СИММЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ МАКСВЕЛЛА *)

Е. И. Роменский

В настоящей работе предложен способ симметризации системы дифференциальных уравнений нелинейной упругопластической среды Максвелла [1, 2].

Впервые уравнения нелинейной максвелловской среды с релаксацией касательных напряжений были описаны в [3]. Там же дан способ их симметризации, основанный на расширении системы за счет включения в нее уравнений для производных от скоростей. Этот способ кажется достаточно искусственным, поскольку многие известные уравнения математической физики удается симметризовать в их исходном виде при помощи записи уравнений в каноническом виде и дивергентной форме [4, 5]. Такой прием позволяет симметризовать разнообразные системы дифференциальных уравнений, возникающие в механике сплошной среды. Ряд примеров содержится в [6].

Уравнения нелинейной теории упругости, записанные в виде системы уравнений первого порядка, являются следствием уравнений упругопластической среды Максвелла. Их также удается симметризовать с помощью записи в каноническом виде [7]. Этот способ, однако, не подходит для уравнений максвелловской среды, поскольку в нем используется условие равенства нулю тензора Бюргерса несовместности дисторсий, а при наличии пластических деформаций это условие не выполняется.

В данной работе для симметризации используется тот факт, что некоторые комбинации компонент тензора Бюргерса являются соотношениями на характеристиках-траекториях. Это обстоятельство позволяет считать младшими некоторые члены исходной системы, содержащие компоненты тензора Бюргерса, и применять для симметризации главных членов каноническую форму. Полная симметризация осуществляется с привлечением уравнений для тензора Бюргерса и уравнений для производных по пространственным координатам.

В § 5 излагается способ учета диффузии напряжений в системе уравнений максвелловской среды. По-видимому, этот механизм описания динамики дефектов наряду с релаксацией напряжений является разумно достаточным феноменологическим способом замыкания системы уравнений сплошной среды с дефектами структуры.

Автор благодарен С. К. Годунову за дискуссии, которые послужили поводом для написания этой статьи.

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93–011–1515).

§ 1. Уравнения нелинейной модели Максвелла

Уравнения модели Максвелла, соответствующие большим деформациям сплошной среды с релаксацией касательных и объемных деформаций, выписаны в [2]. Система состоит из дифференциальных уравнений, соответствующих законам сохранения энергии, импульса и массы, а также уравнений эволюции тензора эффективной упругой дисторсии, характеризующей напряженное состояние среды. В декартовых координатах x_1, x_2, x_3 уравнения модели Максвелла имеют вид

$$\frac{\partial \rho(E+|u|^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_\alpha(E+|u|^2/2) - \sigma_{\alpha\beta}u_\beta)}{\partial x_\alpha} = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_\alpha - \sigma_{i\alpha})}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad (i = 1,2,3), \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\alpha} + a_{i\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} = \lambda_{ij} \qquad (i,j = 1,2,3), \tag{1.4}$$

где $\lambda_{ij} = \varphi_{i\alpha}a_{\alpha j}$ ($\varphi_{i\alpha}$ — заданные функции параметров состояния среды). Здесь и далее применяется правило суммирования по повторяющимся индексам и используются следующие обозначения:

- $u = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор скорости, $|u|$ — его модуль;
- σ_{ij} — тензор напряжений;
- a_{ij} — тензор эффективной упругой дисторсии, $\det A$ — его детерминант;
- $c_{\alpha\beta}$ — обратный к a_{ij} тензор (т. е. $c_{ij}a_{jk} = \delta_{ik}$, где δ_{ij} — символ Кронекера);
- e_{ikl} — тензор вида

$$e_{ikl} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = k, \text{ или } k = l, \text{ или } l = i, \\ 1, & \text{если } (ikl) \text{ — четная перестановка}, \\ -1, & \text{если } (ikl) \text{ — нечетная перестановка}; \end{cases}$$

- ρ — плотность;
- ρ_* — разгрузочная плотность;
- $E(a_{11}, \ldots, a_{33}, \rho_*, S)$ — уравнение состояния (плотность внутренней энергии);
- S — энтропия.

Плотность ρ и разгрузочная плотность ρ_* связаны равенством $\rho = \rho_* \det A$, а тензор напряжений σ_{ij} и тензор дисторсии a_{ij} — равенством $\sigma_{ij} = -\rho a_{\alpha i}E_{a_{\alpha j}}$. Температура T вычисляется по формуле $T = E_S$. Правые части λ_{ij} уравнений (1.4) описывают неупругие деформации. В модели Максвелла λ_{ij} интерполируются нелинейными функциями от σ_{ij}, T и являются младшими членами дифференциальных уравнений.

Из уравнений (1.3), (1.4) получаем уравнение для разгрузочной плотности

$$\frac{\partial \rho_*}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \rho_*}{\partial x_\alpha} = (\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33})\rho_*.$$

Важным следствием системы (1.1)–(1.4) является уравнение для энтропии

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u_\alpha}{\partial x_\alpha} = \varkappa \qquad \left(\varkappa = \frac{1}{E_S} \rho E_{a_{i\alpha}} \lambda_{i\alpha}\right).$$

Согласно второму началу термодинамики должно выполняться условие $\varkappa \geqslant 0$, накладывающее ограничения на уравнение состояния.

Уравнения (1.1)–(1.3) имеют дивергентный вид, тогда как уравнения (1.4) недивергентные. В случае чисто упругих процессов (т. е. при $\lambda_{ij} \equiv 0$) уравнения (1.4) легко приводятся к дивергентному виду. Действительно, при упругих деформациях тензор дисторсии a_{ij} по определению является матрицей Якоби перехода от лагранжевых координат к эйлеровым и удовлетворяет условию интегрируемости

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, 3). \tag{1.5}$$

Используя (1.5), легко преобразовать уравнения (1.4) с $\lambda_{ij} \equiv 0$ к дивергентному виду, прибавив к ним равенства

$$u_\alpha \left(\frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\alpha} \right) = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

после чего уравнения (1.4) примут вид

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial a_{i\alpha} u_\alpha}{\partial x_j} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{1.6}$$

Если деформации происходят неупруго, условие интегрируемости (1.5) не выполняется. В механических процессах это приводит к появлению остаточных внутренних напряжений.

- *Тензором Бюргерса* или *тензором континуальной плотности дислокаций* называется тензор

$$B_{ij} = e_{i\alpha\beta} \frac{\partial a_{i\beta}}{\partial x_\alpha}. \tag{1.7}$$

Используя (1.7), для случая неупругих деформаций можно получить аналог дивергентных уравнений (1.6). Действительно, вводя компоненты B_{ij} тензора Бюргерса в качестве новых переменных и прибавляя к уравнениям (1.4) равенства

$$-e_{\alpha\beta j} u_\alpha B_{\beta i} + u_\alpha \left(\frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\alpha} \right) = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

находим (ср. (1.6))

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial a_{i\alpha} u_\alpha}{\partial x_j} - e_{\alpha\beta j} u_\alpha B_{\beta i} = \lambda_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{1.8}$$

При симметризации слагаемые $e_{\alpha\beta j} u_\alpha B_{\beta i}$ в левых частях уравнений (1.8) можно трактовать как младшие члены, хотя формально они таковыми не являются. Такая трактовка основана на том обстоятельстве, что некоторые комбинации компонент B_{ij} тензора Бюргерса являются соотношениями на характеристиках-траекториях.

В [2] для тензора

$$\widehat{B}_{ij} = \frac{1}{\det A} a_{i\alpha} B_{\alpha j} \qquad (i,j = 1,2,3) \tag{1.9}$$

получена система следующего вида:

$$\frac{\partial \widehat{B}_{ij}}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \widehat{B}_{ij}}{\partial x_\alpha} = \lambda_{i\alpha} c_{\alpha\beta} \widehat{B}_{\beta j} + \frac{a_{i\lambda}\Lambda_{\alpha j}}{\det A} \quad (i,j = 1,2,3), \tag{1.10}$$

где $\Lambda_{ij} = e_{i\alpha\beta}\frac{\partial \lambda_{j\beta}}{\partial x_\alpha}$. Отметим, что правые части уравнений (1.10) можно рассматривать как младшие члены (несмотря на присутствие первых производных), поскольку тензор $\widehat{B}_{ij}$ образован функциями a_{ij} и их первыми производными. В переменных $\widehat{B}_{ij}$ уравнения для дисторсии запишутся так (ср. (1.8)):

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial a_{i\alpha} u_\alpha}{\partial x_j} - e_{\alpha\beta j} \det A\, u_\alpha c_{\beta\gamma} \widehat{B}_{\gamma i} = \lambda_{ij}.$$

Окончательно, в данной работе мы рассматриваем (и приводим к каноническому виду) следующую систему:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho(E + |u|^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_\alpha(E + |u|^2/2) - \sigma_{\alpha\beta} u_\beta)}{\partial x_\alpha} = 0,\\
&\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_\alpha - \sigma_{i\alpha})}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad (i = 1,2,3),\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0,\\
&\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial a_{i\alpha} u_\alpha}{\partial x_j} - e_{\alpha\beta j} \det A\, u_\alpha c_{\beta\gamma} \widehat{B}_{\gamma i} = \lambda_{ij} \qquad (i,j = 1,2,3),\\
&e_{i\alpha\beta}\frac{\partial a_{j\beta}}{\partial x_\alpha} - \det A\, c_{i\alpha} \widehat{B}_{\alpha j} = 0 \qquad (i,\ j = 1,2,3).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Следствием системы (1.11) является закон баланса энтропии

$$\frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial \rho S u_\alpha}{\partial x_\alpha} = \varkappa.$$

§ 2. Каноническая форма уравнений

Для симметризации уравнений и их последующего исследования удобно использовать канонические переменные. Впервые канонические переменные были введены С. К. Годуновым [4]. Их выбор обусловлен наличием дополнительного закона сохранения (энтропии). Дальнейшее обобщение, когда система имеет дополнительные стационарные связи, предложено С. К. Годуновым для уравнений магнитной гидродинамики [5]. Каноническая форма уравнений нелинейной теории упругости приведена в [7], где использовано условие интегрируемости (1.5), которому удовлетворяет тензор дисторсии при упругих деформациях. При неупругих деформациях тензор Бюргерса отличен от нуля и условие интегрируемости не выполнено. Идея приведения к симметрической форме состоит в рассмотрении компонент тензора Бюргерса в качестве младших членов расширенной системы уравнений.

Опишем способ введения канонических переменных. Тензор $\widehat{B}_{ij}$ содержится не во всех уравнениях системы (1.11). Поэтому удобно систему (1.11) разбить на две группы уравнений и ввести два набора независимых функций $q_1, \ldots, q_k$ и $r_1, \ldots, r_n$:

$$\frac{\partial Q_i^0}{\partial t} + \frac{\partial Q_i^\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k), \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial R_j^0}{\partial t} + \frac{\partial R_j^\alpha}{\partial x_\alpha} - A_{j\beta} f_\beta = \lambda_j \qquad (j = 1, \ldots, n); \tag{2.2}$$

здесь Q_i^0, Q_i^α, R_j^0, R_j^α, $A_{j\beta}$, λ_j ($i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, n$; $\alpha = 1, 2, 3$; $\beta = 1, \ldots, m$) — функции, зависящие от $q_1, \ldots, q_k$ и $r_1, \ldots, r_n$. Кроме того, имеются дополнительные уравнения связи

$$\frac{\partial \psi_\beta^\alpha}{\partial x_\alpha} = f_\beta \qquad (\beta = 1, \ldots, m), \tag{2.3}$$

где $\psi_\beta^\alpha = \psi_\beta^\alpha(q, r)$ ($\beta = 1, \ldots, m$; $\alpha = 1, 2, 3$), а функции $f_1, \ldots, f_m$ заранее не известны, но могут быть найдены из системы (2.1), (2.2). Известно, что из системы (2.1)–(2.3) следует дополнительный закон баланса

$$\frac{\partial \Phi^0}{\partial t} + \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x_\alpha} = \varkappa, \tag{2.4}$$

который получается после суммирования уравнений (2.1), умноженных на $q_1, \ldots, q_k$, уравнений (2.2), умноженных на $r_1, \ldots, r_n$, и уравнений (2.3), умноженных на некоторые коэффициенты $N^1(q, r), \ldots, N^m(q, r)$ соответственно.

Предложение 2.1. *Замкнутая относительно переменных $q_1, \ldots, q_k$, $r_1, \ldots, r_n$ система (2.1), (2.2) записывается в каноническом виде*

$$\frac{\partial L_{q_i}}{\partial t} + \frac{\partial (M_{q_i}^\alpha - \psi_\beta^\alpha N_{q_i}^\beta)}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (i = 1, \ldots, k), \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial L_{r_j}}{\partial t} + \frac{\partial (M_{r_j}^\alpha - \psi_\beta^\alpha N_{r_j}^\beta)}{\partial x_\alpha} - A_{j\beta} f_\beta = \lambda_j \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{2.6}$$

Доказательство. Поскольку (2.4) получается как сумма уравнений (2.1), (2.2) и (2.3), умноженных соответственно на q_i, r_i и N^i ($i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, n$; $\beta = 1, \ldots, m$), имеем

$$q_i dQ_i^0 + r_j dR_j^0 = d\Phi^0, \qquad q_i dQ_i^\alpha + r_j dR_j^\alpha + N^i d\psi_i^\alpha = d\Phi^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Следовательно,

$$Q_i^0 dq_i + R_j^0 dr_j = d(q_i Q_i^0 + r_j R_j^0 - \Phi^0),$$

$$(Q_i^\alpha + \psi_\beta^\alpha N_{q_i}^\beta) dq_i + (R_j^\alpha + \psi_\beta^\alpha N_{r_j}^\beta) dr_j = d(q_i Q_i^\alpha + r_j R_j^\alpha + N^\beta \psi_\beta^\alpha - \Phi^\alpha).$$

Используя обозначения

$$\begin{aligned} L &= q_i Q_i^0 + r_j R_j^0 - \Phi^0, \\ M^\alpha &= q_i Q_i^\alpha + r_j R_j^\alpha + N^\beta \psi_\beta^\alpha - \Phi^\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3), \end{aligned} \tag{2.7}$$

получаем

$$\begin{aligned} Q_i^0 &= L_{q_i}, \qquad Q_i^\alpha = M_{q_i}^\alpha - \psi_\beta^\alpha N_{q_i}^\beta \quad (i = 1, \dots, k;\ \alpha = 1, 2, 3), \\ R_j^0 &= L_{r_j}, \qquad R_j^\alpha = M_{r_j}^\alpha - \psi_\beta^\alpha N_{r_j}^\beta \quad (j = 1, \dots, n;\ \alpha = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в (2.1), (2.2), приходим к (2.5), (2.6). □

Заметим, что младшие члены уравнений (2.6) должны удовлетворять равенству $(N^\beta + r_j A_{j\beta}) f_\beta + r_j \lambda_j = \varkappa$. Поскольку величины $f_1, \dots, f_m$; $r_1, \dots, r_n$ независимы, имеем

$$N^\beta + r_j A_{j\beta} = 0 \qquad (\beta = 1, \dots, m), \qquad r_j \lambda_j = \varkappa. \tag{2.9}$$

Равенства (2.9) имеют место, например, когда N^β — однородная функция первой степени только по переменным $r_1, \dots, r_n$ (но не $q_1, \dots, q_k$), а $A_{j\beta}$ вычисляются по формуле

$$A_{j\beta} = -N_{r_j}^\beta \qquad (j = 1, \dots, n;\ \beta = 1, \dots, m). \tag{2.10}$$

Очевидно, что из (2.10) следует (2.9).

Используя дополнительные соотношения (2.3), легко привести систему (2.5), (2.6) к симметрическому виду. Действительно, распишем (2.5), (2.6) более подробно,

$$L_{q_i q_j} \frac{\partial q_j}{\partial t} + L_{q_i r_j} \frac{\partial r_j}{\partial t} + (M_{q_i q_j}^\alpha - \psi_\beta^\alpha N_{q_i q_j}^\beta) \frac{\partial q_j}{\partial x_\alpha} + (M_{q_i r_j}^\alpha - \psi_\beta^\alpha N_{q_i r_j}^\beta) \frac{\partial r_j}{\partial x_\alpha} - N_{q_i}^\beta \frac{\partial \psi_\beta^\alpha}{\partial x_\alpha} = 0,$$

$$L_{r_j q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + L_{r_j r_k} \frac{\partial r_k}{\partial t} + (M_{r_j q_i}^\alpha - \psi_\beta^\alpha N_{r_j q_i}^\beta) \frac{\partial q_i}{\partial x_\alpha} + (M_{r_j r_k}^\alpha - \psi_\beta^\alpha N_{r_j r_k}^\beta) \frac{\partial r_k}{\partial x_\alpha} - N_{r_j}^\beta \frac{\partial \psi_\beta^\alpha}{\partial x_\alpha} - A_{j\alpha} f_\alpha = \lambda_j$$

$$(i = 1, \dots, k;\ j = 1, \dots, n)$$

и прибавим соотношения (2.3), умноженные на $N_{q_i}^\beta$ и $N_{r_j}^\beta$ соответственно. Относительно переменных $q_1, \dots, q_k$ и $r_1, \dots, r_n$ получим симметрическую систему

$$L_{q_i q_j} \frac{\partial q_j}{\partial t} + L_{q_i r_j} \frac{\partial r_j}{\partial t} + (M_{q_i q_j}^\alpha - \psi_\beta^\alpha N_{q_i q_j}^\beta) \frac{\partial q_j}{\partial x_\alpha} + (M_{q_i r_j}^\alpha - \psi_\beta^\alpha N_{q_i r_j}^\beta) \frac{\partial r_j}{\partial x_\alpha} - N_{q_i}^\beta f_\beta = 0,$$

$$L_{r_j q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t} + L_{r_j r_k}\frac{\partial r_k}{\partial t} + (M^{\alpha}_{r_j q_i} - \psi^{\alpha}_{\beta} N^{\beta}_{r_j q_i})\frac{\partial q_i}{\partial x_\alpha} + (M^{\alpha}_{r_j r_k} - \psi^{\alpha}_{\beta} N^{\beta}_{r_j r_k})\frac{\partial r_k}{\partial x_\alpha} = \lambda_j$$

$$(i = 1,\ldots,k;\ \ j = 1,\ldots,n).$$

Эту систему удобно переписать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} L_{qq} & L_{qr} \\ L_{rq} & L_{rr} \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{M}^{\alpha}_{qq} & \widetilde{M}^{\alpha}_{qr} \\ \widetilde{M}^{\alpha}_{rq} & \widetilde{M}^{\alpha}_{rr} \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \widetilde{N} \\ 0 \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

где при производных стоят симметрические матрицы, элементы которых суть матрицы

$$\begin{aligned}
L_{qq} &= L_{q_i q_j}, & \widetilde{M}^{\alpha}_{qq} &= (M^{\alpha}_{q_i q_j} - \psi^{\alpha}_{\beta} N^{\beta}_{q_i q_j}) & &(i,j = 1,\ldots,k),\\
L_{qr} &= L^{*}_{rq} = L_{q_i r_i}, & \widetilde{M}^{\alpha}_{qr} &= (M^{\alpha}_{q_i r_j} - \psi^{\alpha}_{\beta} N^{\beta}_{q_i r_j}) & &(i = 1,\ldots,k;\ j = 1,\ldots,n),\\
L_{rr} &= L_{r_i r_j}, & \widetilde{M}^{\alpha}_{rr} &= (M^{\alpha}_{r_i r_j} - \psi^{\alpha}_{\beta} N^{\beta}_{r_i r_j}) & &(i,j = 1,\ldots,n),
\end{aligned}$$

$$\widetilde{N} = (N_{i\beta}) = (N^{\beta}_{q_i}) \qquad (i = 1,\ldots,k;\ \ \beta = 1,\ldots,m),$$

и приняты обозначения

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix}, \qquad r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}, \qquad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

§ 3. Приведение уравнений модели Максвелла к каноническому виду

Для системы (1.11) группы переменных r, f удобно нумеровать двумя индексами. При этом каноническая форма (2.5), (2.6) принимает вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L_{q_i}}{\partial t} + \frac{\partial (M^{\alpha}_{q_i} - \psi^{\alpha}_{\beta\gamma} N^{\beta\gamma}_{q_i})}{\partial x_\alpha} = 0 \qquad (i = 0,1,2,3,4),\\
&\frac{\partial L_{r_{ij}}}{\partial t} + \frac{\partial (M^{\alpha}_{r_{ij}} - \psi^{\alpha}_{\beta\gamma} N^{\beta\gamma}_{r_{ij}})}{\partial x_\alpha} - A^{\alpha\beta}_{ij} f_{\alpha\beta} = \lambda_{ij} \qquad (i,j = 1,2,3),\\
&\frac{\partial \psi^{\alpha}_{ij}}{\partial x_\alpha} = f_{ij} \qquad (i,j = 1,2,3).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Все рассуждения и формулы (в частности, матричная запись уравнений (2.11)) останутся без изменений. Для определения переменных q и r используем равенство

$$d\rho S = \frac{1}{E_S} d\rho\left(E + \frac{|u|^2}{2}\right) - \frac{u_i}{E_S} d\rho u_i - \frac{1}{E_S}\left(E + \rho E_\rho - S E_S - \frac{|u|^2}{2}\right) d\rho - \rho\frac{E_{a_{ij}}}{E_S} da_{ij}. \tag{3.2}$$

Здесь предполагается зависимость внутренней энергии от ρ, a_{ij} и S, т. е. $E = E(a_{11}, \dots, a_{33}, \rho, S)$. Переход от ρ_* к ρ в функциональной зависимости E приведет к видоизменению формулы для вычисления напряжений, а именно: $\sigma_{ij} = -\rho^2 E_\rho \delta_{ij} - \rho a_{i\alpha} E_{a_{\alpha j}}$. Из равенства (3.2) определяются величины q_i и r_{ij}:

$$\begin{gathered} q_0 = \frac{1}{E_S}, \quad q_1 = -\frac{u_1}{E_S}, \quad q_2 = -\frac{u_2}{E_S}, \\ q_3 = -\frac{u_3}{E_S}, \quad q_4 = -\frac{1}{E_S}\left(E + \rho E_\rho - S E_S - \frac{|u|^2}{2}\right), \\ r_{ij} = -\rho \frac{E_{a_{ij}}}{E_S} \qquad (i,j = 1,2,3). \end{gathered} \tag{3.3}$$

Для определения остальных функций в (3.1) используем равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho S u_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{E_S} & \frac{\partial(\rho u_j(E + |u|^2/2) - \sigma_{j\alpha} u_\alpha)}{\partial x_j} - \frac{u_i}{E_S} \frac{\partial(\rho u_i u_j - \sigma_{ij})}{\partial x_j} \\ & - \frac{1}{E_S}\Big(E + \rho E_\rho - S E_S - \frac{|u|^2}{2}\Big) \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} \\ & - \frac{\rho E_{a_{ij}}}{E_S}\Big(\frac{\partial a_{i\alpha} u_\alpha}{\partial x_j} - e_{\alpha\beta j} \det A \, u_\alpha c_{\beta\gamma} \widehat{B}_{\gamma j}\Big) \\ & + \frac{\rho E_{a_{ij}}}{E_S} u_\alpha e_{\alpha\beta j}\Big(e_{\beta\gamma\mu} \frac{\partial a_{i\mu}}{\partial x_\gamma} - \det A \, c_{\beta\gamma} \widehat{B}_{\gamma j}\Big). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Из (3.4) можно заключить, что множители $N^{ij}(q,r)$ вычисляются по формуле $N^{ij} = -(1/E_S)\rho E_{a_{j\beta}} u_\alpha e_{\alpha i \beta}$ $(i,j = 1,2,3)$. Выражая N^{ij} через переменные q и r, получим $N^{ij} = -e_{\alpha i \beta} r_{j\beta} q_\alpha / q_0$. Младшие члены f_{ij} вычисляются по формуле

$$f_{ij} = \det A \, c_{i\alpha} \widehat{B}_{\alpha j}. \tag{3.5}$$

Коэффициенты $A_{ij}^{\alpha\beta}$ имеют вид $A_{ij}^{\alpha\beta} = -\frac{q_\gamma}{q_0} e_{\gamma\alpha j} \delta_{\beta i} = u_\gamma e_{\gamma \alpha j} \delta_{\beta i}$. Нетрудно убедиться, что $A_{ij}^{\alpha\beta} = -N_{r_{ij}}^{\alpha\beta}$, так что аналог равенства (2.10) в двухиндексной записи выполнен. Используя (2.8), (3.1)–(3.4), получим

$$\begin{aligned} & L_{q_0} = \rho(E + |u|^2/2), \qquad L_{q_i} = \rho u_i \qquad (i = 1,2,3), \\ & L_{q_4} = \rho, \qquad L_{r_{ij}} = a_{ij}. \end{aligned}$$

Далее находим

$$\begin{aligned} \psi_{ij}^\alpha &= e_{i\alpha\beta} a_{j\beta} \quad (i,j = 1,2,3; \ \ \alpha = 1,2,3); \\ M_{q_0}^\alpha &= \rho u_\alpha(E + |u|^2/2) - \sigma_{\alpha\beta} u_\beta + e_{i\alpha\beta} a_{j\beta} q_\mu r_{j\gamma} e_{\mu i \gamma} / q_0^2 \\ &= \rho u_\alpha(E + |u|^2/2 + a_{ij} E_{a_{ij}}) \quad (\alpha = 1,2,3); \\ M_{q_k}^\alpha &= \rho u_k u_\alpha - \sigma_{k\alpha} + e_{i\alpha\beta} a_{j\beta} e_{kij} r_{j\gamma} / q_0 \\ &= \rho u_k u_\alpha + \delta_k^\alpha \rho a_{ij} E_{a_{ij}} \qquad (k = 1,2,3; \ \ \alpha = 1,2,3); \\ M_{q_4}^\alpha &= \rho u_\alpha \qquad (\alpha = 1,2,3); \\ M_{r_{pq}}^\alpha &= a_{p\beta} u_\beta \delta_q^\alpha + \delta_p^j \delta_q^\beta e_{\gamma i \beta} q_\gamma e_{i\alpha\mu} a_{j\mu} / q_0 = u_\alpha a_{pq} \qquad (p,q = 1,2,3). \end{aligned}$$

Ввиду (2.7) имеем

$$L = \frac{1}{E_S}\rho\left(E + \frac{|u|^2}{2}\right) - \frac{\rho|u|^2}{E_S} - \frac{\rho}{E_S}\left(E + \rho E_\rho - SE_S - \frac{|u|^2}{2}\right) - a_{ij}\frac{\rho E_{a_{ij}}}{E_S} - \rho S = -\frac{\rho}{E_S}(\rho E_\rho + a_{ij}E_{a_{ij}}),$$

$$M^\alpha = \frac{1}{E_S}\left(\rho u_\alpha\left(E + \frac{|u|^2}{2}\right) - \sigma_{\alpha\beta}u_\beta\right) - \frac{u_i}{E_S}(\rho u_i u_\alpha - \sigma_{i\alpha}) - \frac{1}{E_S}\left(E + \rho E_\rho - SE_S - \frac{|u|^2}{2}\right)\rho u_\alpha - \frac{\rho E_{a_{i\alpha}}}{E_S}a_{i\beta}u_\beta + \frac{\rho}{E_S}e_{i\gamma\mu}u_\gamma E_{a_{j\mu}}e_{i\alpha\beta}a_{j\beta} - \rho u_\alpha S = -\frac{\rho}{E_S}(\rho E_\rho + a_{ij}E_{a_{ij}})u_\alpha.$$

Чтобы симметризовать систему, в качестве младших членов уравнений следует взять переменные $\widehat{B}_{ij}$. Используя формулу (3.5), связывающую f_{ij} и $\widehat{B}_{ij}$, запишем систему в канонической симметрической форме

$$\begin{pmatrix} L_{qq} & L_{qr} \\ L_{rq} & L_{rr} \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{M}^\alpha_{qq} & \widetilde{M}^\alpha_{rq} \\ \widetilde{M}^\alpha_{qr} & \widetilde{M}^\alpha_{rr} \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N' \\ 0 \end{pmatrix}\widehat{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix},$$

где $\widehat{B}$ — вектор, составленный из компонент $\widehat{B}_{ij}$, а N' — матрица, полученная из N^{ij}_{qk} с учетом зависимости f_{mn} от $\widehat{B}_{pq}$. Для полной симметризации необходимо знать структуру всех матриц вторых производных L_{qq}, L_{qr}, L_{rr}, $\widetilde{M}^\alpha_{qq}$, $\widetilde{M}^\alpha_{qr}$, $\widetilde{M}^\alpha_{rr}$, вычисление которых требует больших усилий. Кроме этого, оказывается нетривиальным добиться положительной определенности матрицы при производной $\frac{\partial}{\partial t}$. Действительно, матрица L_{rr} вырожденная, поскольку внутренняя энергия зависит не от a_{ij}, а от $g_{ij} = a_{\alpha i}a_{\alpha j}$, т. е. от меньшего числа переменных.

§ 4. Симметризация системы уравнений максвелловской модели

В § 3 показано, что уравнения модели Максвелла приводятся к каноническому виду с симметрической главной частью, включающей первые производные с соответствующими коэффициентами. При этом появляются новые переменные — младшие члены, являющиеся правыми частями стационарных уравнений (см. (1.7)) и не включенные в симметризацию с помощью канонического вида. Ниже система, дополненная уравнениями для производных, будет полностью симметризована. Использование канонического вида нецелесообразно, так как придется проделать трудоемкую работу по вычислению матриц коэффициентов через канонические переменные для выяснения структуры этих матриц. Мы используем в качестве исходной более простую симметрическую систему и применяем элементы техники из [7].

Вычитая из (1.2) уравнение (1.3), умноженное на ρ, и используя формулу $\sigma_{ij} = -\rho a_{\alpha i} E_{a_{\alpha j}}$, получим

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \rho a_{\alpha i} E_{a_{\alpha j}}}{\partial x_j} = 0 \qquad (i = 1,2,3).$$

Вычитая из полученных уравнений равенства

$$\rho a_{\alpha i} E_{a_{\alpha\beta}} c_{j\gamma} \left[\frac{\partial a_{\gamma j}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial a_{\gamma\beta}}{\partial x_j} - e_{\mu\beta j} B_{\mu\gamma} \right] = 0 \qquad (i = 1,2,3),$$

выполненные в силу (1.7), приходим к уравнениям

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \rho c_{j\alpha} \frac{\partial E_{c_{i\alpha}}}{\partial x_j} + \rho a_{\alpha i} E_{a_{\alpha j}} \frac{1}{\rho_*} \frac{\partial \rho_*}{\partial x_j} + e_{\mu\beta j} \rho a_{\alpha i} E_{a_{\alpha\beta}} c_{j\gamma} B_{\mu\gamma} = 0 \qquad (i = 1,2,3).$$

Здесь использовано определение тензора Бюргерса (см. (1.7)), а также формулы:

$$\rho = \rho_* \det A, \qquad dc_{mn} = -c_{m\alpha} da_{\alpha\beta} c_{\beta n}, \qquad a_{\alpha i} E_{a_{\alpha j}} = -c_{j\alpha} E_{c_{i\alpha}}.$$

Кроме того, подразумевается, что внутренняя энергия E как функция от a_{ij} является также функцией от c_{mn}. Перейдя теперь по формуле $B_{ij} = \det A \, c_{i\alpha} \widehat{B}_{\alpha j}$ (см. (1.9)) от B_{ij} к $\widehat{B}_{ij}$ и используя представление $\det(c_{ij}) e_{\alpha\gamma\mu} = e_{\lambda\beta j} c_{\beta\gamma} c_{j\gamma} c_{\lambda\mu}$ для определителя матрицы (см. [8]), приводим уравнения для скоростей (1.2) к виду

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - c_{j\alpha} E_{c_{i\alpha} c_{mn}} \frac{\partial c_{mn}}{\partial x_j} - c_{j\alpha} E_{c_{i\alpha} S} \frac{\partial S}{\partial x_j} - c_{j\alpha} \left(E_{c_{i\alpha} \rho_*} + \frac{1}{\rho_*} E_{c_{i\alpha}} \right) \frac{\partial \rho_*}{\partial x_j} - e_{\alpha\beta\gamma} E_{c_{i\alpha}} \widehat{B}_{\gamma\beta} = 0 \qquad (i = 1,2,3). \tag{4.1}$$

В (4.1) содержится матрица вторых производных функции E, которая не обязательно положительно определенная [1, 2]. Поэтому мы изменим вид уравнений (4.1), используя соотношения

$$e_{i\alpha\beta} c_{k\alpha} \frac{\partial c_{j\beta}}{\partial x_k} = -e_{i\alpha\beta} c_{jp} c_{q\beta} c_{k\alpha} \frac{\partial a_{pq}}{\partial x_k} = -c_{jp} \frac{\partial \det(c_{ij})}{\partial c_{li}} e_{lqk} \frac{\partial a_{pq}}{\partial x_k} = -c_{jp} a_{il} \det(c_{ij}) B_{lp} = -c_{jp} \widehat{B}_{ip},$$

справедливые на основании определений тензоров B, $\widehat{B}$, (c_{ij}), а также приведенной выше формулы из [8] вычисления определителей с помощью тензора e_{ijk}. Заметим, что левые части равенств

$$e_{i\alpha\beta} c_{k\alpha} \frac{\partial c_{j\beta}}{\partial x_k} + c_{jp} \widehat{B}_{ip} = 0 \quad (i,j = 1,2,3)$$

содержат антисимметрические по α и β члены с производными c_{ij} по x_k. Умножая последние равенства на $e_{\mu\nu i}$, а затем умножая полученные равенства

$$e_{\mu\nu i} \left(e_{i\alpha\beta} c_{k\alpha} \frac{\partial c_{i\beta}}{\partial x_k} + c_{jp} \widehat{B}_{ip} \right) = c_{k\mu} \frac{\partial c_{j\nu}}{\partial x_k} - c_{k\nu} \frac{\partial c_{j\mu}}{\partial x_k} + e_{\mu\nu i} c_{ip} \widehat{B}_{ip} = 0$$

на $l_{i\mu j\nu}$, прибавим результат к (4.1):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}-c_{j\alpha}(E_{c_{i\alpha}c_{mn}}-l_{i\alpha mn}+l_{inm\alpha})\frac{\partial c_{mn}}{\partial x_j}-c_{j\alpha}(E_{c_{i\alpha}\rho_*}+\frac{1}{\rho_*}E_{c_{i\alpha}})\frac{\partial\rho_*}{\partial x_j}$$
$$-c_{j\alpha}E_{c_{i\alpha}S}\frac{\partial S}{\partial x_j}+(e_{\alpha\gamma\mu}l_{i\alpha\beta\gamma}c_{\beta\gamma}-e_{\alpha\nu\mu}E_{c_{i\alpha}})\widehat{B}_{\mu\nu}=0 \qquad (i=1,2,3). \quad (4.2)$$

Благодаря дополнительно введенному тензору коэффициентов l_{ijmn} матрица при производной $\frac{\partial}{\partial t}$ будет положительно определена.

Из (1.1)–(1.4) получаем уравнения для c_{ij}, ρ_* и S:

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial c_{ij}}{\partial x_\alpha}-c_{\alpha j}\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}=\tilde{\lambda}_{ij} \qquad (i,j=1,2,3), \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial\rho_*}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial\rho_*}{\partial x_\alpha}=\frac{\varphi_{ii}}{\rho_*}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial S}{\partial x_\alpha}=\tilde{\varkappa}, \quad (4.5)$$

где $\tilde{\lambda}_{ij}=c_{i\alpha}\varphi_{\alpha j}$, $\tilde{\varkappa}=\varkappa/\rho$.

Введем векторные обозначения неизвестных функций

$$c^i=\begin{pmatrix}c_{1i}\\c_{2i}\\c_{3i}\end{pmatrix}, \qquad \theta=\begin{pmatrix}\rho_*\\S\end{pmatrix}, \qquad b^i=\begin{pmatrix}\widehat{B}_{1i}\\\widehat{B}_{2i}\\\widehat{B}_{3i}\end{pmatrix} \qquad (i=1,2,3)$$

и перепишем систему (4.2)–(4.5) в виде

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}-c_{j\alpha}\Lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial c_\beta}{\partial x_j}-c_{j\alpha}K_\alpha\frac{\partial\theta}{\partial x_j}-D_ib^i=0,\\&\frac{\partial c^i}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial c^i}{\partial x_\alpha}-c_{ji}\frac{\partial u}{\partial x_j}=\lambda^i \qquad (i=1,2,3),\\&\frac{\partial\theta}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial\theta}{\partial x_\alpha}=\mathrm{q},\end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$\Lambda_{\alpha\beta}=(\Lambda^{mn}_{\alpha\beta})=(E_{c_{m\alpha}c_{n\beta}}-l_{m\alpha n\beta}+l_{m\beta n\alpha}), \quad K^*_\alpha=\begin{pmatrix}E_{c_{1\alpha}\rho_*} & E_{c_{2\alpha}\rho_*} & E_{c_{3\alpha}\rho_*}\\E_{c_{1\alpha}S} & E_{c_{2\alpha}S} & E_{c_{3\alpha}S}\end{pmatrix},$$

(3×3)-матрицы D_i $(i=1,2,3)$ сконструированы из коэффициентов при $\widehat{B}_{\mu\nu}$ в уравнении (4.2), а векторы λ^i и q — из правых частей уравнений (4.3)–(4.5).

Систему (4.6) уже несложно симметризовать относительно u, c^i и θ, комбинируя уравнения и умножая их на соответствующие матрицы:

$$\begin{pmatrix} I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} & K_1 \\ 0 & \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} & K_2 \\ 0 & \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} & K_3 \\ 0 & K_1^* & K_2^* & K_3^* & Q \end{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) \begin{pmatrix} u \\ c^1 \\ c^2 \\ c^3 \\ \theta \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_{k1} & \Lambda_{k2} & \Lambda_{k3} & K_k \\ \Lambda_{1k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda_{2k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda_{3k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_k^* & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} \begin{pmatrix} u \\ c^1 \\ c^2 \\ c^3 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_i b^i \\ \lambda^1 \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ q \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Здесь (2×2)-матрица Q выбирается так, чтобы матрица при производной по времени $\frac{\partial}{\partial t}$ была положительно определенной при условии, что положительно определенной является матрица $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{pmatrix}$. Последнее условие можно обеспечить надлежащим выбором коэффициентов l_{ijmn}. Обоснование этого утверждения мы не приводим, ограничившись иллюстрацией такой возможности на примере. В случае малых деформаций изотропной среды квадратичную форму $r = \frac{1}{2} E_{c_{ij}c_{mn}} c_{ij} c_{mn}$ можно представить в виде

$$r = \tfrac{1}{2}\lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 + \mu(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2\varepsilon_{12}\varepsilon_{21} + 2\varepsilon_{23}\varepsilon_{32} + 2\varepsilon_{31}\varepsilon_{13}),$$

где $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(c_{ij} + c_{ji})$. Нетрудно убедиться, что ранг формы r меньше числа переменных c_{ij}. Полагая $l_{ijkl} = -\frac{1}{2}\mu(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jk})$, приходим к строго положительно определенной форме

$$\begin{aligned} r' &= \tfrac{1}{2}(E_{c_{ij}c_{mn}} - l_{ijmn} + l_{inmj}) c_{ij} c_{mn} \\ &= \tfrac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(c_{11}^2 + c_{22}^2 + c_{33}^2) + (\lambda + \mu)(c_{11}c_{22} + c_{22}c_{33} + c_{33}c_{11}) \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\mu(c_{12}^2 + c_{21}^2 + c_{23}^2 + c_{32}^2 + c_{31}^2 + c_{13}^2). \end{aligned}$$

Правая часть (4.7) содержит переменные b^i, которые, хотя и образованы производными c_{ij} по пространственным переменным, отнесены к младшим членам.

Итак, требуется симметризовать уравнения для производных u, c^i и θ, используя уравнения (1.10) для $\widehat{B}_{ij}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{B}_{ij} + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\widehat{B}_{ij} = \chi_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3); \quad (4.8)$$

здесь χ_{ij} зависит от $\widehat{B}_{ij}$, производных $\frac{\partial c_{mn}}{\partial x_\alpha}$, $\frac{\partial S}{\partial x_k}$, $\frac{\partial \rho_*}{\partial x_\alpha}$, также c_{ij}, S, ρ_*. Уравнения (4.8) будем использовать в векторной записи

$$\frac{\partial b^i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial b^i}{\partial x_\alpha} = \chi^i \qquad (i = 1, 2, 3). \quad (4.9)$$

Продифференцируем систему (4.7) по x_i и полученную систему запишем в виде

$$
\begin{bmatrix}
I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} & K_1 & 0 & 0 & 0\\
0 & \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} & K_2 & 0 & 0 & 0\\
0 & \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} & K_3 & 0 & 0 & 0\\
0 & K_1^* & K_2^* & K_3^* & Q & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)
\begin{bmatrix}
u_{x_i}\\ (c^1)_{x_i}\\ (c^2)_{x_i}\\ (c^3)_{x_i}\\ \theta_{x_i}\\ b^1\\ b^2\\ b^3
\end{bmatrix}
$$

$$
-c_{jk}
\begin{bmatrix}
0 & \Lambda_{k1} & \Lambda_{k2} & \Lambda_{k3} & K_k & D'_{k1} & D'_{k2} & D'_{k3}\\
\Lambda_{1k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\Lambda_{2k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\Lambda_{3k} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
K_k^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\frac{\partial}{\partial x_j}
\begin{bmatrix}
u_{x_i}\\ (c^1)_{x_i}\\ (c^2)_{x_i}\\ (c^3)_{x_i}\\ \theta_{x_i}\\ b^1\\ b^2\\ b^3
\end{bmatrix}
= F_i, \tag{4.10}
$$

где $D'_{k\alpha} = a_{k\alpha}D_\alpha$ $(i = 1,2,3)$. Уравнение для u_{x_i} в (4.10) получено дифференцированием (4.7) по x_i с использованием соотношений

$$
c_{jk}D'_{k\alpha}\frac{\partial b^\alpha}{\partial x_j} = c_{jk}a_{ki}D_\alpha\frac{\partial b^\alpha}{\partial x_j} = D_\alpha\frac{\partial b^\alpha}{\partial x_i}.
$$

Правая часть F_i в (4.10) собрана из всех младших членов системы (4.7) (кроме $D_i b^i$), и их производных по x_i. Теперь следует добавить к (4.10) уравнения (4.9) так, чтобы полученная система стала симметричной. С этой целью используем уравнения для производных $(c^\alpha)_{x_i}$ из (4.6), а также уравнения (4.9). Нетрудно убедиться, что следствием всех перечисленных уравнений является система

$$
\left[\begin{array}{ccccc|ccc}
I_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} & K_1 & D'_{11} & D'_{12} & D'_{13}\\
0 & \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} & K_2 & D'_{21} & D'_{22} & D'_{23}\\
0 & \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} & K_3 & D'_{31} & D'_{32} & D'_{33}\\
0 & K_1^* & K_2^* & K_3^* & Q & 0 & 0 & 0\\
0 & D'^*_{11} & D'^*_{21} & D'^*_{31} & 0 & & & \\
0 & D'^*_{12} & D'^*_{22} & D'^*_{32} & 0 & & \mathcal{P} & \\
0 & D'^*_{13} & D'^*_{23} & D'^*_{33} & 0 & & &
\end{array}\right]
\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)
\begin{bmatrix}
u_{x_i}\\ (c^1)_{x_i}\\ (c^2)_{x_i}\\ (c^3)_{x_i}\\ \theta_{x_i}\\ b^1\\ b^2\\ b^3
\end{bmatrix}
$$

$$
-c_{jk}
\left[\begin{array}{ccccc|ccc}
0 & \Lambda_{k1} & \Lambda_{k2} & \Lambda_{k3} & K_k & D'_{k1} & D'_{k2} & D'_{k3}\\
\Lambda_{1k} & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
\Lambda_{2k} & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \\
\Lambda_{3k} & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
K_k^* & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
D'^*_{k1} & & & & & & & \\
D'^*_{k2} & & 0 & & & & 0 & \\
D'^*_{k3} & & & & & & &
\end{array}\right]
\frac{\partial}{\partial x_j}
\begin{bmatrix}
u_{x_i}\\ (c^1)_{x_i}\\ (c^2)_{x_i}\\ (c^3)_{x_i}\\ \theta_{x_i}\\ b^1\\ b^2\\ b^3
\end{bmatrix}
= \mathcal{F}_i. \tag{4.11}
$$

Здесь $\mathcal{F}_i$ — вектор правых частей, который содержит младшие члены уравнений и зависит от u, u_{x_i}, $(c^1)_{x_i}$, $(c^2)_{x_i}$, $(c^3)_{x_i}$, θ, θ_{x_α}, b^k, c^k. Матрица $\mathcal{P}$ выбирается так, чтобы матрица при производной $\frac{\partial}{\partial t}$ была положительно определенной.

Таким образом, получена симметрическая система, включающая неизвестные функции u, c^k, θ, их производные u_{x_i}, $(c^k)_{x_i}$, θ_{x_i}, а также векторы b^1, b^2, b^3, и состоящая из систем (4.7) и (4.11). Эта результирующая система может служить для получения оценок норм решения с помощью интегралов энергии.

§ 5. Система уравнений движения упругопластической среды с диффузией напряжений

В § 1–4 изучались свойства дифференциальных уравнений упругопластической среды Максвелла, для которой скорости неупругих деформаций интерполируются членами уравнений, описывающими релаксацию напряженного состояния среды к равновесному состоянию. Возможный конкретный вид релаксационных членов можно найти в [2].

В реальных средах неупругие деформации происходят в результате сложных процессов образования и движения многотипных дефектов структуры среды. Релаксационные члены феноменологически описывают рождение дефектов. Однако они не могут служить достаточным приближением таких процессов, как, например, переползание дефектов [9]. Для адекватного описания необходимо учитывать процессы диффузии напряжений. Уравнения такой модели будут выписаны ниже.

Диффузия напряжений естественным образом включается в уравнения (1.4) эффективной упругой дисторсии, поскольку именно они описывают эволюцию напряжений.

Как отмечено в [2], для инвариантности выбора меры деформации следует писать уравнения эволюции дисторсии в виде

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\alpha} + a_{i\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} = -a_{i\alpha}\tilde{\varphi}_{\alpha j} \qquad (i,j = 1,2,3), \tag{5.1}$$

где $\tilde{\varphi}_{\alpha j}$ описывают скорости неупругих деформаций. Благодаря такой записи из уравнений (5.1) легко получить уравнения для обратного к a_{ij} тензора c_{ij} и метрического тензора деформаций $g_{ij} = a_{\alpha j}a_{\alpha j}$; а именно:

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial c_{ij}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} c_{\alpha j} = \tilde{\varphi}_{i\alpha} c_{\alpha j} \qquad (i,j = 1,2,3),$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\alpha} + g_{i\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} + g_{j\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} = -g_{i\alpha}\tilde{\varphi}_{\alpha j} - g_{j\alpha}\tilde{\varphi}_{\alpha i} \qquad (i,j = 1,2,3),$$

Представим тензор $\tilde{\varphi}_{ij}$ в виде суммы $\tilde{\varphi}_{ij} = \tilde{\varphi}^0_{ij} + \tilde{\varphi}^1_{ij}$, где $\tilde{\varphi}^0_{ij}$ — источники пластических деформаций, описывающие релаксационные процессы, а $\tilde{\varphi}^1_{ij}$ — диффузионные члены уравнений. Общий вид релаксационных членов $\tilde{\varphi}^0_{ij}$ для изотропных сред приведен в [2]

$$\widetilde{\Phi}^0 = (\tilde{\varphi}^0_{ij}) = \alpha_0 I + \alpha_1 G + \alpha_2 G^2,$$

где α_0, α_1, α_2 зависят от инвариантов тензора G и параметров состояния среды. Один из возможных вариантов выбора α_0, α_1, α_2 таков, что приводит Φ^0 к виду

$$\Phi^0 = \frac{1}{\tau_\sigma}\Big(I - \frac{3J_3}{J_2}G^{-1}\Big) + \frac{\ln(\rho_*/\rho)}{3\tau_V},$$

где τ_σ и τ_V — функции релаксации касательных напряжений и давления, J_2, J_3 — инварианты (определитель и сумма главных миноров второго порядка) тензора G.

Далее пишем уравнения по-прежнему в декартовых координатах, но в инвариантном относительно преобразований координат тензорном виде. Это облегчит запись уравнений в произвольной криволинейной системе координат.

Уравнения (5.1) в инвариантной форме запишутся так:

$$\frac{\partial a^i_j}{\partial t} + u^\alpha \frac{\partial a^i_j}{\partial x^\alpha} + a^i_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j} = -a^i_\alpha \tilde{\varphi}^\alpha_j \qquad (i,j = 1,2,3). \tag{5.2}$$

Диффузионные члены выберем следующим образом:

$$(\tilde{\varphi}^1)^\alpha_j = \frac{\partial}{\partial x^\beta}\Pi^{\alpha\beta}_j = \frac{\partial}{\partial x^\beta}\lambda^{\alpha n\beta\gamma}_{jm}\frac{\partial \sigma^m_n}{\partial x^\gamma}. \tag{5.3}$$

Тогда уравнение (5.2) примет вид

$$\frac{\partial a^i_j}{\partial t} + u^\alpha \frac{\partial a^i_j}{\partial x^\alpha} + a^i_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j} = -a^i_\alpha (\tilde{\varphi}^0)^\alpha_j - a^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta}\lambda^{\alpha n\beta\gamma}_{jm}\frac{\partial \sigma^m_n}{\partial x^\gamma}. \tag{5.4}$$

Нетрудно вывести уравнения для c^i_j и $g_{ij} = a^\alpha_i a^\alpha_j$:

$$\frac{\partial c^i_j}{\partial t} + u^\alpha \frac{\partial c^i_j}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} c^\alpha_j = (\tilde{\varphi}^0)^i_\alpha c^\alpha_j + c^\alpha_j \frac{\partial}{\partial x^\beta}\lambda^{\alpha n\beta\gamma}_{jm}\frac{\partial \sigma^m_n}{\partial x^\gamma},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ji}}{\partial t} + u^\alpha \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^\alpha} + g_{i\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x^j} + g_{j\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x^i} &= -g_{i\alpha}(\tilde{\varphi}^0)^\alpha_j - g_{j\alpha}(\tilde{\varphi}^0)^\alpha_i \\ &- g_{i\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\lambda^{\alpha n\beta\gamma}_{jm}\frac{\partial \sigma^m_n}{\partial x^\gamma} - g_{j\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\lambda^{\alpha n\beta\gamma}_{im}\frac{\partial \sigma^m_n}{\partial x^\gamma}.\end{aligned}$$

Чтобы обеспечить выполнение термодинамического тождества, перепишем закон сохранения энергии в ином виде, который отличается от (1.1) присутствием диффузионных потоков $\Pi^{\alpha\beta}_\gamma$:

$$\frac{\partial \rho(E + |u|^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_\alpha(E + |u|^2/2) - \sigma^\alpha_\beta u^\beta - \sigma^\gamma_\beta \Pi^{\alpha\beta}_\gamma)}{\partial x^\alpha} = 0. \tag{5.5}$$

Для вычисления диффузионных потоков применяется формула (5.3). При этом из (5.4), (5.5) вытекает уравнение эволюции энтропии

$$\rho T\Big(\frac{\partial S}{\partial t} + u^\alpha \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}\Big) = \sigma^j_\alpha (\tilde{\varphi}^0)^\alpha_j + \lambda^{\alpha\beta\gamma n}_{jm}\frac{\partial \sigma^j_\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial \sigma^m_n}{\partial x^\gamma}. \tag{5.6}$$

Слагаемые в правой части (5.6) описывают независимые процессы, поэтому для согласования с законом неубывания энтропии необходимо потребовать, чтобы каждое из них было неотрицательным.

Относительно неотрицательности слагаемого $\sigma^j_\alpha(\tilde{\varphi}^0)^\alpha_j$, описывающего производство энтропии в релаксационных процессах, см., например, [1, 2]. Второе слагаемое неотрицательно при условии неотрицательной определенности квадратичной формы $\lambda^{\alpha\beta\gamma n}_{jm}\frac{\partial\sigma^j_\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial\sigma^m_n}{\partial x^\gamma}$. Это условие накладывает, в свою очередь, некоторые условия на вид тензора диссипативных диффузионных коэффициентов λ^{ijkl}_{mn}. Дополнительные условия будут вытекать из условий симметрии (в частности принципа Онсагера), а также условий инвариантности для различных типов симметрии среды.

Следствием уравнений (5.4) эволюции a^i_j и закона сохранения массы (1.3) является уравнение для разгрузочной плотности

$$\frac{1}{\rho_*}\left(\frac{\partial\rho_*}{\partial t}+u^\alpha\frac{\partial\rho_*}{\partial x^\alpha}\right)=-(\tilde{\varphi}^0)^i_j\delta^i_j-\delta^j_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\beta}\lambda^{\alpha n\beta\gamma}_{jm}\frac{\partial\sigma^m_n}{\partial x^\gamma}. \tag{5.7}$$

В случае отсутствия диффузионных потоков, приводящих к дефекту плотности, следует выбрать тензор $\lambda^{\alpha n\beta\gamma}_{jm}$ так, чтобы диффузионные члены в (5.7) равнялись нулю.

В заключение отметим, что введенные в этом параграфе параболические члены уравнений описывают дополнительный механизм диссипации энергии, что позволяет надеяться получить оценки норм решений, дающие достаточную диссипацию для их ограниченности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
2. **Роменский Е. И.** Гиперболические уравнения нелинейной максвелловской модели упругопластической теплопроводящей среды // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 4. С. 135–159.
3. **Годунов С. К., Роменский Е. И.** Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах // ПМТФ. 1972. № 6. С. 124–144.
4. **Годунов С. К.** Интересный класс квазилинейных систем // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139, № 3. С. 272–273.
5. **Годунов С. К.** Симметричная форма уравнений магнитной гидродинамики // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: 1972. Т. 3, № 1. С. 26-34.
6. **Fri drichs K. O.** Conservation Equations and the Laws of Motion in Classical Physics // Comm. Pure Appl. Math. 1978. V. 31, № 1. P. 123–131.
7. **Роменский Е. И.** Законы сохранения и симметричная форма уравнений нелинейной теории упругости // Краевые задачи для уравнений с частными производными: Тр. семинара С. Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1984. № 1. С. 132–143.
8. **Победря Б. Е.** Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
9. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория упругости. М.: Наука, 1987.