

КВАЗИИЗОМЕТРИЧЕСКАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ КРИВОЛИНЕЙНОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА И МЕТРИКА ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

С. К. Годунов, В. М. Гордиенко, Г. А. Чумаков

§ 1. Формулировка результатов

Построение сетки в криволинейном четырехугольнике G можно рассматривать как построение отображения единичного квадрата K_0 на G (рис. 1). По мнению авторов одним из обязательных условий, предъявляемых к сеткам, является требование квазиизометричности отображения K_0 на G .

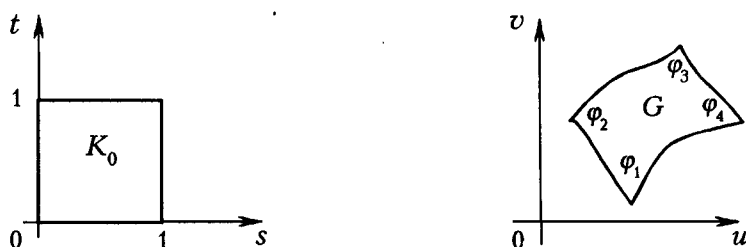


Рис. 1

На протяжении всей статьи речь идет о взаимно-однозначных отображениях. Поэтому не оговаривая особо, мы подразумеваем и используем факт существования обратного отображения. Подчеркнем, что взаимно-однозначность отображений, с помощью которых равномерная сетка в квадрате K_0 индуцирует сетку в криволинейном четырехугольнике G , является отличительной чертой предложенного нами способа построения сеток. Напомним некоторые определения.

- Отображение $u = u(s, t)$, $v = v(s, t)$ квазиизометрическое, если отношение расстояния между любыми (достаточно близкими) точками (s_1, t_1) и (s_2, t_2) к расстоянию между их образами $(u(s_1, t_1), v(s_1, t_1))$ и $(u(s_2, t_2), v(s_2, t_2))$ ограничено сверху и снизу:

$$0 < \sigma_1 \leq \frac{\sqrt{[u(s_2, t_2) - u(s_1, t_1)]^2 + [v(s_2, t_2) - v(s_1, t_1)]^2}}{\sqrt{(s_2 - s_1)^2 + (t_2 - t_1)^2}} \leq \sigma_2.$$

Наилучшие из возможных констант σ_1, σ_2 в этой оценке представляют собой сингулярные числа матрицы $\begin{bmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{bmatrix}$, где u_s, u_t, v_s, v_t — частные

производные по s, t функций u и v . Можно дать эквивалентное определение квазиизометричности.

- Отображение $u = u(s, t)$, $v = v(s, t)$ квазиизометрическое, если

$$|u_s|, |u_t|, |v_s|, |v_t| \leq H; \quad u_s v_t - u_t v_s \geq h > 0.$$

Заметим, что квазиизометричность влечет квазиконформность.

- Отображение $u(s, t)$, $v(s, t)$ области Ω принадлежит классу $C_\mu^1(\Omega)$, если частные производные u_s, u_t, v_s, v_t непрерывны по Гёльдеру с показателем Гёльдера μ .

На протяжении всей статьи, называя многоугольник гладким, мы подразумеваем, что его стороны являются дугами Ляпунова с показателем Гёльдера μ .

- Дуга на плоскости называется дугой Ляпунова с показателем Гёльдера μ , если она спрямляема и угол наклона ее касательной как функции длины дуги удовлетворяет условию Гёльдера с показателем μ .

Основной результат работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1.1. Пусть G — гладкий четырехугольник с границей ∂G и его углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ удовлетворяют условиям

$$0 < \varphi_j < \pi, \quad 2\varphi_j > \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 2\pi \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (1.1)$$

Любое квазиизометрическое отображение класса C_μ^1 границы ∂K_0 единичного квадрата K_0 на границу ∂G криволинейного четырехугольника G продолжается до квазиизометрического отображения класса $C_\mu^1(K_0)$ квадрата K_0 на четырехугольник G .

Доказательство теоремы 1.1 основано на построении квазиизометрического отображения класса C_μ^1 единичного квадрата K на четырехугольник G . При этом метрика выбирается из пятипараметрического семейства метрик, заданных в единичном квадрате. Чтобы описать это семейство, рассмотрим квадратичную форму

$$ds^2 = \frac{g_{11} dx^2 + 2g_{12} dx dy + g_{22} dy^2}{\theta^2}, \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned} g_{11}(y) &= a + 2\alpha y + \gamma y^2, & g_{22}(x) &= c + 2\beta x + \gamma x^2, \\ g_{12}(x, y) &= -b - \alpha x - \beta y - \gamma xy, & \gamma &= 2(1 - a - c - \alpha - \beta), \\ \theta(x, y) &\equiv g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = -\det \begin{bmatrix} a & b & \alpha & y \\ b & c & \beta & x \\ \alpha & \beta & \gamma & -1 \\ y & x & -1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

и параметры a, b, c, α, β такие, что

$$\theta(x, y) > 0, \quad (x, y) \in \partial K. \quad (1.4)$$

При выполнении условия (1.4) формулы (1.2), (1.3) определяют метрику в квадрате K . При этом множество параметров метрики a, b, c, α, β , при которых выполнено (1.4), является выпуклым.

Отметим, что метрика (1.2), (1.3) представляет общий вид метрик, в которых геодезическими являются прямые линии [1, 2].

Теорема 1.2. Для любого гладкого криволинейного четырехугольника G , углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ которого удовлетворяют условиям (1.1), существует единственная метрика вида (1.2), (1.3), в которой единичный квадрат K отображается на четырехугольник G конформно и квазиизометрически. При этом отображение K на G принадлежит классу C_μ^1 .

В доказательстве теоремы 1.2 построение отображения происходит в два этапа. На первом этапе (§ 2) строится квазиизометрический конформный (относительно специальным образом выбранной метрики) прообраз $\tilde{\Omega}$ четырехугольника G на некоторой поверхности постоянной кривизны и затем параметризуется при помощи прямолинейного плоского четырехугольника Ω . Тем самым будет построено квазиизометрическое отображение криволинейного четырехугольника G в плоскости u, v на прямолинейный четырехугольник Ω в плоскости ξ, η (рис. 2).

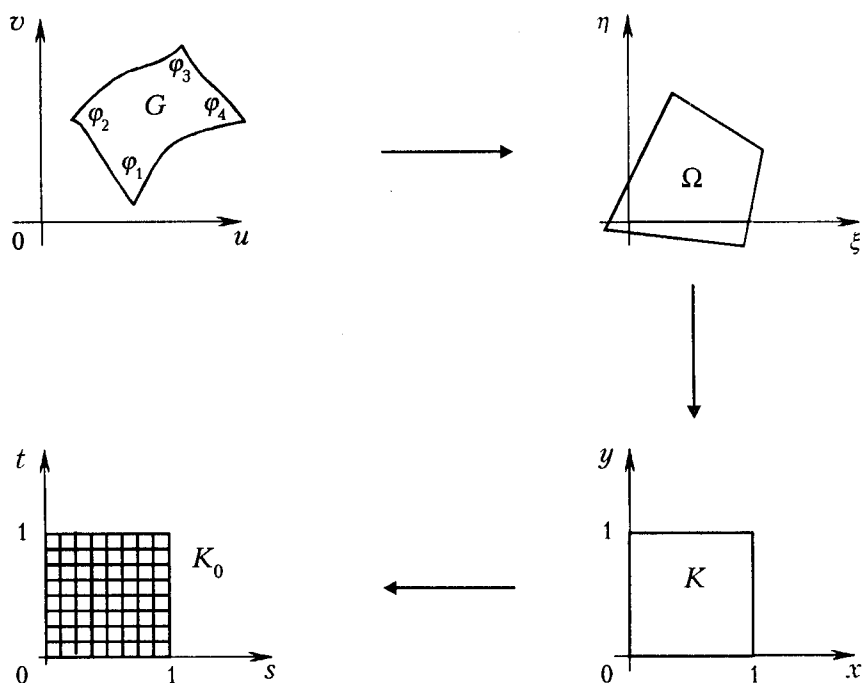


Рис. 2

На втором этапе (§ 4) прямолинейный четырехугольник Ω в плоскости ξ, η с помощью проективного (дробно-линейного) преобразования отображается на квадрат K в плоскости x, y . Предварительно обсуждается вопрос о преобразовании метрики при проективном преобразовании (§ 3).

В силу теоремы 1.2 для доказательства теоремы 1.1 требуется лишь построить квазиизометрическое отображение класса C_μ^1 единичного квадрата K_0 плоскости s, t на единичный квадрат K плоскости x, y , являющееся продолжением заданного квазиизометрического отображения границ этих квадратов. Такое построение проведено в § 5.

§ 2. Конформный квазиизометрический прообраз криволинейного четырехугольника и его параметризация

Пусть G — криволинейный четырехугольник, удовлетворяющий условиям теоремы 1.1 (или теоремы 1.2). В этом параграфе мы построим конформное квазиизометрическое отображение G на некоторый канонический четырехугольник Ω . Нам потребуется следующая

Теорема 2.1 [3, с. 48; 4]. Чтобы конформное отображение гладкого многоугольника на гладкий многоугольник было квазиизометрическим, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие углы совпадали.

Напомним определение конформного модуля.

- Конформным модулем криволинейного четырехугольника называется отношение сторон прямоугольника, на который он может быть конформно отображен.

При построении конформного квазиизометрического прообраза заданного криволинейного четырехугольника G будем различать три случая:

$$1) \sum_{i=1}^4 \varphi_i = 2\pi, \quad 2) \sum_{i=1}^4 \varphi_i > 2\pi, \quad 3) \sum_{i=1}^4 \varphi_i < 2\pi.$$

Рассмотрим каждый случай отдельно.

Случай 1: $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2\pi$. Построим в плоскости ξ, η прямолинейный четырехугольник Ω , имеющий те же углы и тот же конформный

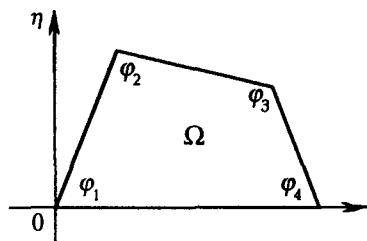


Рис. 3

модуль, что и криволинейный четырехугольник G (рис. 3). Как показано в [5], такой четырехугольник существует и единствен с точностью до движения и подобия. Так как четырехугольники G и Ω имеют одинаковые конформные модули, существует конформное отображение G на Ω , а поскольку их соответствующие углы равны, отображение ква-

зиизометрично. Метрику в плоскости ξ, η возьмем евклидову: $ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2$. Отображение $u = u(\xi, \eta)$, $v = v(\xi, \eta)$ четырехугольника Ω на четырехугольник G конформно в этой метрике. (Здесь в принятых выше обозначениях $\tilde{\Omega} = \Omega$.)

Случай 2: $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 > 2\pi$. На плоскости не существует прямолинейного четырехугольника, имеющего те же углы, что и криволинейный четырехугольник G . Но можно отобразить G конформно на подходящий сферический четырехугольник $\tilde{\Omega}$ с теми же углами. Действительно, рассмотрим на сфере с радиусом $1/\sqrt{k_0}$ ($k_0 > 0$) четырехугольники, ограниченные дугами окружностей с большим радиусом. Сумма углов $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ такого четырехугольника больше 2π . Кроме того, выполнено следующее условие (см. [5]): $2 \min_j \psi_j > \sum_{i=1}^4 \psi_i - 2\pi$. Нам приходится требовать выполнения этого условия и для углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ четырехугольника G . Если оно выполнено, то существует сферический четырехугольник $\tilde{\Omega}$, имеющий те же углы и тот же конформный модуль, что

и криволинейный четырехугольник G . Сферический четырехугольник $\tilde{\Omega}$ определяется однозначно с точностью до движения на сфере [5, 6]. Так как G и $\tilde{\Omega}$ имеют одинаковые конформные модули и углы, G отображается на $\tilde{\Omega}$ конформно и квазиизометрически.

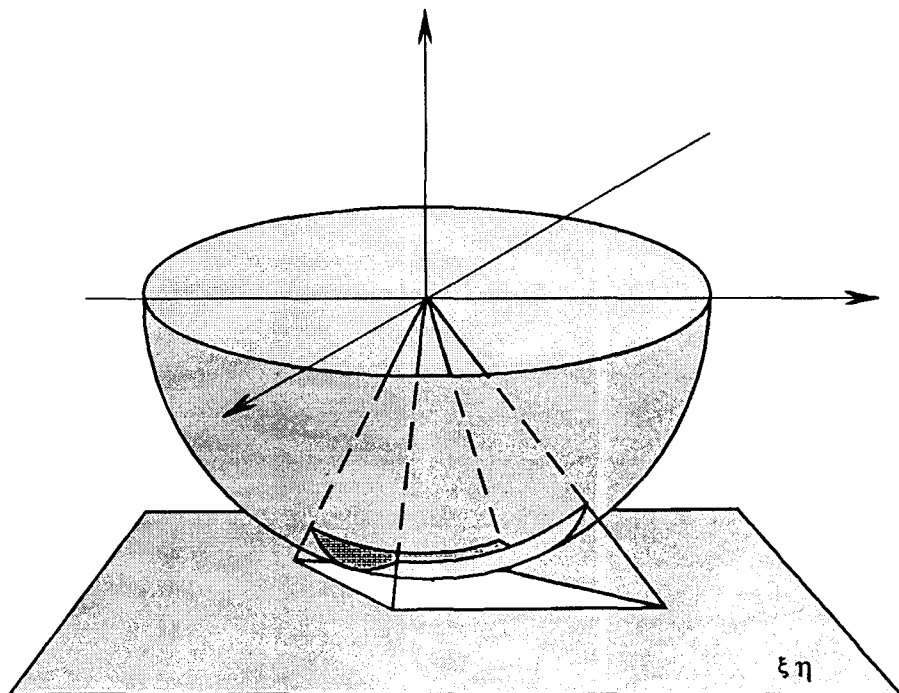


Рис. 4

Покажем, как сферический четырехугольник $\tilde{\Omega}$ отобразить на плоский четырехугольник Ω . Любой сферический четырехугольник (с углами меньше π) располагается полностью на одной полусфере. Спроектируем эту полусферу из центра на плоскость, касательную к полюсу (рис. 4). Очевидно, что геодезические на сфере перейдут в прямые линии на плоскости. Значит, сферический четырехугольник $\tilde{\Omega}$ отобразится на прямолинейный четырехугольник Ω . Отображение $\tilde{\Omega}$ на Ω не конформное, но квазиизометрическое, и его можно задать явно формулами. Метрика на сфере индуцирует на плоскости ξ, η следующую метрику (см. [2]):

$$ds^2 = \frac{(1 + k_0\eta^2) d\xi^2 - 2k_0\xi\eta d\xi d\eta + (1 + k_0\xi^2) d\eta^2}{[1 + k_0(\xi^2 + \eta^2)]^2} \quad (k_0 > 0).$$

В этой метрике отображение $u = u(\xi, \eta)$, $v = v(\xi, \eta)$, переводящее Ω в G , конформно.

Случай 3: $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 < 2\pi$. Рассмотрим плоскость Лобачевского в модели Пуанкаре. В этой модели точкам плоскости Лобачевского соответствуют точки круга $1 + k_0(\mu^2 + \nu^2) > 0$ ($k_0 < 0$). На плоскости Лобачевского прямым соответствуют дуги окружностей, перпендикулярные абсолюту (границе круга $1 + k_0(\mu^2 + \nu^2) = 0$), углу между прямыми —

угол между дугами, а движениям — дробно-линейные (проективные) преобразования, оставляющие абсолют на месте.

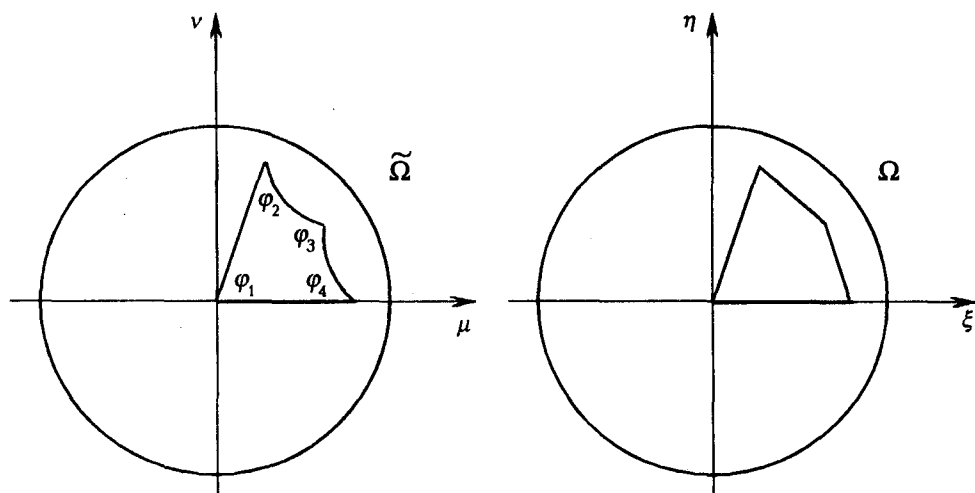


Рис. 5

Отметим, что у четырехугольников, образованных дугами окружностей, перпендикулярных абсолюту, сумма углов меньше 2π . Построим на плоскости μ, ν четырехугольник $\tilde{\Omega}$, имеющий те же углы и тот же конформный модуль, что и криволинейный четырехугольник G (рис. 5). Как показано в [5], такой четырехугольник строится однозначно с точностью до движений в плоскости Лобачевского.

Так как Ω и G имеют одинаковые конформные модули, G отображается на $\tilde{\Omega}$ конформно. Поскольку четырехугольники $G, \tilde{\Omega}$ гладкие и их соответствующие углы совпадают, отображение квазиизометрично [4]. Говоря о конформности отображения G на $\tilde{\Omega}$, мы имеем в виду конформность относительно евклидовой метрики как на плоскости μ, ν , так и на плоскости ξ, η .

Внутри абсолютa $1 + k_0(\mu^2 + \nu^2) > 0$ определим метрику геометрии Лобачевского

$$ds^2 = \frac{d\mu^2 + d\nu^2}{[1 + k_0(\mu^2 + \nu^2)]^2}. \quad (2.1)$$

Углы, измеренные в этой и евклидовой метриках, совпадают, поскольку модель Пуанкаре конформна. Поэтому отображение G на $\tilde{\Omega}$ конформно и в метрике геометрии Лобачевского. Чтобы перейти от криволинейного четырехугольника $\tilde{\Omega}$ к прямолинейному четырехугольнику Ω , используем модель Бельтрами плоскости Лобачевского. В модели Бельтрами точками плоскости тоже являются внутренние точки фиксированного круга, но геодезическими будут не дуги окружностей, а прямолинейные отрезки. Переход от модели Пуанкаре к модели Бельтрами можно рассматривать как замену координат в плоскости Лобачевского. При такой замене известным способом преобразуется квадратичная форма (2.1); она принимает вид (см. [2])

$$ds^2 = \frac{(1 + k_0\eta^2) d\xi^2 - 2k_0\xi\eta d\xi d\eta + (1 + k_0\xi^2) d\eta^2}{[1 + k_0(\xi^2 + \eta^2)]^2} \quad (k_0 < 0).$$

Итак, мы построили отображение гладкого криволинейного четырехугольника G , углы которого удовлетворяют условиям (1.1), на прямолинейный четырехугольник Ω . Это отображение квазиизометрично и конформно в метрике

$$ds^2 = \frac{(1 + k_0\eta^2) d\xi^2 - 2k_0\xi\eta d\xi d\eta + (1 + k_0\xi^2) d\eta^2}{[1 + k_0(\xi^2 + \eta^2)]^2}. \quad (2.2)$$

Теперь, чтобы завершить построение отображения криволинейного четырехугольника G на единичный квадрат K (см. теорему 1.2), нам остается отобразить на K прямолинейный четырехугольник Ω . Мы это сделаем с помощью проективного преобразования. Возникает вопрос: как преобразуется при проективном преобразовании метрика (2.2)? Нам удобно исследовать этот вопрос в общем виде — включив метрику (2.2) в более широкий класс метрик. Этому вопросу посвящен следующий параграф.

§ 3. Специальная метрика на плоскости и ее преобразование при проективном отображении

Рассмотрим квадратичную форму

$$ds^2 = \tilde{h}_{11}(\xi, \eta) d\xi^2 + 2\tilde{h}_{12}(\xi, \eta) d\xi d\eta + \tilde{h}_{22}(\xi, \eta) d\eta^2, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{ij} &= \tilde{g}_{ij} / (\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2)^2, & \tilde{g}_{11}(\eta) &= \tilde{a} + 2\tilde{\alpha}\eta + \tilde{\gamma}\eta^2, \\ \tilde{g}_{12}(\xi, \eta) &= -\tilde{b} - \tilde{\alpha}\xi - \tilde{\beta}\eta - \tilde{\gamma}\xi\eta, & \tilde{g}_{22}(\xi) &= \tilde{c} + 2\tilde{\beta}\xi + \tilde{\gamma}\xi^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Формулы (3.1), (3.2) задают метрику с параметрами $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ в той части плоскости ξ, η , где матрица $H = \begin{bmatrix} \tilde{h}_{11} & \tilde{h}_{12} \\ \tilde{h}_{21} & \tilde{h}_{22} \end{bmatrix}$ квадратичной формы (3.1) положительно определенная. Метрика (2.2) является частным случаем метрики (3.1), (3.2) при следующих значениях параметров:

$$\tilde{a} = \tilde{c} = 1, \quad \tilde{b} = \tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 0, \quad \tilde{\gamma} = k_0.$$

Приведем некоторые формулы, удобные при работе с метрикой (3.1), (3.2) и выясним, как преобразуется эта метрика при проективном преобразовании. Шесть параметров $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ метрики (3.1), (3.2) определяют симметрическую матрицу

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{\alpha} \\ \tilde{b} & \tilde{c} & \tilde{\beta} \\ \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} & \tilde{\gamma} \end{bmatrix}.$$

Обозначим $k = \det \tilde{P}$, $\tilde{\theta}(\xi, \eta) = (\tilde{h}_{11}\tilde{h}_{22} - \tilde{h}_{12}^2)^{-1/3}$. Легко проверить соотношения

$$\begin{bmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\eta \\ 0 & 1 & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{\alpha} \\ \tilde{b} & \tilde{c} & \tilde{\beta} \\ \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} & \tilde{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\eta & \xi \end{bmatrix}.$$

$$\tilde{\theta}(\xi, \eta) = \tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2 = -\det \begin{bmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{\alpha} & \eta \\ \tilde{b} & \tilde{c} & \tilde{\beta} & \xi \\ \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} & \tilde{\gamma} & -1 \\ \eta & \xi & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

При $k \neq 0$ справедливы также формулы

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\tilde{\theta}\sqrt{\tilde{\theta}}(\sqrt{\tilde{\theta}})_{ij}}{k} = \frac{(2\tilde{\theta}_{ij} - \tilde{\theta}_i\tilde{\theta}_j)}{4k},$$

где $\frac{\partial f}{\partial \xi} = f_1$, $\frac{\partial f}{\partial \eta} = f_2$. Выпишем $\tilde{\theta}(\xi, \eta)$ в нескольких вариантах:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(\xi, \eta) &= \tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2 \\ &= (\tilde{a} + 2\tilde{\alpha}\eta + \tilde{\gamma}\eta^2)(\tilde{c} + 2\tilde{\beta}\xi + \tilde{\gamma}\xi^2) - (\tilde{b} + \tilde{\alpha}\xi + \tilde{\beta}\eta + \tilde{\gamma}\xi\eta)^2 \\ &= (\tilde{\gamma}\tilde{a} - \tilde{\alpha}^2)\xi^2 + 2(\tilde{\alpha}\tilde{\beta} - \tilde{\gamma}\tilde{b})\xi\eta + (\tilde{\gamma}\tilde{c} - \tilde{\beta}^2)\eta^2 + 2(\tilde{a}\tilde{\beta} - \tilde{b}\tilde{\alpha})\xi \\ &\quad + 2(\tilde{c}\tilde{\alpha} - \tilde{b}\tilde{\beta})\eta + \tilde{a}\tilde{c} - \tilde{b}^2 \\ &= \tilde{c}_{11}\xi^2 + 2\tilde{c}_{12}\xi\eta + \tilde{c}_{22}\eta^2 + 2\tilde{c}_1\xi + 2\tilde{c}_2\eta + \tilde{c}_0; \end{aligned}$$

здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{11} &= \tilde{\gamma}\tilde{a} - \tilde{\alpha}^2, & \tilde{c}_{12} &= \tilde{\alpha}\tilde{\beta} - \tilde{\gamma}\tilde{b}, & \tilde{c}_{22} &= \tilde{\gamma}\tilde{c} - \tilde{\beta}^2, \\ \tilde{c}_1 &= \tilde{a}\tilde{\beta} - \tilde{b}\tilde{\alpha}, & \tilde{c}_2 &= \tilde{c}\tilde{\alpha} - \tilde{b}\tilde{\beta}, & \tilde{c}_0 &= \tilde{a}\tilde{c} - \tilde{b}^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Обозначив

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{22} & \tilde{c}_2 \\ \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \tilde{c}_0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (U = U^* = U^{-1}),$$

мы можем записать формулы (3.3) компактно как одно матричное равенство $U\tilde{R}U = (\det \tilde{P})\tilde{P}^{-1}$, из которого вытекает, что $\det \tilde{R} = (\det \tilde{P})^2 = k^2$, $\tilde{P} = (\det \tilde{P})U\tilde{R}^{-1}U$. Следовательно, $(\det \tilde{P})\tilde{P} = U(\det \tilde{R})\tilde{R}^{-1}U$. Распишем матричное равенство $U\tilde{R}U = (\det \tilde{P})\tilde{P}^{-1}$ поэлементно:

$$\begin{aligned} k\tilde{a} &= \tilde{c}_{11}\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1^2, & k\tilde{b} &= \tilde{c}_1\tilde{c}_2 - \tilde{c}_{12}\tilde{c}_0, & k\tilde{c} &= \tilde{c}_{22}\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2^2, \\ k\tilde{\alpha} &= \tilde{c}_{11}\tilde{c}_2 - \tilde{c}_1\tilde{c}_{12}, & k\tilde{\beta} &= \tilde{c}_1\tilde{c}_{22} - \tilde{c}_{12}\tilde{c}_2, & k\tilde{\gamma} &= \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} - \tilde{c}_{12}^2. \end{aligned}$$

Перепишем $\tilde{\theta}(\xi, \eta)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(\xi, \eta) &= \left(R \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \right) = \tilde{c}_{11}\xi^2 + 2\tilde{c}_{12}\xi\eta + \tilde{c}_{22}\eta^2 + 2\tilde{c}_1\xi + 2\tilde{c}_2\eta + \tilde{c}_0 \\ &= \frac{1}{\tilde{c}_0}[(\tilde{c}_1\xi + \tilde{c}_2\eta + \tilde{c}_0)^2 + (\tilde{c}_{11}\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1^2)\xi^2 + 2(\tilde{c}_{12}\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1\tilde{c}_2)\xi\eta \\ &\quad + (\tilde{c}_{22}\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2^2)\eta^2] = \frac{1}{\tilde{c}_0}[(\tilde{c}_1\xi + \tilde{c}_2\eta + \tilde{c}_0)^2 + k(\tilde{a}\xi^2 - 2\tilde{b}\xi\eta + \tilde{c}\eta^2)]. \end{aligned}$$

Важным свойством класса метрик вида (3.1), (3.2) является инвариантность относительно проективных преобразований. Докажем это свойство

и выясним, как преобразуются при проектировании функция $\tilde{\theta}(\xi, \eta)$ и матрицы $\tilde{P}$, $\tilde{R}$. Проективное отображение плоскости ξ, η на плоскость x, y задается с помощью матрицы $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ следующим образом:

$$\xi = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \quad \eta = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}. \quad (3.4)$$

Легко вычислить, что

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})y + (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})}{(a_{31}x + a_{32}y + a_{33})^2}, \\ \xi_y &= \frac{(a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32})x + (a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13})}{(a_{31}x + a_{32}y + a_{33})^2}, \\ \eta_x &= \frac{(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})y + (a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})}{(a_{31}x + a_{32}y + a_{33})^2}, \\ \eta_y &= \frac{(a_{31}a_{22} - a_{21}a_{32})x + (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})}{(a_{31}x + a_{32}y + a_{33})^2}. \end{aligned}$$

Обозначим $J = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix}$. Можно показать, что

$$\det J = \det A / (a_{31}x + a_{32}y + a_{33})^3.$$

Метрический тензор $\tilde{h}_{ij}(\xi, \eta)$ при замене координат (3.4) преобразуется по тензорному закону, именно:

$$\begin{bmatrix} h_{11}(x, y) & h_{12}(x, y) \\ h_{12}(x, y) & h_{22}(x, y) \end{bmatrix} = J^* \begin{bmatrix} \tilde{h}_{11}(\xi, \eta) & \tilde{h}_{12}(\xi, \eta) \\ \tilde{h}_{12}(\xi, \eta) & \tilde{h}_{22}(\xi, \eta) \end{bmatrix} J.$$

Отсюда, в частности, вытекает равенство $h(x, y) = \tilde{h}(\xi, \eta)(\det J)^2$, где

$$h(x, y) = \det \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{h}(\xi, \eta) = \det \begin{bmatrix} \tilde{h}_{11} & \tilde{h}_{12} \\ \tilde{h}_{12} & \tilde{h}_{22} \end{bmatrix}.$$

Выясним, как преобразуются полином $\tilde{\theta}(\xi, \eta)$ и матрицы $\tilde{R}$, $\tilde{P}$.

Преобразование полинома $\tilde{\theta}(\xi, \eta) = (\tilde{h}(\xi, \eta))^{-1/3}$. Поскольку

$$\begin{aligned} \theta(x, y) &= (h(x, y))^{-1/3} = (\tilde{h}(\xi, \eta))^{-1/3} (\det J)^{-2/3} \\ &= (\det A)^{-2/3} \tilde{\theta}(\xi, \eta) (a_{31}x + a_{32}y + a_{33})^2. \end{aligned}$$

$\theta(x, y)$, так же как и $\tilde{\theta}(\xi, \eta)$, является полиномом второй степени.

Преобразование матрицы $\tilde{R}$. С одной стороны,

$$\tilde{\theta}(\xi, \eta) = \left(\tilde{R} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{(a_{31}x + a_{32}y + a_{33})^2} \left(A^* \tilde{R} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(\xi, \eta) &= \frac{(\det A)^{2/3}}{(a_{31}x + a_{32}y + a_{33})^2} \theta(x, y) \\ &= \frac{(\det A)^{2/3}}{(a_{31}x + a_{32}y + a_{33})^2} \left(R \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, $R = (\det A)^{-2/3} A^* \tilde{R} A$.

Преобразование матрицы $\tilde{P}$. Как нетрудно проверить,

$$(\det A) U A^{-*} U \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -y & x \end{bmatrix} = (a_{31}x + a_{32}y + a_{33})^2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\eta & \xi \end{bmatrix} J.$$

Далее, с одной стороны,

$$\begin{bmatrix} h_{11}(x, y) & h_{12}(x, y) \\ h_{12}(x, y) & h_{22}(x, y) \end{bmatrix} = \frac{1}{\theta^2(x, y)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -y & x \end{bmatrix}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} h_{11}(x, y) & h_{12}(x, y) \\ h_{12}(x, y) & h_{22}(x, y) \end{bmatrix} &= J^* \begin{bmatrix} \tilde{h}_{11}(\xi, \eta) & \tilde{h}_{12}(\xi, \eta) \\ \tilde{h}_{12}(\xi, \eta) & \tilde{h}_{22}(\xi, \eta) \end{bmatrix} J \\ &= \frac{1}{\tilde{\theta}^2(\xi, \eta)} J^* \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\eta \\ 0 & 1 & \xi \end{bmatrix} \tilde{P} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\eta & \xi \end{bmatrix} J \\ &= \frac{(a_{31}x + a_{32}y + a_{33})^4}{(\det A)^{4/3} \theta^2(x, y)} \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \eta & \xi \end{pmatrix} J \right]^* \tilde{P} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\eta & \xi \end{bmatrix} J \\ &= \frac{(\det A)^{2/3}}{\theta^2(x, y)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix} U A^{-1} U \tilde{P} U A^{-*} U \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -y & x \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо равенство

$$P = (\det A)^{2/3} U A^{-1} \tilde{P} U A^{-*} U, \quad (3.5)$$

из которого следует, что $\det P = \det \tilde{P} \equiv k$.

§ 4. Построение отображения криволинейного четырехугольника на квадрат

Как показано в § 2, для криволинейного гладкого четырехугольника G , удовлетворяющего условиям теоремы 1.1, можно ввести метрику (2.2) так, что G отобразится на прямолинейный четырехугольник Ω в плоскости ξ, η квазиизометрично и конформно относительно этой метрики. Знак параметра k_0 (см. (2.2)) связан с дефектом углов четырехугольника G , именно:

$$\begin{aligned} k_0 &= 0, \text{ если } \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 2\pi = 0, \\ k_0 &> 0, \text{ если } \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 2\pi > 0, \\ k_0 &< 0, \text{ если } \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 2\pi < 0. \end{aligned}$$

Изменение величины k_0 приводит лишь к изменению масштаба в плоскости ξ, η .

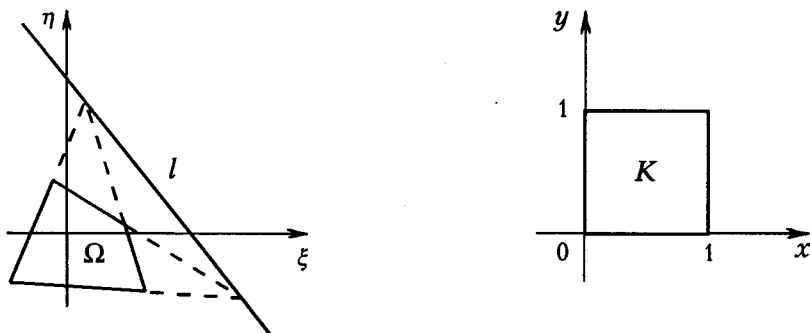


Рис. 6

Сделаем проективное отображение плоскости ξ, η на плоскость x, y так, чтобы вершины четырехугольника Ω перешли в вершины квадрата K (рис. 6). Такое отображение существует и единственно. Пусть это отображение задается с помощью матрицы A по формулам (3.4). Рассмотрим прямую l , проходящую через пересечения противоположных сторон четырехугольника Ω . Именно эта прямая при проективном отображении плоскости ξ, η на плоскость x, y переходит в бесконечно удаленную прямую плоскости x, y . Поскольку l не пересекает Ω , внутренность Ω отображается на внутренность квадрата K . В области Ω определена метрика (2.2). Это метрика типа (3.1), (3.2). Ее матрица параметров $\tilde{P}$ имеет вид $\tilde{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_0 \end{bmatrix}$. В результате отображения четырехугольника Ω на квадрат K в последнем индуцируется метрика вида (3.1), (3.2), именно:

$$ds^2 = h_{11}(x, y)dx^2 + 2h_{12}(x, y)dxdy + h_{22}(x, y)dy^2, \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} h_{ij} &= g_{ij}/\theta^2, & g_{12}(x, y) &= -b - \alpha x - \beta y - \gamma xy, \\ g_{11}(y) &= a + 2\alpha y + \gamma y^2, & g_{22}(x) &= c + 2\beta x + \gamma x^2, \\ \theta(x, y) &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = -\det \begin{bmatrix} a & b & \alpha & y \\ b & c & \beta & x \\ \alpha & \beta & \gamma & -1 \\ y & x & -1 & 0 \end{bmatrix} = \left(R \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$= [(c_1x + c_2y + c_0)^2 + k(ax^2 - 2bxy + cy^2)]/c_0,$$

$$R = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_1 \\ c_{12} & c_{22} & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} a & b & \alpha \\ b & c & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix},$$

$$P = (\det A)^{2/3} U A^{-1} U \tilde{P} U A^{-*} U,$$

$$k = \det P, \quad U R U = k P^{-1}, \quad \det R = (\det P)^2 = k^2.$$

В силу выписанных формул при $k \neq 0$ кривая $\theta(x, y) = 0$ является невырожденной кривой второго порядка — эллипсом (действительным или

мнимым), гиперболой или параболой. При $k = 0$ и дополнительном предположении $c_0 = \theta(0, 0) \neq 0$ кривая $\theta(x, y)$ может быть только парой совпадающих прямых.

Тот факт, что в квадрате K определена метрика (4.1), означает положительную определенность матрицы $H(x, y) = \begin{bmatrix} h_{11}(x, y) & h_{12}(x, y) \\ h_{21}(x, y) & h_{22}(x, y) \end{bmatrix}$:

$$H(x, y) > 0, \quad (x, y) \in K. \quad (4.3)$$

Покажем, что параметры $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, при которых выполнено условие (4.3), образуют выпуклое множество. Действительно, положительная определенность матрицы H эквивалентна положительной определенности матрицы $(g_{ij}(x, y))$. Последнее условие записывается, в свою очередь, в виде

$$\frac{g_{11}(x, y) + g_{22}(x, y)}{2} > \sqrt{\left(\frac{g_{11}(x, y) - g_{22}(x, y)}{2}\right)^2 + g_{12}^2(x, y)}. \quad (4.4)$$

Множество параметров $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, при которых выполнены условия (4.4), выпукло.

Приведем соотношения, эквивалентные условию (4.3). В частности, мы покажем, что условие (4.3) можно записать в виде конечного числа неравенств относительно параметров метрики.

♦ Условие (4.3) эквивалентно следующим двум соотношениям:

$$g_{11}(1/2, 1/2) + g_{22}(1/2, 1/2) \equiv a + c + \alpha + \beta + \gamma/2 > 0,$$

$$\theta(x, y) > 0, \quad (x, y) \in K.$$

Первое соотношение будем использовать в нормированном виде: $a + c + \alpha + \beta + \gamma/2 = 1$. Покажем, что второе соотношение достаточно проверить лишь на границе ∂K квадрата K . Пусть $\theta(x, y) > 0$ при $(x, y) \in \partial K$ (в частности, $\theta(0, 0) = c_0 \neq 0$). Кривая $\theta(x, y) = 0$ может быть мнимой кривой, или парой совпадающих прямых, или действительной невырожденной кривой второго порядка. Рассмотрим эти случаи отдельно.

Случай 1: кривая $\theta(x, y) = 0$ мнимая. Тогда $\theta(x, y)$ имеет один и тот же знак при всех x, y . Следовательно, $\theta(x, y) > 0$ на всей плоскости.

Случай 2: кривая $\theta(x, y) = 0$ есть пара совпадающих прямых, гипербола или парабола. Кривая $\theta(x, y) = 0$ не пересекает границы квадрата K и не ограничена, поэтому она не проходит внутри квадрата. Значит, внутри квадрата знак $\theta(x, y)$ не меняется. Следовательно, $\theta(x, y) > 0$ при $(x, y) \in K$.

Случай 3: кривая $\theta(x, y) = 0$ есть эллипс. Как известно из теории инвариантов кривых второго порядка, в этом случае числа $\det R$ и $c_{11} + c_{22}$ имеют разные знаки, поэтому $c_{11} + c_{22} < 0$. Следовательно, функция $\theta(x, y)$ субгармоническая $\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \equiv c_{11} + c_{22} < 0\right)$. Однако субгармоническая функция принимает свое наименьшее значение на границе. Таким образом, мы приходим к следующему выводу.

◇ Условие (4.3) эквивалентно следующим двум соотношениям:

$$\begin{aligned} a + c + \alpha + \beta + \gamma/2 &= 1, \\ \theta(x, y) &> 0, \quad (x, y) \in \partial K. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Несмотря на то, что второе соотношение в (4.5) следует проверить на бесконечном множестве, при вычислительных процессах можно использовать приемы проверки условий (4.4), не вычисляя $\theta(x, y)$. Например, достаточно убедиться в положительности минимального значения $\theta(x, y)$ на ∂K , используя тот факт, что на каждой стороне квадрата K функция $\theta(x, y)$ представляет собой полином второй степени одной переменной на отрезке $[0, 1]$.

Приведем один из вариантов решения элементарной задачи нахождения минимума полинома $\mathcal{P}(t) = pt^2 + 2qt + r$ на $[0, 1]$. Если $p > -q > 0$ (т. е. $p > 0$, $\mathcal{P}'(0) < 0$, $\mathcal{P}'(1) > 0$), то $\min \mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(t_0) = 2(pr - q^2)/p$, где точка $t_0 = -q/p$, находится из условия $\mathcal{P}'(t_0) = 0$. Если неравенства $p > -q > 0$ не выполнены, то $\min_{t \in [0, 1]} \mathcal{P}(t) = \min\{\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1)\} = \min\{r, p + 2q + r\}$.

Итак, мы показали, что каждому криволинейному четырехугольнику G , у которого стороны суть дуги Ляпунова с показателем Гельдера μ и углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ удовлетворяют условиям $0 < \varphi_j < \pi$, $2\varphi_j > \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 2\pi$ ($j = 1, 2, 3, 4$), можно сопоставить метрику в единичном квадрате K вида (4.1), (4.2), параметры которой подчинены условиям (4.5). При этом отображение конформно и квазиизометрично в этой метрике, а геодезическими в K являются прямолинейные отрезки. В силу теоремы 3 [4] это отображение принадлежит классу C_μ^1 .

Покажем, что для данного криволинейного четырехугольника G введенная метрика сопоставляется однозначно. Действительно, в наших построениях неоднозначность могла возникнуть дважды. Первый раз — при выборе масштаба (параметра k_0) в плоскости ξ, η . Выбор другого масштаба приводит к умножению параметров $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ на общий множитель. Эта неоднозначность устранена при помощи нормировки $a + c + \alpha + \beta + \gamma/2 = 1$. Второй раз — в связи с неоднозначным выбором прямолинейного четырехугольника Ω на плоскости ξ, η . Действительно, четырехугольник Ω может быть подвергнут движению, т. е. проективному преобразованию, не меняющему метрики. Покажем, что при этом параметры метрики в квадрате K не изменяются.

Итак, пусть Ω — прямолинейный четырехугольник на плоскости ξ, η ; метрика на плоскости ξ, η имеет вид (4.1), (4.2) и определяется матрицей

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_0 \end{bmatrix}, \text{ отображение четырехугольника } \Omega \text{ на квадрат } K \text{ задано про-}$$

ективным преобразованием (3.4) посредством матрицы A (рис. 7). Тогда метрика в квадрате K определяется матрицей P (см. (3.5)). Пусть матрица B задает проективное отображение плоскости ξ, η в плоскость ξ_1, η_1 , не меняя метрики. Это означает, что

$$\tilde{P} = (\det B)^{2/3} U B^{-1} U \tilde{P} U B^{-*} U. \quad (4.6)$$

Четырехугольнику Ω соответствует четырехугольник Ω_1 на плоскости ξ_1, η_1 . Четырехугольник Ω_1 можно отобразить на квадрат K с помощью проективного преобразования. Пусть такое преобразование задано матрицей A_1 . Тогда в квадрате K индуцированы метрика из четырехугольника Ω с помощью матрицы P (см. (3.5)) и метрика из четырехугольника Ω_1

с помощью матрицы $P_1 = (\det A_1)^{2/3} U A_1^{-1} U \tilde{P} U A_1^{-*} U$. Легко доказать, что $P_1 = P$, используя формулу (4.6) и равенство $A_1 = AB$.

Мы показали, что метрика в квадрате K однозначно определяется исходным криволинейным четырехугольником G . Тем самым теорема 1.2 доказана.

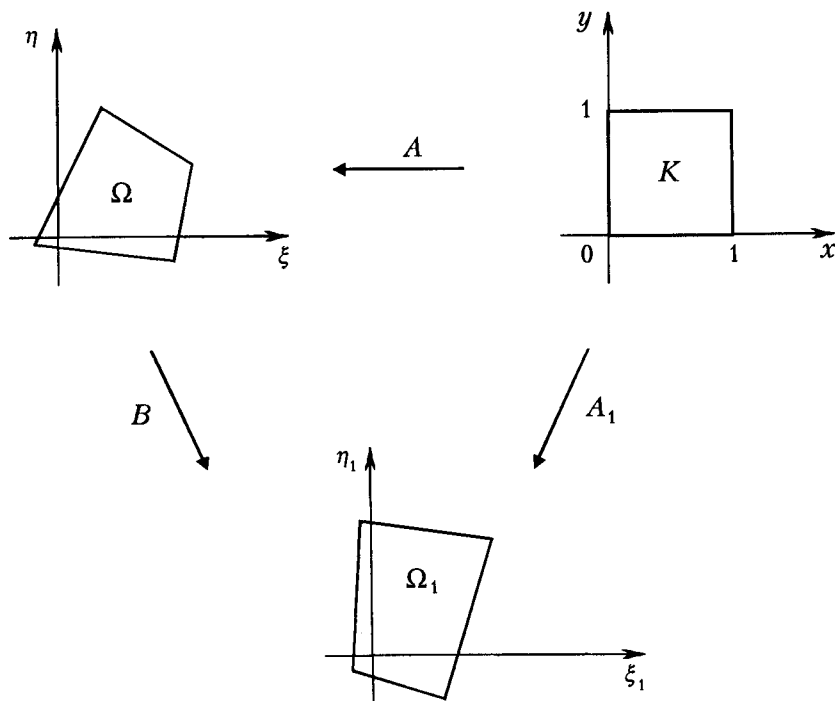


Рис. 7

В заключение укажем, что искать отображение единичного квадрата K на криволинейный четырехугольник G можно, минимизируя функционал

$$\Phi = \frac{1}{2} \iint_K \frac{g_{22}(u_x^2 + v_x^2) - 2g_{12}(u_x u_y + v_x v_y) + g_{11}(u_y^2 + v_y^2)}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} dx dy,$$

где g_{ij} определены формулами (4.2). Функционал минимизируется по u , v и параметрам метрики a , b , c , α , β , γ . При этом допустимые функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ должны обеспечить отображение границы ∂K квадрата K на границу ∂G четырехугольника G , а параметры метрики — удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} a + b + \alpha + \beta + \gamma/2 &= 1, \\ g_{12}(0,0) &= \cos \varphi_1 \sqrt{g_{11}(0,0)g_{22}(0,0)}, \\ g_{12}(0,1) &= -\cos \varphi_2 \sqrt{g_{11}(0,1)g_{22}(0,1)}, \\ g_{12}(1,1) &= \cos \varphi_3 \sqrt{g_{11}(1,1)g_{22}(1,1)}, \\ g_{12}(1,0) &= -\cos \varphi_4 \sqrt{g_{11}(1,0)g_{22}(1,0)}, \end{aligned}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ — углы четырехугольника G . Как легко убедиться непосредственной проверкой, имеет место тождество

$$g_{22}(u_x^2 + v_x^2) - 2g_{12}(u_x u_y + v_x v_y) + g_{11}(u_y^2 + v_y^2) \\ \equiv 2\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}(u_x v_y - u_y v_x) + (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)^{-1}(g_{22}U^2 - 2g_{12}UV + g_{11}V^2),$$

где

$$U = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}u_x - g_{11}v_y + g_{12}v_x, \quad V = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}u_y - g_{12}v_y + g_{22}v_x.$$

Следовательно,

$$\Phi \geq \iint_K (u_x v_y - u_y v_x) dx dy = S.$$

Минимальное значение $\Phi = S$ будет достигаться на функциях $u(x, y)$, $v(x, y)$, удовлетворяющих уравнениям $U = 0$, $V = 0$, известным в теории квазиконформных отображений как уравнения Бельтрами.

§ 5. Квазиизометрическое отображение квадрата на квадрат

В этом параграфе мы завершим доказательство теоремы 1.1. Пусть задано квазиизометрическое отображение границы ∂K_0 квадрата K_0 на границу ∂G четырехугольника G . Нам надо продолжить это отображение до квазиизометрического (класса C_μ^1) отображения квадрата K_0 на криволинейный четырехугольник G . Мы уже построили квазиизометрическое (класса C_μ^1) отображение K на G (рис. 8). Следовательно, мы имеем ква-

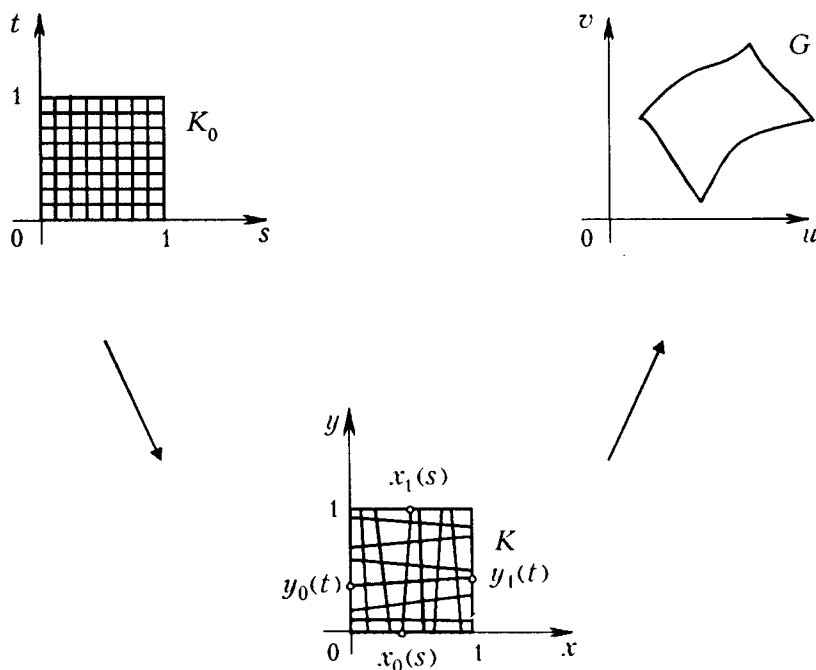


Рис. 8

зизометрическое отображение класса C_μ^1 границы ∂K_0 квадрата K_0 на границу ∂K квадрата K . Продолжив это отображение до квазиизометрического отображения класса C_μ^1 квадрата K_0 на квадрат K , получим требуемое квазиизометрическое отображение класса C_μ^1 квадрата K_0 на четырехугольник G .

Пусть отображения нижней и верхней сторон квадрата K_0 задаются соответственно функциями $x_0(s)$, $x_1(s)$, а отображения левой и правой сторон — функциями $y_0(t)$, $y_1(t)$. Предполагается, что выполнены условия согласования

$$x_0(0) = x_1(0) = y_0(0) = y_1(0) = 0, \quad x_0(1) = x_1(1) = y_0(1) = y_1(1) = 1,$$

функции $x_0(s)$, $x_1(s)$, $y_0(t)$, $y_1(t)$ гладкие (класса C_μ^1), монотонно возрастающие и их производные удовлетворяют оценкам

$$0 < \delta \leq x'_0(s), x'_1(s), y'_0(t), y'_1(t) \leq \Delta \quad (\delta \leq 1).$$

Отображение K_0 на K зададим следующими формулами:

$$\begin{aligned} x(s, t) &= w^{-1}\{[1 - y_0(t)]x_0(s) + y_0(t)x_1(s)\}, \\ y(s, t) &= w^{-1}\{[1 - x_0(s)]y_0(t) + x_0(s)y_1(t)\}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $w = 1 - [x_1(s) - x_0(s)][y_1(t) - y_0(t)]$. Геометрически это отображение можно представить как переход от равномерной сетки на K_0 к сетке на K , образованной прямолинейными отрезками, которые соединяют образы соответствующих граничных точек квадрата K_0 , находящиеся на противоположных сторонах квадрата K .

Для доказательства квазиизометричности отображения $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$ оценим сингулярные числа σ_1, σ_2 ($\sigma_1 \leq \sigma_2$) матрицы $\begin{bmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{bmatrix}$. Покажем сначала, что $w \geq \delta$. В силу неравенств $x'_0(s), x'_1 \geq \delta$ при $\mu \geq \nu$ имеем $x_0(\mu) - x_0(\nu) \geq \delta(\mu - \nu)$, $x_1(\mu) - x_1(\nu) \geq \delta(\mu - \nu)$, поэтому

$$\begin{aligned} x_1(s) - x_0(s) &= 1 - [x_1(1) - x_1(s)] - [x_0(s) - x_0(0)] \\ &\leq 1 - \delta(1 - s) - \delta s = 1 - \delta, \end{aligned}$$

т. е. $x_1(s) - x_0(s) \leq 1 - \delta$. Аналогично $x_1(s) - x_0(s) \geq -1 + \delta$. Значит, $|x_1(s) - x_0(s)| \leq 1 - \delta$. Тем же способом доказывается неравенство $|y_1(t) - y_0(t)| \leq 1 - \delta$. Поэтому $w \geq 1 - (1 - \delta)^2 = \delta + \delta(1 - \delta) \geq \delta$. Непосредственно убеждаемся в том, что $x_s = w^{-1}\{[1 - y(s, t)]x'_0(s) + y(s, t)x'_1(s)\}$, откуда

$$x_s \geq w^{-1}\delta, \quad x_s \leq w^{-1}\Delta \leq \Delta/\delta.$$

Аналогично вычисляется y_t и выводятся оценки

$$y_t \geq w^{-1}\delta, \quad y_t \leq \Delta/\delta.$$

Легко проверить, что

$$x_t = [x_1(s) - x_0(s)]y_t, \quad y_s = [y_1(t) - y_0(t)]x_s.$$

Приступим к оценке сингулярных чисел σ_1, σ_2 матрицы $\begin{bmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{bmatrix}$. Числа σ_1^2, σ_2^2 являются собственными числами матрицы

$$\begin{bmatrix} x_s^2 + y_s^2 & x_s x_t + y_s y_t \\ x_s x_t + y_s y_t & x_t^2 + y_t^2 \end{bmatrix}.$$

Оценим σ_2 сверху:

$$\begin{aligned}\sigma_2^2 &\leq \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = x_s^2 + y_s^2 + x_t^2 + y_t^2 \\ &= x_s^2\{1 + [y_1(t) - y_0(t)]^2\} + y_t^2\{1 + [x_1(t) - x_0(t)]^2\} \\ &\leq 2(x_s^2 + y_t^2) \leq 4\Delta^2/\delta^2.\end{aligned}$$

Таким образом, $\sigma_2 \leq 2\Delta/\delta$. Оценим σ_1 снизу:

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_2^2} \geq \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{(x_s y_t - x_t y_s)^2}{x_s^2 + y_s^2 + x_t^2 + y_t^2} = \frac{x_s^2 y_t^2 w^2}{x_s^2 + y_s^2 + x_t^2 + y_t^2} \\ &\geq \frac{x_s^2 y_t^2 w^2}{2(x_s^2 + y_t^2)} = \frac{w^2}{2(1/x_s^2 + 1/y_t^2)} \geq \frac{w^2}{2(w^2/\delta^2 + w^2/\delta^2)} = \frac{\delta^2}{4}.\end{aligned}$$

Значит, $\sigma_1 \geq \delta/2$. Таким образом, для сингулярных чисел σ_1, σ_2 матрицы $\begin{bmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{bmatrix}$ мы доказали оценки $\delta/2 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq 2\Delta/\delta$ и тем самым установили квазиизометричность отображения (5.1) квадрата K_0 на квадрат K .

Поскольку функции x_0, x_1, y_0, y_1 суть функции класса C_μ^1 , имеем $x, y \in C_\mu^1(K_0)$. Теорема 1.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schur F. Ueber den Zusammenhang den Räume Ronstanten Riemannshen krümmungsmasses mit den projectiven Räumen // Math. Ann. 1836. N 27.
2. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей. М.: Гостехиздат, 1948. Ч. 2.
3. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М.: Наука, 1986.
4. Гордиенко В. М. Граничные свойства конформных и квазиконформных отображений многоугольников // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 6. С. 31–38.
5. Гордиенко В. М. О четырехугольниках на поверхностях постоянной кривизны // Тр. Ин-та математики / РАН. Сиб. отд-ние. 1992. Т. 22. С. 124–133.
6. Чумаков Г. А. Конформная параметризация криволинейных четырехугольников с помощью геодезических четырехугольников на поверхностях положительной постоянной кривизны // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 1. С. 193–203.