* = m_r + 1$, то существует соотношение $0 = p^{m_r+1}\xi$. Отсюда следует, что число α_r можно считать меньшим, чем $p^{\xi_r^*}$. Пусть $\xi_r^* \leqslant m_r$. Тогда существует соотношение

$$\sum_{j=0}^{\mu} \alpha_j \eta_j = p^{\xi_r^*} \xi_r,$$

где $\eta_j < \xi_r$, $j \leqslant \mu$. Поэтому форма x равна такой форме x', что тройка $\lambda(x')$ меньше тройки $\lambda(x)$. По индукционному предположению получаем требуемое утверждение. Лемма 10.1 доказана.

Лемма 10.2. *Пусть даны G-путь W и путь элементов* $\mathrm{WI}(\xi,\pi)$, *соответственно равные*

$$a = a_0 \overset{X_0}{\longrightarrow} a_1 \longrightarrow \cdots \overset{X_{\sigma-1}}{\longrightarrow} a_\sigma = b, \tag{10.1}$$

$$\xi \equiv \theta_0 \overset{X'_0}{\longrightarrow} \theta_1 \longrightarrow \cdots \overset{X'_{\sigma-1}}{\longrightarrow} \theta_\sigma, \tag{10.2}$$

где форма b нормальна. Тогда путь элементов $\mathrm{WI}(\xi,\pi)$ *имеет тип* A.

Доказательство. Допустим противное. Тогда по лемме 9.3 путь элементов $\mathrm{WI}(\xi,\pi)$ имеет тип B. Пусть e — наибольшее число такое, что соотношение X'_e имеет тип I или тип K. Тогда по свойству I_4 (см. замечание 7.1) $X'_e = X_e$. Пусть соотношение X_e есть $a' = p^q\theta_{e+1}$, где $q = \theta^*_{e+1}$. Тогда коэффициент γ при θ_{e+1} в форме a_{e+1} удовлетворяет неравенству

$$\gamma \geqslant p^q. \tag{10.3}$$

В силу выбора числа e соотношения $X'_{e+1}, \dots, X'_{\sigma-1}$ имеют тип J и соответственно равны $\theta_{e+1} = \theta_{e+2}, \dots, \theta_{\sigma-1} = \theta_\sigma$. Ввиду леммы 5.5

$$\theta^*_{e+1} = \theta^*_\sigma = q. \tag{10.4}$$

Так как форма b нормальна, все элементы θ_{e+1} в форме a_{e+1} должны быть заменены на θ_σ. Из (10.3), (10.4) следует, что коэффициент δ при θ_σ в форме b удовлетворяет неравенству $\delta \geqslant p^q$, что противоречит нормальности формы b. Лемма 10.2 доказана.

Лемма 10.3. *Если элементы ξ, η определены и выполнено равенство*

$$\xi = \eta, \tag{10.5}$$

где $\xi \equiv \langle k,m,n\rangle$, $\eta \equiv \langle k,r,s,\rangle$ *и*

$$m \leqslant r, \tag{10.6}$$

то

$$\eta = \langle k, m, s+r-m\rangle. \tag{10.7}$$

Доказательство. Из построения группы G непосредственно вытекает, что равенство (10.5) можно вывести только из соотношений типа I, J и K. В силу (10.5) и леммы 9.1 существует G-путь W, равный

$$\eta \equiv a_0 \overset{X_0}{\longrightarrow} a_1 \longrightarrow \cdots \overset{X_{\sigma-1}}{\longrightarrow} a_\sigma \equiv \xi.$$

По лемме 7.2 существует путь элементов

$$\theta_0 \overset{X'_0}{\longrightarrow} \theta_1 \longrightarrow \cdots \overset{X'_{\sigma-1}}{\longrightarrow} \theta_\sigma \equiv \xi. \tag{10.8}$$

Так как элемент ξ определен, из /*3.3*/ имеем $\xi^* > 0$. Поэтому форма ξ нормальна. По лемме 10.2 путь (10.8) имеет тип A, т. е.

$$\theta_0 \succcurlyeq \theta_1 \succcurlyeq \dots \succcurlyeq \theta_\sigma. \tag{10.9}$$

Тогда $\theta_0 \neq 0$. Следовательно,

$$\theta_0 = \eta. \tag{10.10}$$

Из (10.9) следует, что соотношения $X'_0, \ldots, X'_{\sigma-1}$ имеют либо тип I, либо тип J. Дальнейшее доказательство проведем индукцией по длине пути элементов (10.8), равной σ.

Если соотношение X'_0 имеет тип I, то по свойству I_4 (см. замечание 7.1) соотношения X'_0 и X_0 совпадают. В силу (10.10) соотношение X_0 равно $a' = p^{\eta^*}\eta$, $\varepsilon_0 = 1$, где $\eta^* > 0$. Однако правое применение соотношения X_0 к элементу η невозможно. Следовательно, X'_0 имеет тип J. Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1: соотношение X'_0 есть

$$\eta = \langle k,\, r+1,\, s-1\rangle. \tag{10.11}$$

Тогда $\theta_1 = \langle k,\, r+1,\, s-1\rangle$. По индукционному предположению имеем равенство

$$\theta_1 = \langle k, m,\, s-1+r-1-m\rangle \equiv \langle k, m,\, s+r-m\rangle,$$

из которого в силу (10.11) получим (10.7).

Случай 2: $X'_0 = (\langle k,\, r-1,\, s+1\rangle = \eta)$. Этот случай рассматривается аналогично случаю 1.

Случай 3: соотношение X'_0 есть

$$\langle k, r,\, s-1\rangle = \eta. \tag{10.12}$$

Тогда на шаге $t = [\eta]$ имеет место случай 1a, */3.4/*, по условию которого

$$\langle k, m,\, s+r-m\rangle = \langle k, m,\, s+r-m-1\rangle. \tag{10.13}$$

По индукционному предположению

$$\langle k, r,\, s-1\rangle = \langle k, m,\, s-1+r-m\rangle. \tag{10.14}$$

Из (10.12)–(10.14) получим (10.7).

Случай 4: $X = (\langle k, r,\, s+1\rangle = \eta)$. Этот случай рассматривается аналогично случаю 3.

Лемма 10.3 доказана.

Лемма 10.4. *Если элементы ξ, η определены и $\xi = \eta$, где $\xi \equiv \langle k, m, n\rangle$, $\eta \equiv \langle k, r, s\rangle$ и $m \leqslant r$, то выполнено равенство $\xi = \langle k, m,\, s+r-m\rangle$.*

Доказательство непосредственно вытекает из леммы 10.3.

§ 11. Элементы бесконечной высоты

В этом параграфе будут описаны элементы бесконечной высоты группы G.

11.1. Прежде всего установим следующую лемму.

Лемма 11.1. *Пусть даны G-путь W и путь элементов $\mathrm{WI}(\xi,\pi)$, соответственно равные*

$$a = a_0 \overset{X_0}{\text{———}} a_1 \text{———} \cdots \overset{X_{\sigma-1}}{\text{———}} a_\sigma = b, \tag{11.1}$$

$$\xi \equiv \theta_0 \overset{X'_0}{\text{———}} \theta_1 \text{———} \cdots \overset{X'_{\sigma-1}}{\text{———}} \theta_\sigma, \tag{11.2}$$

где $\theta_\sigma \neq 0$ и $\theta_j \equiv \langle w_j, u_j, v_j\rangle$, $j \leqslant \sigma$. Если путь (11.2) имеет тип A, то справедливы свойства

1) $\theta_0 \neq 0$;
2) $w_0 \geqslant w_\sigma$;
3) *существует такой элемент $\eta \equiv \langle \ell, r, s\rangle$, что выполнены условия*
   a) $\theta_\sigma = \eta$;
   b) $\ell = w_\sigma$, $r = u_0 + w_0 - w_\sigma$, $s = v_0$.

Доказательство проведем индукцией по длине σ пути (11.2). Для путей, имеющих длины меньше σ, лемму 11.1 считаем доказанной. Пусть дан путь (11.2) длины σ. Так как путь (11.2) имеет тип A, получаем

$$\theta_0 \succcurlyeq \theta_1 \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq \theta_\sigma. \tag{11.3}$$

Поэтому из определения отношения $\succcurlyeq$ (см. § 9) непосредственно вытекает, что $\theta_0 \neq 0$ и

$$w_0 \geqslant w_\sigma. \tag{11.4}$$

По индукционному предположению

$$w_1 \geqslant w_\sigma; \tag{11.5}$$

кроме того, существует элемент $\eta \equiv \langle \ell, r, s\rangle$ такой, что

$$\theta_\sigma = \eta, \quad \ell = w_\sigma, \quad r = u_1 + w_1 - w_\sigma, \quad s = u_1. \tag{11.6}$$

Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1: соотношение X'_0 имеет тип I. Тогда X'_0 есть

$$\cdots + \alpha\theta_1 + \cdots = p^q\theta_0,$$

где $q = \theta_0^*$. Из /3.3/, где вводятся такие соотношения, имеем

$$w_0 > w_1, \quad u_1 = u_0 + w_0 - w_1, \quad v_1 = v_0. \tag{11.7}$$

Из (11.4)–(11.7) получим свойства 2 и 3. Таким образом, в этом случае лемма 11.1 доказана.

Случай 2: соотношение X'_0 имеет тип K, т.е. X'_0 есть

$$0 = p^q\theta_0,$$

где $q = \theta_0^*$. Тогда из (11.3) следует $\theta_\sigma = 0$, что противоречит условию леммы. Поэтому случай 2 невозможен.

Случай 3: соотношение X'_0 имеет тип J, т.е. X'_0 есть

$$\theta_0 = \theta_1.$$

Тогда $w_0 = w_1$. Отсюда и из (11.5) следует свойство 2.

Далее рассмотрим возможные варианты.

Случай 3a: $\theta_0 \geqslant \theta_1$. Если $\theta_0 \equiv \theta_1$, то все доказано. Пусть $\theta_0 > \theta_1$. Тогда по лемме 5.5 пара $\langle u_0, v_0\rangle$ равна либо $\langle u_1+1, v_1-1\rangle$, либо $\langle u_1, v_1+1\rangle$. Рассмотрим эти случаи отдельно.

Случай 3a$_1$: $\langle u_0, v_0\rangle = \langle u+1, v_1-1\rangle$, т.е.

$$u_0 = u_1 + 1, \quad v_0 = v_1 - 1. \tag{11.8}$$

Тогда на шаге $t+1 = [\theta_0]$ имеет место случай 1b, */3.4/*. Из условия */3.4/* и установленного свойства 2 вытекает

$$\eta' = \eta'', \tag{11.9}$$

где $\eta' \equiv \langle w_\sigma, u_1 + w_0 - w_\sigma, v_1\rangle$, $\eta'' = \langle w_\sigma, u_1 + w_0 - w_\sigma + 1, v_1 - 1\rangle$. В силу (11.6) имеем

$$\eta' \equiv \eta. \tag{11.10}$$

Из (11.6), (11.8)–(11.10) следует, что $\theta_\sigma = \eta''$. Таким образом, в этом случае лемма 11.1 доказана.

Случай 3a$_2$: $\langle u_0, v_0\rangle = \langle u_1, v_1+1\rangle$. Доказательство аналогично доказательству в случае 3a$_1$.

Случай 3b: $\theta_0 < \theta_1$. Этот случай рассматривается аналогично случаю 3a.

Лемма 11.1 доказана.

Определение 11.1. Элемент $\eta \equiv \langle \ell, r, s\rangle$ называется *B-элементом*, если

1) $\eta \neq 0$;
2) для любого $i \in N$ существует G-путь элементов W$_i$I типа A, равный

$$\xi_i \equiv \theta_{i0} \text{ ——— } \theta_{i1} \text{ ——— } \cdots \text{ ——— } \theta_{i\sigma_i} \equiv \eta, \tag{11.11}$$

где $\xi_i \equiv \langle k_i, m_i, n_i\rangle$;

3) множество $K = \{\langle k_i, m_i\rangle \mid i \in N\}$ бесконечно.

Лемма 11.2. *Если элемент $\eta \equiv \langle \ell, r, s\rangle$ является B-элементом, то*

$$\eta = b_\ell. \tag{11.12}$$

(Напомним, что определение элемента b_ℓ дано в § 4 перед леммой 4.3).

Доказательство. Пусть η — B-элемент. В силу (11.11) и леммы 11.1 имеем $k_i \geqslant \ell$ и

$$\eta = \langle \ell, m_i + k_i - \ell, n_i\rangle. \tag{11.13}$$

Положим $r_i \leftrightharpoons m_i + k_i - \ell$. Из условия 3 определения 11.1 следует, что множество $R = \{r_i \mid i \in N\}$ бесконечно. Пусть числа φ_ℓ, ψ_{km}, ψ_ℓ определены так же, как в § 4. Выберем число e такое, что

$$r_e \geqslant \varphi_\ell. \tag{11.14}$$

Для e найдем число q такое, что

$$r_q - r_e + n_q \geqslant \psi_{\ell r_\ell}. \tag{11.15}$$

Это возможно, поскольку множество R бесконечно. Из (11.12), (11.13) имеем $\langle \ell, r_e, n_e\rangle = \langle \ell, r_q, n_q\rangle$. По лемме 10.3

$$\langle \ell, r_q, n_q\rangle = \langle \ell, r_e, n_q + r_q - r_e\rangle. \tag{11.16}$$

Ввиду (11.15), (11.16) и леммы 4.1

$$\langle \ell, r_q, n_q\rangle = \langle \ell, r_e, \psi_{\ell r_e}\rangle. \tag{11.17}$$

Из (11.14), (11.17) и леммы 4.2 получаем $\langle \ell, r_q, n_q\rangle = \langle \ell, \varphi_\ell, \psi_\ell\rangle = b_\ell$. Отсюда и из (11.13) приходим к равенству (11.12). Лемма 11.2 доказана.

11.2. Изучим некоторые свойства соотношений типа L и M, которые введены в */3.4/–/3.9/*.

Лемма 11.3. *Для каждого элемента $\xi \equiv \langle k, m, n\rangle$ может быть введено только одно соотношение типа M, т. е. соотношение вида $p^q\bar{\xi}^t = \xi$, где $q = f(\hat{\xi}^t, \check{\xi}^t)$. Если такое соотношение введено, то выполнены свойства*

1) $c_k^t = \xi$, $t = [\xi]$;
2) *либо* $c_k^{t-1} \neq c_k^t$, *либо* $m > 0$ *и* $c_k^{t-1} = c_k^t$,

и на шаге t имеет место случай 1b, */3.4/*.

Доказательство непосредственно следует из */3.4/–/3.9/*.

Лемма 11.4. *Пусть определены элементы $\bar{\xi}^{t_0}$, $\bar{\xi}^{t_1}$, $t_0 < t_1$. Тогда $p^\alpha\bar{\xi}^{t_1} = \bar{\xi}^{t_0}$ и для некоторого подходящего числа β*

$$\alpha = f(\hat{\xi}^{t_1}, \check{\xi}^{t_1}) - f(\hat{\xi}^{t_0}, \check{\xi}^{t_0}) - \beta.$$

Доказательство. Из */3.4/–/3.9/* непосредственно следует, что лемма 11.4 справедлива при $t_1 = t_0 + 1$. Применяя индукцию по t_1, получаем требуемое утверждение. Лемма 11.4 доказана.

Рассмотрим форму

$$a = \sum_{j=0}^{\mu} \beta_j \bar{\eta}_j^{t_j}. \tag{11.18}$$

В силу леммы 11.4 для формы (11.18) можно считать выполненным следующее условие:

$$\text{если } j_0 < j_1 \leqslant \mu, \text{ то } \eta_{j_0} \neq \eta_{j_1}. \tag{R}$$

В дальнейшем для форм вида (11.18) будем считать это условие выполненным.

Лемма 11.5. *Пусть в группе C выполнены равенства*

$$b = \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i \xi_i, \quad a = \sum_{j=0}^{\mu} \beta_j \bar{\eta}_j^{t_j}, \quad p^q a = b.$$

Тогда для некоторых чисел $q_j, e_j, v_j, \gamma_j \in N$ $(j \leqslant \mu)$ существуют соотношения $p^{e_j}\bar{\eta}_j^{v_j} = \eta_j$ типа M *и справедливо равенство $\sum_{j=0}^{\mu} \gamma_j \eta_j = b$.*

Доказательство. При построении группы C вводятся определяющие соотношения типов I, J, K, L, M. Соотношения типов I, J, K не содержат элементов вида $\bar{\eta}_j^{t_j}$. Соотношения типов L и M имеют соответственно виды $p^{\alpha_j}\bar{\eta}_j^{k_j+1} = \bar{\eta}_j^{k_j}$ и $p^{e_j}\bar{\eta}_j^{v_j} = \eta_j$ для некоторых подходящих чисел α_j, k_j, e_j, v_j. Лемма 11.5 доказана.

Лемма 11.6. *Пусть даны некоторые числа k и m. Для каждого $x \in N$ через ξ_x обозначим тройку $\langle k, m, x\rangle$. Тогда соотношения вида*

$$p^{q_x}\bar{\xi}_x^{t_x} = \xi_x \tag{11.19}$$

могут быть введены только конечное число раз.

Доказательство. Пусть $x_0 = \psi_{km}$, где число ψ_{km} определено в п. 4.1. По лемме 4.1 для любого x, $x > x_0$, выполнено равенство $\xi_{x-1} = \xi_x$. Поэтому на шаге $t_x = [\xi_x]$, $x > x_0$, имеет место случай 1a, */3.4/*. В силу леммы 11.3 это означает, что для каждого x такого, что $x > x_0$ соотношение (11.19) не вводится. Лемма 11.6 доказана.

Лемма 11.7. *Пусть для некоторого шага e определено число $\hat{\xi}^e$. Тогда существует такой шаг t_0, что для всех $t \geqslant t_0$*

$$\hat{\xi}^t = \hat{\xi}^{t_0}. \tag{11.20}$$

Доказательство. Пусть $\xi \equiv \langle k, m, n\rangle$ и шаг e наименьший такой, что число $\hat{\xi}^e$ определено. Тогда $c_k^e \equiv \xi$ (см. */3.8/*). По лемме 5.3 $e = [\xi]$. Пусть на шаге $t+1$ произошло изменение числа $\hat{\xi}^t$, т. е.

$$\hat{\xi}^{t+1} \neq \hat{\xi}^t. \tag{11.21}$$

Это может случиться только тогда, когда на шаге $t+1$ выполнена одна из следующих операций:

- ◇ операция консервации $\mathrm{OK}(\xi, \sigma)$, $\sigma > 0$ (см. */3.6/*);
- ◇ операция расконсервации $\mathrm{OR}(\xi, r)$, $r \geqslant 0$ (см. */3.7/*).

Покажем, что каждая из этих операций выполняется конечное число раз. Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1: $s+1 > e$ — наименьший такой шаг, что на этом шаге выполнена операция консервации $\mathrm{OK}(\xi, \sigma)$ элемента ξ и справедливо неравенство (11.21) при $t = s$. Тогда, согласно */3.6/*, имеем

$$\langle u_k^s, v_k^s\rangle = \langle m, n\rangle, \quad c_k^{s+1} \neq c_k^s. \tag{11.22}$$

Из последнего соотношения и леммы 5.2 вытекает, что $\langle u_k^t, v_k^t\rangle \neq \langle m, n\rangle$ для любого шага $t+1 > s+1$. Поэтому для любого шага $t > s+1$ условия (11.22) нарушены при $s = t$. Следовательно, операция консервации $\mathrm{OK}(\xi, \sigma)$, $\sigma > 0$, на любом шаге $t > s+1$ не выполняется.

Случай 2: на некотором шаге $q+1$ выполнена операция расконсервации $\mathrm{OR}(\xi, r)$ элемента ξ. Можно считать, что $q > s$. Если шаг $q'+1 > q+1$ наименьший такой, что выполнена еще раз операция расконсервации $\mathrm{OR}(\xi, \ell)$ элемента ξ относительно ℓ, то $\ell < r$. Поэтому существует такой шаг q'', что для любого шага $t \geqslant q''$ операция расконсервации $\mathrm{OR}(\xi, r')$ не выполняется для любого числа r'. Таким образом, шаг $t_0 = q''$ будет искомым.

Лемма 11.7 доказана.

В дальнейшем полагаем

$$\lim_t \hat{\xi}^t \leftrightharpoons \hat{\xi}. \tag{11.23}$$

Лемма 11.8. *Пусть для некоторого шага e определен элемент $\bar{\xi}^e$. Тогда существует такой шаг t_1, что для всех t, $t \geqslant t_1$, и некоторого числа $\tilde{\xi}$*

$$\bar{\xi}^t = \bar{\xi}^{t_1} \leftrightharpoons \bar{\xi}, \tag{11.24}$$

$$p^{\tilde{\xi}}\bar{\xi} = \xi. \tag{11.25}$$

Доказательство. По лемме 11.3 существует шаг t_0 такой, что для всех $t \geqslant t_0$

$$\hat{\xi}^t = \hat{\xi}^{t_0} = \hat{\xi}. \tag{11.26}$$

Пусть n — такое число, что для любого $x \geqslant n$

$$f(m,x) = f(m,n) = r. \tag{11.27}$$

Из */3.6/–/3.9/* следует, что $\check{\xi}^t < \check{\xi}^\tau$ при $t < \tau$. Поэтому существует шаг t_1 такой, что

$$t_1 \geqslant t_0, \quad \check{\xi}^{t_1} \geqslant n. \tag{11.28}$$

Рассмотрим шаг t, $t \geqslant t_1$. По лемме 11.4 имеем

$$p^\alpha \bar{\xi}^t = \bar{\xi}^{t_1}, \tag{11.29}$$

где $\alpha = f(\hat{\xi}^t, \check{\xi}^t) - f(\hat{\xi}^{t_1}, \check{\xi}^{t_1}) - \beta$, $\alpha \geqslant 0$, для некоторого подходящего числа β. Отсюда в силу (11.25), (11.26) имеем $\alpha = 0$. Тогда для любого t, $t \geqslant t_1$, из (11.29) приходим к (11.24).

Пусть e — такой наименьший шаг, что определилось число $\hat{\xi}^e$. Тогда на шаге e введется соотношение

$$p^{f(\hat{\xi}^e, \check{\xi}^e)}\bar{\xi}^e = \xi \tag{11.30}$$

(см. */3.8/*). По лемме 11.4 для некоторого числа α имеем $p^\alpha \bar{\xi}^{t_1} = \bar{\xi}^e$. Следовательно, в силу (11.24), (11.30)

$$p^{\alpha + f(\hat{\xi}^e, \check{\xi}^e)}\bar{\xi} = \xi.$$

Положив $\tilde{\xi} = \alpha + f(\hat{\xi}^e, \check{\xi}^e)$, получим (11.25). Лемма 11.8 доказана.

Непосредственно из построения следует, что группа C порождается элементами вида $\bar{\xi}^t$. Согласно леммам 11.3, 11.8 эта группа порождается элементами вида $\bar{\xi}$. Пусть элемент $b \in C$ имеет бесконечную высоту. Тогда существуют элементы a_x и числа q_x ($x \in N$) такие, что

$$b = \sum_{i=0}^{\nu} \alpha_i \xi_i, \tag{11.31}$$

$$a_x = \sum_{j=0}^{\mu} \beta_{x_j} \bar{\eta}_{x_j}, \tag{11.32}$$

$$p^{q_x} a_x = b, \tag{11.33}$$

$$q_0 < q_1 < \cdots . \tag{11.34}$$

Для форм b и a_x выполнено условие (R) (см. выше).

Лемма 11.9. *Пусть выполнены* (11.31)–(11.34). *Тогда форма* a_x *удовлетворяет следующему условию: если* $x \neq y$, *то* $\bar\eta_{xu} \neq \bar\eta_{yv}$ *для любых чисел* u, v $(u < \mu_x,\ v \leqslant \mu_y)$.

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно. Построим последовательность таких элементов

$$a'_0, a'_1, \dots, \tag{11.35}$$

что существует последовательность чисел $r_0 < r_1 < \dots$, для которых справедливы равенства $p^{r_x} a'_x = b$. Положим $a'_0 = a_0$, $r_0 = q_0$. Пусть s_0 — такое число, что для любого j $(j \leqslant \mu_0)$

$$p^{s_0} \bar\eta_{0j} = 0. \tag{11.36}$$

Выберем число x_0 так, что $q_{x_0} > s_0$. Допустим, что в форме a_{x_0} имеется слагаемое

$$d = \gamma_0 \bar\eta_{x_0 k_0} + \dots + \gamma_s \bar\eta_{x_0 k_s} \tag{11.37}$$

и для каждого $i \leqslant s$ существует $j_i \leqslant \mu_0$ такое, что $\bar\eta_{x_0 k_i} = \bar\eta_{0 j_i}$. Положим

$$a'_1 = a_{x_0} - d, \quad r_1 = x_0. \tag{11.38}$$

Из (11.33), (11.35)–(11.38) выводим, что $p^{q_{x_0}} a'_1 = b$ и для форм a'_1 и a'_0 выполнено условие леммы 11.9. Аналогично определяются элементы $a'_2, a'_3, \dots$. Таким образом, построенная последовательность (11.35) требуемая и можно считать, что для форм a_x выполнено условие леммы 11.9. Лемма 11.9 доказана.

Лемма 11.10. *Пусть выполнены условия* (11.31)–(11.34). *Тогда* $b = \sum_{i=0}^{\nu} \gamma_i \xi_i$ *для некоторых чисел* γ_i $(i \leqslant \nu)$.

Доказательство. Покажем, что число α_i $(i \leqslant \nu)$ делится на $\lambda_i = p^{\tilde\xi_i}$, где $\tilde\xi_i$ определено в лемме 11.8. Допустим, что это неверно. Тогда существуют числа r_i и s_i, такие, что $\alpha_i = q_i r_i + s_i$, $0 < s_i < q_i$. Отсюда и из (11.31) получим, что справедливо равенство $b = \dots + s\xi_i + \dots$. По лемме 11.8 существует шаг t_i такой, что $\bar\xi = \xi^{t_i}$. К элементу $s_i \bar\xi^{t_i}$ мы можем применять только соотношение типа L. Поэтому от элемента $s_i \bar\xi^{t}$ можно прийти лишь к элементам вида $r\bar\xi_i^{e_i}$, где $e_i < t_i$ и $r > 0$. Отсюда и из (11.33) следует, что в любой форме a_x содержится слагаемое вида $\bar\xi_i^{e_i}$, что противоречит лемме 11.9. Лемма 11.10 доказана.

Лемма 11.11. *Пусть элемент* b *группы* C *имеет бесконечную высоту. Тогда существуют числа* k_i, γ_i, $(i \leqslant \nu)$ *такие, что справедливо равенство*

$$b = \sum_{i=0}^{\nu} \gamma_i b_{k_i},$$

где элемент b_{k_i} *определен в* § 4.

Доказательство. Пусть элемент $b \in C$ имеет бесконечную высоту. Тогда выполнены условия (11.31)–(11.34). По лемме 11.10

$$b = \sum_{i=0}^{\nu} \gamma_i \xi_i. \tag{11.39}$$

Можно считать, что форма b нормальна. Из (11.32), (11.39) по лемме 11.5 получим

$$c \leftrightharpoons \sum_{j=0}^{\mu} \gamma_{x_j}\eta_{x_j} = \sum_i \gamma_i\xi_i \leftrightharpoons d. \tag{11.40}$$

По лемме 9.1 существует G-путь $\mathrm{W_X}$, равный

$$c = a_{x_0} \;\text{———}\; a_{x_1} \;\text{———}\; \cdots \;\text{———}\; a_{x\sigma_x} = d. \tag{11.41}$$

Выберем в форме d произвольный элемент $\xi_i \neq 0$. Из (11.41) и лемм 7.2, 10.2 следует, что существует путь элементов $\mathrm{WI_X}(\theta_{x_0}, \pi_x)$, имеющий тип A и равный

$$\theta_{x_0} \;\text{———}\; \theta_{x_1} \;\text{———}\; \cdots \;\text{———}\; \theta_{x\sigma_x} \equiv \xi_i.$$

По лемме 11.1 $\theta_{x_0} \neq 0$. По лемме 7.1 $\theta_{x_0} = \eta_{x\beta_{xi}} \leftrightharpoons \eta'_{xi}$ для некоторого $\gamma_{xk_i} \leftrightharpoons \beta_{xi} \leqslant \mu_x$. Пусть $\eta'_{xi} \equiv \langle \ell_{xi}, r_{xi}, s_{xi}\rangle$. Допустим, что множество $K_i = \{\langle \ell_{xi}, r_{xi}\rangle \mid x \in N\}$ конечно. По лемме 11.9 множество $L_{xi} = \{\langle \ell_{xi}, r_{xi}, s_{xi}\rangle \mid x \in N\}$ бесконечно. Следовательно, существует такая последовательность $x_0 < x_1 < \ldots$, что $\ell = \ell_{x_ji}$, $r = r_{x_ji}$, $j \in N$ и $s_{x_0i} < s_{x_1i} < \ldots$. По лемме 11.8 существуют такие t_j, что $\bar{\eta}'_{x_ji} = \bar{\eta}'^{t_j}_{x_ji}$. В силу (11.32), (11.33), (11.39) и леммы 11.5 для каждого j введено соотношение вида

$$p^{e_j}\bar{\eta}'^{v_j}_{x_ji} = \eta'_{x_ji}$$

для некоторых чисел e_j, v_j, что противоречит лемме 11.6. Поэтому множество K_i бесконечно. Тогда ξ_i является B-элементом (см. определение 11.1). По лемме 11.2 $\xi_i = b_{k_i}$, где $\xi_i = \langle k_i, m_i, n_i\rangle$. Лемма 11.11 доказана.

Из лемм 4.2, 4.3, 11.11 непосредственно следует

Лемма 11.12. *Подгруппа C^1 группы C порождается элементами b_k, $k \in N$, и изоморфна группе A^1.*

§ 12. Фактор-группа G/G^1

12.1. Пусть $I^t = \{\eta \mid [\eta] \leqslant t$, элемент $\bar{\eta}^t$ определен$\}$. Группа C^t, построенная на шаге t, порождается элементами $\bar{\eta}^t$, $\eta \in I^t$. Подгруппа $R^t \subseteq C^t$ определена в */3.5/*. Пусть $I^t = \{\eta_r \mid r \leqslant e^t\}$. Положим

$$a^t_r \leftrightharpoons \bar{\eta}^t_r + R^t, \quad f(\hat{\eta}^t_r, \check{\eta}^t_r) \leftrightharpoons s^t_r, \quad D^t \leftrightharpoons C^t/R^t.$$

Лемма 12.1. *Имеют место следующие утверждения:*

(а) $D^t = \sum_{r=0}^{e^t}(a^t_r)$, *где порядок* $|a^t_r|$ *элемента* a^t_r *равен* $p^{s^t_r}$;

(б) $I^t \subseteq I^{t+1}$, *причем если* $I^{t+1} \neq I^t$, *то* $I^{t+1} = I^t \cup \eta_{e^t+1}$.

(в) *Для каждого* $r \leqslant e^t$ *существует число* λ^t_r *такое, что отображение* $h^t\colon D^t \to D^{t+1}$, *определяемое равенствами* $h^t(a^t_r) = p^{\lambda^t_r}a^{t+1}_r$, *есть изоморфное вложение.*

Доказательство проведем индукцией по t. Пусть $t+1 = [\xi]$, $\xi \equiv \langle k, m, n\rangle$. Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1: на шаге $t+1$ имеет место случай 1a, */3.4/*. Тогда из построения непосредственно вытекает, что $w^{t+1} = w^t$, $I^{t+1} = I^t$, $\hat{\eta}^{t+1} = \hat{\eta}^t_r$, $c_j^{t+1} = c_j^t$, $R^{t+1} = R^t$ и введены только следующие соотношения:

$$p^{s_r^{t+1} - s_r^t}\bar{\eta}_r^{t+1} = \bar{\eta}_r^t, \quad r \leqslant e^{t+1}. \tag{12.1}$$

Ввиду индукционного предположения получаем требуемое утверждение.

Случай 2: на шаге $t+1$ имеет место случай 1b, */3.4/*. Тогда

$$c_k^{t+1} \equiv \xi \tag{12.2}$$

и на этом шаге определяется элемент $\bar{\xi}^{t+1}$ (см. */3.8/*), $I^{t+1} = I^t \cup \{\xi\}$. Положим $\eta_{e+1} \leftrightharpoons \xi$, $e \leftrightharpoons e^t$, $e^{t+1} = e+1$, $f(\hat{\xi}^{t+1}, \check{\xi}^{t+1}) = s_{e+1}^{t+1}$. На этом шаге вводится соотношение

$$p^{s_{e+1}^{t+1}}\bar{\xi}^{t+1} = \xi. \tag{12.3}$$

В силу (12.2)

$$p^{s_{e+1}^{t+1}}a_{e+1}^{t+1} = 0. \tag{12.4}$$

Рассмотрим возможные варианты.

Случай 2a: операции консервации и расконсервации (см. */3.6/*, */3.7/*) на шаге $t+1$ не выполняются. Тогда $\sigma(c_k^t) = 0$ (см. */3.5/*, */3.6/*). Отсюда $c_k^t \in R^{t+1}$. В рассматриваемом случае непосредственно из построения следует, что $\hat{\eta}^{t+1} = \hat{\eta}_r^t$, $r \leqslant e$, $c_j^{t+1} = c_j^t$, $j \leqslant w^{t+1}$ $(j \neq k)$ и введены соотношения (12.1). Поэтому $R^{t+1} = \text{гр}(R^t \cup \{c_k^{t+1}\})$. Отсюда и индукционного предположения получаем требуемое утверждение.

Случай 2b: выполнены операции консервации $\text{OK}(c_k^t, \sigma)$ и расконсервации $\text{OR}(\eta_\alpha, \delta)$, где $\alpha \leqslant e$. Из построения непосредственно вытекает, что

$$c_k^t \neq c_k^{t+1}, \quad p^\delta\eta_\alpha \in R^{t+1}. \tag{12.5}$$

Из */3.5/*, */3.7/* имеем

$$p^\sigma\eta_\beta \in R^{t+1}, \quad p^\delta\eta_\alpha \in R^{t+2}, \tag{12.6}$$

где $\eta_\beta \equiv c_k^t$. Пусть для любого $i \leqslant e^t$ на шаге t выполнены равенства

$$p^{\lambda^t(\eta_i)}\bar{\eta}_i^t = \eta_i. \tag{12.7}$$

В силу (12.6), (12.7)

$$p^{\lambda^t(\eta_\beta)+\sigma}\bar{a}_\beta^t = 0, \quad p^{\lambda^t(\eta_\alpha)+\delta}\bar{a}_\alpha^t = 0, \tag{12.8}$$

где $\bar{a}_j^t = \bar{\eta}_j^t + R^{t+1}$, $j = \alpha, \beta$. На шаге $t+1$ согласно */3.7/*, */3.8/* вводятся соотношения

$$p^{s_\beta^{t+1} - \lambda^t(\eta_\beta) - \sigma}\bar{\eta}_\beta^{t+1} = \bar{\eta}_\beta^t, \tag{12.9}$$

$$p^{s_\alpha^{t+1}-\lambda^t(\eta_\alpha)-\delta}\bar{\eta}_\alpha^{t+1} = \bar{\eta}_\alpha^t. \tag{12.10}$$

Из (12.8)-(12.10) имеем

$$p^{s_j^{t+1}}\bar{a}_j^{t+1} = 0, \tag{12.11}$$

где $j = \alpha, \beta$. Для всех $r \neq \alpha, \beta$, $r \leqslant e^t$, согласно */3.9/* на шаге $t+1$ вводятся также соотношения

$$p^{s_r^{t+1}-s_r^t}\bar{\eta}_r^{t+1} = \bar{\eta}_r^t. \tag{12.12}$$

Из (12.4), (12.11), (12.12) и индукционного предположения получаем требуемое утверждение.

По аналогии рассматриваются остальные случаи:

Случай 2c: операция консервации выполнена, а операции расконсервации не выполнены.

Случай 2d: операции расконсервации выполнены, а операция консервации не выполнена.

Случай 3: имеет место случай 2, */3.4/*.

Лемма 12.1 доказана.

Согласно лемме 12.1 можно считать, что $D^t \subseteq D^{t+1}$. Положим $D = \bigcup_t D^t$.

Лемма 12.2. *Пусть* $I = \bigcup_t I^t, I = \{\eta_0, \eta_1, \dots\}$. *Тогда* $D \simeq \sum_{r=0}^{\infty} Z_{p^{s_r}}$, *где* $s_r = \lim_x f(\hat{\eta}_r, x)$ *и число* $\hat{\eta}_r$ *определено равенством* (11.23).

Доказательство. По лемме 12.1 порядок $|a_r^t|$ элемента a_r^t, $r \leqslant e^t$, равен $p^{s_r^t}$, где числа e^t, s_r^t определены так же, как перед леммой 12.1. По лемме 11.7 существует предел $\lim_t \hat{\eta}_r^t = \hat{\eta}_r$. Так как f является s_1-функцией, существует предел $\lim_x f(\hat{\eta}_r, x) = s_r$ и выполнено следующее свойство: если $r \neq r'$, то $s_r \neq s_{r'}$. Поэтому для каждого r существует шаг t_r такой, что $s_r^t = s_r^{t_r}$, $|a_r^t| = |a_r^{t_r}| = p^{s_r}$ для любого $t \geqslant t_r$. В силу леммы 12.1 $\lambda_r^t = 0$ для $t \geqslant t_r$. Следовательно, $D \simeq \sum_{r=0}^{\infty}(a_r^{t_r}) \simeq \sum_{r=0}^{\infty} Z_{p^{s_r}}$. Лемма 12.2 доказана.

Лемма 12.3 *Пусть числа* s_r, $r \in N$, *определены так же, как в лемме 12.2. Тогда фактор-группа* $\bar{C}^0 = C/C^1$ *изоморфна* $\sum_{r=0}^{\infty} Z_{p^{s_r}}$.

Доказательство. Из лемм 4.1, 4.2 и определения нумерации троек чисел (см. § 1) легко следует, что существует последовательность шагов t_i, $i \in N$, для которых

$$c_j^{t_j} = b_j, \quad j \leqslant w^{t_j}, \tag{12.13}$$

где элементы b_j определены так же, как перед леммой 4.3. Отсюда имеем

$$R^{t_0} \subseteq R^{t_1} \subseteq \dots . \tag{12.14}$$

В силу (12.13), (12.14) и леммы 11.12

$$\bigcup_i R^{t_i} = C^1. \tag{12.15}$$

По построению

$$\bigcup_i C^{t_i} = C. \tag{12.16}$$

Покажем, что группа D изоморфна $\bar{C}^0$. Зафиксируем некоторое число e. По леммам 12.1, 12.2 существует число α такое, что $C^{t_i}/R^{t_i} \simeq Z_{p^{s_e}} \oplus H_{t_i}$ для всех $i \geqslant \alpha$ и некоторой подходящей группы H_{t_i}. Поэтому из (12.14)–(12.16) получаем, что группа $\bar{C}^0$ содержит сервантную подгруппу, изоморфную $Z_{p^{s_e}}$. Так как функция f является s_1-функцией, имеем $s_i \neq s_j$ для $i \neq j$. По теореме Прюфера группа $\bar{C}^0$ есть прямая сумма циклических p-групп. В силу леммы 12.2

$$\bar{C}^0 \simeq D \oplus D' \tag{12.17}$$

для некоторой подходящей группы D'.

Допустим, что группа $\bar{C}^0$ содержит сервантную подгруппу Z_{p^q}. Тогда в силу (12.15), (12.16) существует число e такое, что при любом $i \geqslant e$ имеем $C^{t_i}/R^{t_i} \simeq Z_{p^q} \oplus H'_{t_i}$ для некоторой подходящей группы H'_{t_i}. Ввиду лемм 12.1, 12.2 $q = s_k$ для некоторого числа k. Тогда из (12.17) получим $\bar{C}^0 \simeq D \simeq \sum_{r=0}^{\infty} Z_{p^{s_r}}$. Лемма 12.3 доказана.

Пусть

$$\hat{\eta}_r = \lim_t \hat{\eta}_r^t, \quad K = \{\, \hat{\eta}_r \mid r \in N \,\}, \tag{12.18}$$

$$L = N \backslash K, \quad L = \{\, \ell_i \mid i \in I \,\} \tag{12.19}$$

для некоторого множества $I \in N$ и

$$\lim_x f(\ell_i, x) = e_i. \tag{12.20}$$

Лемма 12.4. $E \simeq \sum \{\, Z_{p^{e_i}} \mid i \in I \,\}$.

Доказательство. Группа $E = \bigcup_t E^t$ строилась по шагам t. На шаге t группа E^t построена в */3.9/*. Рассмотрим некоторое число $\ell \rightleftharpoons \ell_i \in L$. Из (12.19) имеем $\ell \notin K$. Поэтому либо на некотором шаге t число ℓ освобождается, либо оно никогда не использовалось. Тогда на некотором шаге r согласно */3.9/* вводится соотношение

$$p^{f(\ell, r)} d_\ell^r = 0. \tag{12.21}$$

Далее, для любого шага $t + 1 > r$ согласно */3.9/* вводятся соотношения

$$p^{f(\ell, t+1) - f(\ell, t)} d_\ell^{t+1} = d_\ell^t. \tag{12.22}$$

Из (12.20)–(12.22) следует, что существует шаг q такой, что при любом $t > q$

$$d_\ell^t = d_\ell^q \rightleftharpoons d_\ell, \quad p^e d_\ell = 0,$$

где $e = \lim_x f(\ell, x)$. Отсюда получаем требуемое утверждение. Лемма 12.4 доказана.

Лемма 12.5. *Пусть* $\lim_x f(i,x) = m_i$, $i \in N$. *Тогда*

$$\bar{G}^0 = G/G^1 \simeq \sum_{i=0}^{\infty} Z_{p^{m_i}}. \tag{12.23}$$

Доказательство. Из построения непосредственно вытекает, что

$$G = C \oplus E. \tag{12.24}$$

По лемме 12.4

$$E \simeq \sum \{ Z_{p^{e_i}} \mid i \in I \}, \tag{12.25}$$

где $e_i = \lim_x f(\ell_i, x)$, $\ell_i \in L$. Из (12.24), (12.25) получим

$$C^1 = G^1, \quad \bar{G}^0 = \bar{C}^0 \oplus E. \tag{12.26}$$

По лемме 12.3

$$\bar{C}^0 \simeq \sum_{r=0}^{\infty} Z_{p^{s_r}}, \tag{12.27}$$

где $s_r = \lim_x f(\hat{\eta}_r, x)$, $\hat{\eta}_r \in K$. Из (12.18)–(12.20), (12.25)–(12.27) получим (12.23). Лемма 12.5 доказана.

Из построения видно, что группа G конструктивизируема. Отсюда и лемм 11.12 и 12.5 следует предложение 3.1.

Предложение 3.1 доказано.

12.2. Завершим теперь доказательство достаточности условий теоремы для случая конструктивности. Пусть дана счетная абелева p-группа и выполнены условия

1) $A = R \oplus D$, где R — редуцированная часть группы A и $\tau(R) > 1$;
2) группа A^1 $\varnothing^{(2)}$-конструктивизируема;
3) $\bar{A}^0 = A/A^1$ конструктивизируема.

Из условия 1 по теореме Прюфера получаем, что фактор-группа $\bar{A}^0$ есть прямая сумма циклических p-групп неограниченных порядков. По теореме А (см. § 1) $X(\bar{A}^0) \leftrightharpoons M \in \Sigma_2^0$, причем существует рекурсивная s_1-функция $f(i,x)$ такая, что $\bar{\rho} f \subseteq X(\bar{A}^0)$. Пусть функция g и группа B_1 определены так же, как в ходе доказательства следствия А (см. § 1). По предложению 3.1 существует конструктивизируемая группа G такая, что

$$G^1 \simeq A^1, \quad \bar{G}^0 \simeq \sum_{i=0}^{\infty} Z_{p^{r_i}}, \tag{12.28}$$

где $r_i = \lim_x g(i,x)$. Поэтому группа

$$B = G \oplus B_1 \tag{12.29}$$

конструктивизируема. Покажем, что $B \simeq A$. Из определений функции g и группы B_1, и (12.29) следует, что

$$\bar{B}^0 = \bar{G}^0 \oplus B_1 \simeq \bar{A}^0. \tag{12.30}$$

Из (12.28), (12.29) имеем
$$B^1 \simeq G^1 \simeq A^1. \tag{12.31}$$
Пусть
$$B = R_0 \oplus D_0, \tag{12.32}$$
где R_0 — редуцированная часть группы B. В силу (12.24), (12.30)–(12.32) имеем
$$\bar{R}_0^0 \simeq \bar{R}^0, \quad D \simeq D_0, \quad R_0^1 \simeq R^1.$$

По теореме Ульма группы R и R_0, а следовательно A и B, изоморфны. Теорема 2.1 для случая конструктивности доказана.

12.3. Докажем достаточность условий теоремы 2.1 для случая сильной конструктивности. Из следствия [1, с. 167] и предложения [1, с. 316] вытекает

Лемма 12.6. *Нумерованная абелева p-группа (G, μ) сильно конструктивна тогда и только тогда, когда теория $\mathrm{Th}(G)$ группы G разрешима и группа $\langle G; +, D_0, \ldots, D_s, \ldots; \nu\rangle$, $s \in N$, конструктивна, где предикат D_s определяется формулой $\exists\, y(p^s y = x)$.*

Предположим, что выполнены условия теоремы 2.1 для случая сильной конструктивности, т. е. группа (A^1, ν) является $\varnothing^{(1)}$-конструктивной, а фактор-группа $\bar{A}^0 = A/A^1$ — сильно конструктивизируемой. По теореме А существует такая возрастающая рекурсивная функция $f(i)$, что $\bar{A}^0 \simeq \sum_i Z_{p^{f(i)}}$. Поэтому ввиду леммы 12.6 доказательство теоремы 2.1 вытекает из следующего предложения.

Предложение 12.1. *Предположим, что даны $\varnothing^{(1)}$-конструктивная абелева p-группа (A^1, ν) и возрастающая рекурсивная функция $f(i)$. Тогда существует конструктивная абелева p-группа (G, μ) такая, что*

а) $G^1 \simeq A^1$;

б) $G/G^1 \simeq \sum_i Z_{p^{f(i)}}$;

в) *предикаты $D_s(x)$ в группе (G, μ) равномерно эффективны.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 3.1. Поясним, какие изменения следует сделать в ходе доказательства предложения 3.1. Для удобства изложения будем сравнивать по пунктам.

/12.1/ Здесь рекурсивная функция $g(x, y, m)$ такова, что имеет место эквивалентность $\nu x = \nu y \Leftrightarrow \lim_m g(x, y, m) = 1$.

/12.2/ Вместо троек чисел ξ будут рассматриваться только пары чисел, которые также обозначаются через $\xi, \eta, \ldots$. Для каждых $i \leqslant w^t$ и ξ определяются только числа u_i^t и $\hat{\xi}^t$.

/12.3/ Рассуждаем как в */3.3/*.

/12.4/ Связи между элементами $\xi \equiv \langle k, m\rangle$ и $\eta_1 \equiv \langle k, m-1\rangle$ определяем следующим образом. Для каждого $j < k$ полагаем $m_j = m + k - j$. Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1: $\langle j, m_j - 1\rangle = \langle j, m_j\rangle$, $\langle k, s-1\rangle = \langle k, s\rangle$, $j < k$, $s < m$, $\xi^* = \eta_1^*$ и отображение $\varphi^{t+1}\colon F(\eta_1) \to F(\xi)$, определяемое равенствами $\varphi^{t+1}(\langle j, m_j - 1\rangle) = \langle j, m_j\rangle$, $\varphi^{t+1}(\eta_1) = \xi$, есть изоморфизм. Тогда вводим соотношение $\eta_1 = \xi$.

Случай 2: случай 1 не имеет места. Определяем так же, как при рассмотрении случая 2, */3.4/*.

/12.5/ Аналогичен */3.5/*.

/12.6/ Числа $\check{\eta}^{t+1}$ не определяются. Соотношение типа L будет таким: $p^{f(\hat{\eta}^{t+1})-f(\hat{\eta}^t)-\sigma}\bar{\eta}^{t+1} = \bar{\eta}^t$.

/12.7/ Такой пункт не нужен.

/12.8/ Число $\check{\xi}^{t+1}$ отсутствует.

/12.9/ Соотношения типов L и R не вводятся. Соотношение типа S будет таким: $p^{f(\ell)}d_\ell = 0$.

Доказательство заканчиваем как в предложении 3.1.

Основная теорема 2.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ершов Ю. Л.** Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
2. **Гончаров С. С.** Сильная конструктивизируемость однородных моделей // Алгебра и логика. 1978. Т. 17, № 4. С. 363–388.
3. **Перетятькин М. Г.** Критерий сильной конструктивизируемости однородной модели // Алгебра и логика. 1978. Т. 17, № 4. С. 436–454.
4. **Хисамиев Н. Г.** О сильно конструктивных моделях разрешимой теории // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. наук. 1974. С. 83–84.
5. **Harrington L.** Recursively presentable prime models // J. Symbolic Logic. 1978. V. 18, N 5. P. 305–309.
6. **Rabin M. O.** Computable algebra, general theory and theory of computable fields // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 95, N 2. P. 341–360.
7. **Гончаров С. С.** Конструктивизируемость суператомных булевых алгебр // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 1. С. 31–40.
8. **Морозов А. С.** Сильная конструктивизируемость счетных насыщенных булевых алгебр // Алгебра и логика. 1982. Т. 21, № 2. С. 193–203.
9. **Гончаров С. С.** Счетные булевы алгебры. Новосибирск: Наука, 1988.
10. **Мальцев А. И.** О рекурсивных абелевых группах // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146, № 5. С. 1009–1012.
11. **Добрица В. П.** О конструктивизируемых абелевых p-группах // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 3. С. 208–213.
12. **Хисамиев Н. Г.** Критерий конструктивизируемости абелевой группы без кручения // 9-я Всесоюз. конф. по мат. логике. Ленинград, 27–29 сент. 1988 г.: Тез. докл. Л.: Наука, 1988. С. 168.
13. **Добрица В. П., Нуртазин А. Т., Хисамиев Н. Г.** О конструктивных периодических абелевых группах // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 6. С. 1261–1265.
14. **Хисамиев Н. Г.** Сильно конструктивные абелевы p-группы // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 2. С. 198–217.
15. **Фукс Л.** Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2.
16. **Абразков К. Т., Хисамиев Н. Г.** Критерий сильной конструктивизируемости одного класса абелевых p-групп // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 4. С. 3–8.

17. **Хисамиев Н. Г.** О сильно конструктивных периодических абелевых группах // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. наук. 1978. С. 58–62.
18. **Хисамиев Н. Г.** Критерий конструктивизируемости прямой суммы циклических p-групп // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. наук. 1981. С. 52–55.
19. **Хисамиев Н. Г.** Арифметическая иерархия абелевых групп // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 6. С. 144–159.
20. **Хисамиев Н. Г.** О конструктивных редуцированных абелевых p-группах // Международная конф. по алгебре, посвященная памяти А. И. Мальцева. Новосибирск, 21–29 авг. 1989 г.: Тез. докл. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989. С. 147.
21. **Хисамиев Н. Г.** Конструктивные абелевы p-группы // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313, № 6. С. 1365–1368.
22. **Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
23. **Мальцев А. И.** Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1986.
24. **Роджерс Х.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
25. **Гончаров С. С.** Автоустойчивость моделей и абелевых групп // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 1. С. 23–24.
26. **Smith P. L.** Two theorems on autostability in p-groups // Lecture Notes in Math. 1981. V. 859. P. 302–311.
27. **Дзгоев В. Д.** Конструктивизации прямых произведений алгебраических систем // Алгебра и логика. 1982. Т. 21, № 2. С. 138–148.