СУЩЕСТВОВАНИЕ СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРА И АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ СОБОЛЕВА

М. В. Фокин

Изучается поведение при $t \to \infty$ решений $u(x,y,t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad (x,y)\in\Omega, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{0.1}$$

удовлетворяющих граничному условию

$$u|_\Gamma = 0 \tag{0.2}$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0}=u_0(x,y), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_1(x,y). \tag{0.3}$$

Предположим, что область Ω в $\mathbb{R}^2$ ограниченная и выпуклая, ее граница Γ принадлежит классу C^∞ и имеет строго положительную кривизну в каждой точке. Кроме того, начало координат O принадлежит Ω, а уравнение границы Γ в полярных координатах (ρ,φ) имеет вид $\rho=\rho(\varphi)$.

Уравнение (0.1) возникает при описании малых колебаний вращающейся жидкости в модельном двумерном случае. Впервые уравнения типа (0.1) и системы уравнений, связанные с исследованием динамики вращающейся жидкости и не относящиеся к классу систем Коши — Ковалевской, были рассмотрены С. Л. Соболевым в [1], где поставлена задача изучения асимптотического поведения решений при $t\to\infty$.

Оказалось, что для изучения задачи (0.1)–(0.3) естественно ввести оператор A, действующий в гильбертовом пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ комплекснозначных функций. Для гладких функций $u\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ значение оператора Au определяется как решение следующей краевой задачи:

$$\Delta Au = -u_{yy}, \qquad Au|_\Gamma = 0, \tag{0.4}$$

где Δ — оператор Лапласа. Отметим, что оператор A является симметричным в скалярном произведении

$$\langle u,v\rangle = \int_\Omega (u_x\bar v_x + u_y\bar v_y)\,dxdy, \tag{0.5}$$

ограниченным и тем самым допускает непрерывное самосопряженное расширение на все пространство $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Используя оператор A, можно переписать задачу (0.1)–(0.3) в виде

$$u_{tt}=Au, \qquad u(0)=u_0, \qquad u_t(0)=u_1, \tag{0.6}$$

где $u(t)$ — функция со значениями в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Асимптотическое поведение решений задачи (0.1)–(0.3) при $t \to \infty$ определяется характером спектра оператора A в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Спектральные свойства оператора A и их зависимость от деформации границы Γ впервые изучал Р. А. Александрян [2]. Им показано, что когда Ω — эллипс, оператор A обладает полной системой собственных функций, но при малых изменениях области Ω у оператора A могут появиться участки непрерывного спектра.

Для любой области Ω спектр оператора A совпадает с отрезком $[-1, 0]$. Собственные функции оператора A, отвечающие собственному значению $\lambda \in (-1, 0)$, связаны с решениями задачи Дирихле

$$L(\lambda)u = 0 \qquad (x, y) \in \Omega, \qquad u|_\Gamma = 0 \tag{0.7}$$

для гиперболического оператора

$$L(\lambda) \equiv \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1 + \lambda) \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Именно, нетривиальные решения из $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ задачи (0.7) являются (обычными) собственными функциями, а слабые решения из $L_2(\Omega)$ — обобщенными собственными функциями, соответствующими спектральному значению λ.

Вопрос о критериях существования обобщенных собственных функций и их структуру в случае аналитической границы изучал Т. И. Зеленяк [3–5]. С помощью специальных отображений границы, связанных с характеристиками оператора $L(\lambda)$, он построил подпространства $\tilde{H}_N^k$ пространства $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, инвариантные относительно оператора A, описал характер спектра в подпространствах $\tilde{H}_N^k$ и показал, что если начальные данные (0.3) принадлежат подпространству $\tilde{H}_N^k$, соответствующему абсолютно непрерывному спектру, то решения задачи (0.1)–(0.3) стремятся в $L_2(\Omega)$ к нулю при $t \to \infty$. Т. И. Зеленяк также установил полноту построенных систем обобщенных собственных функций из $L_2(\Omega)$ для некоторых промежутков изменения спектрального параметра λ. В работе автора [6] для аналитических границ показано, что при любом выборе $n \in \mathbb{N}$ сколь угодно малой деформацией границы Γ в C^n можно добиться, чтобы спектр оператора A стал чисто непрерывным.

Известно (см. [7]), что для любого самосопряженного оператора B, заданного в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, пространство H можно разложить в ортогональную сумму инвариантных для B подпространств H_p, H_sc, H_ac таких, что

- на H_p спектр оператора B чисто точечный (т. е. B имеет в H_p полную систему собственных функций);
- на H_sc спектр оператора B сингулярен (сингулярно-непрерывен), т. е. для любого $u \in H_\mathrm{sc}$ функция $\nu(\lambda) = \langle E_\lambda u, u \rangle$ непрерывна, но $\nu'(\lambda) = 0$ почти всюду по λ (здесь E_λ — спектральная функция для B);
- на H_ac спектр оператора B абсолютно непрерывен, т. е. функция $\nu(\lambda) = \langle E_\lambda u, u \rangle$ абсолютно непрерывна для любого $u \in H_\mathrm{ac}$.

В рассматриваемой задаче во всех случаях построений для аналитической границы Γ оказывалось, что спектр оператора A либо точечный, либо абсолютно непрерывный. Открытым оставался следующий вопрос.

◇ *Может ли для каких-либо областей Ω спектр оператора A иметь сингулярную компоненту, и если может, то каким будет поведение решений задачи* (0.1)–(0.3) *при* $t \to \infty$?

В настоящей работе для областей с границами Γ класса C^∞ получено достаточное условие существования сингулярного спектра оператора A, описаны деформации границы области, которые приводят к появлению сингулярной компоненты спектра. Кроме того, изучено поведение при $t \to \pm\infty$ значений произвольных линейных функционалов, заданных на решениях задачи (0.1)–(0.3), и производных по пространственным переменным x, y от решений.

На протяжении всей статьи используются следующие обозначения:

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — множества натуральных, целых, действительных, комплексных чисел соответственно;
- $\|\cdot\|_1$ — норма в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, порожденная скалярным произведением (0.5);
- $\|\cdot\|_0$ — норма в $L_2(\Omega)$;
- $\operatorname{mes} E$ — мера Лебега измеримого множества $E \subset \mathbb{R}$ или $E \subset \mathbb{R}^2$;
- $\operatorname{supp}(f)$ — носитель функции f;
- НОД(n, k) — наибольший общий делитель двух целых чисел n и k;
- $m(E)$ — мера множества $E \subset \Gamma$, порожденная на границе Γ угловой координатой φ.

Везде в дальнейшем *гладкой* мы называем функцию $f \in C^\infty[a, b]$, заданную на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, или $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ в случае функций двух переменных.

§ 1. Формулировки основных результатов

Будут использованы определения из [3, 5], некоторые из которых приводятся ниже.

Проведем через точку границы Γ с угловой координатой φ прямую, образующую угол $-\alpha$ с осью x. Прямая пересечет границу еще в одной точке, координата которой может быть задана с помощью функции $f_1(\varphi, \alpha)$ класса C^∞. Положим

$$f_n(\varphi, \alpha) = f_1(f_{n-1}(\varphi, \alpha), (-1)^{n+1}\alpha) \qquad (n = 2, 3, \dots).$$

Ломаная, состоящая из отрезков (*звеньев* ломаной), соединяющих последовательно точки границы φ_0, $\varphi_1 = f_1(\varphi_0, \alpha), \dots, \varphi_n = f_n(\varphi_0, \alpha), \dots$, называется *траекторией*. Замкнутые траектории называются *циклами*. Значения $\alpha(\varphi)$, при которых траектория является циклом с $2N$ звеньями, находятся из уравнений

$$f_{2N}(\varphi, \alpha_N^k(\varphi)) = \varphi + 2k\pi, \qquad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Функции α_N^k принадлежат C^∞. Положим

$$\lambda_N^k(\varphi) = -\cos^2 \alpha_N^k(\varphi), \qquad \Lambda_N^k(\xi) = \operatorname{mes}\{\varphi \mid \varphi \in [0, 2\pi], \lambda_N^k(\varphi) < \xi\}.$$

Функция $\Lambda_N^k(\xi)$ может быть разложена в сумму неубывающих функций (см. [8]), каждая из которых определяется с точностью до постоянного слагаемого:

$$\Lambda_N^k(\xi) = P_N^k(\xi) + S_N^k(\xi) + Q_N^k(\xi),$$

где $P_N^k(\xi)$ — функция скачков, $S_N^k(\xi)$ — сингулярная функция, $Q_N^k(\xi)$ — абсолютно непрерывная функция. В случае аналитической границы Γ функции $\lambda_N^k(\varphi)$ аналитические, поэтому каждая из них или постоянна, или принимает заданное значение в конечном числе точек промежутка $[0, 2\pi]$. Поэтому функции $S_N^k(\xi)$ постоянны при любых N, k. Свойства функций $\alpha_N^k(\varphi)$ и диффеоморфизмов границы, связанных с характеристиками оператора $L(\lambda)$, будут подробно изучены в § 3. В конце § 3 описаны деформации границы Γ, при которых возникают функции $\alpha_N^k(\varphi)$ с заданными свойствами.

Сформулируем и прокомментируем основные результаты работы. Доказательства основных утверждений приводятся в § 6.

Теорема 1.1. *Число $\lambda_0 \in (-1, 0)$ является собственным числом оператора A тогда и только тогда, когда для данной области Ω при некоторых N, k функция $\lambda_N^k(\varphi)$ принимает значение λ_0 на множестве $\Phi \subset [0, 2\pi]$ положительной меры.*

В отличие от аналитических границ, для границ класса C^∞ возможна ситуация, когда множество Φ не содержит внутренних точек. Тогда бесконечномерное подпространство $H(\lambda_0)$ собственных функций, соответствующих собственному значению λ_0, не содержит функций из $C^1(\overline{\Omega})$, за исключением тождественно равной нулю. Теорема 1.1 показывает, что собственные числа оператора A совпадают с точками разрыва функций скачков $P_N^k(\xi)$.

Положим $a_N^k = \min_\varphi \lambda_N^k(\varphi)$, $b_N^k = \max_\varphi \lambda_N^k(\varphi)$. Рассмотрим промежуток $[a_N^k, b_N^k]$ изменения спектрального параметра λ. Как следует из результатов § 3, при выборе различных пар натуральных чисел N и k, удовлетворяющих условиям НОД$(N, k) = 1$, $N \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant N - 1$, соответствующие им отрезки $[a_N^k, b_N^k]$ не пересекаются. В § 4 описано построение бесконечномерных инвариантных замкнутых подпространств $H_N^k \subset \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ оператора A таких, что его спектр на каждом H_N^k совпадает с отрезком $[a_N^k, b_N^k]$. Функции $u(x, y) \in H_N^k$ получаются интегрированием по параметру θ семейств $\chi(x, y, \theta)$ кусочно-постоянных обобщенных собственных функций оператора A. При этом оказывается, что $H_N^k \subset \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ и существует постоянная $c(N, k) > 0$ такая, что при любом выборе $u \in H_N^k$ выполняется оценка

$$|u(x, y)| \leqslant c(N, k)\|u\|_1, \qquad (x, y) \in \overline{\Omega}. \tag{1.1}$$

Если $a_N^k = b_N^k$, то H_N^k состоит из собственных функций, отвечающих собственному числу $\lambda = a_N^k$. Если функция $\lambda_N^k(\varphi)$ не постоянна, то разложим H_N^k в прямую сумму ортогональных инвариантных относительно оператора A подпространств

$$H_N^k = PH_N^k + SH_N^k + AH_N^k.$$

Спектр оператора A является точечным в PH_N^k, сингулярным в SH_N^k и абсолютно непрерывным в AH_N^k.

Теорема 1.2. *Если для данной области Ω при некоторых N, k сингулярная компонента $S_N^k(\xi)$ функции $\Lambda_N^k(\xi)$ не постоянна, то в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ существует нетривиальное подпространство SH_N^k, инвариантное относительно оператора A и такое, что спектр оператора A сингулярен на SH_N^k.*

Следующая теорема показывает, что при деформациях границы может появиться сингулярный спектр оператора A. Наоборот, если сингулярный спектр существует, то при сколь угодно малых вариациях границы возможно появление собственных чисел оператора A.

Теорема 1.3. *Пусть для области Ω с границей Γ: $\rho = \rho(\varphi)$ оператор A имеет хотя бы одно собственное число. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ существует область Ω_1 с границей Γ_1: $\rho = \rho_1(\varphi)$ класса C^∞ такая, что Ω_1 «близка» к Ω в следующем смысле: $\|\rho - \rho_1\|_{C^n} < \varepsilon$ и оператор A имеет в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_1)$ сингулярную компоненту спектра. Наоборот, если для исходной области Ω при некоторых N, k функция S_N^k нетривиальна, то существует область Ω_1, близкая в указанном смысле к Ω и такая, что у оператора A существуют собственные функции в $H_N^k \subset \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_1)$.*

Известно, что асимптотическое поведение решения u задачи (0.6) зависит от выбора начальных данных u_0, u_1 в подпространстве H_N^k следующим образом:

- ◇ если u_0, u_1 принадлежат PH_N^k, то u почти-периодично по t,
- ◇ если u_0, u_1 принадлежат AH_N^k, то u стремится в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ слабо (и следовательно, в $L_2(\Omega)$ сильно) к нулю при $t \to \pm\infty$.

Если u_0, u_1 принадлежат SH_N^k, то u обладает «промежуточными» свойствами, которые удобно охарактеризовать, рассматривая значения $\psi(t) = \langle u(x, y, t), v\rangle$ линейных функционалов, заданных на решениях, где v — произвольный элемент пространства $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Заметим, что для почти-периодических решений u функция $\psi(t)$ при любом фиксированном v также является почти-периодической, и в таком случае, если дополнительно известно, что $\psi(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то $\psi(t) \equiv 0$. Для решений с начальными данными из AH_N^k $\lim_{|t|\to\infty} \psi(t) = 0$ при любом $v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. В общем случае поведение функции $\psi(t)$ для рассматриваемой задачи существенно зависит от структуры множества

$$\Xi_N^k = \{\xi \mid \text{существует } \varphi \in [0, 2\pi] \text{ такое, что } \omega_N^k(\varphi_0) = \xi,\ \tfrac{d}{d\varphi}\omega_N^k(\varphi_0) = 0\}$$

критических значений функции $\omega_N^k(\varphi) = \cos \alpha_N^k(\varphi)$. Очевидно, что множество Ξ_N^k замкнуто и имеет нулевую меру Лебега. В силу теоремы 1.1 среди чисел вида $-\xi^2$ ($\xi \in \Xi_N^k$) находятся все собственные числа оператора A из промежутка $[a_N^k, b_N^k]$.

Для дальнейших формулировок нам потребуется следующее определение (см. [9]):

- Множество $Z \subset [-\pi, \pi]$ будем называть *множеством единственности* (*U-множеством*), если из сходимости тригонометрического ряда к нулю во всех точках дополнения множества Z к $[-\pi, \pi]$ следует, что коэффициенты этого ряда тождественно равны нулю. Множество Z называется *множеством неединственности* (*M-множеством*), если существует нетривиальный тригонометрический ряд, сходящийся к нулю во всех точках дополнения множества Z к $[-\pi, \pi]$.

Теорема 1.4. *Пусть для области Ω при некоторых N, k множество Ξ_N^k является U-множеством. Тогда решение $u(x,y,t)$ задачи (0.6) с начальными данными из $PH_N^k + SH_N^k$ обладает следующим свойством: для любого $v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ из условия $\psi(t) = \langle u(x,y,t), v\rangle \to 0$ при $|t| \to \infty$ следует $\psi(t) \equiv 0$.*

Справедливость оценки (1.1) для $u \in H_N^k$ означает, в частности, что в качестве функционала $\psi(t)$ в теореме 1.4 можно рассматривать значение $u(x_0, y_0, t)$ в произвольно взятой точке $(x_0, y_0) \in \Omega$. Как следствие отсюда легко получить, что если Ξ_N^k является U-множеством, то любое решение задачи (0.6) с начальными данными из $PH_N^k + SH_N^k$ обладает следующим свойством: существует замкнутое множество $\mathbb{E} \subset \overline{\Omega}$, определяемое выбором начальных данных u_0, u_1, такое, что $u(x,y,t) \equiv 0$ для всех $(x,y) \in \mathbb{E}$, $t \in \mathbb{R}$ (очевидно, $\Gamma \subset \mathbb{E}$), а во всех точках (x,y) открытого множества $\mathbf{V} = \overline{\Omega} \setminus \mathbb{E}$ выполняется неравенство $\overline{\lim}_{t\to\pm\infty} |u(x,y,t)| > 0$. Добавим, что для всех решений с начальными данными из AH_N^k $\lim_{t\to\pm\infty} u(x,y,t) = 0$ при всех $(x,y) \in \Omega$.

Можно привести примеры областей с границей Γ класса C^∞ таких, что множество Ξ_N^k является U-множеством при некоторых N, k и подпространство SH_N^k нетривиально. Для таких областей решения задачи (0.6) с начальными данными из SH_N^k, не являясь почти-периодическими функциями, тем не менее сохраняют некоторые их свойства. Вопрос о том, может ли Ξ_N^k оказаться M-множеством для границы Γ класса C^∞, остается открытым. Однако в случае границ конечной гладкости среди множеств Ξ_N^k встречаются как U-множества, так и M-множества, причем в последнем случае асимптотическое поведение решений меняется.

Теорема 1.5. *Пусть для области Ω_0 с границей Γ_0: $\rho = \rho_0(\varphi)$ класса C^∞ при некоторых значениях N, k функция $a_N^k(\varphi)$ постоянна. Тогда можно указать семейство строго выпуклых областей $\Omega(\varepsilon, \varkappa)$ $(0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $0 < \varkappa \leqslant \varkappa_0)$ с границами $\Gamma(\varepsilon, \varkappa)$: $\rho = \rho_0(\varphi) + \beta(\varphi, \varepsilon, \varkappa)$, обладающее следующими свойствами:*

(а) *$\Omega(0, \varkappa) = \Omega_0$ для всех $\varkappa \in (0, \varkappa_0]$;*

(б) *для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $\varkappa_n > 0$ такое, что $\Gamma(\varepsilon, \varkappa)$ принадлежит C^n при $\varkappa \leqslant \varkappa_n$ и $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \|\beta(\varphi, \varepsilon, \varkappa)\|_{C^n} = 0$ (т. е. $\Gamma(\varepsilon, \varkappa)$ сколь угодно близка к Γ_0 по норме C^n при $\varepsilon \to 0$);*

(в) *для любых $\varepsilon > 0$, $\varkappa > 0$ существует нетривиальное инвариантное относительно оператора A подпространство $SH_N^k(\varepsilon, \varkappa) \subset \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega(\varepsilon, \varkappa))$, на котором спектр оператора A сингулярен;*

(г) *множество* $\Xi_N^k(\varepsilon, \varkappa)$, *построенное для* $\Gamma(\varepsilon, \varkappa)$, *является* U*-множеством в том и только том случае, если* $\varkappa$ *принадлежит некоторому счетному подмножеству* $\mathcal{M}$ *промежутка* $(0, \varkappa_0]$, *причем* 0 — *предельная точка для* $\mathcal{M}$;

(д) *если* $\Xi_N^k(\varepsilon, \varkappa)$ *является* M*-множеством, то можно указать решение* $u(x, y, t)$ *задачи* (0.6) *с начальными данными* $u_0 \in \overset{0}{S}H_N^k(\varepsilon, \varkappa)$, $u_1 \in SH_N^k(\varepsilon, \varkappa)$ *и элемент* $v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega(\varepsilon, \varkappa))$ *такие, что* $\psi(0) \neq 0$, $\lim\limits_{|t| \to \infty} \psi(t) = 0$, *где* $\psi(t) = \langle u(x, y, t), v \rangle$.

Таким образом, теорема 1.5 показывает, что множество Ξ_N^k может оказаться M-множеством. Тогда среди решений задачи (0.6) с начальными данными из подпространства, соответствующего сингулярной части спектра оператора A, могут оказаться такие, асимптотические свойства которых схожи с асимптотическими свойствами решений с начальными данными из подпространства, соответствующего абсолютно непрерывной части спектра оператора A.

Множество $\mathcal{M}$ из теоремы 1.5 (г) содержит, в частности, числа $\varkappa = 1/m$, где $m \in \mathbf{N}$, $1/m \leqslant \varkappa_0$. Множество областей Ω_0, для которых выполняются условия теоремы 1.5, включает эллипсы (для эллипсов все функции α_N^k постоянны) и области, получающиеся из эллипсов с помощью отображений, сохраняющих характеристики оператора $L(\lambda)$ (см. [10]) для собственного числа λ оператора A. Более того, как будет показано в § 3, для любой исходной области Ω и любого $n \in \mathbf{N}$ сколь угодно малой деформацией границы Γ в C^n можно построить новую область Ω_1 с границей Γ_1, для которой некоторая функция $\alpha_N^k(\varphi)$ постоянна.

Как следует из представления, которое будет получено в § 4 для решений $u(x, y, t)$ задачи (0.6) с начальными данными из подпространства H_N^k, описание асимптотического поведения при $|t| \to \infty$ значения $u(x, y, t)$ в точке $(x, y) \in \Omega$ связано с исследованием осциллирующих интегралов (см. [11]) вида

$$u(x, y, t) = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \exp(i\omega(\theta)t)\chi(x, y, \theta)\zeta(\theta)\, d\theta, \tag{1.2}$$

где $\omega(\theta)$ — фазовая функция, $\chi(x, y, \theta)$ — обобщенные собственные функции оператора A, $\zeta(\theta) \in L_2[\varphi_1, \varphi_2]$. Известно, что основные члены асимптотического разложения по t для таких интегралов определяются критическими точками функции $\omega(\theta)$. Особенностью рассматриваемой задачи является то, что множество критических точек $\omega(\theta)$ может иметь сложную структуру. В частности, если для области Ω выполняется достаточное условие существования сингулярного спектра оператора A, то это множество обязательно имеет положительную меру Лебега на отрезке $[\varphi_1, \varphi_2]$, а множество критических значений функции $\omega(\theta)$ несчетно. Следующая теорема показывает, что для произвольной данной области Ω вариацией ее границы Γ можно добиться того, что для близкой области Ω_1 некоторое решение будет иметь любое, наперед заданное, асимптотическое поведение по t, возможное для осциллирующих интегралов вида (1.2).

Теорема 1.6. *Пусть заданы произвольные функции $\psi \in C^\infty[0,1]$, $\nu \in L_2[0,1]$. Положим*

$$f(t) = \int\limits_0^1 \exp(i\psi(s)t)\nu(s)\,ds.$$

Для любой заданной области Ω с границей Γ: $\rho = \rho(\varphi)$ класса C^∞, любых $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ существует область Ω_1 с границей $\Gamma_1 : \rho = \rho_1(\varphi)$, которая обладает следующими свойствами:

(а) $\|\rho - \rho_1\|_{C^n} < \varepsilon$;

(б) *существует подобласть $\Omega' \subset \Omega_1$, числа $\omega_0 \in (0,1)$, $\delta > 0$ и решение $u(x,y,t)$ задачи (0.6), которое при каждом значении t принадлежит $C(\overline{\Omega}) \cap \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$, постоянно по x, y в Ω' и для всех точек $(x,y) \in \Omega'$ справедливо равенство $u(x,y,t) = \exp(i\omega_0 t)f(\delta t)$; при этом если $\nu \in C_0^\infty[0,1]$, то $u(x,y,t) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ при всех t.*

Опишем теперь асимптотическое поведение при $t \to \infty$ производных по переменным x, y для решений задачи (0.1)–(0.3) с начальными данными из подпространства H_N^k.

Теорема 1.7. *Пусть Ω — произвольная область с границей Γ класса C^∞, натуральные числа N, k удовлетворяют условиям* НОД$(N,k) = 1$, *$1 \leqslant k \leqslant N-1$, $\mathcal{K}(\alpha_N^k(\varphi)) \subset \Gamma$ — множество критических точек функции $\alpha_N^k(\varphi)$, H_N^k — инвариантное подпространство оператора A, определяемое выбором N и k. Существует плотное в H_N^k линейное многообразие $\mathbb{L}_N^k \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \cap H_N^k$ начальных данных u_0, u_1 задачи (0.1)–(0.3) таких, что соответствующие им решения $u(x,y,t)$ обладают следующими свойствами:*

(а) *$u(x,y,t) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ при всех $t \in \mathbb{R}$;*

(б) *в $\overline{\Omega}$ определены две функции $\omega_1(x,y)$, $\omega_2(x,y) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ такие, что $\omega_1|_\Gamma = \omega_2|_\Gamma$ и для производных $\frac{\partial^{|\beta|}u(x,y,t)}{\partial x^{\beta_1}\partial y^{\beta_2}}$ при всех $(x,y) \in \overline{\Omega}$, $t \in \mathbb{R}$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 \geqslant 1$, справедливы представления*

$$\frac{\partial^{|\beta|}u}{\partial x^{\beta_1}\partial y^{\beta_2}} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{m=0}^{|\beta|-1} t^m\bigl(u^+_{m,\beta,j}(x,y)\exp(i\omega_j(x,y)t) + u^-_{m,\beta,j}(x,y)\exp(-i\omega_j(x,y)t)\bigr), \tag{1.3}$$

где функции $u^+_{m,\beta,j}(x,y)$, $u^-_{m,\beta,j}(x,y)$ определяются выбором начальных данных $u_0, u_1 \in \mathbb{L}_N^k$;

(в) *если мера множества $\mathcal{K}(\alpha_N^k(\varphi))$ на Γ положительна, то существует замкнутое множество $\mathbb{E} \subset \overline{\Omega}$ такое, что* $\operatorname{mes}\mathbb{E} > 0$ *и $u^+_{m,\beta,j}(x,y) \equiv u^-_{m,\beta,j}(x,y) \equiv 0$ для всех $(x,y) \in \mathbb{E}$, $m \geqslant 1$ при любом выборе $u_0, u_1 \in \mathbb{L}_N^k$ (т. е. производные всех порядков по x, y для решений являются ограниченными по t функциями на множестве $\mathbb{E}$);*

(г) $\mathbb{E} = \overline{\Omega}$ *в том и только том случае, если* $\alpha_N^k(\varphi) \equiv \alpha_0$ (*и тогда* $\omega_1(x,y) \equiv \omega_2(x,y) \equiv \cos\alpha_0$).

Условие (в) теоремы 1.7 эквивалентно утверждению, что в разложении $H_N^k = PH_N^k + SH_N^k + AH_N^k$ хотя бы одно из подпространств, PH_N^k или SH_N^k, нетривиально, т. е. спектр оператора A на H_N^k не исчерпывается абсолютно непрерывной компонентой. В отличие от теорем 1.4 и 1.5, где описание поведения при $|t| \to \infty$ значений решения $u(x,y,t)$ в какой-либо точке $(x_0, y_0) \in \Omega$ связано с изучением тонкой структуры множеств Ξ_N^k, для производных по x, y от решения представление (1.3) дает достаточно единообразное описание во всех точках области.

§ 2. Некоторые вспомогательные утверждения и конструкции

2.1. Пусть $f(x)$ — функция класса C^k ($k \geqslant 1$) на отрезке $[a,b]$.

- Точка $x \in [a,b]$, в которой $f'(x) = 0$, называется *критической* (для f). Не критическая точка $x \in (a,b)$ называется *регулярной* (для f).
  - $\mathcal{K}(f)$ — объединение множества критических точек для f и концов a, b отрезка $[a,b]$;
  - $\Xi(f)$ — множество критических значений для f, т. е. $f(\mathcal{K}(f))$;
  - $\mathcal{Q}(f)$ — множество регулярных точек для f, т. е. $\mathcal{Q} = [a,b] \backslash \mathcal{K}(f)$.

Известно, что $\Xi(f)$ замкнуто и имеет нулевую меру Лебега. Для построения деформаций границы Γ области Ω нам потребуется задавать такие функции $f(x)$, для которых $\Xi(f)$ имеет некоторую заданную структуру.

- *Симметрическим совершенным множеством* $K(\widetilde{\varkappa})$ *с заданной последовательностью отношений* $\widetilde{\varkappa} = \{\varkappa_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\varkappa_n < 1/2$, $n = 1, 2, \ldots$) называется (см. [9]) подмножество отрезка $[0,1]$, полученное с помощью следующего построения.

  Шаг 1: из отрезка $I_0 = [0, 1]$ удаляется интервал $Q_1^1 = (\varkappa_1, 1-\varkappa_1)$; оставшиеся два отрезка I_1^1 и I_1^2 имеют длину $\varkappa_1$.

  Шаг n: из каждого отрезка I_{n-1}^k ($k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$), длины l_{n-1} которых равны $\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n-1}$, удаляется симметричный относительно середины интервал Q_n^k длиной $(1-2\varkappa_n)l_{n-1}$. В результате получается 2^n отрезков I_n^k ($k = 1, 2, \ldots, 2^n$), длины l_n которых равны $\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n$.

  Положим $K_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} I_n^k$. Тогда $K(\widetilde{\varkappa}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$.

Вычисляя $\operatorname{mes} K_n = 2^n\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n$, нетрудно убедиться, что

$$\operatorname{mes} K(\widetilde{\varkappa}) = \Pi_{n=1}^{\infty}(2\varkappa_n).$$

Следовательно, $\operatorname{mes} K(\widetilde{\varkappa}) = 0$, если это бесконечное произведение расходится. Если $\varkappa_n \equiv \varkappa < 1/2$, то возникает *симметрическое совершенное множество* $K(\varkappa)$ *с постоянным отношением* $\varkappa$, мера которого равна нулю.

- *Симметрическим совершенным множеством* $K(\widetilde{\varkappa}; [a,b])$, *заданным на отрезке* $[a,b]$, называется совершенное множество, полученное из $K(\widetilde{\varkappa})$ преобразованием $x \to a + x(b-a)$.

Положим $g(x) = \exp(-1/x)$, $h(x) = g(x)g(1-x) = \exp(-1/(x(1-x)))$ для $x \in (0,1)$ и доопределим $h(x)$ нулем вне промежутка $(0,1)$. Введем функцию

$$\gamma(x) = \gamma_0 \int_{-\infty}^{x} h(\xi)\, d\xi. \tag{2.1}$$

Ясно, что $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\gamma(x) = 0$ при $x \leqslant 0$. Постоянную γ_0 выберем так, чтобы выполнялось условие $\gamma(x) = 1$ при $x \geqslant 1$. Оценки (достаточно грубые) производных $\gamma^{(n)}(x)$ функции $\gamma(x)$ дает

Лемма 2.1. *Существует постоянная $C > 0$ такая, что при любом $n \in \mathbf{N}$ справедлива оценка*

$$|\gamma^{(n)}(x)| \leqslant C \cdot 3^{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Все производные функции $\gamma(x)$ при $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 1$ обращаются в нуль. Поэтому достаточно вывести оценку на промежутке $(0,1)$. Заметим, что $\gamma'(x) = \gamma_0 h(x)$, $|h(x)| < 1$, откуда $|\gamma'(x)| \leqslant \gamma_0$. Дифференцируя $n-1$ раз произведение $g(x)g(1-x)$, получаем

$$\begin{aligned}\gamma^{(n)}(x) &= \gamma_0 h^{(n-1)}(x)\\ &= \gamma_0 \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{(n-m-1)} C_{n-1}^m\, g^{(m)}(x) g^{(n-m-1)}(1-x).\end{aligned} \tag{2.2}$$

Вычисляя последовательно производные функции $g(x)$ и применяя индукцию, убеждаемся, что $g^{(m)}(x) = x^{-2m} P_m(x) \exp(-1/x)$, где $P_1(x) = -1$ и многочлен $P_m(x)$ степени $(m-1)$ при $m > 1$ находится по рекуррентной формуле

$$P_m(x) = (2-2m)xP_{m-1}(x) - P_{m-1}(x) + x^2 P'_{m-1}(x). \tag{2.3}$$

Обозначим через A_m сумму абсолютных величин коэффициентов многочлена $P_m(x)$. Для производной $P'_m(x)$ подобная сумма не превосходит величины $(m-1)A_m$, а в силу (2.3) верно неравенство

$$A_m \leqslant (2m-2)A_{m-1} + A_{m-1} + (m-2)A_{m-1},$$

т. е. $A_m \leqslant (3m-3)A_{m-1}$. Так как $A_1 = 1$, имеем

$$A_m \leqslant 3^{m-1}(m-1)! < 3^m\, m!.$$

Максимум функции $x^{-2m}\exp(-1/x)$ достигается при $x = 1/(2m)$ и равен $(2m)^{2m}\exp(-2m)$. Поскольку $|P_m(x)| \leqslant A_m$ для $x \in (0,1)$, приходим к оценке

$$|g^{(m)}(x)| \leqslant 3^m\, m!(2m)^{(2m)} \exp(-2m),$$

в силу которой после элементарных преобразований из (2.2) выводим неравенство (считается, что $m^m = 1$ при $m = 0$)

$$\begin{aligned} |\gamma^{(n)}(x)| &\leqslant \gamma_0 \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m |g^{(m)}(x)|\,|g^{(n-m-1)}(1-x)| \\ &\leqslant \gamma_0 \sum_{m=0}^{n-1} (n-1)! \cdot 3^{n-1}(2m)^{2m}(2n-2m-2)^{2n-2m-2} \exp(-2n+2) \\ &\leqslant C_1 n! \cdot 3^n (2n)^{2n} \exp(-2n) = C_1 \exp\Big(n(2\ln(n) + \ln 12 - 2) + \sum_{m=1}^{n} \ln(m)\Big). \end{aligned}$$

Учитывая, что показатель экспоненты для достаточно больших n не превосходит n^2, окончательно получаем $|\gamma^{(n)}(x)| \leqslant C\exp(n^2) < C \cdot 3^{n^2}$. □

Лемма 2.2. *Пусть для последовательности $\widetilde{\varkappa} = \{\varkappa_n\}_{n=1}^{\infty}$ положительных чисел и некоторого $k \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $\varkappa_n < 16^{-k}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда найдется строго возрастающая функция $f \in C^k[0,1]$, для которой $\operatorname{mes} \mathcal{K}(f) = 1/2$ и множество $\Xi(f)$ совпадает с симметрическим совершенным множеством $K(\widetilde{\varkappa})$. Если $\varkappa_n < 16^{-n}$ при всех n, то существует функция $f \in C^{\infty}[0,1]$ с указанными свойствами.*

Доказательство. Построим на отрезке $[0,1]$ симметрическое множество $K_0 \subset [0,1]$, выбрасывая на каждом шаге смежные интервалы $Q_n^m = (\alpha_n^m, \beta_n^m)$ длиной 4^{-n} ($m = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$). В этом случае

$$\operatorname{mes} Q = \operatorname{mes}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{2^{n-1}} Q_n^m\Big) = 1/2.$$

Следовательно, $\operatorname{mes} K_0 = 1/2$. Для функции γ, заданной в (2.1), положим

$$\gamma_n^m(x) = \gamma(4^n(x - \alpha_n^m)) \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ m = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}).$$

В силу леммы 2.1 и определения функции $\gamma(x)$ $\gamma_n^m(x) \equiv 0$ при $x \leqslant \alpha_n^m$, $\gamma_n^m(x) \equiv 1$ при $x \geqslant \beta_n^m$ и справедливы следующие оценки производных порядка j:

$$\left|\frac{d^j}{dx^j} \gamma_n^m(x)\right| \leqslant C \cdot 4^{nj} 3^{j^2}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Положим $\gamma_n(x) = \sum_{m=1}^{2^{n-1}} \gamma_n^m(x)$. Поскольку при $j \geqslant 1$ носители функций $\frac{d^j}{dx^j}\gamma_n^m(x)$ не пересекаются для различных значений m, из (2.4) следует неравенство

$$\left|\gamma_n^{(j)}(x)\right| \leqslant C \cdot 4^{nj}\, 3^{j^2}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Заметим, что $\gamma_n(1) = 2^{n-1}$. Положим

$$\xi_1 = (1 - 2\varkappa_1), \ldots, \xi_n = \varkappa_1 \ldots \varkappa_{n-1}(1 - 2\varkappa_n), \ldots$$

и рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \gamma_n(x)$. По условию $\varkappa_n \leqslant 16^{-k}$ при всех $n \in \mathbb{N}$, поэтому $\xi_n < C(k)16^{-kn}$, где $C(k) = 16^k$. Ввиду (2.5) при всех x и j ($1 \leqslant j \leqslant k$) справедливы оценки

$$|\xi_n \gamma_n^{(j)}(x)| \leqslant C \cdot 4^{nj} 3^{j^2} \cdot C(k) 16^{-kn} \leqslant C_1(k) 4^{nj} 3^{j^2} 16^{-jn} = C_1(k) 4^{-nj} 3^{j^2}.$$

Тогда при $n \geqslant j$ выполняются неравенства

$$|\,\xi_n\gamma_n^{(j)}(x)\,| \leqslant C_1(k)(3/4)^{nj}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, ряды, составленные из производных порядка j ($j \leqslant k$) функций $\xi_n\gamma_n(x)$, равномерно сходятся. Поэтому $f \in C^k[0,\,1]$. Из построения вытекает, что $f(0) = 0$, $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0$ для всех j ($1 \leqslant j \leqslant k$). Если $\varkappa_n \leqslant 16^{-n}$, то в проведенном построении

$$\xi_n < \prod_{k=1}^{n-1} 16^{-k} = 16^{-n(n-1)/2}.$$

Фиксируя $k \in \mathbf{N}$ и рассуждая так же, как и выше, приходим к оценке

$$\begin{aligned}|\,\xi_n\gamma_n^{(k)}(x)| &\leqslant C\cdot 3^{k^2}\,4^{nk}\,16^{-n(n-1)/2}\\ &\leqslant C\cdot 3^{n(n-1)/2}\,4^{n(n-1)/2}\,16^{-n(n-1)/2} \leqslant C\cdot(3/4)^{n(n-1)/2}, \quad x\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

справедливой при $n > 2k+1$. Следовательно, при любом заданном $k \in \mathbf{N}$ ряд, составленный из производных порядка k функций $\xi_n\gamma_n(x)$, равномерно сходится. Поэтому $f \in C^\infty[0,\,1]$. В этом случае $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0$ для всех $j \geqslant 1$.

По индукции проверяется, что при любом N

$$\sum_{n=1}^{N} 2^{n-1}\xi_n = \sum_{n=1}^{N} 2^{n-1}(1-2\varkappa_n)\varkappa_1\ldots\varkappa_{n-1} = 1 - 2^N\varkappa_1\ldots\varkappa_N.$$

Ввиду оценок $\varkappa_n$ (см. условия леммы) $\lim\limits_{N\to\infty} 2^N\varkappa_1\ldots\varkappa_N = 0$, поэтому

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\gamma_n(1) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\xi_n = 1.$$

Из определений $f(x)$, $\gamma_n(x)$ получаем, что

$$f'(x) = \xi_n\,\frac{d}{dx}\,\gamma_n^m(x) > 0, \qquad x \in Q_n^m = (\alpha_n^m, \beta_n^m).$$

Поскольку открытое множество $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{2^{n-1}} Q_n^m$ всюду плотно на отрезке $[0,1]$, функция $f(x)$ строго возрастает на $[0,1]$. В то же время $f'(x) = 0$ для $x \in [0,\,1]\backslash Q$, поэтому множество $\mathcal{K}(f)$ критических точек функции $f(x)$ совпадает с K_0, т. е. $\operatorname{mes}\mathcal{K}(f) = 1/2$. Из вышеизложенного следует, что $f([0,\,1]) = [0,\,1]$.

Докажем теперь, что $\Xi(f) = f(K_0)$ совпадает с $K(\widetilde{\varkappa})$. По построению для каждого интервала $Q_n^m = (\alpha_n^m, \beta_n^m)$ справедливо соотношение

$$f(\beta_n^m) - f(\alpha_n^m) = \xi_n(\gamma_n^m(\beta_n^m) - \gamma_n^m(\alpha_n^m)) = \xi_n.$$

Дополнение множества $Q_n = \bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{m=1}^{2^{k-1}} Q_k^m$ состоит из 2^n отрезков $I_n^k = [s_n^k, t_n^k]$ ($k = 1,\ldots,2^n$). Для слагаемых ряда $\xi_j\gamma_j(x) = \xi_j\sum_{m=1}^{2^{j-1}}\gamma_j^m(x)$ функции $\gamma_j^m(x)$ постоянны на любом I_n^k, если $j \leqslant n$. В то же время для фиксированного отрезка I_n^k при $j > n$ в точности 2^{j-n-1} функций $\gamma_j^m(x)$ (среди общего числа 2^{j-1}) не постоянны на I_n^k и $\gamma_j^m(t_n^k) - \gamma_j^m(s_n^k) = 1$, а для остальных имеем $\gamma_j^m(t_n^k) - \gamma_j^m(s_n^k) = 0$. Следовательно,

$$f(t_n^k) - f(s_n^k) = \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{j-n-1}\xi_j = \varkappa_1 \ldots \varkappa_n \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{j-n-1}(1-2\varkappa_j)\varkappa_{n+1}\ldots\varkappa_{j-1}.$$

Как и ранее, легко установить, что

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{j-n-1}(1-2\varkappa_j)\varkappa_{n+1}\ldots\varkappa_{j-1} = 1,$$

поэтому $f(t_n^k) - f(s_n^k) = \varkappa_1 \ldots \varkappa_n$ при любом $k = 1, 2, \ldots, 2^n$ и образы $\widetilde{I}_n^k = f(I_n^k)$ всех отрезков I_n^k имеют одинаковую длину $\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n$. Множество $\Xi(f) = f(K_0) = [0,1]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{2^{n-1}}\widetilde{Q}_n^m$, где $\widetilde{Q}_n^m = f(Q_n^m)$, можно получить, последовательно удаляя из отрезка $[0,1]$ на первом шаге интервал $\widetilde{Q}_1^1$ длиной $\xi_1 = 1 - 2\varkappa_1$, на втором шаге — два интервала $\widetilde{Q}_2^1$ и $\widetilde{Q}_2^2$ с длинами $\xi_2 = (1-2\varkappa_2)\varkappa_1$, каждый из которых симметричен относительно середины одного из оставшихся после первого шага отрезков $\widetilde{I}_2^1$ и $\widetilde{I}_2^2$, длины которых равны $\varkappa_1$, и т. д. На n-м шаге удаляется 2^{n-1} интервалов $\widetilde{Q}_n^m$ с длинами $\xi_n = (1-2\varkappa_n)\varkappa_1\ldots\varkappa_{n-1}$. В результате остается 2^n равных отрезков $\widetilde{I}_n^k$, дли́ны которых равны $\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n$. Очевидно, что этот процесс в точности соответствует построению множества $K(\widetilde{\varkappa})$. □

Следствие 2.1. *Пусть $K(\varkappa)$ — симметрическое совершенное множество с постоянным отношением $\varkappa$ ($\varkappa \leqslant 1/16$); $f(x,\varkappa)$ — семейство функций, построение которых описано в лемме 2.2 для случая $\varkappa_n = \varkappa$ ($n = 1, 2, \ldots$). Тогда при $\varkappa \leqslant 16^{-k}$ функция $f(x,\varkappa)$ как функция переменной x принадлежит $C^k[0,1]$, а множество ее критических значений совпадает с $K(\varkappa)$. Кроме того, нормы функций семейства $f(x,\varkappa)$ равномерно ограничены в $C^k[0,1]$ для $\varkappa \in (0, 16^{-k}]$.*

2.2. Определим функцию $\mathfrak{F}(\xi; f, E) = \operatorname{mes}\{x \in E \mid f(x) < \xi\}$, где функция $f \in C^1[a,b]$ задана на $[a,b]$ и принимает действительные значения, а E — измеримое подмножество отрезка $[a,b]$. Таким образом, $\mathfrak{F}(\xi; f, E)$ описывает изменение меры множеств Лебега сужения функции f на множество E. Обозначим $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогда для любого E $\mathfrak{F}(\xi; f, E) = 0$ при $\xi \leqslant m$, $\mathfrak{F}(\xi; f, E) = \operatorname{mes} E$ при $\xi > M$. При $E = [a,b]$ будем писать кратко $\mathfrak{F}(\xi; f)$. Из определения следует, что если $\operatorname{mes}(E_1 \cap E_2) = 0$, то при всех значениях ξ

$$\mathfrak{F}(\xi; f, E_1 \cup E_2) = \mathfrak{F}(\xi; f, E_1) + \mathfrak{F}(\xi; f, E_2). \tag{2.6}$$

В частности, $\mathfrak{F}(\xi; f) = \mathfrak{F}(\xi; f, E) + \mathfrak{F}(\xi; f, [a,b]\setminus E)$ для любого измеримого множества $E \subset [a,b]$.

Поскольку функция $\mathfrak{F}(\xi; f, E)$ не убывает по ξ, она имеет не более чем счетное множество точек разрыва первого рода ξ_j ($j \in J$). Пусть скачок функции $\mathfrak{F}(\xi; f, E)$ в точке ξ_j равен Δ_j. Согласно определению $\mathfrak{F}(\xi; f, E)$ имеем

$$\Delta_j = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \operatorname{mes}(f^{-1}([\xi_j - \varepsilon,\, \xi_j + \varepsilon)) \cap E) = \operatorname{mes}(f^{-1}(\xi_j) \cap E).$$

Отсюда, в частности, следуют неравенства $\sum_{j\in J} \Delta_j \leqslant \operatorname{mes} E \leqslant b - a$. Определим функцию скачков $\mathfrak{F}_{\mathrm{p}}(\xi; f, E)$ следующим образом: $\mathfrak{F}_{\mathrm{p}}(\xi; f, E) = \sum_{\xi_j<\xi} \Delta_j$. Как известно, разность $\mathfrak{F}(\xi; f, E) - \mathfrak{F}_{\mathrm{p}}(\xi; f, E)$ является неубывающей и непрерывной функцией по ξ (см. [8]). С другой стороны, почти всюду по ξ существует производная $\frac{d}{d\xi}\mathfrak{F}(\xi; f, E) = g(\xi) \geqslant 0$, которая является суммируемой функцией, $g(\xi) = 0$ при $\xi < m$. Положим $\mathfrak{F}_{\mathrm{ac}}(\xi; f, E) = \int\limits_{-\infty}^{\xi} g(\eta)\, d\eta$. Тогда функция $\mathfrak{F}_{\mathrm{ac}}(\xi; f, E)$ абсолютно непрерывна и $\mathfrak{F}_{\mathrm{ac}}(\xi; f, E) = 0$ при $\xi \leqslant m$. Функция $\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi; f, E) = \mathfrak{F}(\xi; f, E) - \mathfrak{F}_{\mathrm{p}}(\xi; f, E) - \mathfrak{F}_{\mathrm{ac}}(\xi; f, E)$ является неубывающей и непрерывной, а ее производная по ξ равна нулю на множестве полной меры.

- Функции $\mathfrak{F}_{\mathrm{p}}$, $\mathfrak{F}_{\mathrm{ac}}$ и $\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}$ называются соответственно *точечной, абсолютно непрерывной* и *сингулярной компонентами* функции $\mathfrak{F}(\xi; f, E)$.

Используя (2.6), нетрудно показать, что для любых измеримых подмножеств E_1, E_2 ($\operatorname{mes}(E_1 \cap E_2) = 0$) отрезка $[a, b]$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{\mathrm{p}}(\xi; f, E_1 \cup E_2) &= \mathfrak{F}_{\mathrm{p}}(\xi; f, E_1) + \mathfrak{F}_{\mathrm{p}}(\xi; f, E_2), \\ \mathfrak{F}_{\mathrm{ac}}(\xi; f, E_1 \cup E_2) &= \mathfrak{F}_{\mathrm{ac}}(\xi; f, E_1) + \mathfrak{F}_{\mathrm{ac}}(\xi; f, E_2), \\ \mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi; f, E_1 \cup E_2) &= \mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi; f, E_1) + \mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi; f, E_2), \end{aligned} \tag{2.7}$$

из которых, в частности, следует, что если для заданной функции $f \in C^1[a, b]$ сингулярная компонента $\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi; f, E)$ нетривиальна для какого-либо измеримого множества $E \subset [a, b]$, то функция $\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi; f) = \mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi; f, E) + \mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi; f, [a, b]\backslash E)$ также нетривиальна.

Лемма 2.3. *Пусть $f \in C^1[a, b]$. Если ξ_0 — точка разрыва функции $\mathfrak{F}(\xi; f, E)$ для какого-либо измеримого множества $E \subset [a, b]$, то ξ_0 — критическое значение функции f.*

Доказательство. Как отмечалось выше, ξ_0 является точкой разрыва $\mathfrak{F}(\xi; f, E)$ в том и только том случае, если $\operatorname{mes}(f^{-1}(\xi_0) \cap E) > 0$. Следовательно, прообраз $f^{-1}(\xi_0)$ содержит бесконечно много точек. В силу компактности промежутка $[a, b]$ можно выбрать последовательность попарно различных значений $x_n \in f^{-1}(\xi_0)$ так, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \in [a, b]$. Поскольку $f(x_0) = \xi_0$, $f(x_n) - f(x_0) = 0$ при всех n, имеем $f'(x_0) = 0$, т. е. $x_0 \in \mathcal{K}(f)$ и $f(x_0) = \xi_0 \in \Xi(f)$. □

Обозначим через $\mathcal{D}(f)$ множество точек разрыва функции $\mathfrak{F}(\xi; f)$. Рассмотрим подмножество $\mathcal{B}(f) = \bigcup_{\xi\in\mathcal{D}(f)} f^{-1}(\xi)$ отрезка $[a, b]$. Поскольку $\mathcal{D}(f)$ не более чем счетно, а все множества $f^{-1}(\xi)$ замкнуты, множество $\mathcal{B}(f)$ измеримо (и даже имеет тип F_σ). Вообще говоря, $\mathcal{B}(f)$ может иметь непустое пересечение с множеством $\mathcal{Q}(f)$ регулярных точек функции $f(x)$, но из леммы 2.3 следует, что $\mathcal{B}(f) \subset f^{-1}(\Xi(f))$. Введем также множества

$$\widetilde{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{B}(f) \cap \mathcal{K}(f), \quad \mathcal{C}(f) = \mathcal{K}(f)\backslash\mathcal{B}(f).$$

Лемма 2.4. *Пусть* $f \in C^1[a,b]$, $f([a,b]) = [A,B]$. *Тогда*

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{p}}(\xi; f) = \mathfrak{F}(\xi; f, \widetilde{\mathcal{B}}(f)), \quad \mathfrak{F}_{\mathrm{ac}}(\xi; f) = \mathfrak{F}(\xi; f, \mathcal{Q}(f)), \quad \mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi; f) = \mathfrak{F}(\xi; f, \mathcal{C}(f)).$$

Доказательство. Случай $A = B$ очевиден, поскольку для постоянной функции f имеем $\mathcal{Q}(f) = \mathcal{C}(f) = \varnothing$, $\mathcal{B}(f) = \mathcal{K}(f) = [a,b]$. Пусть функция $f(x)$ не постоянна, т. е. $A < B$. Открытое множество $\mathcal{Q}(f)$ представимо в виде объединения не более чем счетного семейства непересекающихся интервалов $Q_j = (\alpha_j, \beta_j)$ ($j \in J$, J — конечное множество натуральных чисел $\{1, \dots, N\}$ или $J = \mathbb{N}$). На каждом интервале Q_j имеем $f'(x) \neq 0$, т. е. $f(x)$ строго монотонная на $\overline{Q}_j = [\alpha_j, \beta_j]$. Следовательно, на отрезке $[A_j, B_j] = f([\alpha_j, \beta_j])$ определена обратная к $f(x)$ функция $g_j(\xi)$ со значениями в $[\alpha_j, \beta_j]$, причем при $\xi \in (A_j, B_j)$ существует производная $g_j'(\xi) = 1/f'(g_j(\xi))$, которая сохраняет знак. Очевидно, что

$$\mathfrak{F}(\xi; f, Q_j) = |\, g_j(\xi) - g_j(A_j)\, | = \int\limits_{A_j}^{\xi} |\, g_j'(\eta)\, |\, d\eta, \qquad \xi \in [A_j, B_j].$$

Доопределяя $g_j'(\xi)$ нулем вне промежутка (A_j, B_j), можно перейти к равенству

$$\mathfrak{F}(\xi; f, Q_j) = \int\limits_{-\infty}^{\xi} |\, g_j'(\eta)\, |\, d\eta.$$

Если число интервалов Q_j конечно, то

$$\mathfrak{F}(\xi; f, \mathcal{Q}(f)) = \sum_{j=1}^{N} \mathfrak{F}(\xi; f, Q_j) = \int\limits_{-\infty}^{\xi} \sum_{j=1}^{N} |\, g_j'(\eta)\, |\, d\eta.$$

Если множество J бесконечно, то, вводя множества $Q_j(\xi) = \{x \in Q_j \mid f(x) < \xi\}$, получаем

$$\mathfrak{F}(\xi; f, \mathcal{Q}(f)) = \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{mes} Q_j(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\xi} |\, g_j'(\eta)\, |\, d\eta \leqslant b - a.$$

По теореме Леви [8] ряд $\sum_{j=1}^{\infty} |\, g_j'(\eta)\, |$ сходится почти всюду к неотрицательной суммируемой функции $\Phi(\eta)$ и $\mathfrak{F}(\xi; f, \mathcal{Q}(f)) = \int\limits_{-\infty}^{\xi} \Phi(\eta)\, d\eta$. Таким образом, функция $\mathfrak{F}(\xi; f, \mathcal{Q}(f))$ абсолютно непрерывна.

Заметим, что множества $\Xi_j = \Xi(f) \cap (A_j, B_j)$ не обязательно пустые, но $\operatorname{mes} \Xi_j = 0$. Поскольку $f^{-1}(\Xi) \cap Q_j = f^{-1}(\Xi_j) \cap Q_j$, функция $g_j(\xi)$ дифференцируема и строго монотонна, имеем

$$\operatorname{mes}(f^{-1}(\Xi) \cap Q_j) = \operatorname{mes} g_j(\Xi_j) = \int\limits_{\Xi_j} |\, g_j'(\eta)\, |\, d\eta = 0.$$

Поэтому

$$\operatorname{mes}(f^{-1}(\Xi)\cap\mathcal{Q})=\operatorname{mes}\bigcup_{j\in J}(f^{-1}(\Xi)\cap Q_j)=0.$$

В частности, $\operatorname{mes}(f^{-1}(\xi_0)\cap\mathcal{Q}(f))=0$, если ξ_0 — точка разрыва функции $\mathfrak{F}(\xi;f)$, так как $\xi_0\in\Xi(f)$ по лемме 2.3. Учитывая, что $\mathcal{K}(f)\cup\mathcal{Q}(f)=[a,b]$ и $\mathcal{K}(f)\cap\mathcal{Q}(f)=\varnothing$, в силу (2.6) приходим к равенству

$$\mathfrak{F}(\xi;f,\mathcal{K}(f))=\mathfrak{F}(\xi;f)-\mathfrak{F}(\xi;f,\mathcal{Q}(f)).$$

Рассмотрим открытое множество $\widetilde{\mathcal{Q}}(f)=[A,B]\backslash\Xi(f)$ регулярных значений функции $f(x)$. Поскольку $\operatorname{mes}\Xi(f)=0$, имеем $\operatorname{mes}\widetilde{\mathcal{Q}}=B-A$. Представим $\widetilde{\mathcal{Q}}(f)$ в виде объединения не более чем счетного семейства интервалов $\widetilde{Q}_j=(\widetilde{A}_j,\widetilde{B}_j)$ ($j\in J$) и покажем, что функция $\mathfrak{F}(\xi;f,\mathcal{K}(f))$ постоянна на каждом интервале $\widetilde{Q}_j$. Действительно, для любых $\xi_1,\xi_2\in(\widetilde{A}_j,\widetilde{B}_j)$ ($\xi_1<\xi_2$) имеем

$$\mathfrak{F}(\xi_2;f,\mathcal{K}(f))-\mathfrak{F}(\xi_1;f,\mathcal{K}(f))=\operatorname{mes}(f^{-1}([\xi_1,\xi_2))\cap\mathcal{K}(f))=0,$$

так как $f^{-1}(\xi)$ при $\xi\in(\widetilde{A}_j,\widetilde{B}_j)$ состоит только из регулярных точек функции $f(x)$, и, значит, $f^{-1}([\xi_1,\xi_2))\cap\mathcal{K}(f)=\varnothing$. Поэтому $\frac{d}{d\xi}\mathfrak{F}(\xi;f,\mathcal{K}(f))=0$ на множестве полной меры, следовательно,

$$\mathfrak{F}(\xi;f,\mathcal{Q}(f))=\mathfrak{F}(\xi;f)-\mathfrak{F}(\xi;f,\mathcal{K}(f))=\mathfrak{F}_{\mathrm{ac}}(\xi;f).$$

Рассмотрим функцию $\mathfrak{F}(\xi;f,\widetilde{\mathcal{B}}(f))$. По построению множества $\widetilde{\mathcal{B}}(f)$

$$f^{-1}([A,\xi))\cap\widetilde{\mathcal{B}}(f)=\bigcup_{\xi_j<\xi}(f^{-1}(\xi_j)\cap\mathcal{K}(f)),\qquad \xi_j\in\mathcal{D}(f).$$

Учитывая соотношения

$$\operatorname{mes}f^{-1}(\xi_j)=\operatorname{mes}(f^{-1}(\xi_j)\cap\mathcal{K}(f))\cup(f^{-1}(\xi_j)\cap\mathcal{Q}(f))=\operatorname{mes}(f^{-1}(\xi_j)\cap\mathcal{K}(f)),$$

справедливые ввиду равенства $\operatorname{mes}(f^{-1}(\xi_j)\cap\mathcal{Q}(f))=0$, получаем

$$\mathfrak{F}(\xi;f,\widetilde{\mathcal{B}}(f))=\sum_{\xi_j<\xi}\operatorname{mes}(f^{-1}(\xi_j)\cap\mathcal{K}(f))=\sum_{\xi_j<\xi}\operatorname{mes}f^{-1}(\xi_j)=\mathfrak{F}_{\mathrm{p}}(\xi;f).$$

Докажем, что $\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi;f)=\mathfrak{F}(\xi;f,\mathcal{C}(f))$. Поскольку $\mathcal{C}(f)\subset\mathcal{K}(f)$, функция $\mathfrak{F}(\xi;f,\mathcal{C}(f))$ постоянна на всех интервалах $(\widetilde{A}_j,\widetilde{B}_j)$, т. е. $\frac{d}{d\xi}\mathfrak{F}(\xi;f,\mathcal{C}(f))=0$ почти всюду. С другой стороны, функция $\mathfrak{F}(\xi;f,\mathcal{C}(f))$ непрерывна, так как $f^{-1}(\xi_j)\cap\mathcal{C}(f)=\varnothing$ для $\xi_j\in\mathcal{D}(f)$. Отсюда следует требуемое равенство $\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi;f)=\mathfrak{F}(\xi;f,\mathcal{C}(f))$. □

Следствие 2.2. *Пусть $f\in C^1[a,b]$, $f([a,b])=[A,B]$, $A<B$. Сингулярная компонента $\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi;f)$ функции $\mathfrak{F}(\xi;f)$ нетривиальна в том и только том случае, если $\operatorname{mes}\mathcal{C}(f)>0$.*

Доказательство. В силу леммы 2.4 $\mathfrak{F}_{sc}(\xi; f) = \mathfrak{F}(\xi; f, \mathcal{C}(f))$, однако $\mathfrak{F}(\xi; f, \mathcal{C}(f)) = \operatorname{mes}\mathcal{C}(f)$ при $\xi > B$. Поэтому если $\operatorname{mes}\mathcal{C}(f) > 0$, то $\mathfrak{F}_{sc}(\xi; f)$ нетривиальна, в противном случае $\mathfrak{F}_{sc}(\xi; f) \equiv 0$. □

Пусть $K(\widetilde{\varkappa})$ — симметрическое совершенное множество нулевой меры, заданное на отрезке $[0,1]$.

- *Стандартной сингулярной мерой* $\widetilde{\mu}$, *связанной с множеством* $K(\widetilde{\varkappa})$, называется мера Лебега — Стилтьеса, порожденная неубывающей функцией $\mu(x)$, которая определяется следующим образом:
  - для x, принадлежащих интервалам Q_n^m ($m = 1, \dots, 2^{n-1}$; $n = 1, 2, \dots$), смежным с множеством $K(\widetilde{\varkappa})$, которые занумерованы при заданном n по m в порядке их расположения на отрезке $[0,1]$, функция $\mu(x)$ принимает постоянное значение, равное $(2m-1)/2^n$;
  - для остальных $x \in [0, 1]$ значения $\mu(x)$ определяются продолжением с множества $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{m=1}^{2^{n-1}} Q_n^m)$ по непрерывности.

Функция $\mu(x)$ непрерывна, поскольку множество ее значений для $x \in Q$ всюду плотно на отрезке $[0,1]$. Кроме того, $\mu'(x) = 0$ на Q (т. е. на множестве полной лебеговой меры). Следовательно, $\widetilde{\mu}(Q) = \widetilde{\mu}([0, 1]\backslash K(\widetilde{\varkappa})) = 0$, $\widetilde{\mu}(K(\widetilde{\varkappa})) = 1$. Для симметрического множества $K(\widetilde{\varkappa}; [a,b])$, заданного на отрезке $[a,b]$, стандартная сингулярная мера порождается функцией $\mu((x-a)/(b-a))$. Очевидно, что $\mu(x)+c$ (c — произвольная постоянная) порождает ту же меру $\widetilde{\mu}$.

Лемма 2.5. *Пусть $f \in C^k[a,b]$ $(k \geqslant 1)$ — функция, построенная при доказательстве леммы 2.2, для которой множество критических значений $\Xi(f)$ совпадает с симметрическим совершенным множеством $K(\widetilde{\varkappa})$. Тогда $\mu(\xi) = 2 \cdot \mathfrak{F}_{sc}(\xi; f)$ порождает стандартную сингулярную меру $\widetilde{\mu}$, связанную с $K(\widetilde{\varkappa})$.*

Доказательство. По построению функция $f(x)$ строго возрастает, поэтому $f^{-1}([0,\xi)) = [0, f^{-1}(\xi))$, $\mathcal{B}(f) = \varnothing$, $\mathfrak{F}_p(\xi; f) \equiv 0$. Множество $\mathcal{K}(f)$ критических точек функции f совпадает с симметрическим множеством K_0 ($\operatorname{mes} K_0 = 1/2$), $\mathcal{C}(f) = K_0$. По лемме 2.4 $\mathfrak{F}_{sc}(\xi; f) = \mathfrak{F}(\xi; f, K_0) = \operatorname{mes}([0, f^{-1}(\xi)) \cap K_0)$. Пусть Q_n^m — смежные с K_0 интервалы. Тогда $f^{-1}(\xi)$ принадлежит Q_n^m, если ξ принадлежит $f(Q_n^m) = \widetilde{Q}_n^m$ — интервалу, смежному с $K(\widetilde{\varkappa})$, где $m = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$; $n = 1, 2, \dots$. Таким образом, для $\xi \in \widetilde{Q}_n^m$ значение сингулярной компоненты $\mathfrak{F}_{sc}(\xi; f)$ равно мере той части множества K_0, которая лежит левее Q_n^m на отрезке $[0,1]$. В силу симметричности построения K_0 промежутки I_n^k ($k = 1, 2, \dots, 2^n$) равной длины, которые остаются после удаления множества $Q_n = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{m=1}^{2^{j-1}} Q_j^m$, содержат равные части множества K_0. Поэтому $\operatorname{mes}(K_0 \cap I_n^k) = (1/2^n) \operatorname{mes} K_0 = 2^{-n-1}$. Для Q_1^1 очевидно левее лежит единственный отрезок I_1^1. При $n \geqslant 2$ между любыми двумя соседними интервалами Q_n^{m-1} и Q_n^m ($m \geqslant 2$) находится в точности один интервал из числа составляющих множество Q_{n-1}. Следовательно, между Q_n^{m-1} и Q_n^m ($m \geqslant 2$) расположено два отрезка I_n^k. Учитывая, что левее Q_n^1 находится еще один отрезок I_n^1, получаем, что левее Q_n^m расположено ровно

$2m-1$ промежутков I_n^k. Значит,

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi;f) = \mathrm{mes}([0,\,f^{-1}(\xi))\cap K_0) = (2m-1)\,\mathrm{mes}(K_0\cap I_n^k) = \frac{2m-1}{2^{n+1}},\ \xi\in\widetilde{Q}_n^m.$$

Из определения функции $\mu(\xi)$ следует, что $\mu(\xi) = 2\cdot\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi;f)$. □

Замечание 2.1. Для функции $f_1(x)$, полученной из $f(x)$ преобразованием вида $f_1(x) = bf((x-x_0)/h) - a$, где $b > a$, $h > 0$, множество $\Xi(f_1)$ совпадает с симметрическим совершенным множеством $K(\widetilde{\varkappa};[a,b])$, заданным на отрезке $[a,b]$, а стандартная сингулярная мера для него порождается функцией $2\cdot\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi;f_1,[x_0,x_0+h])/h$.

2.3. Справедлива следующая

Лемма 2.6. *Пусть $f\in C^\infty[a,b]$ и точечная компонента $\mathfrak{F}_{\mathrm{p}}(\xi;f)$ нетривиальна. Тогда для любого $h>0$ можно указать промежуток $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ длиной меньше h и функцию $g\in C^\infty[a,b]$ такие, что $\mathrm{supp}\,(g)\subset[\alpha,\beta]$ и при любом $\varepsilon\neq0$ сингулярная компонента $\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi;f+\varepsilon g)$ функции $\mathfrak{F}(\xi;f+\varepsilon g)$ нетривиальна.*

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{F}_{\mathrm{p}}(\xi;f)$ нетривиальна, существует хотя бы одно значение ξ_0, для которого $\mathrm{mes}\,f^{-1}(\xi_0) > 0$. Множество $B = f^{-1}(\xi_0)$ является замкнутым подмножеством отрезка $[a,b]$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: множество B содержит внутреннюю точку x_0. Положим $[\alpha,\beta] = [x_0-\delta,\ x_0+\delta]$, где $\delta < \min(h/2,\ x_0-a,\ b-x_0)$ и $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]\subset B$. Построим симметрическое множество $K(\widetilde{\varkappa})$, выбирая $\varkappa_n \leqslant 16^{-n}$. По лемме 2.2 существует функция $\Phi\in C^\infty[0,1]$ такая, что $\Xi(\Phi) = K(\widetilde{\varkappa})$, а множество $\mathcal{K}(\Phi)$ ее критических точек совпадает с симметрическим множеством $K_0\subset[0,1]$, $\mathrm{mes}\,K_0 = 1/2$. Заметим, что по построению $\Phi^{(m)}(0) = \Phi^{(m)}(1) = 0$ при всех $m\geqslant1$. Определим функцию

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x\notin[\alpha,\beta],\\ \Phi((x-\alpha)/\delta), & \text{если } x\in[\alpha,x_0],\\ \gamma((\beta-x)/\delta), & \text{если } x\in(x_0,\beta],\end{cases}$$

где $\gamma(x)$ — функция, заданная формулой (2.1). Ввиду определений $\Phi(x)$ и $\gamma(x)$ имеем $\gamma((\beta-x_0)/\delta) = \gamma(1) = 1$, $\Phi((x_0-\alpha)/\delta) = \Phi(1) = 1$, т. е. функция $g(x)$ непрерывна при $x = x_0$. Учитывая равенства

$$\Phi^{(m)}(1) = \Phi^{(m)}(0) = \gamma^{(m)}(1) = \gamma^{(m)}(0) = 0,\qquad m = 1,2,\dots,$$

нетрудно убедиться, что $g\in C^\infty[a,b]$. Точка $x\in[\alpha,x_0]$ является критической для $g(x)$ в том и только том случае, если $\Phi'((x-\alpha)/\delta) = 0$, т. е. $(x-\alpha)/\delta\in K_0$. Таким образом, $\mathcal{K}(g)\cap[\alpha,x_0]$ получается из K_0 линейным преобразованием $\eta\to\alpha+\delta\eta = x$, где $\eta\in K_0$. Следовательно, $\mathrm{mes}(\mathcal{K}(g)\cap[\alpha,x_0]) = \delta/2 > 0$. Так как $f'(x)\equiv0$ при $x\in[\alpha,x_0]$, при любом $\varepsilon\neq0$ множество $\mathcal{K}(\varepsilon)$ критических точек функции $f_\varepsilon(x) = f(x)+\varepsilon g(x)$, принадлежащих отрезку $[\alpha,x_0]$, совпадает с $\mathcal{K}(g)\cap[\alpha,x_0]$. Заметим, что при $\varepsilon\neq0$ функция $f_\varepsilon(x)$ строго монотонна на $[\alpha,x_0]$. Поэтому для каждой точки разрыва ξ_k (если таковая есть) функции $\mathfrak{F}(\xi;f_\varepsilon)$ множество $f_\varepsilon^{-1}(\xi_k)\cap[\alpha,x_0]$ содержит не более одной точки. Отсюда следует, что множество $\mathcal{B}(f_\varepsilon) \cap [\alpha, x_0] = \left(\bigcup_{\xi_k} f_\varepsilon^{-1}(\xi_k) \cap [\alpha, x_0]\right)$ не более чем счетно. Учитывая, что

$$\mathcal{C}(f_\varepsilon) \cap [\alpha, x_0] = (\mathcal{K}(f_\varepsilon) \cap [\alpha, x_0]) \setminus \Big(\bigcup_{\xi_k} f_\varepsilon^{-1}(\xi_k)\Big) = \mathcal{K}(\varepsilon) \setminus (\mathcal{B}(f_\varepsilon) \cap [\alpha, x_0]),$$

получаем $\operatorname{mes}(\mathcal{C}(f_\varepsilon) \cap [\alpha, x_0]) = \operatorname{mes} \mathcal{K}(\varepsilon) = \delta/2 > 0$. Тем более $\operatorname{mes} \mathcal{C}(f + \varepsilon g) > 0$ для всех $\varepsilon \neq 0$. По следствию 2.2 сингулярная компонента $\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi; f + \varepsilon g)$ нетривиальна при $\varepsilon \neq 0$.

Случай 2: множество B не содержит внутренних точек. Пусть $B = B_0 \cup B_1$, где множество B_1 не более чем счетно, а B_0 — совершенное замкнутое множество. Как известно, такое разбиение всегда существует [8]. Очевидно, что $\operatorname{mes} B_0 = \operatorname{mes} B > 0$. Поскольку B_0 не содержит изолированных точек, для любого $x_0 \in B_0$ можно указать последовательность $x_n \in B_0$ ($x_n \neq x_0$) такую, что $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Так как $f(x_n) = f(x_0) = \xi_0$ для всех n, имеем $f'(x_0) = 0$, т. е. $B_0 \subset \mathcal{K}(f)$. Пусть $\widetilde{B}_0 \subset B_0$ — множество точек плотности B_0, т. е. точек $x \in B_0$, для которых $\lim\limits_{\delta\downarrow 0}(1/\delta)\operatorname{mes}(B_0 \cap [x, x+\delta]) = 1$. Известно, что $\operatorname{mes} \widetilde{B}_0 = \operatorname{mes} B_0$ (см. [8]). Выберем точку $x_0 \in \widetilde{B}_0 \cap (a, b)$ и рассмотрим промежуток $[x_0, x_0 + \delta]$. По определению $\widetilde{B}_0$ существует $\delta_0 > 0$ такое, что при всех $\delta \in (0, \delta_0]$ выполняется неравенство $\operatorname{mes}(B_0 \cap [x_0, x_0 + \delta]) \geqslant \delta/2$. Пусть δ_0 достаточно мало и $[x_0, x_0 + \delta_0] \subset (a, b)$, $\delta_0 < h$. Возьмем в качестве искомого отрезка $[\alpha, \beta]$ отрезок $[x_0, x_0 + \delta_0]$ и выберем точку $\eta \in (\alpha, \beta) \cap B_0$. Тогда

$$\operatorname{mes} B_0 \cap [\alpha, \eta] \geqslant (\eta - \alpha)/2 > 0.$$

Поскольку $\alpha \in B_0, \eta \in B_0$ и множество B_0 не содержит внутренних точек, открытое множество $G = [\alpha, \eta] \setminus B_0$ всюду плотно на $[\alpha, \eta]$. Представим G в виде объединения непересекающихся интервалов $G_i = (\alpha_i, \beta_i)$. Интервалы G_i не могут иметь общих концов. Действительно, если для двух из них, например G_i и G_j, оказалось $\beta_i = \alpha_j$, то β_i является изолированной точкой множества B_0, что противоречит выбору B_0. Отсюда, в частности, следует, что интервалов G_i бесконечное число. Для каждого $G_i = (\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, рассмотрим функцию $\gamma_i(x) = \gamma((x - \alpha_i)/(\beta_i - \alpha_i))$, где γ определяется формулой (2.1). Имеем $\gamma_i(x) \equiv 0$ при $x \leqslant \alpha_i$, $\gamma_i(x) \equiv 1$ при $x \geqslant \beta_i$ и $\gamma_i \in C^\infty[a, b]$.

Положим

$$g_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \gamma_i(x),$$

где коэффициенты $\mu_i > 0$ выбраны так, что

$$\mu_i \max\{|\gamma_i(x)|, |\gamma_i'(x)|, \ldots, |\gamma_i^{(i)}(x)|\} \leqslant 2^{-i}, \qquad x \in [a, b].$$

При таком выборе μ_i ряд $\sum_{i=1}^\infty \mu_i \gamma_i(x)$, а также ряды $\sum_{i=1}^\infty \mu_i \gamma_i^{(k)}(x)$ для любого заданного k сходятся равномерно на отрезке $[a, b]$. Следовательно, $g_1 \in C^\infty[a, b]$. Производные всех порядков функций $\gamma_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots$) равны нулю на B_0. Значит, $g_1^{(k)}(x) = 0$ ($k = 1, 2, \ldots$) при любом $x \in B_0$, в частности при $x = \eta$. Заметим, что $g_1(x) \equiv 0$ при $x \leqslant \alpha$ и $g_1(x) \equiv$

$\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i > 0$ при $x \geqslant \eta$. Умножая, если потребуется, $g_1(x)$ на постоянную, можно считать, что $g_1(x) = 1$ при $x = \eta$. Определим функцию

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x), & \text{если } x \leqslant \eta, \\ \gamma((\beta - x)/(\beta - \eta)), & \text{если } x > \eta. \end{cases}$$

Заметим, что $g_1(\eta) = 1$ и $\gamma((\beta - \eta)/(\beta - \eta)) = \gamma(1) = 1$. Кроме того, в точке $x = \eta$ производные всех порядков функций $g_1(x)$ и $\gamma((\beta-x)/(\beta-\eta))$ равны нулю, поэтому $g \in C^\infty[a,b]$. Поскольку $g(x) \equiv 0$ при $x \notin [\alpha,\beta]$, имеем $\operatorname{supp}(g) \subset [\alpha,\beta]$.

Фиксируем число $\varepsilon \neq 0$ (для определенности считаем $\varepsilon > 0$). Рассмотрим функцию $\Phi(x) = f(x) + \varepsilon g(x)$. По построению $f'(x) = g'(x) = 0$ для всех $x \in B_0$. Следовательно, $B_0 \subset \mathcal{K}(\Phi)$. Поскольку G всюду плотно на $[\alpha,\eta]$, для любых двух точек x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ множества $H = B_0 \cap [\alpha,\eta]$ найдется интервал $G_i = (\alpha_i, \beta_i)$ такой, что $x_1 \leqslant \alpha_i < \beta_i \leqslant x_2$. Учитывая равенства $f(x_1) = f(x_2) = \xi_0$, получаем

$$\begin{aligned}\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \varepsilon(g(x_2) - g(x_1)) &\geqslant \varepsilon\mu_i(\gamma_i(x_2) - \gamma_i(x_1)) \\ &= \varepsilon\mu_i(\gamma_i(\beta_i) - \gamma_i(\alpha_i)) = \varepsilon\mu_i > 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $\Phi(x)$ в разных точках множества H принимает различные значения. Пусть $\mathcal{D}(\Phi)$ — множество точек разрыва функции $\mathfrak{F}(\xi;\Phi)$. Тогда для любого $\xi_k \in \mathcal{D}(\Phi)$ множество $\Phi^{-1}(\xi_k) \cap H$ содержит не более одной точки, а множество $H \cap \mathcal{B}(\Phi) = H \cap (\bigcup_{\xi_k}(\Phi^{-1}(\xi_k)))$ не более чем счетно. Значит, $\operatorname{mes}(H \backslash \mathcal{B}(\Phi)) = \operatorname{mes} H$. Поскольку $H \subset B_0 \subset \mathcal{K}(\Phi)$, имеем $\mathcal{C}(\Phi) = \mathcal{K}(\Phi) \backslash \mathcal{B}(\Phi) \supset H \backslash \mathcal{B}(\Phi)$. Поэтому

$$\operatorname{mes}\mathcal{C}(\Phi) \geqslant \operatorname{mes}(H\backslash\mathcal{B}(\Phi)) = \operatorname{mes} H = \operatorname{mes}(B_0 \cap [\alpha,\eta]) \geqslant (\eta - \alpha)/2 > 0.$$

Случай $\varepsilon < 0$ рассматривается аналогично.

Таким образом, мы показали, что при любом $\varepsilon \neq 0$ верно неравенство $\operatorname{mes}\mathcal{C}(\Phi) = \operatorname{mes}\mathcal{C}(f + \varepsilon g) > 0$. По следствию 2.2 сингулярная компонента $\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(f + \varepsilon g)$ нетривиальна. □

Лемма 2.7. *Пусть $f \in C^\infty[a,b]$, сингулярная компонента $\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi;f)$ функции $\mathfrak{F}(\xi;f)$ нетривиальна, а точечная компонента $\mathfrak{F}_{\mathrm{p}}(\xi;f)$ равна нулю тождественно. Тогда для любого $h > 0$ можно указать промежуток $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ длиной меньше h и семейство функций $g(x,\varepsilon)$ $(0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$ такие, что*

(а) $\operatorname{supp}(g) \subset [\alpha,\beta]$ *при любом* ε,
(б) $g(\cdot,\varepsilon) \in C^\infty[a,b]$ *при любом* ε,
(в) $\| g(\cdot,\varepsilon) \|_{C^k[a,b]} \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$ *для любого* $k \in \mathbb{N}$,
(г) *компонента* $\mathfrak{F}_{\mathrm{p}}(\xi; f(x) + g(x,\varepsilon))$ *нетривиальна для любого* ε.

Доказательство. Функция $\mathfrak{F}(\xi;f)$ не имеет точек разрыва, поэтому $\mathcal{C}(f) = \mathcal{K}(f)$. Сингулярная компонента $\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi;f)$ нетривиальна, следовательно, $\operatorname{mes}\mathcal{C}(f) > 0$. Заметим, что $\mathcal{C}(f) = \mathcal{K}(f)$ — замкнутое подмножество отрезка $[a,b]$. Как и при доказательстве леммы 2.6 представим $\mathcal{C}(f)$ в виде объединения замкнутого совершенного множества S_0 и не более чем счетного множества S_1. Ясно, что $\operatorname{mes} S_0 > 0$. Учитывая, что $f'(x) = 0$ для всех $x \in S_0$ и любая точка $x_0 \in S_0$ является предельной для S_0, как и при доказательстве леммы 2.6, получаем, что $f''(x) = 0$ при всех $x \in S_0$. Продолжая рассуждения по индукции, приходим к выводу, что $f^{(k)}(x) = 0$

при $x \in S_0$ и $k \geqslant 1$. Выберем $\alpha, \beta \in (a,b)$, $\alpha < \beta$, так, что $\alpha \in S_0$, $\beta \in S_0$, $\beta - \alpha < h$. Для произвольного ε ($0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 = (\beta - \alpha)/2$) определим на $[\alpha + \varepsilon, \beta]$ линейную функцию $\psi(x,\varepsilon) = \frac{x-\alpha-\varepsilon}{\beta-\alpha-\varepsilon}(\beta - \alpha) + \alpha$. Очевидно, что $\psi(\alpha+\varepsilon,\varepsilon) = \alpha$, $\psi(\beta,\varepsilon) = \beta$, $\psi'_x(x,\varepsilon) = (\beta-\alpha)/(\beta-\alpha-\varepsilon) = c(\varepsilon) \leqslant 2$. Легко заметить, что функция

$$f(x,\varepsilon) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \notin [\alpha,\beta], \\ f(\alpha), & \text{если } \alpha \leqslant x \leqslant \alpha + \varepsilon, \\ f(\psi(x,\varepsilon)), & \text{если } \alpha + \varepsilon < x \leqslant \beta, \end{cases}$$

непрерывна на отрезке $[a,b]$. Покажем, что ее производные по x любого порядка тоже непрерывны. Так как $\alpha \in S_0$, имеем $\lim\limits_{x\to\alpha-0} f_x^{(k)}(x,\varepsilon) = \lim\limits_{x\to\alpha-0} f^{(k)}(x) = 0$ при всех $k \geqslant 1$. Аналогичное соотношение справедливо для $x \geqslant \beta$ и точки β. На промежутке $[\alpha, \alpha+\varepsilon]$ функция $f(x,\varepsilon)$ постоянна, поэтому $f_x^{(k)}(x,\varepsilon) \equiv 0$. При $x \in (\alpha + \varepsilon, \beta)$

$$f_x^{(k)}(x,\varepsilon) = f^{(k)}(\psi(x,\varepsilon))\, c^k(\varepsilon),$$

поэтому при любом $k \geqslant 1$

$$\lim_{x\to\alpha+\varepsilon+0} f_x^{(k)}(x,\varepsilon) = \lim_{x\to\beta-0} f_x^{(k)}(x,\varepsilon) = 0.$$

Следовательно, $f(\cdot,\varepsilon) \in C^\infty[a,b]$ при любом ε $(0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$.

Рассмотрим функцию $g(x,\varepsilon) = f(x,\varepsilon) - f(x)$. Ясно, что $\operatorname{supp} g(x,\varepsilon) \subset [\alpha,\beta]$ и $g(\cdot,\varepsilon) \in C^\infty[a,b]$. Проверим условие (в) из леммы 2.7. Определим $g_x^{(k)}(x,\varepsilon) = f_x^{(k)}(x,\varepsilon) - f^{(k)}(x)$ и положим

$$M_k(\varepsilon) = \max_{x\in[\alpha,\alpha+\varepsilon]} |f^{(k)}(x)|, \quad M_k = \max_{x\in[\alpha,\beta]} |f^{(k)}(x)|.$$

Поскольку при любом k функция $f^{(k)}(x)$ непрерывна и $f^{(k)}(\alpha) = 0$, имеем $M_k(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. На отрезке $[\alpha, \alpha + \varepsilon]$ верно соотношение

$$|g_x^{(k)}(x,\varepsilon)| = |f^{(k)}(x)| \leqslant M_k(\varepsilon),$$

а на промежутке $[\alpha + \varepsilon, \beta]$, используя определение $f(x,\varepsilon)$, можно записать

$$\begin{aligned} |g_x^{(k)}(x,\varepsilon)| &= |f^{(k)}(\psi(x,\varepsilon))\, c^k(\varepsilon) - f^{(k)}(x)| \\ &\leqslant |(f^{(k)}(\psi(x,\varepsilon)) - f^{(k)}(x))\, c^k(\varepsilon)| + (c^k(\varepsilon) - 1)|f^{(k)}(x)| \\ &\leqslant 2^k |f^{(k)}(\psi(x,\varepsilon)) - f^{(k)}(x)| + M_k(c^k(\varepsilon) - 1). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Так как $c(\varepsilon) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$, второе слагаемое правой части (2.8) стремится к нулю. Так как $|f^{(k)}(\psi(x,\varepsilon)) - f^{(k)}(x)| = |f^{(k+1)}(\tau)|\,|\psi(x,\varepsilon) - x|$, где τ лежит между $\psi(x,\varepsilon)$ и x, первое слагаемое правой части (2.8) можно оценить величиной $2^k M_{k+1}|\psi(x,\varepsilon) - x|$. Из определения $\psi(x,\varepsilon)$ легко получить, что $|\psi(x,\varepsilon) - x| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $x \in [\alpha + \varepsilon, \beta]$. Следовательно, $\|g(\cdot,\varepsilon)\|_{C^k} \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$ для любого $k \in \mathbf{N}$. Остается заметить, что функция $f(x,\varepsilon) = f(x) + g(x,\varepsilon)$ постоянна на отрезке $[\alpha, \alpha + \varepsilon]$ при любом $\varepsilon > 0$. Значит, точечная компонента $\mathfrak{F}_p(\xi; f(x) + g(x,\varepsilon))$ функции $\mathfrak{F}(\xi; f(x) + g(x,\varepsilon))$ нетривиальна. □

§ 3. О свойствах диффеоморфизмов границы области

3.1. Как уже отмечалось во введении, вопрос о существовании (обобщенных) собственных функций оператора A связан с существованием нетривиальных решений однородной задачи Дирихле (0.7) для гиперболического уравнения $L(\lambda)u \equiv \lambda u_{xx} + (1+\lambda)u_{yy} = 0$ с граничным условием $u|_\Gamma = 0$, где $\lambda \in (-1, 0)$. Положим $\lambda = -\cos^2\alpha$. Тогда характеристиками оператора $L(\lambda)$ будут прямые

$$\xi = x\sin\alpha + y\cos\alpha = \mathrm{const}, \qquad \eta = x\sin\alpha - y\cos\alpha = \mathrm{const},$$

образующие соответственно углы $-\alpha$ и α с положительным направлением оси x.

В дальнейшем пишем «точка φ границы Γ», подразумевая, что точка имеет полярные координаты $(\varphi, \rho(\varphi))$. Ясно, что точки φ_1 и φ_2 совпадают, если $\varphi_1 = \varphi_2 (\mathrm{mod} 2\pi)$. Если задан диффеоморфизм F границы Γ, то образ точки φ обозначается через $F\varphi$.

- Непрерывная функция $f(\varphi)$ *порождает диффеоморфизм* F, если при любом φ справедливо равенство $f(\varphi+2\pi) = f(\varphi) \pm 2\pi$ и одно из возможных значений угловой координаты точки $F\varphi$ равно $f(\varphi)$. Знак «+» («−») соответствует диффеоморфизмам, сохраняющим (меняющим на противоположную) ориентацию границы Γ.

Следуя [3, 10], определим диффеоморфизмы границы Γ, связанные с характеристиками оператора $L(\lambda)$. Пусть точка φ имеет декартовы координаты $x(\varphi) = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y(\varphi) = \rho(\varphi)\sin\varphi$.

Диффеоморфизмы $F_+(\alpha)$, $F_-(\alpha)$. Проведем через точку φ характеристическую прямую

$$x\sin\alpha + y\cos\alpha = x(\varphi)\sin\alpha + y(\varphi)\cos\alpha. \tag{3.1}$$

В силу строгой выпуклости и ограниченности области Ω эта прямая пересечет границу еще в одной точке (в случае касания точки совпадают), которую мы считаем образом $F_+(\alpha)\varphi$ точки φ при отображении $F_+(\alpha)$.

Обозначим через $f(\varphi, \alpha)$ угловую координату точки $F_+(\alpha)\varphi$. Как показано в [3], задавая для некоторой пары (φ_0, α_0) конкретное значение $f(\varphi_0, \alpha_0)$, можно однозначно и непрерывно продолжить $f(\varphi, \alpha)$ для всех действительных φ, α. Поскольку начало координат лежит внутри Ω, условимся считать, что $f(0,0) = \pi$. Тогда определена функция $f(\varphi, -\alpha)$, которая порождает диффеоморфизм (обозначим его через $F_-(\alpha)$) границы Γ, связанный со вторым семейством характеристик $x\sin\alpha - y\cos\alpha = \mathrm{const}$ оператора $L(\lambda)$. Оба диффеоморфизма меняют ориентацию границы Γ и являются карлемановскими (см. [12]), т. е. $F_+^2(\alpha) = F_+(\alpha)F_+(\alpha) = I$, $F_-^2(\alpha) = I$ (I — тождественное отображение).

Геометрический смысл определения диффеоморфизмов $F_+(\alpha)$, $F_-(\alpha)$ сохраняется и в случае $\alpha = k\pi$ или $\alpha = \pi/2 + k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$. Однако при этом оператор $L(\lambda)$ перестает быть гиперболическим, а характеристики двух указанных семейств совпадают.

Диффеоморфизмы $F(\alpha)$, $F^n(\alpha)$. Определим последовательность

$$\begin{aligned}
&f_1(\varphi,\alpha) = f(\varphi,\alpha),\\
&f_2(\varphi,\alpha) = f_1(f_1(\varphi,\alpha),-\alpha),\\
&\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\
&f_n(\varphi,\alpha) = f_1(f_{n-1}(\varphi,\alpha),(-1)^{n-1}\alpha) \quad (n = 3,4,\dots).
\end{aligned}$$

Функция $f_2(\varphi,\alpha)$ порождает сохраняющий ориентацию границы Г диффеоморфизм $F(\alpha) = F_-(\alpha)F_+(\alpha)$, а функция $f_{2n}(\varphi,\alpha)$ — его степень $F^n(\alpha)$.

- *Траекторией* называется ломаная линия $T(\varphi,\alpha)$, составленная из отрезков характеристических прямых (3.1), которые последовательно соединяют точки $\varphi, f_1(\varphi,\alpha),\dots,f_n(\varphi,\alpha),\dots$ (*вершины траектории*) границы Г.
- *Циклом* называется замкнутая траектория, *звеньями цикла* — отрезки, составляющие траекторию, *вершинами цикла* — точки границы Г, в которых пересекаются звенья.

Если цикл имеет $2n$ звеньев, то согласно определению каждая его вершина является неподвижной точкой диффеоморфизма $F^n(\alpha)$.

Замечание 3.1. В простейшем случае, когда Ω — круг с центром в начале координат, функции $f_1,\dots,f_n,\dots$ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
&f_1(\varphi,\alpha) = \pi - \varphi - 2\alpha,\\
&\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\
&f_{2n-1}(\varphi,\alpha) = \pi - \varphi - 2(2n-1)\alpha,\\
&f_{2n}(\varphi,\alpha) = \varphi + 4n\alpha,\\
&\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots
\end{aligned}$$

Свойства функций $f_n(\varphi,\alpha)$ подробно изучались в [3], где, в частности, доказана следующая

Лемма 3.1 [3]. *Если граница Г класса C^∞ имеет положительную кривизну в каждой точке, функции $f_n(\varphi,\alpha)$ бесконечно дифференцируемы по φ, α и обладают следующими свойствами:*

(а) *при любом выборе φ, α справедливы равенства*

(i) $f_{2n-1}(\varphi+2\pi,\alpha) = f_{2n-1}(\varphi,\alpha) - 2\pi,$
$f_{2n}(\varphi+2\pi,\alpha) = f_{2n}(\varphi,\alpha) + 2\pi,$

(ii) $f_{2n-1}(\varphi,\alpha+\pi) = f_{2n-1}(\varphi,\alpha) - 2(2n-1)\pi,$
$f_{2n}(\varphi,\alpha+\pi) = f_{2n}(\varphi,\alpha) + 4n\pi;$

(б) *существуют положительные постоянные q_n, Q_n такие, что при всех φ, α справедливы следующие оценки производных:*

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} f_{2n-1}(\varphi,\alpha) \leqslant -q_{2n-1}, \qquad \frac{\partial}{\partial\alpha} f_{2n-1}(\varphi,\alpha) \leqslant -Q_{2n-1} \leqslant -Q_1,$$
$$\frac{\partial}{\partial\varphi} f_{2n}(\varphi,\alpha) \geqslant q_{2n}, \qquad \frac{\partial}{\partial\alpha} f_{2n}(\varphi,\alpha) \geqslant Q_{2n} \geqslant Q_1.$$

Замечание 3.2. Если граница Г аналитическая, то функции $f_n(\varphi,\alpha)$ аналитические. Если граница Г принадлежит C^k ($k \geqslant 3$), то существуют непрерывные производные функции $f(\varphi,\alpha)$ до порядка $k-1$ включительно, а производные порядка k имеют разрывы для тех значений φ и α, для которых касательная в точке φ к границе Г образует угол $\beta = -\alpha \pmod{\pi}$ с положительным направлением оси x.

- *Числом вращения диффеоморфизма* $F(\alpha)$, сохраняющего ориентацию границы Г, называется число $\tau(\alpha) = \lim_{n\to\infty}(f_{2n}(\varphi,\alpha) - \varphi)/2n\pi$.

Указанный предел не зависит от выбора значения φ. Число вращения $\tau(\alpha)$ как функция α непрерывно по α (см. [13]) и не убывает в силу неравенств $\frac{\partial}{\partial\alpha} f_{2n}(\varphi,\alpha) \geqslant Q_1 > 0$.

3.2. Наиболее важны для изучения спектральных свойств оператора A те значения α, для которых число $\tau(\alpha)$ рациональное. Пусть $\tau(\alpha) = k/N$, где $k \in \mathbf{Z}$, $N \in \mathbf{N}$. Как известно (см. [13]), в этом случае диффеоморфизм $F^N(\alpha)$ имеет неподвижные точки φ, в которых

$$f_{2N}(\varphi,\alpha) = \varphi + 2k\pi. \tag{3.2}$$

Функции $\alpha_N^k(\varphi)$. Рассмотрим (3.2) как уравнение относительно α при заданном φ и произвольно фиксированных $N \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}$. Поскольку $\frac{\partial}{\partial\alpha} f_{2N}(\varphi,\alpha) \geqslant Q_1 > 0$, для данного φ уравнение (3.2) имеет единственное решение α; тем самым определена функция от φ, которую мы обозначим как $\alpha_N^k(\varphi)$.

Лемма 3.2. *Функции $\alpha_N^k(\varphi)$ бесконечно дифференцируемы, периодические с периодом 2π и обладают следующими свойствами:*

(а) $\alpha_N^k(\varphi) \equiv \alpha_M^i(\varphi)$, *если* $k/N = i/M$,

(б) $\alpha_N^k(\varphi) = \alpha_N^i(\varphi) + l\pi$, *если* $k = 2Nl + i$, *где* $l, i \in \mathbf{Z}$,

(в) *множества значений функций $\alpha_N^k(\varphi)$ и $\alpha_M^i(\varphi)$ не пересекаются, если $k/N \neq i/M$, причем если $k/N < i/M$, то $\alpha_N^k(\varphi_1) < \alpha_M^i(\varphi_2)$ при любом выборе значений φ_1, φ_2,*

(г) $\alpha_N^{-k}(\varphi) \equiv -\alpha_N^k(\varphi)$, $\alpha_N^k(\varphi) \equiv \pi - \alpha_N^{2N-k}(\varphi)$.

Доказательство. Бесконечная дифференцируемость функций $\alpha_N^k(\varphi)$ вытекает из леммы 3.1 и теоремы о неявной функции, примененной к уравнению (3.2).

Для доказательства периодичности функций $\alpha_N^k(\varphi)$ достаточно заметить, что если $\varphi_1 = \varphi + 2\pi$, то в силу леммы 3.1

$$\begin{aligned} f_{2N}(\varphi_1, \alpha_N^k(\varphi)) = f_{2N}(\varphi + 2\pi, \alpha_N^k(\varphi)) &= f_{2N}(\varphi, \alpha_N^k(\varphi)) + 2\pi \\ &= \varphi + 2\pi + 2k\pi = \varphi_1 + 2k\pi. \end{aligned}$$

Поскольку уравнение (3.2) при заданном φ_1 имеет единственное решение, получаем $\alpha_N^k(\varphi_1) = \alpha_N^k(\varphi)$.

(а) Достаточно рассмотреть случай $M = lN$, $i = lk$, где $l \in \mathbf{N}$. Из определения функций $f_{2n}(\varphi,\alpha)$ имеем $f_{2(n+j)}(\varphi,\alpha) = f_{2n}(f_{2j}(\varphi,\alpha),\alpha)$. Если $f_{2N}(\varphi,\alpha) = \varphi + 2k\pi$, то

$$\begin{aligned} f_{4N}(\varphi,\alpha) = f_{2N}(f_{2N}(\varphi,\alpha),\alpha) &= f_{2N}(\varphi + 2k\pi, \alpha) \\ &= f_{2N}(\varphi,\alpha) + 2k\pi = \varphi + 4k\pi \end{aligned}$$

и, как легко убедиться по индукции, $f_{2Nl}(\varphi,\alpha) = \varphi + 2kl\pi$, т. е. верно равенство $\alpha_N^k(\varphi) = \alpha_{Nl}^{kl}(\varphi)$.

(б) По лемме 3.1 имеем

$$\begin{aligned} f_{2N}(\varphi, l\pi + \alpha_N^i(\varphi)) &= f_{2N}(\varphi, \alpha_N^i(\varphi)) + 4Nl\pi \\ &= \varphi + 2(2Nl + i)\pi. \end{aligned}$$

Следовательно, если $k = 2Nl + i$, то $\alpha_N^k(\varphi) = l\pi + \alpha_N^i(\varphi)$.

(в) Пусть $\alpha_N^k(\varphi_0) = \alpha_0$ для некоторого φ_0. Нетрудно заметить, что для подпоследовательности $f_{2Nm}(\varphi_0, \alpha_0)$ последовательности $f_{2n}(\varphi_0, \alpha_0)$

$$\tau(\alpha_0) = \lim_{m\to\infty} \frac{f_{2Nm}(\varphi_0, \alpha_0) - \varphi_0}{2\pi N m} = k/N,$$

где $\tau(\alpha_0)$ — число вращения диффеоморфизма $F(\alpha_0)$. Следовательно, множество значений функции $\alpha_N^k(\varphi)$ совпадает с прообразом $\tau^{-1}(k/N)$ (не обязательно одноточечным!). Отсюда множества значений функций $\alpha_N^k(\varphi)$ и $\alpha_M^i(\varphi)$ не пересекаются, если $k/N \neq i/M$. Поскольку функция $\tau(\alpha)$ не убывает, при $k/N < i/M$ для любых $\alpha_1 \in \tau^{-1}(k/N)$ и $\alpha_2 \in \tau^{-1}(i/M)$ справедливо неравенство $\alpha_1 < \alpha_2$. Значит, $\alpha_N^k(\varphi_1) < \alpha_M^i(\varphi_2)$ при любом выборе значений φ_1 и φ_2.

(г) Ввиду выбора $f(0,0) = \pi$ и неравенства $f'_\varphi(\varphi, \alpha) < 0$, справедливо равенство $f(\pi,.0) = 0$. Поскольку функция $f(\varphi, \alpha)$ порождает диффеоморфизм $F_+(\alpha)$, для которого $F_+^2 = I$, имеем $f(f(\varphi,\alpha),\alpha) - \varphi = 2m\pi$, где $m \in \mathbf{Z}$. В силу непрерывности левой части последнего равенства по φ и α число m не зависит от φ и α. Так как $f(f(0,0),0) = 0$, получаем $m = 0$. Отсюда $f_1(f_1(\varphi,\alpha),\alpha) \equiv \varphi$. В частности, $f_2(\varphi, 0) = f_1(f_1(\varphi,0),0) \equiv \varphi$, т. е. $\alpha_1^0(\varphi) \equiv 0$.

Покажем, что при всех φ, α, $n \in \mathbf{N}$ выполняется тождество

$$f_{2n}(f_{2n}(\varphi,\alpha), -\alpha) \equiv \varphi.$$

При $n = 1$ имеем

$$f_2(f_2(\varphi,\alpha),-\alpha) = f_1(f_1(f_1(f_1(\varphi,\alpha),-\alpha),-\alpha),\alpha) = f_1(f_1(\varphi,\alpha),\alpha) \equiv \varphi.$$

Далее применим индукцию с учетом равенств

$$f_{2n+2}(\varphi,\alpha) = f_2(f_{2n}(\varphi,\alpha),\alpha) = f_{2n}(f_2(\varphi,\alpha),\alpha).$$

Действительно, если тождество справедливо для f_{2n}, то

$$\begin{aligned} f_{2n+2}(f_{2n+2}(\varphi,\alpha),-\alpha) &= f_2(f_{2n}(f_{2n}(f_2(\varphi,\alpha),\alpha),-\alpha),-\alpha) \\ &= f_2(f_2(\varphi,\alpha),-\alpha) \equiv \varphi. \end{aligned}$$

Если $f_{2N}(\varphi, \alpha_N^k(\varphi)) = \varphi + 2k\pi$, то

$$\begin{aligned} f_{2N}(\varphi, -\alpha_N^k(\varphi)) &= f_{2N}(\varphi + 2k\pi, -\alpha_N^k(\varphi)) - 2k\pi \\ &= f_{2N}(f_{2N}(\varphi, \alpha_N^k(\varphi)), -\alpha_N^k(\varphi)) - 2k\pi = \varphi - 2k\pi. \end{aligned}$$

Следовательно, $\alpha_N^{-k}(\varphi) \equiv -\alpha_N^k(\varphi)$. Наконец,

$$f_{2N}(\varphi, \pi - \alpha_N^k(\varphi)) = f_{2N}(\varphi, -\alpha_N^k(\varphi)) + 4N\pi = \varphi + 2(2N-k)\pi,$$

откуда $\alpha_N^{2N-k}(\varphi) \equiv \pi - \alpha_N^k(\varphi)$. □

Следствие 3.1. *Для любых границы* Γ *и* $N \in \mathbf{N}$ *верно тождество* $\alpha_N^N(\varphi) \equiv \pi/2$.

Доказательство. По свойству (г) (лемма 3.2) имеем $\alpha_N^N(\varphi) \equiv \pi - \alpha_N^N(\varphi)$. $\square$

Замечание 3.3. В дальнейших рассуждениях существенную роль играют те значения $\lambda = -\cos^2\alpha$, при которых существуют нетривиальные решения из $L_2(\Omega)$ задачи Дирихле (0.7), что возможно, только когда число вращения $\tau(\alpha)$ диффеоморфизма $F(\alpha)$ рационально [14]. Очевидно, можно ограничиться для α промежутком $(0,\pi/2)$. Каждое такое число $\alpha \in (0,\pi/2)$ должно принадлежать множеству значений какой-либо функции $\alpha_N^k(\varphi)$. Как следует из леммы 3.2, промежутку $(0,\pi/2)$ принадлежат значения функций $\alpha_N^k(\varphi)$ только при $N \geqslant 2$, $k = 1,\dots,N-1$. Далее мы будем рассматривать только такие значения k, считая $N \geqslant 2$, НОД $(N,k) = 1$.

Замечание 3.4. Для аналитической границы Γ функции $\alpha_N^k(\varphi)$ аналитические. Если граница Γ принадлежит C^k $(k \geqslant 3)$, то $\alpha_N^k(\varphi)$ имеют непрерывные производные до порядка $(k-1)$.

Замечание 3.5. Поскольку функции $\alpha_N^k(\varphi)$ периодические с периодом 2π, можно считать их заданными в точках границы Γ и, в частности, рассматривать на Γ различные подмножества $\Gamma(\xi) = \{\varphi \mid \alpha_N^k(\varphi) < \xi\}$.

Лемма 3.3. *Для любой функции $\alpha_N^k(\varphi)$ при всех φ и $m \in \mathbb{N}$ справедливы равенства $\alpha_N^k(f_m(\varphi, \pm\alpha_N^k(\varphi))) = \alpha_N^k(\varphi)$.*

Доказательство. Проверим равенство при $m = 1$. Используя установленное тождество $f_1(f_1(\varphi,\alpha),\alpha) \equiv \varphi$ и определение функций $f_n(\varphi,\alpha)$, нетрудно установить для всех α, φ и n равенства

$$\begin{aligned} f_n(f_1(\varphi,\alpha),\alpha) &= f_{n-1}(\varphi,-\alpha), \\ f_n(f_1(\varphi,-\alpha),\alpha) &= f_{n+1}(\varphi,-\alpha); \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} f_1(f_{2n-1}(\varphi,-\alpha),\alpha) &= f_{2n}(\varphi,-\alpha), \\ f_1(f_{2n}(\varphi,-\alpha),\alpha) &= f_{2n-1}(\varphi,-\alpha). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Пусть φ_0 выбрано произвольно и $\alpha_0 = \alpha_N^k(\varphi_0)$. Тогда из определения $\alpha_N^k(\varphi)$ следует, что $f_{2N}(\varphi_0,\alpha_0) = \varphi_0 + 2k\pi$, а при доказательстве леммы 3.2 было установлено, что $f_{2N}(\varphi_0,-\alpha_0) = \varphi_0 - 2k\pi$. Используя эти соотношения и равенства леммы 3.1, получаем

$$\begin{aligned} f_{2N}(f_1(\varphi_0,\alpha_0),\alpha_0) &= f_{2N-1}(\varphi_0,-\alpha_0) = f_1(f_1(f_{2N-1}(\varphi_0,-\alpha_0),\alpha_0),\alpha_0) \\ &= f_1(f_{2N}(\varphi_0,-\alpha_0),\alpha_0) = f_1(\varphi_0 - 2k\pi,\alpha_0) = f_1(\varphi_0,\alpha_0) + 2k\pi. \end{aligned}$$

Следовательно, $\alpha_N^k(f_1(\varphi_0,\alpha_0)) = \alpha_0 = \alpha_N^k(\varphi_0)$. Аналогичным образом рассматривая $f_1(\varphi_0,-\alpha_0)$, получаем

$$\begin{aligned} f_{2N}(f_1(\varphi_0,-\alpha_0),\alpha_0) &= f_{2N+1}(\varphi_0,-\alpha_0) = f_1(f_{2N}(\varphi_0,-\alpha_0),-\alpha_0), \\ &= f_1(\varphi_0 - 2k\pi,-\alpha_0) = f_1(\varphi_0,-\alpha_0) + 2k\pi. \end{aligned}$$

Отсюда $\alpha_N^k(f_1(\varphi_0,-\alpha_0)) = \alpha_0 = \alpha_N^k(\varphi_0)$. Учитывая определение функций $f_n(\varphi,\alpha)$, нетрудно теперь установить равенство $\alpha_N^k(f_m(\varphi,\pm\alpha_N^k(\varphi))) = \alpha_N^k(\varphi)$ индукцией по m. $\square$

Следствие 3.2. *Если φ_0 — критическая точка функции $\alpha_N^k(\varphi)$, то критическими для $\alpha_N^k(\varphi)$ будут также точки $f_m(\varphi_0, \pm\alpha_N^k(\varphi_0))$ при всех $m \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Обозначим для краткости $\alpha(\varphi) = \alpha_N^k(\varphi)$. Дифференцируя равенство $\alpha(f_m(\varphi, \alpha(\varphi))) = \alpha(\varphi)$ по φ в точке φ_0, находим

$$\alpha'(f_m(\varphi_0, \alpha(\varphi_0)))\Big(\frac{\partial f_m}{\partial \varphi} + \alpha'(\varphi_0)\frac{\partial f_m}{\partial \alpha}\Big) = \alpha'(\varphi_0).$$

Учитывая, что $\frac{\partial f_m}{\partial \varphi} \neq 0$ и $\alpha'(\varphi_0) = 0$ в критической точке φ_0, получаем $\alpha'(f_m(\varphi_0, \alpha(\varphi_0))) = 0$. Аналогично рассматривается $f_m(\varphi_0, -\alpha(\varphi_0))$. □

Лемма 3.4. *Для фиксированной функции $\alpha_N^k(\varphi)$ определим функции $g_n(\varphi) = f_n(\varphi, \alpha_N^k(\varphi))$, $\tilde{g}_n(\varphi) = f_n(\varphi, -\alpha_N^k(\varphi))$ $(n = 1, 2, \dots, 2N)$. Существует постоянная $Q(N,k) > 0$ такая, что при всех φ выполняются неравенства*

(а) $g_n'(\varphi) \leqslant -Q(N,k)$, $\tilde{g}_n'(\varphi) \leqslant -Q(N,k)$, *если* $n = 2m-1$,

(б) $g_n'(\varphi) \geqslant Q(N,k)$, $\tilde{g}_n'(\varphi) \geqslant Q(N,k)$, *если* $n = 2m$.

Доказательство. Обозначим $\alpha(\varphi) = \alpha_N^k(\varphi)$. Воспользуемся схемой рассуждений, приведенной в [3]. По определению функции $\alpha(\varphi)$ имеем $g_{2N}(\varphi) = f_{2N}(\varphi, \alpha_N^k(\varphi)) = \varphi + 2k\pi$, поэтому $g_{2N}'(\varphi) \equiv 1$. Для нечетных n $(n = 2m-1)$ при любом φ справедливо равенство $g_{2m-1}(\varphi + 2\pi) = f_{2m-1}(\varphi + 2\pi, \alpha_N^k(\varphi + 2\pi)) = f_{2m-1}(\varphi, \alpha_N^k(\varphi)) - 2\pi = g_{2m-1}(\varphi) - 2\pi$, а для четных значений n $(n = 2m)$ — равенство $g_{2m}(\varphi + 2\pi) = q_{2m}(\varphi) + 2\pi$. Следовательно, производные $g_n'(\varphi)$ периодичны с периодом 2π. Заметим, что

$$g_{2m}(\varphi) = f_1(g_{2m-1}(\varphi), -\alpha(\varphi)), \quad g_{2m+1}(\varphi) = f_1(g_{2m}(\varphi), \alpha(\varphi)). \tag{3.5}$$

Предположим, что в точке φ_0 выполняется неравенство $g_1'(\varphi_0) \geqslant 0$, которое означает

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}(\varphi_0, \alpha(\varphi_0)) + \alpha'(\varphi_0)\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}(\varphi_0, \alpha(\varphi_0)) \geqslant 0.$$

По лемме 3.1

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \leqslant -q_1 < 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \leqslant -Q_1 < 0,$$

вследствие чего $\alpha'(\varphi_0) < 0$. Дифференцируя функцию $g_2(\varphi)$ в точке φ_0, получаем

$$g_2'(\varphi_0) = \frac{d}{d\varphi} f_1(g_1(\varphi), -\alpha(\varphi))\Big|_{\varphi=\varphi_0} = g_1'(\varphi_0)\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} - \alpha'(\varphi_0)\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} < 0,$$

так как по предположению $g_1'(\varphi_0) \geqslant 0$, а значения $\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}$, $\alpha'(\varphi_0)$ и $\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}$ отрицательны. Повторяя рассуждения и используя (3.5), получим $g_{2m-1}'(\varphi_0) \geqslant 0$, $q_{2m}'(\varphi_0) < 0$. В частности, $g_{2N}'(\varphi_0) < 0$, что противоречит тождеству $g_{2N}'(\varphi) \equiv 1$. Следовательно, функция $g_1'(\varphi)$ строго отрицательна, и в силу ее периодичности существует постоянная $q = q(N,k) > 0$ такая, что

$g_1'(\varphi) < -q$. Аналогично доказывается оценка $\tilde{g}_1'(\varphi)$. Будем считать, что постоянная q является общей для g_1 и $\tilde{g}_1$. Для оценки производных остальных функций заметим, что

$$g_{2m}(\varphi) = \tilde{g}_1(g_{2m-1}(\varphi)), \qquad g_{2m+1}(\varphi) = g_1(g_{2m}(\varphi)).$$

Первое равенство вытекает из цепочки соотношений

$$\begin{aligned} g_{2m}(\varphi) &= f_1(f_{2m-1}(\varphi, \alpha(\varphi)), -\alpha(\varphi)) \\ &= f_1(f_{2m-1}(\varphi, \alpha(\varphi)), -\alpha(f_{2m-1}(\varphi, \alpha(\varphi)))) = \tilde{g}_1(g_{2m-1}(\varphi)), \end{aligned}$$

так как $\alpha(\varphi) = \alpha_N^k(\varphi) = \alpha_N^k(f_{2m-1}(\varphi, \alpha_N^k(\varphi)))$ по лемме 3.3. Точно так же устанавливается второе равенство. Дифференцируя эти равенства по φ, нетрудно по индукции доказать, что $g_{2m}'(\varphi) \geqslant q^{2m}$, $g_{2m+1}'(\varphi) \leqslant -q^{2m+1}$. Аналогичные соотношения и неравенства верны для функций $\tilde{g}_n(\varphi)$. Ясно, что $q \leqslant 1$, в противном случае $g_{2N}'(\varphi) \geqslant q^{2N} > 1$. Следовательно, в качестве постоянной $Q(N,k)$, общей для всех функций, можно взять q^{2N}. □

Лемма 3.5. *Функции $g_1(\varphi)$ и $\tilde{g}_1(\varphi)$ порождают соответственно диффеоморфизмы G_+ и G_- границы Γ, которые меняют ориентацию Γ и являются карлемановскими. Композиция $G = G_-G_+$ является сохраняющим ориентацию границы Γ карлемановским диффеоморфизмом таким, что $G^N = I$.*

Доказательство. Поскольку $g_1'(\varphi) \leqslant -Q(N,k) < 0$, $g_1(\varphi + 2\pi) = g_1(\varphi) - 2\pi$, функция g_1 действительно порождает некоторый меняющий ориентацию Γ диффеоморфизм G_+. Заметим, что справедливы равенства $g_1(g_1(\varphi)) = f_1(f_1(\varphi, \alpha_N^k(\varphi)), \alpha_N^k(f_1(\varphi, \alpha_N^k(\varphi)))) = f_1(f_1(\varphi, \alpha_N^k(\varphi)), \alpha_N^k(\varphi)) = \varphi$, поэтому $G_+^2 = I$. Аналогично доказывается утверждение для G_-. Из доказательства леммы 3.4 следует, что G порождается функцией $g_2(\varphi) = \tilde{g}_1(g_1(\varphi))$, а его степень G^N — функцией $g_{2N}(\varphi) \equiv \varphi + 2k\pi$, поэтому $G^N = I$. □

3.3. Рассмотрим траекторию $T(\varphi, \alpha_N^k(\varphi))$ ($\varphi \in \Gamma$). Последовательными вершинами траектории оказываются точки $\varphi, G_+\varphi, G\varphi, \dots, G_+G^{N-1}\varphi$ границы Γ. Поскольку $G^N = I$, имеем $G^N\varphi = \varphi$, т. е. траектория $T(\varphi, \alpha_N^k(\varphi))$ оказывается циклом при любом выборе φ.

- Цикл *вырожденный*, если среди вершин φ, $G_+\varphi$, $G\varphi, \dots, G_+G^{N-1}\varphi$ есть хотя бы две совпадающие.

Лемма 3.6. *Для любого вырожденного цикла среди его вершин φ, $G_+\varphi, G\varphi, \dots, G_+G^{N-1}\varphi$ имеется ровно N различных, причем среди них есть две вершины, каждая из которых является неподвижной точкой диффеоморфизма G_+ или G_-. При заданных N, k среди циклов $T(\varphi, \alpha_N^k(\varphi))$ существуют ровно два вырожденных.*

Доказательство. Учитывая, что $G_+^2 = I$, $G_-^2 = I$, и используя (3.3), (3.4), нетрудно установить при любом $m \in \mathbb{Z}$ следующие равенства:

$$\begin{aligned} G^{-1} &= G_+G_-, & G^{-m} &= (G_+G_-)^m, \\ G_+G^m &= G^{-m}G_+, & G_-G^m &= G^{-m+1}G_+. \end{aligned}$$

Покажем, что для любого цикла $T(\varphi, \alpha_N^k(\varphi))$ вершины $G^m\varphi$ и $G^l\varphi$ не могут совпадать, если $0 \leqslant m < l < N$. Действительно, если $G^m\varphi = G^l\varphi$, то $G^{l-m}\varphi = \varphi$ и $f_{2N_1}(\varphi, \alpha_N^k(\varphi)) = \varphi + 2j\pi$, где $N_1 = l - m < N$, $j \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\alpha_{N_1}^j(\varphi) = \alpha_N^k(\varphi)$. По лемме 3.2 последнее равенство возможно только при $j/N_1 = k/N$. Поскольку $N_1 < N$, имеем НОД$(N, k) > 1$, что противоречит выбору N и k. Так же доказывается, что при указанных условиях на m и l не может выполняться равенство $G_+G^m\varphi = G_+G^l\varphi$. Пусть совпадающими оказались вершины цикла $G_+G^m\varphi = G^l\varphi$. Всегда можно считать, что $m \geqslant l$, в противном случае применим G_+ к последнему равенству. Если $m - l = 2j$, то, применяя G^j к равенству $G_+G^m\varphi = G^l\varphi$, получим $G^jG_+G^m\varphi = G_+G^{m-j}\varphi = G^{l+j}\varphi$. Поскольку $m - j = l + j$, вершина $G^{l+j}\varphi$ является неподвижной точкой диффеоморфизма G_+. Аналогично если $m - l = 2j + 1$, то

$$G^{j+1}G_+G^m\varphi = G_+G^{-1}G^{m-j}\varphi = G_-G^{m-j}\varphi = G^{l+j+1}\varphi,$$

и, так как $m - j = l + j + 1$, вершина $G^{m-j}\varphi$ является неподвижной точкой диффеоморфизма G_-.

Пусть для определенности начальная вершина φ цикла является неподвижной точкой диффеоморфизма G^+. Применяя G^{-m} $(m = 1, 2, \ldots, N - 1)$ к равенству $G_+\varphi = \varphi$ и принимая во внимание соотношения $G^N\varphi = \varphi$, $G^{-m}\varphi = G^{-m}G^N\varphi = G^{N-m}\varphi$, получаем $G^{N-m}\varphi = G^{-m}\varphi = G^{-m}G_+\varphi = G_+G^m\varphi$. Следовательно, совпадающими оказываются вершины $G^{N-m}\varphi$ и $G_+G^m\varphi$. Если N четное, то при $m = N/2$ справедливо равенство $G^m\varphi = G_+G^m\varphi$, т. е. вершина $G^m\varphi$ — неподвижная точка диффеоморфизма G_+. Если $N = 2m - 1$, то $G_-G^m\varphi = G_-(G_-G_+)G^{m-1}\varphi = G_+G^{m-1}\varphi = G^{N-m+1}\varphi = G^m\varphi$, т. е. вершина $G^m\varphi$ является неподвижной точкой диффеоморфизма G_-. Таким образом, среди N различных вершин вырожденного цикла ровно две являются неподвижными точками диффеоморфизмов G_+, G_-. Аналогично рассматривается случай, когда начальная вершина является неподвижной точкой относительно G_-.

Как показано в [12], каждый меняющий ориентацию Γ диффеоморфизм имеет ровно две неподвижные точки. Касательная к Γ в точке φ образует с положительным направлением оси x угол $-\alpha_N^k(\varphi)$, если $G_+\varphi = \varphi$, и угол $\alpha_N^k(\varphi)$, если $G_-\varphi = \varphi$. Поскольку $0 < \alpha_N^k(\varphi) < \pi/2$ при $1 \leqslant k \leqslant N - 1$, заключаем, что неподвижные точки диффеоморфизмов G_+, G_- совпасть не могут. Значит, вырожденных циклов в точности два. □

Лемма 3.7. *Пусть* $N \geqslant 2$, НОД$(N, k) = 1, 1 \leqslant k \leqslant N - 1$. *Множество*

$$G(N, k) = \{I, G_+, G = G_-G_+, G_+G, \ldots, G_+G^{N-1}\},$$

состоящее из $2N$ *диффеоморфизмов, построенных в леммах* 3.4, 3.5, *является группой с порождающими элементами* G_+ *и* G_-.

Доказательство. Умножая равенство $G^N = (G_-G_+)G^{N-1} = I$ на G_- и учитывая, что $G_-^2 = I$, получаем $G_- = G_+G^{N-1} \in G(N, k)$. По лемме 3.6 вершины любого невырожденного цикла не могут совпасть, поэтому все входящие в $G(N, k)$ диффеоморфизмы различны. Из соотношений, использованных при доказательстве леммы 3.6, следует, что

$(G_+G^m)^2 = (G^{-m}G_+)(G_+G^m) = I$ и $G^mG^{N-m} = I$, т. е. все обратные диффеоморфизмы содержатся в $G(N,k)$. Аналогично проверяется, что множество $G(N,k)$ замкнуто относительно операции суперпозиции диффеоморфизмов. Тот факт, что G_+ и G_- являются порождающими, следует из определения G. □

- Группа $G(N,k)$ для заданных N,k называется *карлемановской группой диффеоморфизмов границы* Γ, *порожденной характеристиками семейства гиперболических операторов* $L(\lambda)$.

Лемма 3.8. *Пусть* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1}$ *— различные вершины одного из вырожденных циклов, соответствующих заданным* N,k. *Тогда*

$$(\alpha_N^k(\varphi))' = 0 \quad \text{при } \varphi = \varphi_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, N-1).$$

Доказательство. Пусть $\alpha(\varphi) = \alpha_N^k(\varphi)$, φ_0 — неподвижная точка диффеоморфизма G_+ и $\alpha_0 = \alpha(\varphi_0)$. Тогда для порождающей G_+ функции $g_1(\varphi) = f_1(\varphi, \alpha_N^k(\varphi)) = f_1(\varphi, \alpha(\varphi))$ в точке φ_0 справедливо равенство $g_1(\varphi_0) = f_1(\varphi_0, \alpha(\varphi_0)) = \varphi_0 + 2l\pi$, где $l \in \mathbb{Z}$. Дифференцируя равенство $g_1(g_1(\varphi)) = \varphi$ (см. доказательство леммы 3.5) при $\varphi = \varphi_0$, находим

$$g_1'(g_1(\varphi_0))g_1'(\varphi_0) = g_1'(\varphi_0 + 2l\pi)g_1'(\varphi_0) = (g_1'(\varphi_0))^2 = 1.$$

Учитывая неравенство $g_1'(\varphi) < 0$, получаем $g_1'(\varphi_0) = -1$, т. е.

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}(\varphi_0, \alpha_0) + \alpha'(\varphi_0)\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}(\varphi_0, \alpha_0) = -1. \tag{3.6}$$

Рассмотрим диффеоморфизм $F_+(\alpha_0)$, порождаемый функцией $f_1(\varphi, \alpha_0)$. Очевидно, что φ_0 является также неподвижной точкой диффеоморфизма $F_+(\alpha_0)$. Поэтому так же, как и для $g_1(\varphi)$, справедливо равенство $\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}(\varphi_0, \alpha_0) = -1$, сравнивая которое с (3.6), ввиду условия $\frac{\partial f_1}{\partial \alpha}(\varphi_0, \alpha_0) \neq 0$ находим $\alpha'(\varphi_0) = 0$. Тогда по следствию 3.2 $\alpha'(\varphi_i) = 0$ в остальных точках φ_i. □

- *Открытой (замкнутой) дугой* (φ_1, φ_2) $([\varphi_1, \varphi_2])$ границы Γ $(\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_1 + 2\pi)$ называется множество точек φ границы Γ, угловые координаты φ которых удовлетворяют неравенствам $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ $(\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2)$.

Касательный вектор $\tilde{\nu}(\varphi)$ к границе Γ в точке φ с декартовыми координатами $x(\varphi), y(\varphi)$ имеет вид $\tilde{\nu}(\varphi) = (x'(\varphi), y'(\varphi))$. Нормированный вектор обозначим через ν $(\nu(\varphi) = \tilde{\nu}(\varphi)\,|\tilde{\nu}(\varphi)|^{-1})$, а угол, образованный вектором $\nu(\varphi)$ с положительным направлением оси x, — через $\beta(\varphi)$. Поскольку кривизна границы Γ в каждой точке положительна, для функции $\beta'(\varphi)$ имеем $\beta'(\varphi) \geqslant \delta > 0$. При обходе Γ в положительном направлении вектор $\nu(\varphi)$ совершает поворот на 2π, т. е. $\beta(\varphi + 2\pi) = \beta(\varphi) + 2\pi$. Выбор значения $\beta(\varphi_0) = \beta_0$ в фиксированной точке φ_0 однозначно определяет функцию $\beta(\varphi)$ для всех действительных φ; в дальнейшем мы будем уточнять этот выбор.

Лемма 3.9. *При заданных* N,k *неподвижные точки диффеоморфизмов* G_+ *и* G_- *чередуются при обходе границы* Γ.

Доказательство. Пусть φ_0^+ и φ_1^+ — неподвижные точки диффеоморфизма G_+, причем их угловые координаты выбраны так, что $\varphi_0^+ < \varphi_1^+ < \varphi_0^+ + 2\pi$. Рассмотрим функцию

$$\gamma_+(\varphi) = x'(\varphi)\sin\alpha_N^k(\varphi) + y'(\varphi)\cos\alpha_N^k(\varphi) = |\tilde{\nu}(\varphi)|\sin(\beta(\varphi) + \alpha_N^k(\varphi)).$$

Если $\gamma_+(\varphi) = 0$, то $\beta(\varphi) = -\alpha_N^k(\varphi)$ или $\beta(\varphi) = \pi - \alpha_N^k(\varphi)(\bmod 2\pi)$, т. е. φ является неподвижной точкой диффеоморфизма G_+. Следовательно, $\gamma_+(\varphi_0^+) = \gamma_+(\varphi_1^+) = 0$ и других таких значений на промежутке $[\varphi_0^+, \varphi_0^+ + 2\pi)$ нет. Возможны два случая.

Случай 1: $\beta(\varphi_0^+) = -\alpha_N^k(\varphi_0^+)(\bmod 2\pi)$. Учитывая, что $0 < \alpha_N^k(\varphi) < \pi/2$ и функция $\beta(\varphi)$ строго возрастает на интервале $(\varphi_0^+, \varphi_1^+)$, и считая, что для $\beta(\varphi)$ выбрано начальное значение $\beta(\varphi_0^+) = -\alpha_N^k(\varphi_0^+)$, имеем

$$\beta(\varphi_0^+) < 0, \qquad \pi/2 < \pi - \alpha_N^k(\varphi_1^+) = \beta(\varphi_1^+) < \pi,$$
$$3\pi/2 < 2\pi - \alpha_N^k(\varphi_0^+) = \beta(\varphi_0^+ + 2\pi).$$

Поэтому на интервале $(\varphi_0^+, \varphi_1^+)$ найдется точка φ_0^-, в которой $\beta(\varphi_0^-) = \alpha_N^k(\varphi_0^-)$, а на другом интервале $(\varphi_1^+, \varphi_0^+ + 2\pi)$ — точка φ_1^- такая, что $\beta(\varphi_1^-) = \pi + \alpha_N^k(\varphi_1^-)$. Но тогда при $\varphi = \varphi_0^-$ и $\varphi = \varphi_1^-$

$$\gamma_-(\varphi) = x'(\varphi)\sin\alpha_N^k(\varphi) - y'(\varphi)\cos\alpha_N^k(\varphi) = -|\tilde{\nu}(\varphi)|\sin(\beta(\varphi) - \alpha_N^k(\varphi)) = 0,$$

т. е. φ_0^- и φ_1^- являются неподвижными точками диффеоморфизма G_-.

Случай 2: $\beta(\varphi_0^+) = \pi - \alpha_N^k(\varphi_0^+)$ (mod 2π). Этот случай рассматривается аналогично первому. □

Как следует из доказательства леммы 3.9, функция $\gamma_+(\varphi)$ сохраняет знак на дуге $(\varphi_0^+, \varphi_1^+)$ границы Г. Легко проверить, что на дуге $(\varphi_1^+, \varphi_0^+ + 2\pi)$ функция $\gamma_+(\varphi)$ имеет противоположный знак. Будем считать, что точка φ_0^+ выбрана так, что для $\varphi \in (\varphi_0^+, \varphi_1^+)$ выполняется неравенство $\gamma_+(\varphi) > 0$. Обозначим через Γ_+ дугу $[\varphi_0^+, \varphi_1^+]$ границы Г. Для диффеоморфизма G_- выберем точку φ_0^- так, что $\varphi_0^- \in (\varphi_0^+, \varphi_1^+)$; обозначим через Γ_- дугу $[\varphi_0^-, \varphi_1^-]$.

- При заданных N, k неподвижные точки φ_0^+, φ_1^+, φ_0^-, φ_1^- диффеоморфизмов G_+ и G_- называются *вершинами области* Ω.

3.4. Положим при заданных N, k

$$l_+(\varphi) = x(\varphi)\sin\alpha_N^k(\varphi) + y(\varphi)\cos\alpha_N^k(\varphi),$$
$$l_-(\varphi) = x(\varphi)\sin\alpha_N^k(\varphi) - y(\varphi)\cos\alpha_N^k(\varphi).$$

Рассмотрим два семейства прямых

$$x\sin\alpha_N^k(\varphi) + y\cos\alpha_N^k(\varphi) = l_+(\varphi), \qquad \varphi \in [\varphi_0^+, \varphi_1^+], \tag{3.7}$$
$$x\sin\alpha_N^k(\varphi) - y\cos\alpha_N^k(\varphi) = l_-(\varphi), \qquad \varphi \in [\varphi_0^-, \varphi_1^-]. \tag{3.8}$$

Если $\alpha_N^k(\varphi) \equiv \alpha_0$, то (3.7) и (3.8) задают соответствующие семейства характеристик оператора $L(\lambda_0)$ для $\lambda_0 = -\cos^2 \alpha_0$. Если $\alpha_N^k(\varphi)$ не постоянна, то семейства (3.7), (3.8) образованы характеристиками операторов $L(\lambda)$, различных для несовпадающих значений $\alpha_N^k(\varphi)$.

Лемма 3.10. *Для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in [\varphi_0^+, \varphi_1^+]$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$, прямые семейства* (3.7) *не пересекаются в $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Аналогичное утверждение справедливо для семейства* (3.8).

Доказательство. По построению диффеоморфизма G_+ при заданном φ прямая семейства (3.7) пересекает границу Γ в точке $G_+\varphi$ дуги $[\varphi_1^+, \varphi_0^+ + 2\pi]$. Поскольку G_+ взаимно однозначно отображает дугу $[\varphi_0^+, \varphi_1^+]$ на дугу $[\varphi_1^+, \varphi_0^+ + 2\pi]$, две различные прямые семейства (3.7) не могут пересекаться в точке границы Γ. Координата точки $G_+\varphi$ задается функцией $g_1(\varphi)$. Учитывая, что φ_1^+ является неподвижной точкой диффеоморфизма G_+, имеем $g_1(\varphi_1^+) = \varphi_1^+ + 2m\pi$, где $m \in \mathbb{Z}$. Если бы для некоторых φ_1, φ_2 ($\varphi_1 < \varphi_2$), принадлежащих дуге $(\varphi_0^+, \varphi_1^+)$, прямые (3.7) пересеклись внутри области, то это бы означало, что $g_1(\varphi_1) - 2m\pi$ и $g_1(\varphi_2) - 2m\pi$ лежат на интервале $(\varphi_1^+, \varphi_0^+ + 2\pi)$ и выполняется неравенство $g_1(\varphi_1) - 2m\pi < g_1(\varphi_2) - 2m\pi$, т. е. $g_1(\varphi_1) < g_1(\varphi_2)$. Но это противоречит доказанному в лемме 3.4 утверждению, что $g_1(\varphi)$ строго убывает. Аналогично рассматривается семейство прямых (3.8). □

Замечание 3.6. Более детальное исследование показывает, что все точки огибающей S семейства прямых (3.7) для $\varphi \in [\varphi_0^+, \varphi_1^+]$ лежат вне $\overline{\Omega}$. Следовательно, существует постоянная $h > 0$ такая, что $\operatorname{dist}((x, y), \overline{\Omega}) \geqslant h$ для любой точки $(x, y) \in S$. То же справедливо для семейства (3.8).

Как было показано в лемме 3.6, при заданных N, k среди всех циклов $T(\varphi, \alpha_N^k(\varphi))$ существует ровно два вырожденных: T_1 и T_2, каждый из которых имеет N различных вершин, причем две из них являются вершинами области. Занумеруем $2N$ вершин вырожденных циклов T_1 и T_2 по порядку в соответствии с обходом Γ в положительном направлении, начиная с вершины области φ_0^+, т. е. $\varphi_1 = \varphi_0^+$, $\varphi_2, \ldots, \varphi_{2N}$.

Лемма 3.11. *В последовательности φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_{2N}$ вершины вырожденных циклов T_1 и T_2 чередуются.*

Доказательство. Точки последовательности φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_{2N}$ разбивают границу Γ на $2N$ замкнутых дуг $\gamma_1 = [\varphi_1, \varphi_2]$, $\gamma_2 = [\varphi_2, \varphi_3], \ldots$, $\gamma_{2N} = [\varphi_{2N}, \varphi_1 + 2\pi]$ с общими концами. При этом образы $G_+\varphi_i$, $G\varphi_i, \ldots$, $G_+G^{N-1}\varphi_i$ точки φ_i являются вершинами того же вырожденного цикла, вершиной которого является φ_i. Тем самым $G_+\varphi_i$, $G\varphi_i, \ldots, G_+G^{N-1}\varphi_i$ принадлежат последовательности $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2N}$. Следовательно, образы $G_+\gamma_i$, $G\gamma_i, \ldots, G_+G^{N-1}\gamma_i$ любой дуги γ_i принадлежат множеству построенных дуг $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2N}$. Пусть $\varphi_1 = \varphi_0^+ \in T_1$. Предположим, что $\varphi_2 \in T_1$. Поскольку $G_+\varphi_1 = \varphi_1$ и диффеоморфизм G_+ меняет ориентацию Γ, образом $G_+\gamma_1$ дуги γ_1 является дуга γ_{2N}, т. е. $G_+\varphi_2 = \varphi_{2N}$. Рассмотрим дугу $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_{2N}$. Точка φ_1 лежит внутри γ, а ее концы φ_{2N} и φ_2 принадлежат T_1. Следовательно, концы дуг $G\gamma, G^2\gamma, \ldots, G^{N-1}\gamma$ тоже принадлежат T_1, и каждая из указанных дуг соответственно содержит внутри себя вершину $G\varphi_1, G^2\varphi_1, \ldots, G^{N-1}\varphi_1$ цикла T_1. Как следует из доказательства леммы 3.6, множество точек φ_1, $G\varphi_1$, $G^2\varphi_1, \ldots, G^{N-1}\varphi_1$ содержит все вершины T_1. Поскольку концы дуг $G\gamma, G^2\gamma, \ldots, G^{N-1}\gamma$ тоже принадлежат T_1 и являются соответственно соседними на Γ точками из последовательности $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2N}$ для φ_1, $G\varphi_1$, $G^2\varphi_1, \ldots, G^{N-1}\varphi_1$, получаем, что для любой вершины цикла T_1 соседние вершины тоже принадлежат циклу T_1, что приводит к противоречию. Следовательно, $\varphi_2 \in T_2$, $G_+\varphi_2 = \varphi_{2N} \in T_2$. Рассматривая аналогично дугу $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_{2N}$ и ее образы $G\gamma, G^2\gamma, \ldots, G^{N-1}\gamma$, заключаем, что соседними для любой вершины $\varphi_i \in T_1$ являются вершины цикла T_2. Таким образом, вершины T_1 и T_2 чередуются на границе Γ. □

- При заданных N, k *образующей дугой* Γ_0 называется дуга $[\varphi_1, \varphi_2]$ границы Γ, где $\varphi_1 = \varphi_0^+$ — неподвижная точка диффеоморфизма G_+, а φ_2 — первая, отличная от φ_1, вершина одного из вырожденных циклов, которая встретится при обходе Γ в положительном направлении.

Очевидно, что $\Gamma_0 \subset \Gamma_+$, где Γ_+ — дуга $[\varphi_0^+, \varphi_1^+]$.

Лемма 3.12. *Пусть при фиксированных N, k ($N \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant N-1$, НОД$(N,k) = 1$) $\Gamma_0 = [\varphi_1, \varphi_2]$ — образующая дуга, $T(\vartheta, \alpha_N^k(\vartheta))$ — цикл, где $\varphi_1 < \vartheta < \varphi_2$, с вершинами $\vartheta_1 = \vartheta$, $\vartheta_2, \ldots, \vartheta_{2N}$, занумерованными по порядку обхода Γ в положительном направлении, $\gamma_1(\vartheta) = [\vartheta_1, \vartheta_2]$, $\gamma_2(\vartheta) = [\vartheta_2, \vartheta_3], \ldots, \gamma_{2N}(\vartheta) = [\vartheta_{2N}, \vartheta_1 + 2\pi]$ — дуги, на которые разбивают вершины цикла $T(\vartheta, \alpha_N^k(\vartheta))$ границу Γ, $\alpha_0 = \alpha_N^k(\vartheta)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(а) *вершины $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2N}$ вырожденных циклов T_1, T_2 и точки ϑ_1, $\vartheta_2, \ldots, \vartheta_{2N}$ чередуются при обходе границы Γ;*

(б) *дуги $\gamma_i(\vartheta)$ разбиваются на два семейства*

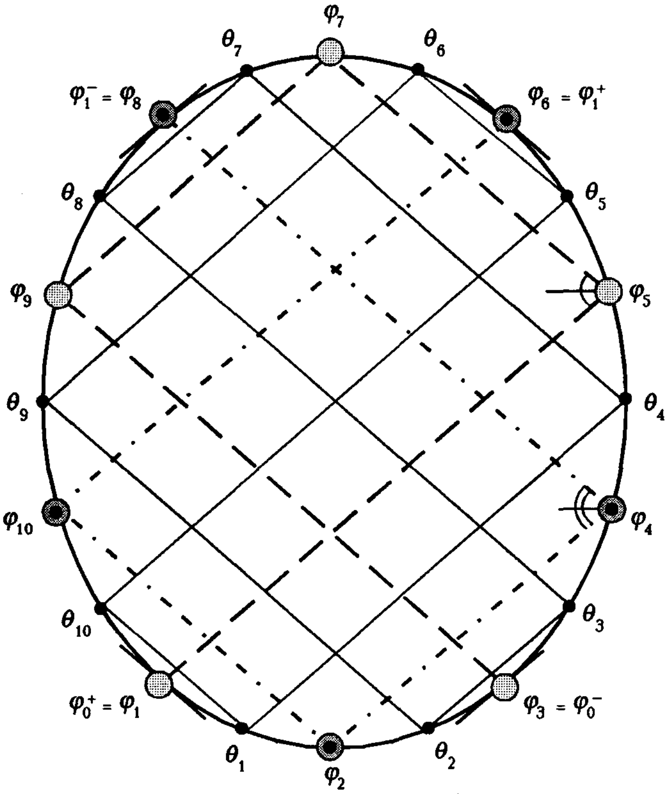
$$M_1(\vartheta) = \{\gamma_1(\vartheta), \ldots, \gamma_{2N-1}(\vartheta)\}, \quad M_2(\vartheta) = \{\gamma_2(\vartheta), \ldots, \gamma_{2N}(\vartheta)\},$$

обладающие следующим свойством: если $\gamma_i(\vartheta)$ принадлежит $M_j(\vartheta)$, то для любого диффеоморфизма группы $G(N,k)$ образ дуги $\gamma_i(\vartheta)$ тоже принадлежит $M_j(\vartheta)$ ($j = 1, 2$);

(в) *утверждение, аналогичное (б), справедливо для семейств $M_j(\vartheta)$ ($j = 1, 2$) и диффеоморфизмов $F_+(\alpha_0)$ и $F_-(\alpha_0)$, порождаемых функциями $f_1(\varphi, \alpha_0)$ и $f_1(\varphi, -\alpha_0)$.*

Доказательство. (а) Утверждение следует из леммы 3.11. Действительно, цикл $T(\vartheta, \alpha_N^k(\vartheta))$ не вырожден, так как вершины вырожденных циклов образуют множество $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2N}$. Поскольку $\vartheta \in (\varphi_1, \varphi_2)$, рассматривая образы $G_+\Gamma_0, G\Gamma_0, \ldots, G_+G^{N-1}\Gamma_0$, легко заметить, что точки ϑ, $G_+\vartheta$, $G\vartheta, \ldots, G_+G^{N-1}\vartheta$ (т. е. вершины цикла $T(\vartheta, \alpha_N^k(\vartheta))$) лежат внутри различных дуг γ_i, на которые граница Γ разбивается точками $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2N}$. Следовательно, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2N}$ и $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{2N}$ при обходе Γ чередуются (см. рисунок).

(б) Как видно из доказательства леммы 3.11, вершины φ_1, $\varphi_3, \ldots, \varphi_{2N-1}$ и $\varphi_2, \varphi_4, \ldots, \varphi_{2N}$ принадлежат соответственно циклам T_1 и T_2 (см. рисунок). Таким образом, дуга $\gamma_i(\vartheta)$ семейства $M_1(\vartheta)$ содержит внутри себя вершину цикла T_2, а дуга $\gamma_i(\vartheta)$ семейства $M_2(\vartheta)$ — вершину цикла T_1. Пусть дуга $\gamma_i(\vartheta)$ принадлежит $M_1(\vartheta)$. Тогда все ее образы $G_+\gamma_i(\vartheta)$, $G\gamma_i(\vartheta), \dots, G_+G^{N-1}\gamma_i(\vartheta)$ содержат внутри себя вершину цикла T_2 и, следовательно, принадлежат $M_1(\vartheta)$. Аналогично рассматривается случай, когда дуга $\gamma_i(\vartheta)$ принадлежит $M_2(\vartheta)$.



Случай $N = 5$, $k = 2$

(в) Достаточно заметить, что согласно определению значения функций, порождающих G_+ и $F_+(\alpha_0)$, G_- и $F_-(\alpha_0)$, совпадают в точках $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{2N}$. Действительно, G_+ и $F_+(\alpha_0)$ порождаются соответственно функциями $g_1(\varphi) = f_1(\varphi, \alpha_N^k(\varphi))$ и $f_1(\varphi, \alpha_0)$. По лемме 3.3 $\alpha_N^k(\vartheta_i) = \alpha_0$ при любом $i = 1, 2, \dots, 2N$, поэтому $G_+\vartheta_i = F_+(\alpha_0)\vartheta_i$. Точно так же показываем, что $G_-\vartheta_i = F_-(\alpha_0)\vartheta_i$. Поскольку диффеоморфизмы G_+ и $F_+(\alpha_0)$, G_- и $F_-(\alpha_0)$ переводят концы дуги $\gamma_i(\vartheta)$ в одни и те же точки и меняют ориентацию границы Γ, верны равенства $G_+\gamma_i(\vartheta) = F_+(\alpha_0)\gamma_i(\vartheta)$ и $G_-\gamma_i(\vartheta) = F_-(\alpha_0)\gamma_i(\vartheta)$. Аналогичные соотношения справедливы для $G = G_-G_+$, $F(\alpha_0) = F_-(\alpha_0)F_+(\alpha_0), \dots, G_+G^{N-1}$ и $F_+(\alpha_0)F^{N-1}(\alpha_0)$, т. е. все образы дуги $\gamma_i(\vartheta)$ принадлежат тому же семейству $M_j(\vartheta)$, что и исходная дуга $\gamma_i(\vartheta)$. □

Замечание 3.7. Утверждения лемм 3.2–3.4, 3.6, 3.8–3.12 во многом пересекаются с результатами, изложенными в [3]. Мы приводим их формулировки и доказательства в той форме и с теми дополнительными деталями, которые требуются в дальнейшем для построения вариаций границы Γ и инвариантных подпространств оператора A.

3.5. При построении областей Ω, для которых функции $\alpha_N^k(\varphi)$ обладают заданными свойствами, нам потребуется следующая теорема о вариациях границы Γ.

Теорема 3.1. *Пусть при фиксированных* N, k $(N \geqslant 2,\ 1 \leqslant k \leqslant N-1$, НОД$(N,k) = 1)$ $\Gamma_0 = [\varphi_1, \varphi_2]$ *— образующая дуга границы* Γ: $\rho = \rho(\varphi)$; $\alpha_N^k(\varphi)$ *— функция, определенная уравнением* (3.2); $\tau(\varphi,\varepsilon)$ *— функция класса* $C^m(\Pi(\varepsilon_0))$, $\varepsilon_0 > 0$, $m \geqslant 3$, *где* $\Pi(\varepsilon_0) = \{(\varphi,\varepsilon) \mid \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2,\ |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0\}$, *обладающая следующими свойствами*:

(i) $\tau(\varphi, 0) = 0$ *для всех* $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$,

(ii) *при некотором* $h > 0$ *имеет место равенство* $\tau(\varphi,\varepsilon) = 0$ *для всех* $(\varphi,\varepsilon) \in \Pi(h,\varepsilon_0) = \{(\varphi,\varepsilon) \mid \varphi \in [\varphi_1, \varphi_1 + h] \cup [\varphi_2 - h, \varphi_2],\ |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0\}$.

Тогда для некоторого $\varepsilon_1 > 0$ *можно указать семейство замкнутых кривых* $\Gamma(\varepsilon)$: $\rho = \rho(\varphi,\varepsilon)$ *такое, что*

(а) *при любом* $\varepsilon \in [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ *кривая* $\Gamma(\varepsilon)$ *принадлежит* C^m, *ограничивает выпуклую область* $\Omega(\varepsilon)$ *и имеет положительную кривизну в каждой точке*, $\Gamma(0) = \Gamma$;

(б) $\|\rho(\varphi,\varepsilon) - \rho(\varphi)\|_{C^m} \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$;

(в) $\alpha_N^k(\varphi,\varepsilon) = \alpha_N^k(\varphi) + \tau(\varphi,\varepsilon)$ *при всех* $(\varphi,\varepsilon) \in \Pi(\varepsilon_1)$, *где* $\alpha_N^k(\varphi,\varepsilon)$ *— решение уравнения* (3.2), *построенное для границы* $\Gamma(\varepsilon)$.

Сформулируем без доказательства следующее простое утверждение.

Лемма 3.13. *Пусть* $A(\varphi,\varepsilon) = (a_{ij}(\varphi,\varepsilon))$ *— невырожденная матрица* $(|\det A(\varphi,\varepsilon)| \geqslant \delta_0 > 0)$, *элементы* $a_{ij}(\varphi,\varepsilon)$ $(i,j = 1,2)$ *которой, а также функции* $z_1(\varphi,\varepsilon)$ *и* $z_2(\varphi,\varepsilon)$ *принадлежат* $C^k(\Pi(\varepsilon_0))$, *где* $\Pi(\varepsilon_0) = \{(\varphi,\varepsilon) \mid \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2,\ |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0\}$; $x(\varphi,\varepsilon)$, $y(\varphi,\varepsilon)$ *— решение линейной системы уравнений*

$$A(\varphi,\varepsilon)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(\varphi,\varepsilon) \\ z_2(\varphi,\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\|x(\varphi,\varepsilon) - x(\varphi,0)\|_{C^k[\varphi_1,\varphi_2]} + \|y(\varphi,\varepsilon) - y(\varphi,0)\|_{C^k[\varphi_1,\varphi_2]} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

Доказательство теоремы 3.1.

(а), (б) Положим $\alpha(\varphi,\varepsilon) = \alpha_N^k(\varphi) + \tau(\varphi,\varepsilon)$ и рассмотрим функции $\tilde g_1(\varphi,\varepsilon) = f_1(\varphi, -\alpha(\varphi,\varepsilon))$, $g_n(\varphi,\varepsilon) = f_n(\varphi, \alpha(\varphi,\varepsilon))$ $(n = 1, \dots, 2N)$. Учитывая, что $f_n(\varphi,\alpha)$ имеют производные всех порядков по φ и α, функции $\tilde g_1(\varphi,\varepsilon)$ и $g_n(\varphi,\varepsilon)$ $(n = 1, \dots, 2N)$ принадлежат $C^m(\Pi(\varepsilon_0))$, причем ввиду условий (i), (ii) равенства

$$\tilde g_1(\varphi,\varepsilon) = \tilde g_1(\varphi), \qquad g_n(\varphi,\varepsilon) = g_n(\varphi) \quad (n = 1, \dots, 2N), \tag{3.9}$$

где $\tilde g_1(\varphi)$, $g_n(\varphi)$ определены в лемме 3.4, справедливы при $\varepsilon = 0$ для $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ и при всех $(\varphi,\varepsilon) \in \Pi(h,\varepsilon_0)$. В силу оценок производных функций $\tilde g_1(\varphi)$, $g_n(\varphi)$ (см. лемму 3.4) существует ε_2 $(0 < \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_0)$ такое, что аналогичные оценки

$$\begin{gathered} \frac{\partial \tilde g_1}{\partial \varphi}(\varphi,\varepsilon) \leqslant -Q(N,k)/2, \\ \frac{\partial g_{2m-1}}{\partial \varphi}(\varphi,\varepsilon) \leqslant -Q(N,k)/2, \\ \frac{\partial g_{2m}}{\partial \varphi}(\varphi,\varepsilon) \geqslant Q(N,k)/2 \qquad (m = 1, \dots, N) \end{gathered} \tag{3.10}$$

справедливы при всех $(\varphi,\varepsilon) \in \Pi(\varepsilon_2)$. Пусть $(x(\varphi), y(\varphi))$ — декартовы координаты точки φ границы Γ. Поскольку $g_{2N}(\varphi) \equiv \varphi + 2k\pi$, $g_{2N}(\varphi) = \tilde g_1(g_{2N-1}(\varphi))$, $\tilde g_1(\tilde g_1(\varphi)) = \varphi$, имеем

$$\tilde g_1(\varphi) = \tilde g_1(g_{2N}(\varphi) - 2k\pi) = \tilde g_1(\tilde g_1(g_{2N-1}(\varphi))) + 2k\pi = g_{2N-1}(\varphi) + 2k\pi.$$

Положим $\Gamma_1 = G_-\Gamma_0$. По определению диффеоморфизма G_- функция $\tilde g_1(\varphi)$ для $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ задает угловую координату точки $G_-\varphi \in \Gamma_1$, а $g_{2N-1}(\varphi)$ — координату точки $G_+G^{N-1}\varphi$. Кроме того, $G_+G^{N-1}\varphi = G_-\varphi \in \Gamma_1$, поскольку $\tilde g_1(\varphi) = g_{2N-1}(\varphi) + 2k\pi$. Следовательно, функции $x_0(\varphi) = x(\tilde g_1(\varphi))$, $y_0(\varphi) = y(\tilde g_1(\varphi))$ определяют при $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ некоторую новую параметризацию дуги Γ_1 границы Γ. Пусть $\Gamma_2 = G^{N-1}\Gamma_0$. Тогда при $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ образ $G^{N-1}\varphi$ каждой точки $\varphi \in \Gamma_0$ имеет угловую координату $g_{2N-2}(\varphi)$. Кроме того, $G_+\Gamma_2 = \Gamma_1$. Согласно определениям диффеоморфизмов G_+, G_- и функций $f_n(\varphi, \alpha)$, $\tilde g_1(\varphi)$, $g_n(\varphi)$ при каждом значении $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ декартовы координаты $(x_0(\varphi), y_0(\varphi))$ точки, принадлежащей дуге Γ_1, являются решениями следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} &x \sin\alpha_N^k(\varphi) - y\cos\alpha_N^k(\varphi) \\ &\qquad = x(\varphi)\sin\alpha_N^k(\varphi) - y(\varphi)\cos\alpha_N^k(\varphi), \\ &x \sin\alpha_N^k(\varphi) + y\cos\alpha_N^k(\varphi) \\ &\qquad = x(g_{2N-2}(\varphi))\sin\alpha_N^k(\varphi) + y(g_{2N-2}(\varphi))\cos\alpha_N^k(\varphi). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Положим

$$\begin{aligned} a_{11}(\varphi,\varepsilon) &= a_{21}(\varphi,\varepsilon) = \sin\alpha(\varphi,\varepsilon), \\ -a_{12}(\varphi,\varepsilon) &= a_{22}(\varphi,\varepsilon) = \cos\alpha(\varphi,\varepsilon), \\ z_1(\varphi,\varepsilon) &= a_{11}(\varphi,\varepsilon)x(\varphi) + a_{12}(\varphi,\varepsilon)y(\varphi), \\ z_2(\varphi,\varepsilon) &= a_{21}(\varphi,\varepsilon)x(g_{2N-2}(\varphi,\varepsilon)) + a_{22}(\varphi,\varepsilon)y(g_{2N-2}(\varphi,\varepsilon)) \end{aligned}$$

и рассмотрим систему

$$\begin{aligned} a_{11}(\varphi,\varepsilon)x + a_{12}(\varphi,\varepsilon)y &= z_1(\varphi,\varepsilon), \\ a_{21}(\varphi,\varepsilon)x + a_{22}(\varphi,\varepsilon)y &= z_2(\varphi,\varepsilon), \end{aligned} \tag{3.12}$$

определитель $\Delta(\varphi,\varepsilon)$ которой равен $2\cos\alpha(\varphi,\varepsilon)\sin\alpha(\varphi,\varepsilon)$. Учитывая неравенство $0 < \alpha_N^k(\varphi) < \pi/2$, непрерывность функции $\tau(\varphi,\varepsilon)$, а также условие $\tau(\varphi, 0) = 0$, нетрудно заметить, что при некоторых $\delta_0 > 0$ и ε_3 $(0 < \varepsilon_3 \leqslant \varepsilon_2)$ имеем $\Delta(\varphi,\varepsilon) \geqslant \delta_0 > 0$ для всех $(\varphi,\varepsilon) \in \Pi(\varepsilon_3)$. Значит, существует решение $x(\varphi,\varepsilon)$, $y(\varphi,\varepsilon)$ системы (3.12). При $\varepsilon = 0$ системы (3.11) и (3.12) совпадают, следовательно, $x(\varphi,0) = x_0(\varphi)$, $y(\varphi,0) = y_0(\varphi)$. Очевидно, что выполнены все условия леммы 3.13, поэтому при $\varepsilon \to 0$

$$\|x(\varphi,\varepsilon) - x_0(\varphi)\|_{C^m[\varphi_1,\varphi_2]} + \|y(\varphi,\varepsilon) - y_0(\varphi)\|_{C^m[\varphi_1,\varphi_2]} \to 0. \tag{3.13}$$

Кроме того, поскольку $g_{2N-2}(\varphi,\varepsilon)$, $\tilde g_1(\varphi,\varepsilon)$ и $\alpha(\varphi,\varepsilon)$ совпадают соответственно с $g_{2N-2}(\varphi)$, $\tilde g_1(\varphi)$ и $\alpha_N^k(\varphi)$ для всех $(\varphi,\varepsilon) \in \Pi(h,\varepsilon_0)$, получаем $x(\varphi,\varepsilon) = x_0(\varphi)$, $y(\varphi,\varepsilon) = y_0(\varphi)$ для $(\varphi,\varepsilon) \in \Pi(h,\varepsilon_3)$.

В качестве $\Gamma(\varepsilon)$ рассмотрим кривую, которая совпадает с Γ всюду, кроме дуги Γ_1, а вместо Γ_1 содержит дугу $\Gamma_1(\varepsilon)$, заданную параметрически уравнением $x = x(\varphi,\varepsilon)$, $y = y(\varphi,\varepsilon)$ для $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, т. е. $\Gamma(\varepsilon) =$

$(\Gamma\backslash\Gamma_1) \cup \Gamma_1(\varepsilon)$. Тогда при $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_1 + h] \cup [\varphi_2 - h, \varphi_2]$ точки дуг Γ_1 и $\Gamma_1(\varepsilon)$ совпадают для всех ε ($|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_3$), поэтому $\Gamma(\varepsilon) \in C^m$. Поскольку $m \geqslant 3$, из (3.13) вытекает, что для некоторого ε_4 ($0 < \varepsilon_4 \leqslant \varepsilon_3$) при всех $\varepsilon \in [-\varepsilon_4, \varepsilon_4]$ кривизна дуги $\Gamma(\varepsilon)$ будет положительной (так как таким свойством обладает исходная граница Γ), а область $\Omega(\varepsilon)$, ограниченная контуром $\Gamma(\varepsilon)$, — строго выпуклой. Оценка (3.13) показывает, что при некоторой параметризации с помощью переменной $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ дуги $\Gamma_1(\varepsilon) \subset \Gamma(\varepsilon)$ и $\Gamma_1 \subset \Gamma$ сколь угодно близки при $\varepsilon \to 0$ по норме $C^m[\varphi_1, \varphi_2]$, однако φ не является реальной угловой координатой точек дуги $\Gamma_1(\varepsilon)$. Пусть граница $\Gamma(\varepsilon)$ имеет уравнение $\rho = \rho(\varphi, \varepsilon)$ в полярных координатах (ρ, φ). Из (3.13) следует, что $\|\rho(\varphi, \varepsilon) - \rho(\varphi)\|_{C^m} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

(в) Докажем, что $\alpha_N^k(\varphi, \varepsilon) = \alpha(\varphi, \varepsilon)$ при всех $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Для $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ рассмотрим траекторию $T(\varphi, \alpha(\varphi, \varepsilon))$ с вершинами на Γ и траекторию $T_\varepsilon(\varphi, \alpha(\varphi, \varepsilon))$ с вершинами на $\Gamma(\varepsilon)$. В силу равенств (3.9), справедливых для всех $(\varphi, \varepsilon) \in \Pi(h, \varepsilon_0)$, и оценок (3.10), справедливых для всех $(\varphi, \varepsilon) \in \Pi(\varepsilon_2)$, функции $g_1(\varphi, \varepsilon), \ldots, g_{2N-2}(\varphi, \varepsilon)$ задают для $\varepsilon \in [-\varepsilon_4, \varepsilon_4]$ взаимно однозначные отображения образующей дуги Γ_0 на дуги $G_+\Gamma_0$, $G\Gamma_0, \ldots, G_{2N-2}\Gamma_0 = \Gamma_2$, которые являются общими для границ Γ и $\Gamma(\varepsilon)$ при любом ε. Поэтому первые $2N-1$ вершин траекторий $T(\varphi, \alpha(\varphi, \varepsilon))$ и $T_\varepsilon(\varphi, \alpha(\varphi, \varepsilon))$ и их первые $2N-2$ звеньев совпадают. Заметим, что уравнения системы (3.12) задают прямые, проведенные через точки $\varphi \in \Gamma_0$, $g_{2N-2}(\varphi, \varepsilon) \in \Gamma_2$ и образующие соответственно углы $\alpha(\varphi, \varepsilon)$, $-\alpha(\varphi, \varepsilon)$ с положительным направлением оси x. Прямые пересекаются в некоторой точке дуги $\Gamma_1(\varepsilon)$, т. е. $T_\varepsilon(\varphi, \alpha(\varphi, \varepsilon))$ при любом $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ является циклом с $2N$ звеньями, вписанными в $\Gamma(\varepsilon)$.

Пусть $f_{2N}(\varphi, \alpha; \varepsilon)$ — соответствующая функция, построенная для границы $\Gamma(\varepsilon)$. Тогда для $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ при некотором целом l должно выполняться равенство $f_{2N}(\varphi, \alpha(\varphi, \varepsilon); \varepsilon) = \varphi + 2l\pi$. Значит, $\alpha(\varphi, \varepsilon) = \alpha_N^l(\varphi, \varepsilon)$. Но $\alpha(\varphi, \varepsilon) = \alpha_N^k(\varphi)$ и $f_{2N}(\varphi, \alpha(\varphi, \varepsilon); \varepsilon) = f_{2N}(\varphi, \alpha(\varphi, \varepsilon)) = f_{2N}(\varphi, \alpha_N^k(\varphi))$ для всех $(\varphi, \varepsilon) \in \Pi(h, \varepsilon_2)$, где $f_{2N}(\varphi, \alpha)$ — функция, соответствующая исходной границе Γ. Следовательно, $l = k$, и мы приходим к равенству $\alpha_N^k(\varphi, \varepsilon) = \alpha(\varphi, \varepsilon) = \alpha_N^k(\varphi) + \tau(\varphi, \varepsilon)$, справедливому при всех $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Остается выбрать $\varepsilon_1 = \varepsilon_4$. Тогда для $\varepsilon \in [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ все утверждения теоремы 3.1 справедливы. □

Замечание 3.8. Из доказательства теоремы 3.1 следует, что если заданная функция $\tau(\varphi, \varepsilon)$ принадлежит $C^\infty(\Pi(\varepsilon_0))$ и удовлетворяет условиям (i), (ii), то любая граница $\Gamma(\varepsilon)$ при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1$ принадлежит классу C^∞ и $\|\rho(\varphi, \varepsilon) - \rho(\varphi)\|_{C^n} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для любого $n \in \mathbf{N}$.

3.6. Покажем, что с помощью вариации границы Γ любой исходной области Ω можно получить область Ω_0, для которой при некотором выборе N, k функция $\alpha_N^k(\varphi)$ будет постоянной. Сначала докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 3.14. *Пусть f, g, h — вещественные функции, определенные на промежутке $[-\delta, \delta] \subset \mathbf{R}$ и такие, что существуют их однозначные аналитические продолжения $f(z)$, $g(z)$, $h(z)$ ($z = x + iy$) на некоторую окрестность отрезка $[-\delta, \delta]$ в комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Предположим, что выполнены следующие условия:*

(i) $f(0) = g(0) = h(0) = f'(0) = g'(0) = 0$, $f''(0) = 2a \neq 0$, $g''(0) = 2b \neq 0$, $h'(0) = c \neq 0$;

(ii) *для любых* $x_1, x_2 \in [-\delta_1, \delta_1]$, $0 < \delta_1 < \delta$, *удовлетворяющих условию* $f(x_1) = f(x_2)$, *выполняется равенство* $g(h(x_1)) = g(h(x_2))$.

Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ *в круге* $|z| < \varepsilon$ *однозначно определена аналитическая функция* γ, *для которой при всех* z *выполняется равенство* $g(h(z)) = \gamma(f(z))$, *причем* $\gamma'(0) \neq 0$.

Доказательство. Из условий леммы следует представление $f(z) = z^2(a + f_1(z))$, где f_1 — аналитическая в окрестности точки $z = 0$ функция, $f_1(0) = 0$. Определим z_1 как функцию z вблизи нуля из уравнения $f(z_1) = f(z)$. Для $z \neq 0$ это уравнение имеет два решения, одно из которых есть $z_1 \equiv z$, а второе однозначно задается как аналитическая функция $z_1 = \Phi(z)$. Действительно, положим $\Phi(z) = z(\Phi_1(z) - 1)$, $\Phi_1(0) = 0$. Учитывая представление функции f, для определения $\Phi_1(z)$ получаем уравнение

$$z^2(\Phi_1(z) - 1)^2(a + f_1(z(\Phi_1(z) - 1))) = z^2(a + f_1(z)). \qquad (3.14)$$

Рассмотрим функцию $F(z, w) = (w - 1)^2(a + f_1(z(w - 1))) - a - f_1(z)$ двух комплексных переменных z, w. После сокращения на z^2 и обозначения $w = \Phi_1(z)$ уравнение (3.14) приводится к виду $F(z, w) = 0$. Поскольку $F(0, 0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial w}(0, 0) \neq 0$, это уравнение имеет единственное аналитическое решение $w = \Phi_1(z)$, $\Phi_1(0) = 0$, заданное в некотором круге $|z| < r_1$, которое однозначно определяет функцию $z_1 = \Phi(z)$. Очевидно, что для действительных z функция $\Phi(z)$ также принимает действительные значения. Условие (ii) означает, что $g(h(x)) = g(h(\Phi(x)))$ при всех $x \in (-\delta_2, \delta_2)$, где $0 < \delta_2 \leqslant \min\{\delta_1, r_1\}$. В силу единственности аналитического продолжения $g(h(z)) = g(h(\Phi(z)))$ в некотором круге $|z| < r_2$.

Определим обратную к $w = f(z)$ многозначную функцию $z = f^{-1}(w)$ в некотором круге $|w| < r_3$. Ясно, что $f^{-1}(0) = 0$, а для значений w, удовлетворяющих условию $0 < |w| < r_3$, функция f двузначна, причем ее значения z_1 и z_2 связаны равенством $z_1 = \Phi(z_2)$. Выделяя вблизи произвольно взятой точки w_0 $(0 < |w_0| < r_3)$ одну из ветвей $\varphi_1(w)$ для f^{-1}, положим $\gamma(w) = g(h(\varphi_1(w)))$. Функция γ аналитическая в окрестности точки w_0. Покажем, что ее значения не зависят от выбора ветви для f^{-1}. Действительно, для второй ветви $\varphi_2(w)$ справедливо равенство $\varphi_2(w) = \Phi(\varphi_1(w))$ и, поскольку $g(h(z)) = g(h(\Phi(z)))$, имеем $g(h(\varphi_2(w))) = g(h(\Phi(\varphi_1(w)))) = g(h(\varphi_1(w))) = \gamma(w)$. Следовательно, $\gamma(w)$ определена однозначно для всех w $(0 < |w| < r_3)$. Очевидно, что $\gamma(w) \to 0$ при $w \to 0$. Полагая $\gamma(0) = 0$, получаем аналитическую в круге $|w| < r_3$ функцию. Ввиду определения $\gamma(w)$ в некоторой окрестности точки $z = 0$ выполняется равенство $g(h(z)) = \gamma(f(z))$, дифференцируя которое дважды по z и полагая $z = 0$, находим $\gamma'(0) = g''(0)(h'(0))^2/f''(0) = bc^2/a \neq 0$. □

Для того чтобы в дальнейшем различать диффеоморфизмы $F_+(\alpha)$, $F_-(\alpha)$, $F(\alpha)$ и функции $\alpha_N^k(\varphi)$, определенные для различных границ, будем их обозначать соответственно $F_+(\alpha; \Gamma)$, $F_-(\alpha; \Gamma)$, $F(\alpha; \Gamma)$ и $\alpha_N^k(\varphi; \Gamma)$.

Теорема 3.2. *Для произвольной области* Ω *с границей* $\Gamma\colon \rho = \rho(\varphi)$ *класса* C^∞ *и любых заданных чисел* $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *существует область* Ω_0 *с аналитической границей* $\Gamma_0\colon \rho = \rho_0(\varphi)$ *такая, что* $\|\rho - \rho_0\|_{C^n} < \varepsilon$ *и при некотором выборе* N, k *функция* $\alpha_N^k(\varphi; \Gamma_0)$ *постоянна.*

Доказательство. Очевидно, можно считать $n \geqslant 3$. Выберем положительное число $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon$ так, чтобы любая 2π-периодическая функция $\hat{\rho}$, удовлетворяющая условию $\|\rho - \hat{\rho}\|_{C^n} < \varepsilon_1$, определяла замкнутую кривую $\widehat{\Gamma}$: $\rho = \hat{\rho}(\varphi)$, кривизна которой положительна в каждой точке. Это можно сделать, поскольку таким свойством обладает исходная граница Г. Пусть $\tilde{\rho}$ — аналитическая 2π-периодическая функция, для которой $\|\rho - \tilde{\rho}\|_{C^n} < \varepsilon_1/2$. В качестве $\tilde{\rho}(\varphi)$ можно взять, например, частичную сумму ряда Фурье, построенного для $\rho(\varphi)$. Рассмотрим семейства $F_+(\alpha;\widetilde{\Gamma})$, $F_-(\alpha;\widetilde{\Gamma})$, $F(\alpha;\widetilde{\Gamma})$ диффеоморфизмов кривой $\widetilde{\Gamma}$: $\rho = \tilde{\rho}(\varphi)$, ограничивающей область $\widetilde{\Omega}$. В силу аналитичности $\widetilde{\Gamma}$ функции $f_1(\varphi,\alpha)$, $f_1(\varphi,-\alpha)$ и $f_2(\varphi,\alpha)$, порождающие диффеоморфизмы, являются аналитическими. Пусть $\tau(\alpha)$ — число вращения диффеоморфизма $F(\alpha,\widetilde{\Gamma})$. Как уже отмечалось при доказательстве леммы 3.2, для любой границы $f_2(\varphi, 0) \equiv \varphi$, поэтому $\tau(0) = 0$. В то же время по следствию 3.1 $\alpha_1^1(\varphi) \equiv \pi/2$. Значит, $f_2(\varphi,\pi/2) = \varphi + 2\pi$, откуда $\tau(\pi/2) = 1$. Являясь непрерывной неубывающей функцией, $\tau(\alpha)$ при $\alpha \in (0,\pi/2)$ принимает все значения из промежутка (0, 1).

Как показано в [13], существует множество иррациональных чисел $\mathfrak{U} \subset (0, 1)$ такое, что $\operatorname{mes}\mathfrak{U} = 1$ и если $\tau(\alpha) \in \mathfrak{U}$, то диффеоморфизм $F(\alpha;\widetilde{\Gamma})$ аналитически сопряжен со сдвигом на $2\pi\tau(\alpha)$. Это означает, что существует аналитическая замена $t = \zeta(\varphi)$ угловой координаты φ такая, что

(а) $\zeta(\varphi + 2\pi) = \zeta(\varphi) + 2\pi, \qquad \zeta'(\varphi) \geqslant \delta > 0$,

(б) $\zeta(f_2(\varphi,\alpha)) = \zeta(\varphi) + 2\pi\tau(\alpha)$ для порождающей функции $f_2(\varphi,\alpha)$ диффеоморфизма $F(\alpha;\widetilde{\Gamma})$.

Функция $\zeta(\varphi)$ определяется однозначно выбором значения в какой-либо точке φ_0. Множество $\mathfrak{U}$ содержит, в частности, все алгебраические числа степени 2.

Выберем произвольно одно из чисел $\tau_0 \in \mathfrak{U}$ и рассмотрим значение α_0, для которого $\tau(\alpha_0) = \tau_0$. Введем на плоскости координаты $\xi = x\sin\alpha_0 + y\cos\alpha_0$, $\eta = x\sin\alpha_0 - y\cos\alpha_0$. По определению диффеоморфизмов $F_+(\alpha_0;\widetilde{\Gamma})$ и $F_-(\alpha_0;\widetilde{\Gamma})$ точки $F_+(\alpha_0;\widetilde{\Gamma})\varphi$ и φ границы $\widetilde{\Gamma}$ имеют одну и ту же координату ξ, а точки $F_-(\alpha_0;\widetilde{\Gamma})\varphi$ и φ — координату η.

Для $\tau \in (0,1)$ введем семейство эллипсов $\mathbf{E}(\tau)$, которые задаются в координатах ξ,η параметрически с помощью функций $\xi = \xi(t) = \cos t$, $\eta = \eta(t) = \cos(t - \pi\tau)$. Каждый из этих эллипсов вписан в ромб $\mathbf{R} = \{(\xi,\eta) \mid |\xi| \leqslant 1, |\eta| \leqslant 1\}$. Следуя [10], будем называть t *каноническим параметром* для $\mathbf{E}(\tau)$. Легко проверяется, что диффеоморфизмы $F_+(\alpha_0;\mathbf{E}(\tau))$, $F_-(\alpha_0;\mathbf{E}(\tau))$ для любого эллипса $\mathbf{E}(\tau)$ можно задать с помощью канонического параметра t порождающими функциями $t_+(t) = -t$, $t_-(t) = -t + 2\pi\tau$, а их произведение $F(\alpha_0;\mathbf{E}(\tau))$ — с помощью функции $t_1(t) = t + 2\pi\tau$. Следовательно, число вращения диффеоморфизма $F(\alpha_0;\mathbf{E}(\tau))$ равно τ.

Пусть $\xi = \mu(\varphi)$, $\eta = \nu(\varphi)$ — аналитические 2π-периодические функции угловой координаты φ, определяющие координаты (ξ,η) точки φ границы $\widetilde{\Gamma}$, $\xi_0 = \max\limits_{\varphi}\mu(\varphi)$, $\mu(\varphi_0) = \xi_0$. Прямая $\xi = \xi_0$ касается $\widetilde{\Gamma}$ в точке φ_0. Следовательно, $F_+(\alpha_0;\widetilde{\Gamma})\varphi_0 = \varphi_0$. Положим $\zeta(\varphi_0) = 0$, тем самым однозначно определяя выбор аналитической функции $\zeta(\varphi)$, которая задает сопряжение $F(\alpha_0;\widetilde{\Gamma})$ со сдвигом на $2\pi\tau_0$. В силу условия (а) обратная функция $\varphi = \zeta^{-1}(t)$ аналитическая.

Рассмотрим эллипс $\mathbf{E}(\tau_0)$. Функции $\mu(\zeta^{-1}(t))$, $\nu(\zeta^{-1}(t))$ определяют новую параметризацию границы $\widetilde{\Gamma}$ и задают аналитическое отображение Φ эллипса $\mathbf{E}(\tau_0)$ на $\widetilde{\Gamma}$, которое каждой точке $(\xi(t), \eta(t)) \in \mathbf{E}(\tau_0)$ сопоставляет точку $(\mu(\zeta^{-1}(t)), \nu(\zeta^{-1}(t))) \in \widetilde{\Gamma}$. Как показано в [10], для такой параметризации $\widetilde{\Gamma}$ диффеоморфизмы $F_+(\alpha_0; \widetilde{\Gamma})$ и $F_-(\alpha_0; \widetilde{\Gamma})$ порождаются функциями $t_+(t)$ и $t_-(t)$. Это означает, что равенство $\xi(t_1) = \xi(t_2)$ влечет равенство $\mu(\zeta^{-1}(t_1)) = \mu(\zeta^{-1}(t_2))$, а если $\eta(t_1) = \eta(t_2)$, то $\nu(\zeta^{-1}(t_1)) = \nu(\zeta^{-1}(t_2))$. Следовательно (см. [10]), отображение Φ можно задать с помощью координатных функций $\tilde{\xi} = u(\xi)$, $\tilde{\eta} = v(\eta)$. Для этого достаточно положить $u(\xi) = \mu(\zeta^{-1}(\arccos \xi))$, $v(\eta) = \nu(\zeta^{-1}(\pi\tau_0 + \arccos \eta))$. Из этих представлений вытекает, что функции u, v аналитические на $(-1, 1)$, непрерывны на $[-1, 1]$ и $u'(\xi) \neq 0$ для $\xi \in (-1, 1)$, $v'(\eta) \neq 0$ для $\eta \in (-1, 1)$.

Покажем, что $u(\xi)$ и $v(\eta)$ допускают аналитическое продолжение на некоторый интервал $I(\delta_1) = (-1 - \delta_1, 1 + \delta_1)$ $(\delta_1 > 0)$. Рассмотрим точку $A(1, \cos(\pi\tau_0))$ — одну из точек касания эллипса $\mathbf{E}(\tau_0)$ со сторонами ромба $\mathbf{R}$. Этой точке при отображении Φ соответствует точка B границы $\widetilde{\Gamma}$ с координатами (ξ_0, η_0), где ξ_0 определена выше, а $\eta_0 = v(\cos(\pi\tau_0))$. Полагая $\xi' = \xi - 1$, $\eta' = \eta - \cos(\pi\tau_0)$, вблизи точки A уравнение эллипса $\mathbf{E}(\tau_0)$ можно записать в виде $\xi' = f(\eta')$, где функция f аналитическая, $f(0) = 0$. Поскольку прямая $\xi = 1$ касается эллипса $\mathbf{E}(\tau_0)$, имеем $f'(0) = 0$. Ввиду положительности кривизны эллипса имеем также $f''(0) \neq 0$. Аналогично уравнение $\widetilde{\Gamma}$ в окрестности точки B имеет вид $\xi'' = g(\eta'')$, где $\xi'' = \xi - \xi_0$, $\eta'' = \eta - \eta_0$, функция g аналитическая и $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, $g''(0) \neq 0$. Если $(\xi, \eta) \in \mathbf{E}(\tau_0)$, то $(u(\xi), v(\eta)) \in \widetilde{\Gamma}$, поэтому

$$u(f(\eta - \cos(\pi\tau_0)) + 1) = g(v(\eta) - \eta_0) + \xi_0. \tag{3.15}$$

Положим $h(\eta') = v(\eta' + \cos(\pi\tau_0)) - \eta_0$. Тогда $h(0) = 0$. Поскольку $|\cos(\pi\tau_0)| < 1$, функция $h(\eta')$ аналитическая в окрестности точки $\eta' = 0$, $h'(0) = v'(\cos(\pi\tau_0)) \neq 0$. В силу (3.15) если $f(\eta_1') = f(\eta_2')$, то $g(\eta_1'') = g(\eta_2'')$, где $\eta_1'' = h(\eta_1')$, $\eta_2'' = h(\eta_2')$. По лемме 3.14 существует аналитическая в окрестности нуля функция γ, для которой $g(h(\eta')) = \gamma(f(\eta'))$, причем $\gamma(0) = 0$, $\gamma'(0) \neq 0$. Тогда (3.15) означает, что $u(f(\eta') + 1) = g(h(\eta')) + \xi_0$, т. е. функция $\gamma(\xi - 1) + \xi_0$ задает аналитическое продолжение функции $u(\xi)$ в окрестность точки $\xi = 1$, причем $u'(1) = \gamma'(0) \neq 0$. Рассматривая аналогичным образом остальные точки касания эллипса $\mathbf{E}(\tau_0)$ со сторонами ромба $\mathbf{R}$, получаем аналитическое продолжение функций u и v на некоторый интервал $I(\delta_1)$. Будем считать $\delta_1 > 0$ выбранным так, что $u'(\xi) \neq 0$, $v'(\eta) \neq 0$ при $\xi \in I(\delta_1)$, $\eta \in I(\delta_1)$. Тогда отображение Φ можно рассматривать как взаимно однозначное отображение ромба $\mathbf{R}(\delta_1) = \{(\xi, \eta) \mid \xi \in I(\delta_1), \eta \in I(\delta_1)\}$ на некоторый параллелограмм, определяемое координатными функциями $u(\xi)$, $v(\eta)$.

Выберем последовательность рациональных чисел $\tau_m = k_m/N_m$ так, чтобы $\lim_{m\to\infty} \tau_m = \tau_0$. Этой последовательности соответствует последовательность эллипсов $\mathbf{E}(\tau_m)$. Положим $\Gamma_m = \Phi(\mathbf{E}(\tau_m))$. Кривые Γ_m в силу определения семейства $\mathbf{E}(\tau)$ и отображения Φ задаются в координатах ξ, η параметрическими уравнениями $\xi = \tilde{\xi}(t) = u(\cos t)$, $\eta = \eta_m(t) = v(\cos(t - \pi\tau_m))$, а граница $\widetilde{\Gamma}$ — уравнениями $\xi = \tilde{\xi}(t)$, $\eta = \tilde{\eta}(t) =$

$v(\cos(t-\pi\tau_0))$. В силу аналитичности функции $v(\eta)$ на интервале $I(\delta_1)$ очевидно, что $\|\eta_m-\tilde{\eta}\|_{C^n}\to 0$ при $m\to\infty$. Следовательно, записав уравнение Γ_m в исходных полярных координатах как $\rho=\rho_m(\varphi)$, получим $\|\rho_m-\tilde{\rho}\|_{C^n}\to 0$ при $m\to\infty$. Выберем m_0 так, чтобы выполнялось неравенство $\|\rho_{m_0}-\tilde{\rho}\|_{C^n}<\varepsilon_1/2$ и положим $\Gamma_0=\Gamma_{m_0}$, $\rho_0(\varphi)=\rho_{m_0}(\varphi)$, $k=k_{m_0}$, $N=N_{m_0}$. Тогда в силу выбора $\tilde{\rho}$, ε_1 верно неравенство $\|\rho_0-\rho\|_{C^n}<\varepsilon_1$ ($\varepsilon_1\leqslant\varepsilon$) и кривая Γ_0 имеет положительную кривизну в каждой точке и ограничивает некоторую выпуклую область Ω_0. Рассмотрим диффеоморфизмы $F_+(\alpha_0;\Gamma_0)$, $F_-(\alpha_0;\Gamma_0)$, $F(\alpha_0;\Gamma_0)$. Очевидно, что $\tilde{\xi}(t)=\tilde{\xi}(-t)$, $\eta_{m_0}(t)=\eta_{m_0}(-t+2\pi\tau_{m_0})$ при любом заданном t. Поэтому порождающими функциями параметра t для $F_+(\alpha_0;\Gamma_0)$, $F_-(\alpha_0;\Gamma_0)$ и $F(\alpha_0;\Gamma_0)$ будут соответственно $t_+(t)=-t$, $t_-(t)=-t+2\pi\tau_{m_0}$ и $t_1(t)=t+2\pi\tau_{m_0}$. Поскольку $\tau_{m_0}=k/N$, порождающей для $F^N(\alpha_0;\Gamma_0)$ будет функция $t_N(t)=t+2N\pi\tau_{m_0}=t+2k\pi$. Следовательно, $F^N(\alpha_0;\Gamma_0)$ — тождественное отображение границы Γ_0, число вращения диффеоморфизма $F(\alpha_0;\Gamma_0)$ равно k/N и для границы Γ_0 при всех φ выполняется равенство $f_{2N}(\varphi,\alpha_0)=\varphi+2k\pi$. Из определения функции α_N^k получаем, что $\alpha_N^k(\varphi;\Gamma_0)\equiv\alpha_0$. □

Замечание 3.9. Как показано в [6], для любой области Ω с границей $\Gamma\colon \rho=\rho(\varphi)$ класса C^∞ сколь угодно малой в указанном выше смысле деформацией Γ можно получить область Ω_1 с аналитической границей Γ_1 такую, что ни одна из функций $\alpha_N^k(\varphi;\Gamma_1)$ не будет постоянной. Наоборот, если при заданных N,k для исходной области Ω функция $\alpha_N^k(\varphi;\Gamma)$ не является постоянной, то для некоторого числа $\varepsilon(N,k)>0$ из условия $\|\rho-\tilde{\rho}\|_{C^3}<\varepsilon$ следует, что для области $\widetilde{\Omega}$, ограниченной кривой $\widetilde{\Gamma}\colon \rho=\tilde{\rho}(\varphi)$, функция $\alpha_N^k(\varphi;\widetilde{\Gamma})$ тоже не постоянна.

§ 4. Построение инвариантных подпространств

4.1. Напомним, что оператор A, определенный на гладких функциях $u\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ с помощью задачи (0.4) (см. введение), является ограниченным и симметричным относительно скалярного произведения (0.5) и тем самым допускает непрерывное самосопряженное расширение на пространство $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Для произвольной функции $u\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ элемент $v=Au$ также является решением задачи (0.4) в некотором обобщенном смысле, что уточняет следующая

Лемма 4.1. *Пусть $u,v\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Тогда $v=Au$, если и только если для любой гладкой функции $w(x,y)\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$*

$$B(u,v,w)\equiv\int\limits_\Omega v(\bar{w}_{xx}+\bar{w}_{yy})\,d\Omega+\int\limits_\Omega u\bar{w}_{yy}\,d\Omega=0. \tag{4.1}$$

Доказательство. Пусть u^n — последовательность гладких функций такая, что $\|u-u^n\|_1\to 0$ при $n\to\infty$. Ввиду ограниченности оператора A

имеем $Au^n \to Au$ в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Умножая уравнение $\Delta Au^n = -u^n_{yy}$ на $\bar{w}$ и интегрируя по частям с учетом граничных условий, приходим к равенствам $B(u^n, Au^n, w) = 0$, $n \in \mathbf{N}$. После перехода к пределу при $n \to \infty$ получаем $B(u, Au, w) = 0$. Таким образом, равенство (4.1) справедливо при $v = Au$.

Наоборот, пусть для какого-либо v при заданном u выполняется соотношение (4.1). Тогда $B(u, Au, w) - B(u, v, w) = \int_\Omega (Au - v)\Delta\bar{w}\, d\Omega = 0$ при всех w, откуда получаем, что элемент $Au - v$ ортогонален в $L_2(\Omega)$ множеству $\{h = \Delta w\colon w \in C^\infty(\overline{\Omega}),\ w|_\Gamma = 0\}$. Поскольку это множество плотно в L_2, заключаем, что $Au = v$. □

Следствие 4.1. *Функция $u \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ будет собственной функцией оператора A, соответствующей собственному числу λ, в том и только том случае, если для любой гладкой $w(x, y) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$*

$$B_1(u, w, \lambda) \equiv \int\limits_\Omega u(\lambda\bar{w}_{xx} + (1+\lambda)\bar{w}_{yy})\, d\Omega = 0. \tag{4.2}$$

Из следствия 4.1 вытекает, что $u(x, y)$ будет собственной функцией оператора A, если u — нетривиальное слабое решение из $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ задачи Дирихле (0.7).

- Функция $\chi \in L_2(\Omega)$ называется *обобщенной собственной функцией оператора* A, соответствующей спектральному значению λ, если $B_1(\chi, w, \lambda) = 0$ для любой гладкой функции $w \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Нетривиальные слабые решения задачи (0.7), принадлежащие $L_2(\Omega)$, существуют в том и только том случае, если оператор $L(\lambda)$ гиперболический, т. е. $\lambda \in (-1, 0)$. При этом для обобщенных собственных функций оператора A имеет место представление $\chi(x, y) = p(\xi) + q(\eta)$, где $\xi = x\sin\alpha + y\cos\alpha$, $\eta = x\sin\alpha - y\cos\alpha$ — характеристические координаты оператора $L(\lambda)$, $\lambda = -\cos^2\alpha$, причем $p, q \in L_2(\Omega)$ и $p(\xi) + q(\eta)|_\Gamma = 0$ почти всюду по мере m, заданной на границе Γ (см. [14, 15]).

В этом параграфе мы строим при заданных N, k с помощью функций $\alpha^k_N(\varphi)$ семейства $\chi(x, y, \vartheta)$ обобщенных собственных функций оператора A. Затем, интегрируя их по параметру ϑ, получаем интегральные представления элементов некоторого инвариантного для A подпространства H^k_N. Используя эти представления, нетрудно как построить решения исходной задачи (0.1)–(0.3), так и описать для элементов из H^k_N действие резольвенты $R(\lambda)$ и спектральной функции E_λ оператора A. Сначала сформулируем и докажем некоторые вспомогательные утверждения.

4.2. Выберем N и k ($N \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant N-1$, НОД$(N, k) = 1$) и рассмотрим функцию $\alpha^k_N(\varphi)$, диффеоморфизмы G_+, G_-, $G = G_-G_+$, а также дуги Γ_+ и Γ_- границы Γ, концами (вершинами области Ω) которых являются неподвижные точки φ_0^+, φ_1^+ и φ_0^-, φ_1^- диффеоморфизмов G_+ и G_- (см. § 3). Рассмотрим также две задачи Коши для уравнений первого порядка

$$\cos\alpha_N^k(\Phi^+)\frac{\partial\Phi^+}{\partial x} - \sin\alpha_N^k(\Phi^+)\frac{\partial\Phi^+}{\partial y} = 0, \qquad \Phi^+\big|_{\Gamma_+} = \varphi, \tag{4.3}$$

$$\cos\alpha_N^k(\Phi^-)\frac{\partial\Phi^-}{\partial x} + \sin\alpha_N^k(\Phi^-)\frac{\partial\Phi^-}{\partial y} = 0, \qquad \Phi^-\big|_{\Gamma_-} = \varphi, \tag{4.4}$$

где угловая координата φ выбирается на Γ_+ так, что $\varphi \in [\varphi_0^+, \varphi_1^+]$, а на Γ_- — так, что $\varphi \in [\varphi_0^-, \varphi_1^-]$. По построению дуг Γ_+ и Γ_- выполняется условие $\varphi_0^- \in (\varphi_0^+, \varphi_1^+)$.

Нетрудно убедиться, что проекциями характеристик уравнений из (4.3) и (4.4) на плоскость x, y с учетом начальных данных, будут прямые семейств (3.7) и (3.8). Будем называть их в дальнейшем *характеристическими прямыми* уравнений (4.3) и (4.4). При этом функция $\Phi^+(x, y)$ постоянна вдоль каждой прямой семейства (3.7) и сопоставляет точке $(x, y) \in \overline{\Omega}$ угловую координату φ точки пересечения с дугой Γ_+ той прямой семейства (3.7), которая проходит через (x, y). По лемме 3.10 каждое из семейств (3.7) и (3.8) не содержит прямых, пересекающихся в $\overline{\Omega}$, поэтому функции $\Phi^+(x, y)$ и $\Phi^-(x, y)$ однозначно определены для всех $(x, y) \in \overline{\Omega}$. Однако, как это следует из доказательства леммы 3.9, в точках φ_0^+ и φ_1^+ характеристические прямые являются касательными к Γ, поэтому производные $\frac{\partial\Phi^+}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi^+}{\partial y}$ имеют особенности в вершинах φ_0^+, φ_1^+ области Ω. Аналогичными свойствами обладает функция $\Phi^-(x, y)$. Ее производные имеют особенности в вершинах φ_0^-, φ_1^-.

Введем обозначения

$$M_+(x, y) = (\Phi^+(x, y) - \varphi_0^+)^{-1}(\varphi_1^+ - \Phi^+(x, y))^{-1},$$
$$M_-(x, y) = (\Phi^-(x, y) - \varphi_0^-)^{-1}(\varphi_1^- - \Phi^-(x, y))^{-1}.$$

Лемма 4.2. *Для производных функций $\Phi^+(x, y)$, $\Phi^-(x, y)$ во всех точках $\overline{\Omega}$, кроме вершин φ_0^+, φ_1^+, φ_0^-, φ_1^-, справедливы оценки*

$$c_1^{-1}M_+(x, y) \leqslant \left|\frac{\partial\Phi^+}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\Phi^+}{\partial y}\right| \leqslant c_1 M_+(x, y),$$
$$c_2^{-1}M_-(x, y) \leqslant \left|\frac{\partial\Phi^-}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\Phi^-}{\partial y}\right| \leqslant c_2 M_-(x, y),$$

где c_1, c_2 — положительные постоянные.

Доказательство. В вершинах области производные функций Φ^+ и Φ^- имеют особенности, поэтому исключение этих вершин из рассмотрения естественно. До конца доказательства леммы принимаем следующие обозначения: c_j — положительные постоянные, зависящие только от свойств границы Γ, $\alpha(\varphi) = \alpha_N^k(\varphi)$, $\beta(\varphi)$ — угол между касательным к Γ вектором и положительным направлением оси x, $(x(\varphi), y(\varphi))$ — декартовы координаты точки φ границы Γ. Как и при доказательстве леммы 3.9, считаем, что $\beta(\varphi_0^+) = -\alpha_N^k(\varphi_0^+)$. В точке $(x(\varphi), y(\varphi)) \in \Gamma_+$, где

$\varphi \in (\varphi_0^+, \varphi_1^+)$, с учетом начальных условий из (4.3) имеем $\Phi^+(x(\varphi), y(\varphi)) = \varphi$. Дифференцируя по φ последнее равенство, получаем

$$\frac{\partial \Phi^+}{\partial x} x'(\varphi) + \frac{\partial \Phi^+}{\partial y} y'(\varphi) = 1, \qquad \varphi \in (\varphi_0^+, \varphi_1^+). \tag{4.5}$$

Обозначим через $\nu(\varphi) = (x'(\varphi), y'(\varphi))$ касательный к Γ вектор. Дополняя (4.5) уравнением из (4.3), находим из получившейся системы

$$\left.\frac{\partial \Phi^+}{\partial x}\right|_{\Gamma_+} = (\cos\alpha(\varphi))/\gamma(\varphi), \tag{4.6}$$

где $\gamma(\varphi) = x'(\varphi)\sin\alpha(\varphi) + y'(\varphi)\cos\alpha(\varphi) = |\nu(\varphi)| \sin(\beta(\varphi) + \alpha(\varphi))$. Ввиду выбора Γ_+ (см. § 3) имеем $\sin(\beta(\varphi) + \alpha(\varphi)) > 0$ при всех $\varphi \in (\varphi_0^+, \varphi_1^+)$, в то же время $\gamma(\varphi_0^+) = \gamma(\varphi_1^+) = 0$. Как уже отмечалось при доказательстве леммы 3.9, $\alpha'(\varphi_0^+) = \alpha'(\varphi_1^+) = 0$, тогда как $\beta'(\varphi) \geqslant \delta > 0$, поскольку кривизна Γ положительна. Следовательно, в некоторой окрестности точки φ_0^+ выполняются неравенства

$$c_3(\varphi - \varphi_0^+) \leqslant \sin(\beta(\varphi) + \alpha(\varphi)) \leqslant c_4(\varphi - \varphi_0^+) \qquad \text{при } \varphi > \varphi_0^+.$$

Аналогично показывается, что в некоторой окрестности точки φ_1^+ справедливы неравенства

$$c_5(\varphi_1^+ - \varphi) \leqslant \sin(\beta(\varphi) + \alpha(\varphi)) \leqslant c_6(\varphi_1^+ - \varphi) \qquad \text{при } \varphi < \varphi_1^+.$$

Тогда значения $\gamma(\varphi)$ для $\varphi \in (\varphi_0^+, \varphi_1^+)$ оцениваются следующим образом:

$$c_7(\varphi - \varphi_0^+)(\varphi_1^+ - \varphi) \leqslant \gamma(\varphi) \leqslant c_8(\varphi - \varphi_0^+)(\varphi_1^+ - \varphi).$$

Отсюда, учитывая начальное условие $\Phi^+|_{\Gamma_+} = \varphi$ и (4.6), получаем на Γ_+ оценку

$$\frac{c_9}{(\Phi^+ - \varphi_0^+)(\varphi_1^+ - \Phi^+)} \leqslant \frac{\partial \Phi^+}{\partial x} \leqslant \frac{c_{10}}{(\Phi^+ - \varphi_0^+)(\varphi_1^+ - \Phi^+)}. \tag{4.7}$$

Рассмотрим теперь значения производной $\frac{\partial \Phi^+}{\partial x}$ на дуге $\Gamma_+^1 = (\varphi_1^+, \varphi_0^+ + 2\pi)$. Диффеоморфизм G_+ переводит дугу $(\varphi_0^+, \varphi_1^+)$ в Γ_+^1. Поскольку φ_1^+ — неподвижная точка диффеоморфизма G_+, порождающая его функция $g_1(\varphi)$ удовлетворяет равенству $g_1(\varphi_1^+) = \varphi_1^+ + 2l\pi$ при некотором $l \in \mathbf{Z}$. Рассматривая $g_1(\varphi) - 2l\pi$ вместо $g_1(\varphi)$, можно считать $l = 0$. Точке $\varphi \in (\varphi_0^+, \varphi_1^+)$ соответствует на Γ_+^1 точка с угловой координатой $\psi = g_1(\varphi)$; по определению G_+ обе точки φ и ψ лежат на одной характеристической прямой уравнения из (4.3) и, поскольку Φ^+ постоянна на характеристике, $\Phi^+(x(\psi), y(\psi)) = \varphi$. Так как $g_1(g_1(\varphi)) = \varphi$ (см. лемму 3.5), на Γ_+^1 выполняется равенство $\Phi^+(x(\psi), y(\psi)) = g_1(\psi)$, дифференцируя которое по ψ, приходим к уравнению (ср. (4.5))

$$\frac{\partial \Phi^+}{\partial x} x'(\psi) + \frac{\partial \Phi^+}{\partial y} y'(\psi) = g_1'(\psi). \tag{4.8}$$

По лемме 3.3 $\alpha(\psi) = \alpha_N^k(g_1(\varphi)) = \alpha_N^k(\varphi) = \alpha(\varphi)$, поэтому в уравнении из (4.3) можно заменить $\alpha_N^k(\Phi^+)$ в точках Γ_+^1 на $\alpha(\psi)$. Поэтому, добавляя к (4.8) уравнение из (4.3), находим из получившейся системы

$$\left.\frac{\partial\Phi^+}{\partial x}\right|_{\Gamma_+^1} = g_1'(\psi)(\cos\alpha(\psi))/\gamma(\psi), \tag{4.9}$$

где $\gamma(\psi) = |\nu(\psi)|\sin(\beta(\psi)+\alpha(\psi))$. Как отмечалось при доказательстве леммы 3.9, функция $\sin(\beta(\psi)+\alpha(\psi))$ принимает на Γ_+^1 отрицательные значения. По лемме 3.4 $g_1'(\psi) \leqslant -Q(N,k) < 0$, поэтому из (4.8) получаем $\left.\frac{\partial\Phi^+}{\partial x}\right|_{\Gamma_+^1} > 0$. Оценим теперь $\sin(\beta(\psi)+\alpha(\psi))$ вблизи конца φ_1^+ дуги Γ_+^1. Принимая во внимание соотношения $\alpha'(\varphi_0^+ + 2\pi) = \alpha'(\varphi_1^+) = 0$, $\beta'(\psi) \geqslant \delta > 0$ и $|g_1'(\psi)| \geqslant Q(N,k)$, как и раньше, приходим к неравенствам

$$c_{11}|\psi - \varphi_1^+| \leqslant |\sin(\beta(\psi)+\alpha(\psi))| \leqslant c_{12}|\psi - \varphi_1^+|.$$

Однако $\psi = g_1(\varphi) = g_1(\Phi^+)$, где $\Phi^+ = \Phi^+(x(\psi), y(\psi))$, а $g_1(\varphi_1^+) = \varphi_1^+$, поэтому $|\psi - \varphi_1^+| = |g_1(\Phi^+) - g_1(\varphi_1^+)|$. Так как $|g_1'(\varphi)| \geqslant Q(N,k)$ и величина $|g_1'(\psi)|$ ограничена сверху, в некоторой окрестности точки φ_1^+ на Γ_+^1 справедливы оценки

$$c_{13}|\Phi^+ - \varphi_1^+| \leqslant |\psi - \varphi_1^+| \leqslant c_{14}|\Phi^+ - \varphi_1^+|.$$

Следовательно,

$$c_{15}|\Phi^+ - \varphi_1^+| \leqslant |\sin(\beta(\psi)+\alpha(\psi))| \leqslant c_{16}|\Phi^+ - \varphi_1^+|,$$

где Φ^+ — значение функции $\Phi^+(x,y)$ в точке ψ на Γ_+^1. Аналогично выводим оценку вблизи конца $\varphi_0^+ + 2\pi$ дуги Γ_+^1. Объединяя полученные оценки, из (4.9) приходим к неравенствам

$$\frac{c_{17}}{|\Phi^+ - \varphi_0^+||\varphi_1^+ - \Phi^+|} \leqslant \frac{\partial\Phi^+}{\partial x} \leqslant \frac{c_{18}}{|\Phi^+ - \varphi_0^+||\varphi_1^+ - \Phi^+|}, \tag{4.10}$$

справедливым всюду на Γ_+^1.

Чтобы установить оценку производной $\frac{\partial\Phi^+}{\partial x}$ внутри области Ω, продифференцируем уравнение из (4.3) по x. Обозначая $U = \frac{\partial\Phi^+}{\partial x}$, $V = \frac{\partial\Phi^+}{\partial y}$, получаем для U и V уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha(\Phi^+) - \frac{\partial U}{\partial y}\sin\alpha(\Phi^+) = -\alpha'(\Phi^+)(U^2\sin\alpha(\Phi^+) + UV\cos\alpha(\Phi^+)). \tag{4.11}$$

Учитывая, что ввиду (4.3) $V = U\operatorname{ctg}\alpha(\Phi^+)$, правую часть (4.11) можно преобразовать к виду $-\alpha'(\Phi^+)U^2/\sin\alpha(\Phi^+)$.

Рассмотрим характеристическую прямую уравнения из (4.3), проходящую через точку $\varphi \in \Gamma_+$. Левая часть уравнения (4.11) представляет собой производную вдоль этой прямой от функции $U(x,y)$. Введем на прямой $\Phi^+(x,y) \equiv \varphi$ естественную параметризацию $x = x(\varphi) + t\cos\alpha(\varphi)$, $y = y(\varphi) - t\sin\alpha(\varphi)$. Положим $a = -\alpha'(\varphi)/\sin\alpha(\varphi)$. Обозначим через $U(t)$ значения $U(x,y)$ и перепишем (4.11) в виде

$$\frac{dU}{dt} = aU^2, \qquad U(0) = U_0, \tag{4.12}$$

где U_0 — значение $\frac{\partial\Phi^+}{\partial x}$ в точке $\varphi \in \Gamma_+$. Решением задачи (4.12) является функция $U(t) = U_0/(1 - aU_0 t)$. При $a = 0$ функция $U(t)$ постоянна. Если $a \neq 0$, то особенность решения $U(t)$ сосредоточена в точке $t_* = 1/aU_0$. Поскольку на всем отрезке характеристической прямой, лежащем в $\overline{\Omega}$, производная $U = \frac{\partial\Phi^+}{\partial x}$ существует и непрерывна, точка t_* находится вне $\overline{\Omega}$. При любом $U_0 \neq 0$ функция $U_0/(1 - aU_0 t)$ монотонна на каждом из промежутков $(-\infty, t_*)$ и $(t_*, +\infty)$. Обозначим через U_1 значение $\frac{\partial\Phi^+}{\partial x}$ в том конце отрезка характеристической прямой, который лежит на Γ^1_+. Ввиду монотонности U по t в точках указанного отрезка, лежащих внутри Ω, справедливы неравенства

$$\min(U_0, U_1) \leqslant U(x,y) \leqslant \max(U_0, U_1),$$

с помощью которых оценки (4.7), (4.10) функции $U = \frac{\partial\Phi^+}{\partial x}$ распространяются с $\Gamma_+ \cup \Gamma^1_+$ во внутрь области Ω. Функция Φ^+ постоянна на характеристических прямых. Поэтому ввиду определения $M_+(x,y)$ приходим к требуемым в лемме 4.2 оценкам $\frac{\partial\Phi^+}{\partial x}$ при всех $(x,y) \in \overline{\Omega}$, за исключением вершин φ_0^+, φ_1^+. Для остальных производных $\frac{\partial\Phi^+}{\partial y}$, $\frac{\partial\Phi^-}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi^-}{\partial y}$ рассуждения аналогичны. □

Замечание 4.1. Значение t_*, при котором возникает особенность решения задачи Коши (4.12), соответствует точке пересечения рассматриваемой характеристической прямой и огибающей S семейства прямых (3.7), которая лежит вне $\overline{\Omega}$, что нетрудно проверить непосредственным вычислением. Если $\alpha'(\varphi) = 0$, то $a = 0$ в (4.12), характеристическая прямая, проходящая через точку $\varphi \in \Gamma_+$, не пересекает S, а $\frac{\partial\Phi^+}{\partial x}$ сохраняет на этой прямой постоянное значение.

4.3. Рассмотрим теперь две задачи Коши

$$\frac{\partial P}{\partial x}\cos\alpha_N^k(\Phi^+) - \frac{\partial P}{\partial y}\sin\alpha_N^k(\Phi^+) = 0, \qquad P|_{\Gamma_+} = p(\varphi), \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\alpha_N^k(\Phi^-) + \frac{\partial Q}{\partial y}\sin\alpha_N^k(\Phi^-) = 0, \qquad Q|_{\Gamma_-} = q(\varphi), \tag{4.14}$$

где $p(\varphi)$ и $q(\varphi)$ — гладкие функции, определенные на $[\varphi_0^+, \varphi_1^+]$ и $[\varphi_0^-, \varphi_1^-]$. Характеристики уравнений из задач (4.13) и (4.14) — прямые линии семейств (3.7) и (3.8). Поскольку функции Φ^+ и Φ^- постоянны на характеристиках и $\Phi^+|_{\Gamma_+} = \varphi$, $\Phi^-|_{\Gamma_-} = \varphi$, решением задачи (4.13) будет функция $P(x,y) = p(\Phi^+(x,y))$, а решением задачи (4.14) — функция $Q(x,y) = q(\Phi^-(x,y))$.

Лемма 4.3. *Решения задач* (4.13), (4.14) *удовлетворяют следующим оценкам:*

$$c_1^{-1}\|p'(\varphi)\|_{L_2[\varphi_0^+,\varphi_1^+]} \leqslant \left\|\frac{\partial P}{\partial x}\right\|_0 \leqslant c_1\|p'(\varphi)\|_{L_2[\varphi_0^+,\varphi_1^+]},$$
$$c_2^{-1}\|q'(\varphi)\|_{L_2[\varphi_0^-,\varphi_1^-]} \leqslant \left\|\frac{\partial Q}{\partial x}\right\|_0 \leqslant c_2\|q'(\varphi)\|_{L_2[\varphi_0^-,\varphi_1^-]},$$

где c_1 и c_2 — некоторые положительные постоянные. Аналогичные оценки справедливы, если $\left\|\frac{\partial P}{\partial x}\right\|_0$, $\left\|\frac{\partial Q}{\partial x}\right\|_0$ заменить соответственно на $\left\|\frac{\partial P}{\partial y}\right\|_0$, $\left\|\frac{\partial Q}{\partial y}\right\|_0$.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 4.2, будем обозначать через c_j положительные постоянные, определяемые свойствами границы Г. Введем в $\overline{\Omega}$ новые координаты $\xi = \Phi^+(x,y)$, $\eta = \Phi^-(x,y)$. По лемме 3.10 через каждую точку $(x,y) \in \overline{\Omega}$ проходит ровно по одной прямой семейств (3.7), (3.8). Функции $\Phi^+(x,y)$, $\Phi^-(x,y)$ непрерывны в $\overline{\Omega}$, отображение F: $(x,y) \to (\xi,\eta)$ взаимно однозначно и множество $\overline{\Omega}_* = F(\overline{\Omega})$ лежит в прямоугольнике $\Pi = \{(\xi,\eta) \mid \varphi_0^+ \leqslant \xi \leqslant \varphi_1^+, \varphi_0^- \leqslant \eta \leqslant \varphi_1^-\}$ плоскости ξ,η. Якобиан $J(x,y) = \frac{\partial\Phi^+}{\partial x}\frac{\partial\Phi^-}{\partial y} - \frac{\partial\Phi^+}{\partial y}\frac{\partial\Phi^-}{\partial x}$ отображения F определен всюду, кроме вершин области Ω. Учитывая, что Φ^+ и Φ^- являются решениями задач (4.3) и (4.4), и подставляя $\frac{\partial\Phi^+}{\partial y} = \frac{\partial\Phi^+}{\partial x}\operatorname{ctg}\alpha_N^k(\Phi^+)$, $\frac{\partial\Phi^-}{\partial y} = -\frac{\partial\Phi^-}{\partial x}\operatorname{ctg}\alpha_N^k(\Phi^-)$ в выражение для $J(x,y)$, приходим к равенству

$$J(x,y) = -\frac{\partial\Phi^+}{\partial x}\frac{\partial\Phi^-}{\partial x}(\operatorname{ctg}\alpha_N^k(\Phi^+) + \operatorname{ctg}\alpha_N^k(\Phi^-)).$$

Поскольку $0 < \alpha_N^k(\varphi) < \pi/2$, справедливы неравенства

$$0 < c_3 \leqslant (\operatorname{ctg}\alpha_N^k(\Phi^+) + \operatorname{ctg}\alpha_N^k(\Phi^-)) \leqslant c_4, \qquad (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Из леммы 4.2 следует, что

$$c_5 M_+(x,y)M_-(x,y) \leqslant |J(x,y)| \leqslant c_6 M_+(x,y)M_-(x,y). \tag{4.15}$$

Рассмотрим обратное отображение F^{-1}: $\overline{\Omega}_* \to \overline{\Omega}$. Положим

$$M_1(\xi) = (\xi - \varphi_0^+)(\varphi_1^+ - \xi),$$
$$M_2(\eta) = (\eta - \varphi_0^-)(\varphi_1^- - \eta),$$
$$M(\xi,\eta) = M_1(\xi)M_2(\eta).$$

Учитывая (4.15) и определение $M_+(x,y)$, $M_-(x,y)$, получаем оценку якобиана $J_1(\xi,\eta)$ обратного отображения F^{-1}:

$$c_7 M(\xi,\eta) \leqslant |J_1(\xi,\eta)| \leqslant c_8 M(\xi,\eta). \tag{4.16}$$

Оценим норму производной $\frac{\partial P}{\partial x} = p'(\Phi^+)\frac{\partial\Phi^+}{\partial x}$. Сделаем замену переменных $x = x(\xi,\eta)$, $y = y(\xi,\eta)$. Переходя к интегрированию по Ω_* и используя равенство $\xi = \Phi^+(x,y)$, получим

$$\left\|\frac{\partial P}{\partial x}\right\|_0^2 = \int\limits_{\Omega_*} |p'(\xi)|^2 \left|\frac{\partial\Phi^+}{\partial x}(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))\right|^2 |J_1(\xi,\eta)|\,d\xi\,d\eta. \tag{4.17}$$

Из оценок $\frac{\partial\Phi^+}{\partial x}$ (см. лемму 4.2) и определения $M_1(\xi)$ вытекают неравенства

$$\frac{c_9}{M_1(\xi)} \leqslant \left|\frac{\partial\Phi^+}{\partial x}(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))\right| \leqslant \frac{c_{10}}{M_1(\xi)}. \tag{4.18}$$

Выясним, как выглядит уравнение границы Γ_* области Ω_*. Прямые $\xi = \text{const}$ пересекают $\Omega_* \cup \Gamma_*$ по отрезкам, поэтому $\Omega_* = \{(\xi,\eta) \mid \varphi_0^+ < \xi < \varphi_1^+, \zeta_1(\xi) < \eta < \zeta_2(\xi)\}$. Найдем функции $\zeta_1(\xi)$ и $\zeta_2(\xi)$. Граница Γ разбивается вершинами области на четыре дуги:

$$\Gamma_1 = [\varphi_0^+,\varphi_0^-],\quad \Gamma_2 = [\varphi_0^-,\varphi_1^+],\quad \Gamma_3 = [\varphi_1^+,\varphi_1^-],\quad \Gamma_4 = [\varphi_1^-,\varphi_0^+ + 2\pi].$$

Поскольку $\Phi^+ = \Phi^- = \varphi$ на Γ_2, имеем $\zeta_1(\xi) = \xi$ при $\xi \in [\varphi_0^-,\varphi_1^+]$, т. е. $F(\Gamma_2) = \Gamma_2^*$ представляет собой отрезок прямой $\eta = \xi$. Заметим, что вместо функций $g_1(\varphi)$ и $\tilde g_1(\varphi)$, порождающих диффеоморфизмы G_+ и G_- исходной границы Γ, можно рассмотреть $g_1(\varphi) + 2l\pi$ и $\tilde g_1(\varphi) + 2m\pi$ (l, $m \in \mathbb{Z}$). Поэтому, как и при доказательстве леммы 4.2, можно выбрать их так, что для неподвижных точек диффеоморфизма G_+ выполняется равенство $g_1(\varphi_0^+) = \varphi_0^+$ (следовательно, $g_1(\varphi_1^+) = \varphi_1^+ - 2\pi$), а для G_- — равенство $\tilde g_1(\varphi_0^-) = \varphi_0^-$ (следовательно, $\tilde g_1(\varphi_1^-) = \varphi_1^- - 2\pi$). При таком условии для $\varphi \in [\varphi_0^+,\varphi_0^-]$ из определений Φ^+ и Φ^- следуют соотношения $\Phi^+ = \varphi$, $\Phi^- = \tilde g_1(\varphi)$. Учитывая, что $\tilde g_1(\tilde g_1(\varphi)) = \varphi$, получаем равенство $\Phi^- = \tilde g_1(\Phi^+)$, т. е. $\zeta_1(\xi) = \tilde g_1(\xi)$ для $\xi \in [\varphi_0^+,\varphi_0^-]$. Поскольку $\tilde g_1(\varphi_0^-) = \varphi_0^-$, функция $\zeta_1(\xi)$ непрерывна на промежутке $[\varphi_0^+,\varphi_1^+]$. Если $\varphi \in [\varphi_1^+,\varphi_1^-]$, то $\Phi^- = \varphi$, $\Phi^+ = g_1(\varphi) + 2\pi$, так как $g_1(\varphi_1^+) = \varphi_1^+ - 2\pi$, а Φ^+ непрерывна на Γ, равна φ_1^+ в точке φ_1^+ и принимает одинаковые значения в точках φ и $G_+\varphi$ ($\varphi \in \Gamma$). Так как $g_1(g_1(\varphi)) = \varphi$, $g_1(\varphi + 2\pi) = g_1(\varphi) - 2\pi$, на Γ_3 имеет место равенство

$$g_1(\Phi^+) = g_1(g_1(\varphi) + 2\pi) = g_1(g_1(\varphi)) - 2\pi = \varphi - 2\pi = \Phi^- - 2\pi,$$

т. е. $\eta = \zeta_2(\xi) = g_1(\xi) + 2\pi$ на промежутке $[\varphi_2^-,\varphi_1^+]$, который определяется точкой $\varphi_2^- = g_1(\varphi_1^-) + 2\pi \in (\varphi_0^+,\varphi_1^+)$. Наконец, для дуги Γ_4, где $\varphi \in [\varphi_1^-,\varphi_0^+ + 2\pi]$, имеем $\Phi^+ = g_1(\varphi) + 2\pi$, $\Phi^- = \tilde g_1(\varphi) + 2\pi$, поскольку $\tilde g_1(\varphi_1^-) = \varphi_1^- - 2\pi$, функция Φ^- непрерывна и равна φ_1^- в точке φ_1^-, а функция $\tilde g_1(\varphi)$ убывающая. Тогда $g_1(\Phi^+) = g_1(g_1(\varphi) + 2\pi) = g_1(g_1(\varphi)) - 2\pi = \varphi - 2\pi$. Поэтому $\Phi^- = \tilde g_1(g_1(\Phi^+) + 2\pi) + 2\pi = \tilde g_1(g_1(\Phi^+))$ и уравнение $\Gamma_4^* = F(\Gamma_4)$ имеет вид $\eta = \zeta_2(\xi) = \tilde g_1(g_1(\xi))$ для $\xi \in [\varphi_0^+,\varphi_2^-]$. Покажем, что так определенная функция $\zeta_2(\xi)$ непрерывна на $[\varphi_0^+,\varphi_1^+]$. Достаточно проверить равенство $\tilde g_1(g_1(\xi)) = g_1(\xi) + 2\pi$ при $\xi = \varphi_2^-$. Действительно, $\tilde g_1(g_1(\varphi_2^-)) = \tilde g_1(g_1(g_1(\varphi_1^-) + 2\pi)) = \tilde g_1(\varphi_1^- - 2\pi) = \tilde g_1(\varphi_1^-) + 2\pi = \varphi_1^-$ в силу оговоренного выбора функций $g_1(\varphi)$, $\tilde g_1(\varphi)$, а $g_1(\varphi_2^-) + 2\pi = g_1(g_1(\varphi_1^-) + 2\pi) + 2\pi = g_1(g_1(\varphi_1^-)) = \varphi_1^-$, что и требовалось доказать.

Проверим, что значения $\zeta_1(\xi)$ и $\zeta_2(\xi)$ в концах промежутка $[\varphi_0^+,\varphi_1^+]$ совпадают. Действительно, $\zeta_2(\varphi_1^+) = g_1(\varphi_1^+) + 2\pi = \varphi_1^+ = \zeta_1(\varphi_1^+)$, а $\zeta_2(\varphi_0^+) = \tilde g_1(g_1(\varphi_0^+)) = \tilde g_1(\varphi_0^+) = \zeta_1(\varphi_0^+)$, так как $g_1(\varphi_0^+) = \varphi_0^+$. Для

$\xi \in (\varphi_0^+, \varphi_1^+)$ очевидно выполняется неравенство $\zeta_2(\xi) > \zeta_1(\xi)$. Покажем, что на отрезке $[\varphi_0^+, \varphi_1^+]$ справедливы оценки

$$c_{11}M_1(\xi) \leqslant |\zeta_2(\xi) - \zeta_1(\xi)| \leqslant c_{12}M_1(\xi). \tag{4.19}$$

Заметим, что по лемме 3.4 $\tilde{g}_1(g_1(\xi)) = g_2(\xi)$, $g_2'(\xi) \geqslant Q(N,k) > 0$, $\tilde{g}_1'(\xi) \leqslant -Q(N,k) < 0$ и производные этих функций ограничены. Отсюда следует, что в некоторой окрестности точки φ_0^+ при $\xi \geqslant \varphi_0^+$ функция $\zeta_2(\xi)$ возрастает, а $\zeta_1(\xi)$ убывает. В силу равенства $\zeta_1(\varphi_0^+) = \zeta_2(\varphi_0^+)$ имеем

$$\begin{aligned}|\zeta_2(\xi) - \zeta_1(\xi)| &= |\zeta_2(\xi) - \zeta_2(\varphi_0^+)| + |\zeta_1(\xi) - \zeta_1(\varphi_0^+)| \\ &= |g_2(\xi) - g_2(\varphi_0^+)| + |\tilde{g}_1(\xi) - \tilde{g}_1(\varphi_0^+)|.\end{aligned}$$

Используя очевидным образом теорему Лагранжа и учитывая оценки производных g_2' и $\tilde{g}_1'$, получаем, что при некотором выборе c_{13} и c_{14} для ξ, близких к φ_0^+ ($\xi \geqslant \varphi_0^+$), справедливы неравенства

$$c_{13}|\xi - \varphi_0^+| \leqslant |\zeta_2(\xi) - \zeta_1(\xi)| \leqslant c_{14}|\xi - \varphi_0^+|.$$

Аналогично выводим неравенства

$$c_{15}|\xi - \varphi_1^+| \leqslant |\zeta_2(\xi) - \zeta_1(\xi)| \leqslant c_{16}|\xi - \varphi_1^+|$$

для ξ, близких к φ_1^+. В совокупности эти неравенства означают, что справедливы оценки (4.19) для $\xi \in [\varphi_0^+, \varphi_1^+]$.

Оценим теперь подынтегральное выражение в правой части (4.17). Используя неравенства (4.16), (4.18), (4.19), нетрудно убедиться, что

$$\left|\frac{\partial \Phi^+}{\partial x}\right|^2 |J_1(\xi,\eta)| \leqslant \frac{c_{17}}{M_1^2(\xi)} M(\xi,\eta) = \frac{c_{17}M_2(\eta)}{M_1(\xi)} \leqslant \frac{c_{18}}{M_1(\xi)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial P}{\partial x}\right\|_0^2 &\leqslant c_{18} \int\limits_{\Omega_*} |p'(\xi)|^2 \frac{d\xi\, d\eta}{M_1(\xi)} \\ &= c_{18} \int\limits_{\varphi_0^+}^{\varphi_1^+} \frac{|\zeta_2(\xi) - \zeta_1(\xi)|}{M_1(\xi)} |p'(\xi)|^2\, d\xi \leqslant c_{19} \int\limits_{\varphi_0^+}^{\varphi_1^+} |p'(\xi)|^2\, d\xi,\end{aligned}$$

т. е. одно из необходимых в лемме неравенств установлено.

Для доказательства оценки снизу величины $\left\|\frac{\partial P}{\partial x}\right\|_0$ воспользуемся двусторонним характером неравенств (4.16), (4.18), (4.19). Заметим, что функция $\zeta_2(\xi)$ в силу ее определения достигает максимума в точке $\varphi_2^- \in (\varphi_0^+, \varphi_1^+)$ (причем $\zeta_2(\varphi_2^-) = \varphi_1^-$), возрастает на отрезке $[\varphi_0^+, \varphi_2^-]$ и убывает на $[\varphi_2^-, \varphi_1^+]$. Аналогично функция $\zeta_1(\xi)$ достигает минимума в точке $\varphi_0^- \in (\varphi_0^+, \varphi_1^+)$ (причем $\xi_1(\varphi_0^-) = \varphi_0^-$), убывает на отрезке $[\varphi_0^+, \varphi_0^-]$ и возрастает на $[\varphi_0^-, \varphi_1^+]$. Положим

$$\zeta_2(\xi,\varepsilon) = \min\left(\zeta_2(\xi), \varphi_1^- - \varepsilon\right), \qquad \zeta_1(\xi,\varepsilon) = \max\left(\zeta_1(\xi), \varphi_0^- + \varepsilon\right).$$

Зафиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$ так, чтобы при всех $\xi \in (\varphi_0^+, \varphi_1^+)$ оставались справедливыми неравенство $\zeta_2(\xi,\varepsilon) > \zeta_1(\xi,\varepsilon)$ и, возможно, с некоторой новой постоянной c_{20}, оценка снизу $|\zeta_2(\xi,\varepsilon)-\zeta_1(\xi,\varepsilon)| \geqslant c_{20}M_1(\xi)$ из (4.19).

Рассмотрим область

$$\Omega_*(\varepsilon) = \{(\xi,\eta)\,|\,\xi \in (\varphi_0^+,\varphi_1^+),\ \zeta_1(\xi,\varepsilon) < \eta < \zeta_2(\xi,\varepsilon)\} \subset \Omega_*.$$

В силу определения $M_2(\eta) \geqslant \delta(\varepsilon) = c_{21} > 0$ для всех $(\xi,\eta) \in \Omega_*(\varepsilon)$. Поэтому в области $\Omega_*(\varepsilon)$

$$\left|\frac{\partial \Phi^+}{\partial x}\right|^2 |J_1(\xi,\eta)| \geqslant \frac{c_{22}}{M_1^2(\xi)} M(\xi,\eta) = \frac{c_{22}M_2(\eta)}{M_1(\xi)} \geqslant \frac{c_{23}}{M_1(\xi)}.$$

Тогда из (4.17), заменяя область интегрирования Ω_* на $\Omega_*(\varepsilon)$, получаем

$$\left\|\frac{\partial P}{\partial x}\right\|_0^2 \geqslant c_{23} \int\limits_{\Omega_*(\varepsilon)} |p'(\xi)|^2 \frac{d\xi\, d\eta}{M_1(\xi)}$$

$$= c_{23} \int\limits_{\varphi_0^+}^{\varphi_1^+} \frac{|\zeta_2(\xi,\varepsilon) - \zeta_1(\xi,\varepsilon)|}{M_1(\xi)} |p'(\xi)|^2\, d\xi \geqslant c_{24} \int\limits_{\varphi_0^+}^{\varphi_1^+} |p'(\xi)|^2\, d\xi,$$

что и дает необходимую оценку снизу величины $\left\|\frac{\partial P}{\partial x}\right\|_0$. Неравенства для $\left\|\frac{\partial Q}{\partial x}\right\|_0$ получаются аналогично. Выражая в Ω из уравнений в (4.13), (4.14) $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ через $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, получаем аналогичные оценки $\left\|\frac{\partial P}{\partial y}\right\|_0$, $\left\|\frac{\partial Q}{\partial y}\right\|_0$. □

Замечание 4.2. Использованная при доказательстве леммы 4.3 замена переменных аналогична преобразованию $\xi = \arccos x$, $\eta = \arcsin y$ круга $x^2 + y^2 \leqslant 1$ в квадрат $|\eta| + |\xi - \pi/2| \leqslant \pi/2$.

4.4. Множество $E \subset \Gamma$ называется

- *инвариантным относительно диффеоморфизма F границы* Γ, если $F(E) = E$;
- *инвариантным относительно некоторого семейства диффеоморфизмов*, если оно инвариантно относительно каждого элемента семейства.

Аналогичным образом можно ввести определение инвариантной функции $\zeta(\varphi)$. Естественно, $\zeta(\varphi)$ можно одновременно считать 2π-периодической функцией действительной переменной φ.

- Функция $\zeta(\varphi)$, $\varphi \in \Gamma$, называется *инвариантной относительно диффеоморфизма F*, если $\zeta(F\varphi) = \zeta(\varphi)$ для любой точки $\varphi \in \Gamma$.

В частности, это определение означает, что для любой функции $f(\varphi)$, порождающей F, выполняется тождество $\zeta(f(\varphi)) \equiv \zeta(\varphi)$. Инвариантность функции относительно семейства диффеоморфизмов определяется так же, как и в случае множеств.

При заданных N, k рассмотрим образующую дугу $\Gamma_0 = [\varphi_1, \varphi_2]$. Напомним, что $\varphi_1 = \varphi_0^+$ является неподвижной точкой диффеоморфизма G_+

и принадлежит одному из вырожденных циклов T_1, а φ_2 — ближайшая к φ_1 вершина второго вырожденного цикла T_2.

Определим функцию

$$z(\varphi,\vartheta)=\begin{cases}0, & \text{если } \varphi_1\leqslant\varphi<\vartheta,\\ 1, & \text{если } \vartheta\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2,\end{cases}\tag{4.20}$$

для $\varphi\in[\varphi_1,\varphi_2]$, $\vartheta\in[\varphi_1,\varphi_2]$. Доопределим функцию $z(\varphi,\vartheta)$ по φ на всей границе Γ так, чтобы она была инвариантна относительно группы диффеоморфизмов $G(N,k)$. Для этого рассмотрим образы

$$G_+\Gamma_0, G\Gamma_0,\dots,G_+G^{N-1}\Gamma_0=G_-\Gamma_0$$

дуги Γ_0. По лемме 3.11 эти ду́ги в совокупности составляют Γ и не имеют общих внутренних точек. Пусть $\psi\in G_+\Gamma_0$, $\psi=G_+\varphi$, где $\varphi\in\Gamma_0$. Положим $z(\psi,\vartheta)=z(G_+\varphi,\vartheta)=z(\varphi,\vartheta)$. Продолжая эту процедуру по всей последовательности дуг, мы определим $z(\varphi,\vartheta)$ для всех $\varphi\in\Gamma$ и $\vartheta\in[\varphi_1,\varphi_2]$. Очевидно, что так построенная функция z будет инвариантна по φ относительно группы $G(N,k)$.

Ясно, что точками разрыва функции $z(\varphi,\vartheta)$ на Γ при заданном значении $\vartheta\in(\varphi_1,\varphi_2)$ будут точки границы $\vartheta, G_+\vartheta, G\vartheta,\dots,G_+G^{N-1}\vartheta$, которые являются вершинами невырожденного цикла $T(\vartheta,\alpha_N^k(\vartheta))$. Занумеровав их по порядку обхода границы Γ в положительном направлении, начиная с $\vartheta_1=\vartheta$, получим (см. лемму 3.12) последовательность дуг

$$\gamma_1(\vartheta)=[\vartheta_1,\vartheta_2],\ \gamma_2(\vartheta)=[\vartheta_2,\vartheta_3],\dots,\gamma_{2N}(\vartheta)=[\vartheta_{2N},\vartheta_1+2\pi]$$

с общими концами. Образ каждой дуги при любом диффеоморфизме группы $G(N,k)$ снова является дугой из выписанной последовательности. При этом дуги $\gamma_{2j-1}(\vartheta)$ $(j=1,2,\dots,N)$ содержат внутри вершины вырожденного цикла T_2, а оставшиеся дуги — вершины цикла T_1. Поскольку $G_+\gamma_{2N}(\vartheta)=\gamma_{2N}(\vartheta)$, по способу продолжения имеем $z(\varphi,\vartheta)\equiv 0$ для всех внутренних точек φ дуги $\gamma_{2N}(\vartheta)$, следовательно, для всех остальных дуг $\gamma_{2j}(\vartheta)$, содержащих внутри вершины цикла T_1. На оставшейся части границы (т. е. при $\varphi\in\gamma_{2j-1}(\vartheta)$) имеем $z(\varphi,\vartheta)\equiv 1$. Поэтому функция $z(\varphi,\vartheta)$ непрерывна по φ в вершинах всех вырожденных циклов при $\varphi_1<\vartheta<\varphi_2$.

Возьмем гладкую функцию $\zeta(\vartheta)$ такую, что $\operatorname{supp}\zeta(\vartheta)\subset(\varphi_1,\varphi_2)$, и положим

$$h(\varphi)=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\zeta(\vartheta)z(\varphi,\vartheta)\,d\vartheta,\qquad \varphi\in\Gamma.\tag{4.21}$$

Лемма 4.4. *Если функция $\zeta(\vartheta)$ удовлетворяет указанным выше условиям, то функция $h(\varphi)$ является гладкой и инвариантна относительно группы $G(N,k)$ диффеоморфизмов границы Γ.*

Доказательство. Покажем, что $h(\varphi)$ гладкая на $[\varphi_1,\varphi_2]$. Для произвольной гладкой функции $\omega(\varphi)$ такой, что $\operatorname{supp}\omega(\varphi)\subset(\varphi_1,\varphi_2)$, имеем

$$\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}h(\varphi)\omega'(\varphi)\,d\varphi=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\zeta(\vartheta)z(\varphi,\vartheta)\omega'(\varphi)\,d\vartheta\,d\varphi$$

$$=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\zeta(\vartheta)\Big(\int\limits_{\vartheta}^{\varphi_2}\omega'(\varphi)\,d\varphi\Big)\,d\vartheta=-\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\zeta(\vartheta)\omega(\vartheta)\,d\vartheta.$$

По определению обобщенной производной для всех $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ имеем $h'(\varphi) = \zeta(\varphi)$. Для доказательства инвариантности $h(\varphi)$ относительно любого диффеоморфизма $F \in G(N,k)$ достаточно заметить, что $z(F\varphi, \vartheta) = z(\varphi, \vartheta)$, следовательно,

$$h(F\varphi) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta(\vartheta) z(F\varphi, \vartheta)\, d\vartheta = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta(\vartheta) z(\varphi, \vartheta)\, d\vartheta = h(\varphi).$$

Гладкость функции $h(\varphi)$ на всей границе Γ следует из инвариантности относительно $G(N,k)$. Действительно, пусть $\Gamma_F = F(\Gamma_0)$, $F \in G(N,k)$, и пусть $f(\varphi)$ — порождающая функция для F. Если $\varphi \in \Gamma_0$, то $\psi = f(\varphi) \in \Gamma_F$ и справедливо равенство $h(\psi) = h(f(\varphi)) = h(\varphi)$. Для обратной функции $f^{-1}(\psi)$ имеем $h(\psi) = h(f^{-1}(\psi))$. Следовательно, $h'(\psi) = h'(f^{-1}(\psi))/f'(f^{-1}(\psi)) = \zeta(f^{-1}(\psi))/f'(f^{-1}(\psi))$. Поскольку по определению $\zeta(\vartheta)$ в окрестности концов дуги Γ_F $h'(\psi) = 0$, функция $h(\varphi)$ гладкая на Γ. □

Заметим, что функцию $w(\varphi)$, заданную на границе Γ и инвариантную относительно диффеоморфизма G_+, можно доопределить в области Ω, полагая $W_+(x,y) = w(\Phi^+(x,y))$, где $W_+|_\Gamma = w$. Действительно, $\Phi^+(x,y) \in [\varphi_0^+, \varphi_1^+]$ для всех $(x,y) \in \Omega$ и $\Phi^+(x,y) = \mathrm{const}$ на прямых семейства (3.7). Следовательно, $W_+(x,y)|_\Gamma = w(\varphi)$ при $\varphi \in \Gamma_+$. Поскольку $w(G_+\varphi) = w(\varphi)$ и точка $G_+\varphi$ лежит на той же прямой семейства (3.7), что и точка φ, заключаем $W_+(x,y)|_\Gamma = w(\varphi)$ для всех $\varphi \in \Gamma \backslash \Gamma_+$. Аналогично, если $w(\varphi)$ инвариантна относительно G_-, то на всю область Ω она распространяется с помощью равенства $W_-(x,y) = w(\Phi^-(x,y))$.

Напомним, что функция $z(\varphi, \vartheta)$ инвариантна по φ относительно G_+ и G_-. Положим

$$\begin{aligned} \chi_+(x,y,\vartheta) &= z(\Phi^+(x,y), \vartheta), \\ \chi_-(x,y,\vartheta) &= z(\Phi^-(x,y), \vartheta), \\ \chi(x,y,\vartheta) &= \chi_+(x,y,\vartheta) - \chi_-(x,y,\vartheta). \end{aligned}$$

Лемма 4.5. *Пусть $\lambda(\vartheta) = \lambda_N^k(\vartheta) = -\cos^2 \alpha_N^k(\vartheta)$. Функция $\chi(x,y,\vartheta)$ является обобщенной собственной функцией из $L_2(\Omega)$ оператора A, соответствующей числу $\lambda(\vartheta)$.*

Доказательство. По лемме 3.12 дуги $\gamma_1(\vartheta) = [\vartheta_1, \vartheta_2], \dots, \gamma_{2N}(\vartheta) = [\vartheta_{2N}, \vartheta_1 + 2\pi]$, на которые разбивается Γ вершинами цикла $T(\vartheta, \alpha_N^k(\vartheta))$, распадаются на два семейства: $M_1(\vartheta) = \{\gamma_{2j-1}(\vartheta)\}$ и $M_2(\vartheta) = \{\gamma_{2j}(\vartheta)\}$, где $j = 1, 2, \dots, N$; причем если дуга $\gamma_i(\vartheta)$ принадлежит $M_1(\vartheta)$, то ее образы $F_+(\vartheta)\gamma_i(\vartheta)$, $F_-(\vartheta)\gamma_i(\vartheta)$ при диффеоморфизмах $F_+(\vartheta) = F_+(\alpha_N^k(\vartheta))$ и $F_-(\vartheta) = F_-(\alpha_N^k(\vartheta))$ тоже принадлежат $M_1(\vartheta)$. Аналогичное свойство выполнено, если $\gamma_i(\vartheta) \in M_2(\vartheta)$. Заметим, что согласно определению $z(\varphi, \vartheta) = 1$ при $\varphi \in \gamma_{2j-1}(\vartheta) \in M_1(\vartheta)$ и $z(\varphi, \vartheta) = 0$, когда φ — внутренняя точка дуги $\gamma_{2j}(\vartheta) \in M_2(\vartheta)$. Следовательно, $z(\varphi, \vartheta)$ инвариантна относительно диффеоморфизмов $F_+(\vartheta)$ и $F_-(\vartheta)$. Так же, как в случаях G_+ и G_-, функцию $z(\varphi, \vartheta)$ можно продолжить в область Ω, полагая

$\tilde{\chi}_+(x,y,\vartheta) = z(\varphi,\vartheta)$ на отрезках параллельных прямых

$$x \sin\alpha_N^k(\vartheta) + y\cos\alpha_N^k(\vartheta) = x(\varphi)\sin\alpha_N^k(\vartheta) + y(\varphi)\cos\alpha_N^k(\vartheta), \tag{4.22}$$

принадлежащих $\overline{\Omega}$. Концами этих отрезков являются точки φ и $F_+(\vartheta)\varphi$ границы Γ. Значения функции $z(\varphi,\vartheta)$ в этих точках совпадают в силу ее инвариантности относительно $F_+(\vartheta)$. Аналогично положим $\tilde{\chi}_-(x,y,\vartheta) = z(\varphi,\vartheta)$ на отрезках

$$x \sin\alpha_N^k(\vartheta) - y\cos\alpha_N^k(\vartheta) = x(\varphi)\sin\alpha_N^k(\vartheta) - y(\varphi)\cos\alpha_N^k(\vartheta), \tag{4.23}$$

концами которых являются точки $\varphi \in \Gamma$ и $F_-(\vartheta)\varphi \in \Gamma$.

Прямые семейств (4.22) и (4.23) являются характеристиками оператора $L(\lambda(\vartheta))u \equiv \lambda(\vartheta)u_{xx} + (1+\lambda(\vartheta))u_{yy}$. Следовательно,

$$\tilde{\chi}_+(x,y,\vartheta) = \tilde{\chi}_+(\xi,\vartheta), \quad \xi = x\sin\alpha_N^k(\vartheta) + y\cos\alpha_N^k(\vartheta),$$
$$\tilde{\chi}_-(x,y,\vartheta) = \tilde{\chi}_-(\eta,\vartheta), \quad \eta = x\sin\alpha_N^k(\vartheta) - y\cos\alpha_N^k(\vartheta).$$

Положим $\tilde{\chi}(x,y,\vartheta) = \tilde{\chi}_+(\xi,\vartheta) - \tilde{\chi}_-(\eta,\vartheta)$. Тогда $\tilde{\chi}(x,y,\vartheta)|_\Gamma = 0$, поскольку значения $\tilde{\chi}_+(\xi,\vartheta)$ и $\tilde{\chi}_-(\eta,\vartheta)$ на Γ совпадают с $z(\varphi,\vartheta)$. Как уже отмечалось, в [14, 15] показано, что в этом случае $\tilde{\chi}(x,y,\vartheta)$ будет слабым решением однородной задачи Дирихле

$$L(\lambda(\vartheta))\chi = 0, \qquad \chi|_\Gamma = 0,$$

т. е. для любой гладкой функции $w(x,y) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ справедливо равенство

$$B_1(\tilde{\chi}, w, \lambda(\vartheta)) = \int\limits_\Omega \tilde{\chi}(x,y,\vartheta)(\lambda(\vartheta)\overline{w}_{xx} + (1+\lambda(\vartheta))\overline{w}_{yy})\,d\Omega = 0. \tag{4.24}$$

Следовательно, $\tilde{\chi}(x,y,\vartheta)$ является обобщенной собственной функцией оператора A. Равенство (4.24) для построенных обобщенных собственных функций, которые являются кусочно-постоянными, проверено в [2]. Остается убедиться, что $\tilde{\chi}(x,y,\vartheta) = \chi(x,y,\vartheta)$. Действительно, разрывы функций $\chi_+(x,y,\vartheta)$ и $\tilde{\chi}_+(x,y,\vartheta)$ сосредоточены соответственно на отрезках

$$x\sin\alpha_N^k(\vartheta_i) + y\cos\alpha_N^k(\vartheta_i) = x(\vartheta_i)\sin\alpha_N^k(\vartheta_i) + y(\vartheta_i)\cos\alpha_N^k(\vartheta_i)$$

прямых семейства (3.7) и отрезках

$$x\sin\alpha_N^k(\vartheta) + y\cos\alpha_N^k(\vartheta) = x(\varphi_i)\sin\alpha_N^k(\vartheta) + y(\varphi_i)\cos\alpha_N^k(\vartheta) \tag{4.25}$$

прямых семейства (4.22) при $\varphi_i = \vartheta_i$ $(i = 1,2,\dots,N)$. Однако ϑ_i — это вершины цикла $T(\vartheta, \alpha_N^k(\vartheta))$, поэтому по лемме 3.3 $\alpha_N^k(\vartheta_i) = \alpha_N^k(\vartheta)$ для всех $i = 1,2,\dots,N$. Значит, эти отрезки совпадают при всех i. Параллельные прямые (4.25) разбивают область на подобласти, границами которых являются отрезки этих прямых и дуги семейств $M_1(\vartheta)$ и $M_2(\vartheta)$. Пусть, к примеру, точка (x,y) принадлежит подобласти, частью границы которой является дуга $\gamma_i(\vartheta) \in M_1(\vartheta)$. По определению G_+ вторая дуга, ограничивающая выбранную подобласть, есть $G_+\gamma_i(\vartheta) \in M_1(\vartheta)$. Функции $\chi_+(x,y,\vartheta)$ и $z(\varphi,\vartheta)$ совпадают на $\gamma_i(\vartheta)$, т. е. $\chi_+(x,y,\vartheta) \equiv 1$ в подобласти. Поскольку $F_+(\vartheta)\gamma_i(\vartheta) = G_+\gamma_i(\vartheta)$, таким же образом можно установить тождество $\tilde{\chi}_+(x,y,\vartheta) \equiv 1$. Аналогично если $\gamma_i(\vartheta) \in M_2(\vartheta)$, то $\chi_+(x,y,\vartheta) =$

$\tilde{\chi}_+(x,y,\vartheta) \equiv 0$ во всех внутренних точках выбранной подобласти. Точно так же, рассматривая линии разрыва функций $\chi_-(x,y,\vartheta)$ и $\tilde{\chi}_-(x,y,\vartheta)$, принадлежащие семействам прямых (3.8) и (4.23), можно доказать, что $\chi_-(x,y,\vartheta) = \tilde{\chi}_-(x,y,\vartheta)$. Следовательно, $\chi(x,y,\vartheta) = \tilde{\chi}(x,y,\vartheta)$ — обобщенная собственная функция оператора A, соответствующая числу $\lambda(\vartheta)$. □

Замечание 4.3. Рассматривая $\vartheta \in (\varphi_1 + \delta,\ \varphi_2 - \delta)$ для достаточно малого $\delta > 0$, нетрудно убедиться, что $z(\varphi,\vartheta) = 1$ для $\varphi \in (\varphi_2 - \delta,\ \varphi_2 + \delta_1)$ и $z(\varphi,\vartheta) = 0$ для $\varphi \in (\varphi_1 - \delta_1,\ \varphi_1 + \delta)$, где $\delta_1 > 0$ определяется выбором δ. Для $\vartheta \in (\varphi_1 + \delta,\ \varphi_2 - \delta)$ построенные обобщенные собственные функции $\chi(x,y,\vartheta)$ равны единице в некоторой окрестности точки $(x_0,y_0) \in \Omega$, координаты которой определяются из системы уравнений

$$x \sin \alpha_N^k(\varphi_2) + y \cos \alpha_N^k(\varphi_2) = x(\varphi_2) \sin \alpha_N^k(\varphi_2) + y(\varphi_2) \cos \alpha_N^k(\varphi_2),$$
$$x \sin \alpha_N^k(\varphi_1) - y \cos \alpha_N^k(\varphi_1) = x(\varphi_1) \sin \alpha_N^k(\varphi_1) - y(\varphi_1) \cos \alpha_N^k(\varphi_1).$$

Действительно, отрезки прямых семейства (3.7) для $\varphi \in (\varphi_2 - \delta, \varphi_2 + \delta_1)$ образуют некоторую подобласть $\Omega_1 \subset \Omega$. Во всех точках этих отрезков функция $\chi_+(x,y,\vartheta)$ при $\vartheta \in (\varphi_1 + \delta, \varphi_2 - \delta)$ принимает значения, равные соответственно $z(\varphi,\vartheta)$, т. е. $\chi_+(x,y,\vartheta) \equiv 1$ в Ω_1. Аналогичным образом, рассматривая отрезки прямых семейства (3.8) для $\varphi \in (\varphi_1 - \delta_1, \varphi_1 + \delta)$, получаем подобласть $\Omega_2 \subset \Omega$, в которой $\chi_-(x,y,\vartheta) \equiv 0$ для всех $\vartheta \in (\varphi_1 + \delta, \varphi_2 - \delta)$. Ясно, что $(x_0,y_0) \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ и $\chi(x,y,\vartheta) \equiv 1$ для всех $(x,y) \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, $\vartheta \in (\varphi_1 + \delta, \varphi_2 - \delta)$. Этот факт будет использоваться в дальнейших построениях.

Лемма 4.6. *Пусть функция $\zeta(\vartheta)$ удовлетворяет условиям леммы 4.4, $\Gamma_0 = [\varphi_1,\varphi_2]$ — образующая дуга границы Γ, соответствующая фиксированным N,k. Тогда*

(а) *функции*

$$P(x,y) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta(\vartheta)\chi_+(x,y,\vartheta)\,d\vartheta, \tag{4.26}$$

$$Q(x,y) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta(\vartheta)\chi_-(x,y,\vartheta)\,d\vartheta \tag{4.27}$$

представимы в виде

$$P(x,y) = h(\Phi^+(x,y)), \qquad Q(x,y) = h(\Phi^-(x,y)),$$

где $h(\varphi)$ определена равенством (4.21), а $\Phi^+(x,y)$ и $\Phi^-(x,y)$ — решения задач (4.3) и (4.4);

(б) *справедливо равенство $P(x,y)|_\Gamma = Q(x,y)|_\Gamma$;*

(в) *существуют положительные постоянные c_1, c_2, c_3 такие, что для любой $\zeta(\vartheta)$ выполняются оценки*

(i) $|P(x,y)| + |Q(x,y)| \leqslant c_1 \|\zeta(\vartheta)\|_{L_2[\varphi_1,\varphi_2]}$, $\quad (x,y) \in \overline{\Omega}$,

(ii) $\|\nabla P\|_0 + \|\nabla Q\|_0 \leqslant c_2 \|\zeta(\vartheta)\|_{L_2[\varphi_1,\varphi_2]}$, $\quad$ *где* $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$,

(iii) $\|\zeta(\theta)\|_{L_2[\varphi_1,\varphi_2]} \leqslant c_3 \min\left(\left\|\frac{\partial P}{\partial x}\right\|_0, \left\|\frac{\partial P}{\partial y}\right\|_0, \left\|\frac{\partial Q}{\partial x}\right\|_0, \left\|\frac{\partial Q}{\partial y}\right\|_0\right)$;

(г) *функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ принадлежат $C^\infty(\overline{\Omega})$.*

Доказательство. По лемме 4.4 $h'(\varphi) = \zeta(\varphi)$ для $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, а из определений $z(\varphi, \vartheta)$ и $h(\varphi)$ (см. (4.21)) следует $h(\varphi_1) = 0$. Поэтому

$$|h(\varphi)| = \Big|\int_{\varphi_1}^{\varphi} h'(\vartheta)\, d\vartheta\Big| \leqslant \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |\zeta(\vartheta)|\, d\vartheta \leqslant (\varphi_2 - \varphi_1)^{\frac12}\Big(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |\zeta(\vartheta)|^2\, d\vartheta\Big)^{\frac12},$$

т. е. $|h(\varphi)| \leqslant c_1 \|\zeta(\vartheta)\|_{L_2[\varphi_1,\varphi_2]}$, $\varphi \in \Gamma_0 = [\varphi_0, \varphi_2]$. По лемме 4.4 функция $h(\varphi)$ инвариантна относительно группы диффеоморфизмов $G(N,k)$, поэтому $\max\limits_{\Gamma} |h(\varphi)| = \max\limits_{\Gamma_0} |h(\varphi)|$, что позволяет распространить полученную оценку $|h(\varphi)|$ на всю границу Γ.

Оценим $\|h'(\varphi)\|_{L_2(\Gamma)}$. Если $F \in G(N,k)$, $\Gamma_F = F(\Gamma_0)$ и $f(\varphi)$ — порождающая функция для F, то по лемме 4.4 $h(f(\varphi)) = h(\varphi)$, где $\varphi \in \Gamma_0$, $\psi = f(\varphi) \in \Gamma_F$, следовательно, $h'(f(\varphi))f'(\varphi) = h'(\varphi)$. Концами дуги Γ_F являются точки $\psi_1 = f(\varphi_1)$, $\psi_2 = f(\varphi_2)$. После замены переменной $\psi = f(\varphi)$ получаем

$$\|h'\|^2_{L_2(\Gamma_F)} = \Big|\int_{\psi_1}^{\psi_2} |h'(\psi)|^2\, d\psi\Big| = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |h'(f(\varphi))f'(\varphi)|^2 \frac{d\varphi}{|f'(\varphi)|}$$

$$\leqslant c_4 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |h'(\varphi)|^2\, d\varphi = c_4 \|h'(\varphi)\|^2_{L_2(\Gamma_0)} = c_4 \|\zeta(\varphi)\|^2_{L_2[\varphi_1,\varphi_2]},$$

так как по лемме 3.4 $|f'(\varphi)| \geqslant Q(N,k) > 0$ для всех диффеоморфизмов $F \in G(N,k)$. Всего существуют $2N$ различных дуг вида $\Gamma_i = F_i\Gamma_0$ ($F_i \in G(N,k)$), образующих в совокупности границу Γ. Поэтому

$$\|h'(\varphi)\|^2_{L_2(\Gamma)} = \sum_{i=0}^{2N-1} \|h'(\varphi)\|^2_{L_2(\Gamma_i)} \leqslant 2Nc_4 \|\zeta(\varphi)\|^2_{L_2[\varphi_1,\varphi_2]}.$$

Для доказательства оценок (i), (ii) заметим, что в (4.26) все функции $\chi_+(x,y,\vartheta)$ постоянны на прямых семейства (3.7), поэтому то же верно для $P(x,y)$. Подставляя в (4.26) декартовы координаты $(x(\varphi), y(\varphi))$ точки $\varphi \in \Gamma$ и учитывая равенство $\chi_+(x(\varphi), y(\varphi), \vartheta) = z(\varphi, \vartheta)$ и определение функции $h(\varphi)$ (см. (4.21)), получаем $P(x,y)|_\Gamma = h(\varphi)$. Следовательно, $P(x,y) = h(\Phi^+(x,y))$, поскольку $\Phi^+(x,y)$ задает угловую координату точки пересечения прямой семейства (3.7), проходящей через $(x,y) \in \overline{\Omega}$, с дугой $\Gamma_+ = [\varphi_0^+, \varphi_1^+]$. Оценка (i) вытекает из полученной выше аналогичной оценки $|h(\varphi)|$. Поскольку $h(\varphi)$ гладкая, функция $P(x,y)$ является решением задачи (4.13), если задано $p(\varphi) = h(\varphi)$. По лемме 4.3

$$\Big\|\frac{\partial P}{\partial x}\Big\|_0 + \Big\|\frac{\partial P}{\partial y}\Big\|_0 \leqslant c_5 \|h'(\varphi)\|_{L_2(\Gamma_+)} \leqslant c_6 \|\zeta(\varphi)\|_{L_2[\varphi_1,\varphi_2]}.$$

Аналогично, для вывода оценок $|Q(x,y)|$ и производных $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ достаточно заметить, что $Q(x,y)$ является решением задачи (4.14) с данными Коши $Q(x,y)|_{\Gamma_-} = h(\varphi)$. В частности, отсюда следует, что $Q(x,y)|_\Gamma = P(x,y)|_\Gamma$.

Для доказательства (iii) воспользуемся оценкой снизу $\left\|\frac{\partial P}{\partial x}\right\|_0$ из леммы 4.3. Действительно,

$$\|\zeta(\varphi)\|_{L_2[\varphi_1,\varphi_2]} = \|h'(\varphi)\|_{L_2(\Gamma_0)} \leqslant \|h'(\varphi)\|_{L_2(\Gamma_+)} \leqslant c_7 \left\|\frac{\partial P}{\partial x}\right\|_0.$$

Поскольку по лемме 4.3 можно было взять любую производную $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, оценка (iii) справедлива при некотором выборе $c_3 > 0$.

Из доказательства леммы 4.4 следует, что производные всех порядков функции $h(\varphi)$ при указанных условиях для $\zeta(\vartheta)$ обращаются в нуль в окрестностях всех вершин области. Рассмотрим одну из вершин, к примеру $\varphi_0^+ = \varphi_1$. Пусть при некотором $\varepsilon > 0$ верно тождество $h^{(i)}(\varphi) \equiv 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$, $\varphi \in [\varphi_0^+, \varphi_0^+ + \varepsilon)$. Заметим, что в силу определения и непрерывности $\Phi^+(x,y)$ существует окрестность U точки $\varphi_0^+ \in \Gamma$ на плоскости такая, что $\Phi^+(x,y) \in [\varphi_0^+, \varphi_0^+ + \varepsilon)$ при всех $(x,y) \in \overline{\Omega} \cap U$. Дифференцируя в $\Omega \cap U$ суперпозицию $h(\Phi^+(x,y)) = P(x,y)$, для производных порядка $|\beta| \geqslant 1$ ($\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2$) имеем

$$\frac{\partial^{|\beta|} P}{\partial x^{\beta_1}\, \partial y^{\beta_2}}(x,y) = \sum_{j=1}^{|\beta|} h^{(j)}(\Phi^+(x,y)) H_{j,\beta}(x,y),$$

где функции $H_{j,\beta}(x,y)$ выражаются через производные от $\Phi^+(x,y)$. Поскольку $h^{(j)}(\Phi^+(x,y)) \equiv 0$ для $(x,y) \in \Omega \cap U$, получаем, что производные всех порядков функции $P(x,y)$ в окрестности вершины φ_0^+ тождественно равны нулю. Аналогично рассматриваются окрестность вершины φ_1^+ и функция $P(x,y)$, окрестности вершин φ_0^-, φ_1^- и функция $Q(x,y)$. Существование непрерывных производных всех порядков для Φ^+, Φ^- (следовательно, для $P(x,y)$, $Q(x,y)$) в $\overline{\Omega}$ вне указанных окрестностей очевидно. □

4.5. При заданных N, k ($N \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant N-1$, $\text{НОД}(N,k) = 1$) рассмотрим образующую дугу $\Gamma_0 = [\varphi_1, \varphi_2]$, определяемую выбором N, k. Для произвольной гладкой функции $\zeta(\vartheta)$ такой, что $\operatorname{supp}\zeta(\vartheta) \subset (\varphi_1, \varphi_2)$, используя (4.26), (4.27), определим функцию

$$u(x,y) = P(x,y) - Q(x,y) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta(\vartheta)\chi(x,y,\vartheta)\, d\vartheta. \tag{4.28}$$

- Обозначим линейное многообразие функций u, полученных с помощью (4.28), через $\mathbb{L}_N^k$.

По лемме 4.6 (г) очевидно, что $\mathbb{L}_N^k \subset C^\infty(\overline{\Omega})$.

Лемма 4.7. *Функции $u(x,y)$ вида (4.28) принадлежат $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, и для функций $v = Au$ справедливо представление*

$$v = Au = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \lambda(\vartheta)\zeta(\vartheta)\chi(x,y,\vartheta)\, d\vartheta, \tag{4.29}$$

где $\lambda(\vartheta) = \lambda_N^k(\vartheta) = -\cos^2\alpha_N^k(\vartheta)$.

Доказательство. Принадлежность $u(x,y)$ пространству $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ следует из гладкости $P(x,y)$, $Q(x,y)$ и равенства $u|_\Gamma = (P-Q)|_\Gamma = 0$. Заметим, что в силу оценки (ii) леммы 4.6

$$\|u(x,y)\|_1 \leqslant c_2\|\zeta(\vartheta)\|_{L_2[\varphi_1,\varphi_2]}, \tag{4.30}$$

где постоянная c_2 не зависит от выбора $\zeta(\vartheta)$. Для доказательства (4.29) возьмем произвольную гладкую функцию $w \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ и рассмотрим полилинейную форму $B(u,v,w)$ вида (4.1). Поскольку функции $\chi(x,y,\vartheta)$, $\zeta(\vartheta)$, $u(x,y)$, $v(x,y)$ ограниченные, подставляя (4.28), (4.29) в (4.1) и меняя порядок интегрирования, приходим к равенству

$$\begin{aligned} B(u,v,w) &\equiv \int_\Omega (v(\overline{w}_{xx} + \overline{w}_{yy}) + u\overline{w}_{yy})\,d\Omega \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta(\vartheta)\Big(\int_\Omega \chi(x,y,\vartheta)(\lambda(\vartheta)\overline{w}_{xx} + (1+\lambda(\vartheta))\overline{w}_{yy})\,d\Omega\Big)\,d\vartheta = 0. \end{aligned}$$

Вывод последнего равенства основан на том, что $\chi(x,y,\vartheta)$ — обобщенная собственная функция оператора A и внутренний интеграл равен нулю при всех ϑ в силу (4.24). По лемме 4.1 $Au = v$. □

Лемма 4.8. *Для произвольной функции $\zeta \in L_2[\varphi_1,\varphi_2]$ формула* (4.28) *задает непрерывную в $\overline{\Omega}$ функцию $u \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, причем для $v = Au$ справедливо представление* (4.29).

Доказательство. Пусть $\zeta_n(\vartheta)$ — последовательность гладких функций, удовлетворяющих условиям леммы 4.4 и таких, что

$$\|\zeta_n(\vartheta) - \zeta(\vartheta)\|_{L_2[\varphi_1,\varphi_2]} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Обозначим через $P_n(x,y)$, $Q_n(x,y)$ и $u_n(x,y) = P_n(x,y) - Q_n(x,y)$ функции, заданные равенствами (4.26), (4.27) и (4.28) для $\zeta_n(\vartheta)$. Тогда при фиксированных (x,y) в (4.28) с учетом ограниченности функции $\chi(x,y,\vartheta)$ получаем $\lim_{n\to\infty} u_n(x,y) = u(x,y)$. С другой стороны, в силу оценки (i) леммы 4.6 равномерно в $\overline{\Omega}$ выполняется неравенство

$$|P_n(x,y) - P_m(x,y)| + |Q_n(x,y) - Q_m(x,y)| \leqslant c_1\|\zeta_n(\vartheta) - \zeta_m(\vartheta)\|_{L_2[\varphi_1,\varphi_2]},$$

из которого следует, что $u_n(x,y) \to u(x,y)$ в $C(\overline{\Omega})$ при $n \to \infty$ и справедлива оценка

$$\|u(x,y)\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant c_1\|\zeta(\vartheta)\|_{L_2[\varphi_1,\varphi_2]}. \tag{4.31}$$

Аналогично в силу оценки (ii) леммы 4.6 частные производные $\frac{\partial P_n}{\partial x}$, $\frac{\partial P_n}{\partial y}$, $\frac{\partial Q_n}{\partial x}$, $\frac{\partial Q_n}{\partial y}$ образуют фундаментальную последовательность в $L_2(\Omega)$. Поэтому $u(x,y)$ имеет обобщенные производные первого порядка, $u_n(x,y) \to u(x,y)$ в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ при $n \to \infty$ и для предельной функции $u(x,y)$ справедлива оценка (4.30). Рассматривая $v_n = Au_n$ и повторяя предельный переход, получаем представление (4.29) для Au. □

- Обозначим через H_N^k подпространство пространства $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, полученное замыканием линейного многообразия $\mathbb{L}_N^k$ по норме $\|\cdot\|_1$.

Лемма 4.9. *Для любой функции $u \in H_N^k$ существует функция $\zeta(\vartheta) \in L_2[\varphi_1, \varphi_2]$ такая, что u получается с помощью представления* (4.28). *Для любой точки $(x_0, y_0) \in \Omega$ линейный функционал $\delta_{x_0,y_0}(u) = u(x_0, y_0)$ является непрерывным на H_N^k по норме $\|\cdot\|_1$.*

Доказательство. Пусть выбрана произвольная функция $u_0 \in H_N^k$. Рассмотрим последовательность $u_n(x,y) = P_n(x,y) - Q_n(x,y)$ функций из $\mathbb{L}_N^k$, для которой $\|u_n - u_0\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть ζ_n — гладкие функции, для которых в (4.28) получены функции u_n. Рассмотрим дифференциальный оператор $\mathcal{L}_- \equiv \cos\alpha_N^k(\Phi^-)\frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha_N^k(\Phi^-)\frac{\partial}{\partial y}$ из задачи (4.14). Положим $v_n = \mathcal{L}_- u_n$. Ясно, что $\|v_n\|_0 \leqslant c_1\|u_n\|_1$. Поскольку $Q_n(x,y)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ является решением уравнения из (4.14), имеем

$$v_n(x,y) = \frac{\partial P_n}{\partial x}\cos\alpha_N^k(\Phi^-) + \frac{\partial P_n}{\partial y}\sin\alpha_N^k(\Phi^-).$$

Используя тот факт, что $P_n(x,y)$ является решением уравнения из (4.13), и выражая $\frac{\partial P_n}{\partial y}$ через $\frac{\partial P_n}{\partial x}$, получаем для всех n равенство

$$v_n(x,y) = \frac{\partial P_n}{\partial x}\sin(\alpha_N^k(\Phi^+) + \alpha_N^k(\Phi^-))/\sin\alpha_N^k(\Phi^+) = \frac{\partial P_n}{\partial x}\Psi_{N,k}(x,y).$$

Поскольку $0 < \alpha_N^k(\varphi) < \pi/2$, при некоторых положительных c_2, c_3 в $\overline{\Omega}$ справедлива оценка

$$c_2 \leqslant \Psi_{N,k}(x,y) \leqslant c_3.$$

Следовательно,

$$\left\|\frac{\partial P_n}{\partial x}\right\|_0 = \left\|\frac{v_n}{\Psi_{N,k}}\right\|_0 \leqslant c_4\|v_n\|_0 \leqslant c_5\|u_n\|_1.$$

Отсюда, используя оценку (iii) леммы 4.6, имеем

$$\|\zeta_n\|_{L_2[\varphi_1,\varphi_2]} \leqslant c_6\left\|\frac{\partial P_n}{\partial x}\right\|_0 \leqslant c_7\|u_n\|_1 \tag{4.32}$$

и аналогичным образом

$$\|\zeta_n - \zeta_m\|_{L_2[\varphi_1,\varphi_2]} \leqslant c_7\|u_n - u_m\|_1.$$

Таким образом, последовательность ζ_n фундаментальна в $L_2[\varphi_1, \varphi_2]$ и сходится к некоторой функции $\zeta_0(\vartheta) \in L_2[\varphi_2, \varphi_2]$. Из (4.32) вытекает, что

$$\|\zeta_0\|_{L_2[\varphi_1,\varphi_2]} \leqslant c_7\|u_0\|_1. \tag{4.33}$$

Так же, как при доказательстве леммы 4.8, заключаем, что $u_0(x,y)$ получается с помощью представления (4.28) для $\zeta_0(\vartheta)$. Используя оценки (4.31) и (4.33), находим, что для всех $(x,y) \in \overline{\Omega}$

$$|u_0(x,y)| \leqslant c_8\|\zeta_0(\vartheta)\|_{L_2[\varphi_1,\varphi_2]} \leqslant c_9\|u_0(x,y)\|_1.$$

Поэтому любой функционал δ_{x_0,y_0} непрерывен на H^k_N по норме $\|\cdot\|_1$. □

4.6. Пусть теперь E_λ — спектральная функция оператора A, которую мы будем считать сильно непрерывной слева, $R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ — его резольвента. Положим $S(\lambda) = \{\vartheta \mid \lambda^k_N(\vartheta) < \lambda,\ \vartheta \in [\varphi_1, \varphi_2]\}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Пусть $\mu(\vartheta, \lambda)$ — характеристическая функция множества $S(\lambda)$, определенная для $\vartheta \in [\varphi_1, \varphi_2]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема 4.1. *Для любой функции* $u \in \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$ *вида* (4.28), *где* $\zeta \in L_2[\varphi_1, \varphi_2]$, *справедливы следующие представления:*

$$E_\lambda u = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta(\vartheta)\mu(\vartheta, \lambda)\chi(x, y, \vartheta)\, d\vartheta, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{4.34}$$

$$R_\lambda u = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta(\vartheta)\chi(x, y, \vartheta)(\lambda(\vartheta) - \lambda)^{-1}\, d\vartheta, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{4.35}$$

где $\lambda(\vartheta) = \lambda^k_N(\vartheta) = -\cos^2 \alpha^k_N(\vartheta)$. *Представление* (4.35) *имеет смысл, если функция* $\zeta(\vartheta)(\lambda(\vartheta) - \lambda)^{-1}$ *принадлежит* $L_2[\varphi_1, \varphi_2]$. *Если начальные данные* u_0 , u_1 *задачи* (0.6) *получены с помощью представления* (4.28) *для функций* $\zeta_0(\vartheta)$, $\zeta_1(\vartheta)$ *из* $L_2[\varphi_1, \varphi_2]$, *то решение задачи* (0.6) *имеет вид*

$$u(x, y, t) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \chi(x, y, \vartheta)\Big(\zeta_0(\vartheta)\cos(\omega(\vartheta)t) + \zeta_1(\vartheta)\frac{\sin(\omega(\vartheta)t)}{\omega(\vartheta)}\Big)\, d\vartheta, \tag{4.36}$$

где $\omega(\vartheta) = \cos \alpha^k_N(\vartheta)$.

Доказательство. Считая, что (4.36) определяет функцию $u(t)$ переменной t со значениями в $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$, нетрудно проверить, что дифференцирование сводится к обычному дифференцированию под знаком интеграла. Действительно, рассматривая $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}$ в $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$ и обозначая

$$\tilde\zeta_0(\vartheta, t) = \zeta_0(\vartheta)\cos(\omega(\vartheta)t), \qquad \tilde\zeta_1(\vartheta, t) = \zeta_1(\vartheta)\frac{\sin(\omega(\vartheta)t)}{\omega(\vartheta)},$$

получаем

$$\frac{\tilde\zeta_0(\vartheta, t + \Delta t) - \tilde\zeta_0(\vartheta, t)}{\Delta t} \to \frac{\partial \tilde\zeta_0}{\partial t} \text{ в } L_2[\varphi_1, \varphi_2] \text{ при } \Delta t \to 0;$$

то же утверждение справедливо для $\tilde\zeta_1(\vartheta, t)$. Рассуждая, как при доказательстве леммы 4.8, и используя оценку (4.30), находим

$$u'(t) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \chi(x, y, \vartheta)\Big(\frac{\partial \tilde\zeta_0}{\partial t}(\vartheta, t) + \frac{\partial \tilde\zeta_1}{\partial t}(\vartheta, t)\Big)\, d\vartheta.$$

Двукратно дифференцируя по t, с учетом представления (4.29) для Au и равенства $-\omega^2(\vartheta) = \lambda(\vartheta)$ приходим к равенству $u'' = Au$. Очевидно, $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$, что и завершает доказательство представления (4.36) решения задачи Коши.

Если функция $\zeta(\vartheta)(\lambda(\vartheta) - \lambda)^{-1}$ принадлежит $L_2[\varphi_1, \varphi_2]$, то по лемме 4.8 правая часть (4.35) задает некоторую функцию $v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Используя (4.29), легко проверить, что $(A - \lambda I)v = u$, следовательно, $v = (A - \lambda I)^{-1}u = R_\lambda u$.

Для доказательства (4.34) рассмотрим сначала случай гладкой функции $\zeta(\vartheta)$. Очевидно, что $\lambda(\vartheta) > -1$ при всех ϑ, поэтому $\mu(\vartheta, \lambda) \equiv 0$ при $\lambda \leqslant -1$. Зафиксируем в (4.34) $\lambda = \lambda_0 > -1$, выберем $\varepsilon > 0$ такое, что $\lambda_0 - \varepsilon > -1$, и рассмотрим множество $S(\lambda_0 - \varepsilon)$. Положим $\tilde{\mu}(\vartheta, \varepsilon) = \mu(\vartheta, \lambda_0 - \varepsilon) + (1 - \mu(\vartheta, \lambda_0))$. Из определения множеств $S(\lambda) \subset [\varphi_1, \varphi_2]$ и их характеристических функций $\mu(\vartheta, \lambda)$ следует, что $\tilde{\mu}(\vartheta, \varepsilon) = 1$, если $\lambda(\vartheta) < \lambda_0 - \varepsilon$ или $\lambda(\vartheta) \geqslant \lambda_0$, и $\tilde{\mu}(\vartheta, \varepsilon) = 0$, если $\lambda_0 - \varepsilon \leqslant \lambda(\vartheta) < \lambda_0$, т. е. $1 - \tilde{\mu}(\vartheta, \varepsilon)$ является характеристической функцией множества $S_1(\varepsilon) = S(\lambda_0) \backslash S(\lambda_0 - \varepsilon)$. Вместо данной функции $u(x, y)$ рассмотрим

$$u_\varepsilon = u_\varepsilon(x, y) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta(\vartheta)\tilde{\mu}(\vartheta, \varepsilon)\chi(x, y, \vartheta)\, d\vartheta.$$

Разность $u_\varepsilon - u$ задается формулой (4.28) при $\zeta(\vartheta, \varepsilon) = (1 - \tilde{\mu}(\vartheta, \varepsilon))\zeta(\vartheta)$. Заметим, что $\bigcap_{\varepsilon > 0} S_1(\varepsilon) = \varnothing$, поэтому $\operatorname{mes} S_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега

$$\|\zeta(\vartheta, \varepsilon)\|^2_{L_2[\varphi_1, \varphi_2]} = \int_{S_1(\varepsilon)} |\zeta(\vartheta)|^2\, d\vartheta \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Используя оценку (4.30), получаем $\|u_\varepsilon - u\|_1 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Для произвольного положительного δ ($\delta < \varepsilon$) выберем на комплексной плоскости гладкий контур $\gamma(\delta)$, охватывающий промежуток $[-1, \lambda_0 - \varepsilon)$ действительной оси и пересекающий ее в точке $\lambda_0 - \delta$. Тогда для всех $\lambda \in \gamma(\delta)$ при некотором $h = h(\varepsilon, \delta) > 0$ на множестве $S_2(\varepsilon) = S(\lambda_0 - \varepsilon) \cup ([\varphi_1, \varphi_2] \backslash S(\lambda_0))$ справедлива оценка $|\lambda - \lambda(\vartheta)| \geqslant h$, так как для всех ϑ из указанного множества $-1 < \lambda(\vartheta) < \lambda_0 - \varepsilon$ или $\lambda(\vartheta) \geqslant \lambda_0$. Но тогда $\frac{|\zeta(\vartheta)\tilde{\mu}(\vartheta, \varepsilon)|}{|\lambda - \lambda(\vartheta)|} \leqslant \frac{|\zeta(\vartheta)|}{h}$ для всех тех $\vartheta \in [\varphi_1, \varphi_2]$, где $\tilde{\mu}(\vartheta, \varepsilon) \neq 0$, и $\lambda \in \gamma(\delta)$. Следовательно, при всех $\lambda \in \gamma(\delta)$ для u_ε определена резольвента

$$R_\lambda u_\varepsilon = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta(\vartheta)\tilde{\mu}(\vartheta, \varepsilon)\chi(x, y, \vartheta)(\lambda(\vartheta) - \lambda)^{-1}\, d\vartheta.$$

По формуле Рисса

$$E_{\lambda_0 - \delta} u_\varepsilon = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\delta)} R_\lambda u_\varepsilon\, d\lambda$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Big(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\delta)} \zeta(\vartheta)\tilde{\mu}(\vartheta, \varepsilon)\chi(x, y, \vartheta)(\lambda(\vartheta) - \lambda)^{-1}\, d\lambda \Big)\, d\vartheta.$$

Перестановка порядка интегрирования возможна, поскольку все функции ограничены и при фиксированных x, y, ϑ подынтегральное выражение представляет собой функцию, аналитическую в окрестности $\gamma(\delta)$. Заметим, что при заданных x, y и ϑ подынтегральная функция обладает следующими свойствами:

— является аналитической по λ во всей области комплексной плоскости, ограниченной контуром $\gamma(\delta)$, если $\lambda(\vartheta) \geqslant \lambda_0$,

— имеет особенность в точке $\lambda(\vartheta)$, если $\lambda(\vartheta) < \lambda_0 - \varepsilon$,

— тождественно по λ равна нулю, если $\tilde{\mu}(\vartheta, \varepsilon) = 0$, т. е. $\lambda_0 - \varepsilon \leqslant \lambda(\vartheta) < \lambda_0$.

Следовательно, внутренний интеграл равен $\zeta(\vartheta)\mu(\vartheta, \lambda_0 - \varepsilon)\chi(x, y, \vartheta)$ и при любых $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < \varepsilon$

$$E_{\lambda_0 - \delta} u_\varepsilon = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \zeta(\vartheta)\mu(\vartheta, \lambda_0 - \varepsilon)\chi(x, y, \vartheta)\, d\vartheta. \tag{4.37}$$

Поскольку семейство операторов $E_{\lambda_0 - \delta}$ сильно непрерывно слева, а правая часть в (4.37) от δ не зависит, $\lim_{\delta\to 0} E_{\lambda_0-\delta} u_\varepsilon = E_{\lambda_0} u_\varepsilon$ совпадает с правой частью (4.37). Остается заметить, что $E_{\lambda_0} u_\varepsilon \to E_{\lambda_0} u$ при $\varepsilon \to 0$, так как $u_\varepsilon \to u$ в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. В то же время $\zeta(\vartheta)(\mu(\vartheta, \lambda_0) - \mu(\vartheta, \lambda_0 - \varepsilon)) = (1 - \tilde{\mu}(\vartheta, \varepsilon))\zeta(\vartheta) \to 0$ в $L_2[\varphi_1, \varphi_2]$ при $\varepsilon \to 0$, как это было показано выше. Из оценки (4.30) следует, что правая часть в (4.37) при $\varepsilon \to 0$ имеет в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ предел, равный (4.34) при $\lambda = \lambda_0$, что и доказывает справедливость представления (4.34) для гладких функций $\zeta(\vartheta)$. Оператор умножения на $\mu(\vartheta, \lambda_0)$ непрерывен в $L_2[\varphi_1, \varphi_2]$, поэтому рассматривая для произвольной функции $\zeta \in L_2[\varphi_1, \varphi_2]$ последовательность гладких функций $\zeta_n(\vartheta)$ таких, что $\|\zeta_n - \zeta\|_{L_2[\varphi_1, \varphi_2]} \to 0$ при $n \to \infty$, мы получим последовательность $\mu(\vartheta, \lambda_0)\zeta_n(\vartheta)$, сходящуюся к $\mu(\vartheta, \lambda_0)\zeta(\vartheta)$ в $L_2[\varphi_1, \varphi_2]$ при $n \to \infty$. Записывая равенство (4.34) для функций $u_n(x, y)$, соответствующих выбору $\zeta_n(\vartheta)$ в (4.28), переходя к пределу и учитывая непрерывность оператора E_{λ_0}, нетрудно убедиться в справедливости (4.34) для любой функции $\zeta \in L_2[\varphi_1, \varphi_2]$. □

Следствие 4.2. *Подпространство $H_N^k \subset \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ является инвариантным подпространством для оператора A. Спектр оператора A на H_N^k в точности совпадает с отрезком $[a, b]$, где $a = a_N^k = \min \lambda_N^k(\varphi)$, $b = b_N^k = \max \lambda_N^k(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.*

Доказательство. По лемме 4.9 для любой функции $u \in H_N^k$ найдется функция $\zeta \in L_2[\varphi_1, \varphi_2]$, для которой u получается с помощью представления (4.28). Инвариантность H_N^k относительно оператора A непосредственно следует из представлений (4.29), (4.34), (4.35) для Au, $E_\lambda u$, $R_\lambda u$. Так как $[\varphi_1, \varphi_2]$ — образующая дуга на границе Γ и функция $\lambda_N^k(\varphi)$ инвариантна относительно группы диффеоморфизмов $G(N, k)$, множество значений $\lambda_N^k(\varphi)$ при $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ совпадает с $[a, b]$. Из (4.34) следует, что $E_\lambda u = 0$ при $\lambda \leqslant a$ и $E_\lambda u = u$ при $\lambda > b$ для любого $u \in H_N^k$, поэтому спектр лежит в $[a,b]$. Если $\lambda_N^k(\varphi)\equiv\lambda_0$, то утверждение очевидно, поскольку тогда (4.29) означает, что подпространство образовано собственными функциями оператора A, соответствующими собственному числу λ_0. Для непостоянных $\lambda_N^k(\varphi)$ при любых $\lambda_0\in[a,b]$ и $\varepsilon>0$ найдется открытое множество $S(\lambda_0,\varepsilon)\subset[\varphi_1,\varphi_2]$ такое, что $\operatorname{mes}S(\lambda_0,\varepsilon)>0$ и $|\lambda_N^k(\vartheta)-\lambda_0|<\varepsilon$ при всех $\vartheta\in S(\lambda_0,\varepsilon)$. Выбирая в качестве $\zeta(\vartheta)$ характеристическую функцию множества $S(\lambda_0,\varepsilon)$, нетрудно убедиться, что формула (4.28) задает такую функцию $u\in H_N^k$, для которой из (4.34) имеем $(E_{\lambda_0+\varepsilon}-E_{\lambda_0-\varepsilon})u=u$. Следовательно, λ_0 — точка спектра оператора A в H_N^k. □

Замечание 4.4. При построении подпространств H_N^k использованы только кусочно-постоянные обобщенные собственные функции $\chi(x,y,\vartheta)$ оператора A. Как показано в [3, 4], при $\lambda_N^k(\varphi)\not\equiv\lambda_0$ такая система обобщенных собственных функций не полна, т. е. $H_N^k\subset E_{[a,b]}\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, где включение строгое. Однако благодаря введенным подпространствам становится возможным описать достаточно широкий класс областей, для которых оператор A имеет сингулярную компоненту спектра, избежав при этом дополнительных технических трудностей, и выявить существенные особенности решения задачи (0.6) для таких областей.

§ 5. Асимптотика решений задачи Коши для уравнений с оператором, имеющим сингулярную компоненту спектра

В этом параграфе мы рассмотрим произвольный ограниченный самосопряженный оператор B, действующий в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, и задачу Коши

$$u'=iBu,\qquad u(0)=u_0,\tag{5.1}$$

где $u(t)$ — функция со значениями в H. Пусть E_λ — спектральная функция оператора B. Пространство H можно разложить в ортогональную сумму инвариантных для B подпространств $H_{\mathrm p}$, H_{sc}, H_{ac}, на которых спектр оператора B чисто точечный, сингулярный и абсолютно непрерывный (см. введение). Обозначим спектр оператора в каждом из подпространств $H_{\mathrm p}$, H_{sc}, H_{ac} соответственно $\sigma_{\mathrm p}$, σ_{sc} и σ_{ac}. Естественно, что некоторые из этих подпространств могут оказаться тривиальными, а соответствующие им множества $\sigma_{\mathrm p}$, σ_{sc} и σ_{ac} — пустыми.

Если $u_0\in H_{\mathrm p}$, то решение $u(t)$ задачи (5.1) можно представить в виде равномерно сходящегося по норме пространства H на всей числовой прямой ряда $u(t)=\sum_{\lambda_n}\exp(i\lambda_n t)P_{\lambda_n}u_0$, где P_{λ_n} — проектор на подпространство H_{λ_n}, соответствующее собственному числу λ_n. Следовательно, $u(t)$ является почти-периодической функцией со значениями в H и для любого линейного функционала $l_v(u)=\langle u,v\rangle$, где v — произвольный элемент из H, функция $\psi(t)=\langle u(t),v\rangle$ почти-периодическая. Как показано в [7], при $u_0\in H_{\mathrm{ac}}$ решение

$$u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\lambda t)\,dE_\lambda u_0\tag{5.2}$$

задачи (5.1) слабо сходится к нулю в H при $|t| \to \infty$, т. е. для любого $v \in H$ имеем $\psi(t) = \langle u(t), v\rangle \to 0$ при $|t| \to \infty$. Для начальных данных $u_0 \in H_{\mathrm{sc}}$ какая-либо однозначная характеристика поведения при $t \to \infty$ не известна, поскольку в этом случае $\psi(t)$, как следует из (5.2), представляет собой преобразование Фурье сингулярной меры. Однако такие решения в определенном смысле близки к почти-периодическим, если σ_{sc} оказывается U-множеством.

- *Решение $u(t)$ задачи* (5.1) *обладает свойством* QP, если для произвольного $v \in H$ из условия $\lim_{t\to\pm\infty}\langle u(t), v\rangle = 0$ следует $\psi(t) = \langle u(t), v\rangle \equiv 0$.

Справедлива следующая

Теорема 5.1. *Пусть B — самосопряженный ограниченный оператор и его сингулярный спектр σ_{sc} является U-множеством. Тогда любое решение задачи* (5.1) *с начальными данными $u_0 \in H_{\mathrm{p}} + H_{\mathrm{sc}}$ обладает свойством* QP.

Для дальнейшего нам будет полезным следующее определение (см. [9]).

- Совершенное множество $\mathbb{P} \subset [-\pi, \pi]$ называется *M-множеством в узком смысле*, если существует функция $F(x)$ ограниченной вариации, постоянная на каждом смежном к $\mathbb{P}$ интервале, но не на всем отрезке $[-\pi, \pi]$, и такая, что ее коэффициенты Фурье — Стилтьеса удовлетворяют условию

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\, dF \to 0 \quad \text{при } n \to \pm\infty.$$

При доказательстве теоремы 5.1 нам потребуется

Лемма 5.1 [9]. *Всякое M-множество в узком смысле есть M-множество (в обычном смысле, см. § 1).*

Доказательство теоремы 5.1. Умножив оператор B на постоянную a, всегда можно считать, что $\sigma_{\mathrm{sc}} \subset [-\pi, \pi]$. Умножение на a сводится в (5.1) к замене $t = a\tau$ и рассмотрению уравнения $u'_\tau = iaBu$. Для оператора aB его сингулярный спектр получается очевидным подобным преобразованием исходного множества σ_{sc}. Как показано в [9], свойство быть U-множеством сохраняется при подобных преобразованиях. Представим u_0 в виде ортогональной суммы $u_0^{\mathrm{p}} + u_0^{\mathrm{sc}}$, где $u_0^{\mathrm{p}} \in H_{\mathrm{p}}$, $u_0^{\mathrm{sc}} \in H_{\mathrm{sc}}$. Обозначим через v_{p} и v_{sc} проекции элемента $v \in H$ на H_{p} и H_{sc} соответственно. Так как подпространства H_{p} и H_{sc} инвариантны для B, при любом t имеем $u_{\mathrm{p}}(t) \in H_{\mathrm{p}}$ и $u_{\mathrm{sc}}(t) \in H_{\mathrm{sc}}$, где $u_{\mathrm{p}}(t)$ и $u_{\mathrm{sc}}(t)$ означают решения задачи (5.1) с начальными данными u_0^{p} и u_0^{sc}. Тогда элемент $u(t) = u_{\mathrm{p}}(t) + u_{\mathrm{sc}}(t)$ при всех t остается ортогональным H_{ac}, поэтому

$$\psi(t) = \langle u(t), v\rangle = \langle u_{\mathrm{p}}(t), v_{\mathrm{p}}\rangle + \langle u_{\mathrm{sc}}(t), v_{\mathrm{sc}}\rangle = \psi_{\mathrm{p}}(t) + \psi_{\mathrm{sc}}(t).$$

Предположим, что $\psi(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$. Тогда

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \exp(-i\lambda_0 t)\psi(t)\, dt = 0, \qquad \lambda_0 \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Пусть

- λ_0 — какое-либо собственное число оператора B,
- $H_{\lambda_0} \subset H_{\mathrm{p}}$ — подпространство собственных функций, соответствующих λ_0,
- P_{λ_0} — проектор на H_{λ_0}.

Как показано в [7], для любого $u_0 \in H$

$$P_{\lambda_0} u_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \exp(-i\lambda_0 t) u(t)\, dt,$$

где $u(t)$ — решение задачи Коши (5.1). Так как $u_0^{\mathrm{sc}} \perp H_{\mathrm{p}}$, имеем $P_{\lambda_0} u_0^{\mathrm{sc}} = 0$ для любого собственного числа λ_0, поэтому

$$\langle P_{\lambda_0} u_0^{\mathrm{sc}}, v_{\mathrm{sc}} \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \exp(-i\lambda_0 t) \langle u_{\mathrm{sc}}(t), v_{\mathrm{sc}} \rangle\, dt = 0. \tag{5.4}$$

Если λ_0 не является собственным числом, последнее равенство в (5.4) тем более справедливо. Следовательно, соотношение (5.3) выполняется отдельно для каждого слагаемого $\psi_{\mathrm{p}}(t)$ и $\psi_{\mathrm{sc}}(t)$. Рассуждая аналогично, получаем

$$\langle P_{\lambda_0} u_0^{\mathrm{p}}, v_{\mathrm{p}} \rangle = \langle P_{\lambda_0} u_0^{\mathrm{p}}, P_{\lambda_0} v_{\mathrm{p}} \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \exp(-i\lambda_0 t) \psi_{\mathrm{p}}(t)\, dt = 0,$$

т. е. для любого собственного числа λ_0 проекции u_0^{p} и v_{p} на H_{λ_0} ортогональны. Отсюда $\psi_{\mathrm{p}}(t) = \sum_{\lambda_n} \exp(i\lambda_n t) \langle P_{\lambda_n} u_0^{\mathrm{p}}, P_{\lambda_n} v_{\mathrm{p}} \rangle \equiv 0$.

Рассмотрим теперь $\psi_{\mathrm{sc}}(t)$. Пусть $\Phi(\lambda) = \langle E_\lambda u_0^{\mathrm{sc}}, v_{\mathrm{sc}} \rangle$. Так как σ_{sc} — замкнутое множество, его дополнение представляет собой объединение не более чем счетного числа интервалов. На каждом из этих интервалов функция $\Phi(\lambda)$ постоянна. Выделим ее действительную и мнимую части: $\Phi(\lambda) = \Phi_1(\lambda) + i\Phi_2(\lambda)$. В силу известных свойств семейства E_λ функция $\Phi(\lambda)$ (следовательно, $\Phi_1(\lambda)$ и $\Phi_2(\lambda)$) является функцией ограниченной вариации, причем она постоянна вне отрезка $[-\pi, \pi]$, так как $\sigma_{\mathrm{sc}} \subset [-\pi, \pi]$. Функция $\psi_{\mathrm{sc}}(t)$ совпадает с точностью до постоянного множителя с преобразованием Фурье — Стилтьеса функции $\Phi(\lambda)$ т. е.

$$\psi_{\mathrm{sc}}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\lambda t)\, d\Phi(\lambda). \tag{5.5}$$

Тогда преобразования Фурье — Стилтьеса функций $\Phi_1(\lambda)$ и $\Phi_2(\lambda)$ выражаются через $\psi_{\mathrm{sc}}(t)$ следующим образом:

$$\psi_1(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\lambda t)\, d\Phi_1(\lambda) = \frac{1}{2}(\psi_{\mathrm{sc}}(t) + \overline{\psi}_{\mathrm{sc}}(-t)),$$

$$\psi_2(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\lambda t)\, d\Phi_2(\lambda) = \frac{1}{2i}(\psi_{\mathrm{sc}}(t) - \overline{\psi}_{\mathrm{sc}}(-t)).$$

Значит, $\psi_1(t) \to 0$ и $\psi_2(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$.

Поскольку σ_{sc} является спектром оператора B в H_{sc}, σ_{sc} не содержит изолированных точек. Действительно, любая изолированная точка спектра самосопряженного оператора является его собственным числом, а в H_{sc} спектр B непрерывен. Следовательно, σ_{sc} — совершенное множество, принадлежащее отрезку $[-\pi, \pi]$. Если хотя бы одна из функций, $\Phi_1(\lambda)$ или $\Phi_2(\lambda)$, не постоянна, то тогда σ_{sc} оказалось бы M-множеством в узком смысле (и тем более M-множеством по лемме 5.1). Поскольку σ_{sc} по условию U-множество, $\Phi_1(\lambda)$ и $\Phi_2(\lambda)$ постоянны. Из (5.5) следует, что $\psi_{sc}(t) \equiv 0$ и $\psi(t) = \psi_p(t) + \psi_{sc}(t) \equiv 0$. $\square$

Замечание 5.1. Если σ_{sc} является M-множеством, то свойство QP может не выполняться для некоторых решений задачи (5.1) с начальными данными $u_0 \in H_{sc}$. Пример такого рода будет приведен при доказательстве теоремы 1.5.

§ 6. Доказательства основных теорем

В этом параграфе доказываются теоремы, сформулированные в § 1.

Доказательство теоремы 1.1. Необходимость. Пусть $u(x,y)$ — собственная функция оператора A, соответствующая собственному числу λ_0. По следствию 4.1 $u(x,y)$ является обобщенным решением задачи Дирихле $L(\lambda_0)u = 0$, $u|_\Gamma = 0$. Пусть $\lambda_0 = -\cos^2\alpha_0$ $(0 < \alpha_0 < \pi/2)$. Тогда в характеристических координатах $\xi = x\sin\alpha_0 + y\cos\alpha_0$, $\eta = x\sin\alpha_0 - y\cos\alpha_0$ решение $u(x,y)$ представимо в виде $u = P(\xi) + Q(\eta)$ (см. [15]), где $P(\xi) + Q(\eta)|_\Gamma = 0$ почти всюду на Γ.

Рассмотрим диффеоморфизмы $F_+ = F_+(\alpha_0)$ и $F_- = F_-(\alpha_0)$ границы Γ, а также сохраняющий ориентацию границы Γ диффеоморфизм $F = F_-F_+$. Они порождаются соответственно функциями $f_1(\varphi, \alpha_0)$, $f_1(\varphi, -\alpha_0)$ и $f_2(\varphi, \alpha_0)$, введенными в § 3. Нетривиальные обобщенные решения из $L_2(\Omega)$ (и тем более из $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$) однородной задачи Дирихле для оператора $L(\lambda_0)$ могут существовать только в том случае, если число вращения $\tau(F)$ диффеоморфизма F рационально (см. [14]). Пусть $\tau(F) = k/N$ (НОД$(N,k) = 1$). Как отмечалось при доказательстве леммы 3.2, число α_0 принадлежит множеству значений функции $\alpha^k_N(\varphi)$, а неподвижными точками F^N будут в точности те точки $\varphi \in \Gamma$, для которых $\alpha^k_N(\varphi) = \alpha_0$. Множество S таких точек замкнуто, а дополнение $\Gamma \backslash S$ представимо в виде объединения не более чем счетного числа непересекающихся открытых дуг γ_j $(j \in J)$ границы Γ. Из условия $u \in \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$ после перехода к характеристическим координатам получаем, что $P'(\xi)$ и $Q'(\eta)$ принадлежат $L_2(\Omega)$. Пусть $[\xi_0, \xi_1] \times [\eta_0, \eta_1]$ — прямоугольник, описанный вокруг Ω в плоскости ξ, η; $\tilde\varphi_0^+$, $\tilde\varphi_1^+$ — точки, в которых прямые $\xi = \xi_0$ и $\xi = \xi_1$ касаются границы Γ; $\tilde\Gamma_+ = [\tilde\varphi_0^+, \tilde\varphi_1^+]$ — одна из двух дуг, на которые разбивается граница Γ точками касания $\tilde\varphi_0^+$, $\tilde\varphi_1^+$. Обозначим $p(\varphi) = P(\xi)|_\Gamma$, $q(\varphi) = Q(\eta)|_\Gamma$. Поскольку кривизна границы Γ положительна, существует однозначная функция $\varphi = \varphi(\xi)$, определенная на отрезке $[\xi_0, \xi_1]$, для которой $\varphi(\xi) \in \widetilde{\Gamma}_+$ и $p(\varphi(\xi)) = P(\xi)$. Дифференцируя последнее равенство, нетрудно доказать, что $p' \in L_2(\Gamma^1_+)$ для любой дуги Γ^1_+, лежащей строго внутри $\widetilde{\Gamma}_+$. Действительно, при любом $\varepsilon > 0$ на промежутке $[\xi_0 + \varepsilon, \xi_1 - \varepsilon]$ производная $\varphi'(\xi)$ существует и непрерывна. Кроме того, $|\varphi'(\xi)| \geqslant \delta(\varepsilon) > 0$. В концах отрезка $[\xi_0, \xi_1]$ производная $\varphi'(\xi)$ имеет особенности, но, рассматривая аналогичным образом $q(\varphi)$, можно показать, что $q' \in L_2(\Gamma^2_+)$ (соответственно $q' \in L_2(\Gamma^3_+)$), где Γ^2_+ (соответственно Γ^3_+) — дуга, содержащая точку $\tilde{\varphi}^+_0$ ($\tilde{\varphi}^+_1$) внутри. Поскольку $p(\varphi)+q(\varphi) = 0$ почти всюду на Γ, имеем $p'(\varphi) = -q'(\varphi)$. Поэтому $p' \in L_2(\widetilde{\Gamma}_+)$. Рассматривая аналогичным образом дугу $\Gamma \backslash \widetilde{\Gamma}_+$, заключаем, что $p' \in L_2(\Gamma)$, $q' \in L_2(\Gamma)$. Следовательно, функции $p(\varphi)$ и $q(\varphi)$ принадлежат $W^1_2(\Gamma)$ и потому абсолютно непрерывны по φ.

Из определений F_+ и F_- следует, что $p(\varphi)$ инвариантна относительно F_+, а $q(\varphi)$ — относительно F_-. Рассматривая условие $p(\varphi) + q(\varphi) = 0$ в точках φ, $F_+\varphi$, $F\varphi$ и учитывая, что $p(F_+\varphi) = p(\varphi)$, $q(F_+\varphi) = q(F_-F_+\varphi)$, получаем равенства $p(F\varphi) = p(\varphi)$, $q(F\varphi) = q(\varphi)$ в любой точке $\varphi \in \Gamma$. Следовательно, функции $p(\varphi)$ и $q(\varphi)$ инвариантны относительно диффеоморфизма F и его любой степени F^n.

Пусть S — множество неподвижных точек диффеоморфизма F^N и $\gamma_j = (\varphi^j_1, \varphi^j_2)$ — одна из дуг, составляющих $\Gamma \backslash S$. Выберем произвольно $\varphi_0 \in (\varphi^j_1, \varphi^j_2)$. Ввиду условий $\varphi^j_1 \in S$, $\varphi^j_2 \in S$ справедливы равенства $F^N \varphi^j_1 = \varphi^j_1$, $F^N \varphi^j_2 = \varphi^j_2$. Пусть $\varphi_1 = F^N \varphi_0$. Так как диффеоморфизм F^N сохраняет ориентацию границы Γ и дуга γ_j не содержит его неподвижных точек, имеем $\varphi_1 \in \gamma_j$ и $\varphi_1 \neq \varphi_0$. Возможны два случая: $\varphi_1 \in (\varphi_0, \varphi^j_2)$ и $\varphi_1 \in (\varphi^j_1, \varphi_0)$. В первом случае положим $\varphi_i = F^N \varphi_{i-1}$ $(i = 2, 3, \ldots)$. Тогда $\varphi_i \in (\varphi_{i-1}, \varphi^j_2)$ при любом i. Следовательно, последовательность φ_i возрастает на дуге γ_j и ограничена точкой φ^j_2. Обозначив $\lim\limits_{i\to\infty} \varphi_i = \varphi_*$ и переходя к пределу в равенстве $\varphi_i = F^N \varphi_{i-1}$, получаем $\varphi_* = F^N \varphi_*$, откуда $\varphi_* = \varphi^j_2$. Поскольку функция $p(\varphi)$ непрерывна и инвариантна относительно F^N, имеем $p(\varphi_0) = \lim\limits_{i\to\infty} p(\varphi_i) = p(\varphi^j_2)$. Рассматривая аналогичным образом убывающую последовательность $\varphi_0, \varphi_{-1}, \ldots, \varphi_{-i}, \ldots$, где $\varphi_{-i} = F^{-N} \varphi_{-i+1}$, нетрудно убедиться, что $\lim\limits_{i\to\infty} \varphi_{-i} = \varphi^j_1$ и $p(\varphi_0) = p(\varphi^j_1)$. Во втором случае последовательность φ_i оказывается убывающей, но рассуждения в остальном не меняются.

Так как исходная точка $\varphi_0 \in (\varphi^j_1, \varphi^j_2)$ выбрана произвольно, функция $p(\varphi)$ постоянна на дуге γ_j и $p'(\varphi) = 0$ для всех $\varphi \in (\varphi^j_1, \varphi^j_2)$. Рассуждения справедливы для любой дуги γ_j, поэтому $p'(\varphi) \equiv 0$ на всем дополнении множества S. Если бы оказалось, что $m(S) = 0$, то абсолютно непрерывная функция $p(\varphi)$ имела бы почти всюду на Γ производную, равную нулю, т. е. $p(\varphi) \equiv \mathrm{const}$. Но тогда функция $q(\varphi) = -p(\varphi)$ тоже была бы постоянной, а собственная функция $u(x, y) = P(\xi) + Q(\eta)$ — тождественно равной нулю в Ω; противоречие. Таким образом, $m(S) > 0$, т. е. $\alpha^k_N(\varphi) = \alpha_0$, $\lambda^k_N(\varphi) = -\cos^2 \alpha^k_N(\varphi) = \lambda_0$ на множестве S положительной меры.

Достаточность. Предположим, что при некотором выборе N, k на множестве $S \subset \Gamma$ $(m(S) > 0)$ верно равенство $\lambda_N^k(\varphi) = \lambda_0$ (следовательно, $\alpha_N^k(\varphi) = \alpha_0$, где $\lambda_0 = -\cos^2 \alpha_0$). Будем считать, что S — полный прообраз значения α_0 для функции $\alpha_N^k(\varphi)$ на Γ. По лемме 3.3 функция $\alpha_N^k(\varphi)$ (а значит, и множество S) инвариантна относительно группы диффеоморфизмов $G(N, k)$, построенной по $\alpha_N^k(\varphi)$. Пусть $\Gamma_0 = [\varphi_1, \varphi_2]$ — образующая дуга, соответствующая выбранным N, k.

Рассмотрим множество $S_0 = S \cap \Gamma_0$ и его образы $S_i = F_i(S_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, 2N)$ при диффеоморфизмах $F_i \in G(N, k)$, лежащие на дугах $\Gamma_i = F_i(\Gamma_0)$. Дуги Γ_i в совокупности составляют границу Γ и не имеют общих внутренних точек (см. § 3). Пусть $m(S_0) = 0$. Тогда в силу гладкости диффеоморфизмов $m(S_i) = 0$ для всех i, следовательно, $m(S) = m(\bigcup\limits_{i=1}^{2N} S_i) = 0$. Приходим к противоречию. Поэтому $m(S_0) > 0$.

Рассмотрим функцию $\zeta \in L_2[\varphi_1, \varphi_2]$ такую, что $\zeta(\vartheta) = 0$ при $\vartheta \in \Gamma_0 \backslash S_0$, и положим (см. (4.28))

$$u(x, y) = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \chi(x, y, \vartheta)\zeta(\vartheta)\, d\vartheta. \tag{6.1}$$

По леммам 4.8, 4.9 $u \in H_N^k \subset \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Ввиду соотношений $\lambda(\vartheta) = \lambda_N^k(\vartheta) = \lambda_0$, справедливых при всех $\vartheta \in S_0$, и выбора $\zeta(\vartheta)$ из (4.29) получаем

$$Au = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \lambda(\vartheta)\chi(x, y, \vartheta)\zeta(\vartheta)\, d\vartheta = \lambda_0 u.$$

Следовательно, $u(x, y)$ является собственной функцией оператора A. Поскольку в (6.1) значения $\zeta(\vartheta)$ при $\vartheta \in S_0$ произвольны, существует бесконечномерное подпространство H_{λ_0} собственных функций, соответствующих данному λ_0. □

Замечание 6.1. Если множество $S_0 = S \cap \Gamma_0$ не имеет внутренних точек, то функция $\zeta(\vartheta)$ в (6.1) не может быть выбрана гладкой, кроме как тривиального случая $\zeta(\vartheta) \equiv 0$. Примеры областей Ω, для которых $m(S_0) > 0$ и S_0 не имеет внутренних точек, легко построить, используя теорему 3.1. Более того, в этом случае в классе $C^1(\overline{\Omega})$ не существуют собственные функции $u(x, y)$, отвечающие собственному значению λ_0, даже если $m(S) > 0$. Действительно, для $u(x, y) = P(\xi) + Q(\eta)$ рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1.1, можно установить, что $p'(\varphi) = q'(\varphi) = 0$ на $S_1 = \Gamma \backslash S$. Поскольку множество S_1 плотно на Γ, при условии непрерывности $p'(\varphi)$ и $q'(\varphi)$ заключаем, что $p'(\varphi) = q'(\varphi) \equiv 0$ для $\varphi \in \Gamma$, т. е. $u(x, y) \equiv 0$ в Ω. Следовательно, $H_{\lambda_0} \cap C^1(\overline{\Omega})$ содержит только тождественно равную нулю функцию.

Замечание 6.2. Формула (6.1) задает все собственные функции оператора A, соответствующие данному собственному значению λ_0. Действительно, пусть $u(x, y) = P(\xi) + Q(\eta)$ — произвольная собственная функция. Рассмотрим след $p(\varphi) = P(\xi)\,|_\Gamma$ функции p на Γ и положим $\zeta(\vartheta) = p'(\vartheta)$

для $\vartheta \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Как вытекает из доказательства теоремы 1.1, $p'(\vartheta) = 0$ для всех $\vartheta \in \Gamma_0 \backslash S_0$, $p'(\vartheta) \in L_2[\varphi_1, \varphi_2]$. Используя оценки леммы 4.6 и лемму 4.4, нетрудно показать, что если $u(x, y)$ определена формулой (6.1), то $p'(\vartheta) = \zeta(\vartheta)$ при $\vartheta \in [\varphi_1, \varphi_2]$.

Доказательство теоремы 1.2. Рассмотрим функции $\alpha(\varphi) = \alpha_N^k(\varphi)$ и $\lambda(\varphi) = \lambda_N^k(\varphi) = -\cos^2 \alpha_N^k(\varphi)$. Поскольку $0 < \alpha(\varphi) < \pi/2$, множества $\mathcal{K}(\alpha(\varphi))$ и $\mathcal{K}(\lambda(\varphi))$ критических точек функций $\alpha(\varphi)$ и $\lambda(\varphi)$ на Γ совпадают. В обозначениях § 2 запишем $S_N^k(\xi) = \mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi; \lambda(\varphi), [0, 2\pi])$. Напомним, что $\mathcal{B}(\lambda(\varphi)) = \bigcup\limits_{\xi_i} \lambda^{-1}(\xi_i)$, где ξ_i — точки разрыва $\Lambda_N^k(\xi)$, т. е. все те значения функции $\lambda(\varphi)$, для которых прообраз $\lambda^{-1}(\xi_i)$ имеет положительную меру. По теореме 1.1 это в точности все собственные числа оператора A, которые принадлежат множеству значений функции $\lambda(\varphi)$. Положим $S = \mathcal{C}(\lambda(\varphi)) = \mathcal{K}(\lambda(\varphi)) \backslash \mathcal{B}(\lambda(\varphi))$.

Как и ранее, будем придерживаться соглашения, что φ обозначает как точку границы Γ, так и ее угловую координату. Поэтому, не вводя дополнительных обозначений, можно считать множество S как подмножеством границы Γ, так и числовым множеством промежутка $[0, 2\pi]$.

По следствию 2.2 функция $S_N^k(\xi)$ нетривиальна в том и только том случае, если $m(S) > 0$. Поэтому согласно условиям доказываемой теоремы $m(S) > 0$. По следствию 3.2 множество $\mathcal{K}(\alpha(\varphi))$ (следовательно, $\mathcal{K}(\lambda(\varphi)))$ инвариантно относительно группы $G(N, k)$ диффеоморфизмов границы Γ. Как уже отмечалось при доказательстве теоремы 1.1, каждое множество $\lambda^{-1}(\xi_i)$ инвариантно относительно группы $G(N, k)$. Поэтому множество $\mathcal{B}(\lambda(\varphi))$, являясь их объединением, тоже обладает этим свойством. Следовательно, множество S инвариантно относительно $G(N, k)$. Пусть $\Gamma_0 = [\varphi_1, \varphi_2]$ — образующая дуга, соответствующая значениям N, k. Полагая $S_0 = S \cap \Gamma_0$, как и при доказательстве теоремы 1.1, заключаем, что $m(S_0) > 0$. Значит, функция $s_0(\xi) = \mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi; \lambda(\varphi), [\varphi_1, \varphi_2])$ нетривиальна. Зададим произвольно ограниченную измеримую функцию $\zeta(\vartheta)$ на множестве S_0 и положим $\zeta(\vartheta) = 0$ для $\vartheta \in S_1 = \Gamma_0 \backslash S_0$. Пусть $u \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ — функция, определенная формулой (6.1) при выбранной функции $\zeta(\vartheta)$. По теореме 4.1 для $E_\xi u$ справедливо представление

$$E_\xi u = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mu(\vartheta, \xi) \zeta(\vartheta) \chi(x, y, \vartheta) \, d\vartheta, \tag{6.2}$$

где E_ξ — спектральное разложение оператора A, $\mu(\vartheta, \xi)$ — характеристическая функция множества $\Theta(\xi) = \{\vartheta \,|\, \lambda(\vartheta) < \xi, \vartheta \in [\varphi_1, \varphi_2]\}$. Положим $\sigma(\xi) = \langle E_\xi u, u \rangle$. Построенная функция $u(x, y)$ принадлежит инвариантному для оператора A подпространству H_N^k (см. § 4). Спектр оператора A на H_N^k совпадает с отрезком $[a, b] = [\min\limits_{\varphi} \lambda(\varphi), \max\limits_{\varphi} \lambda(\varphi)]$. Следовательно, $\sigma(\xi) = 0$ при $\xi \leqslant a$ и $\sigma(\xi) = \|u\|_1^2$ для $\xi > b$. Рассмотрим множество $\Xi(\lambda(\varphi))$ критических значений функции $\lambda(\varphi)$. Ясно, что $a, b \in \Xi(\lambda(\varphi))$. Поскольку $\operatorname{mes} \Xi(\lambda(\varphi)) = 0$, открытое множество $[a, b] \backslash \Xi(\lambda(\varphi))$ имеет полную меру на $[a, b]$ и представимо в виде $\bigcup\limits_{j \in J} (\xi_1^j, \xi_2^j)$, где множество индексов J не более чем счетно, а интервалы (ξ_1^j, ξ_2^j) попарно не пересекаются. В силу инвариантности функции $\lambda(\varphi)$ относительно группы $G(N,k)$ множество значений $\lambda(\varphi)$ на образующей дуге $[\varphi_1, \varphi_2]$ совпадает с отрезком $[a,b]$. Заметим, что для любого $\xi \in (\xi_1^j, \xi_2^j)$ все точки прообраза $\lambda^{-1}(\xi)$ являются регулярными для $\lambda(\varphi)$ и, поскольку S_0 состоит только из критических точек, $\zeta(\vartheta) = 0$ при любых $\vartheta \in \lambda^{-1}(\xi) \cap [\varphi_1, \varphi_2]$ и $\xi \in (\xi_1^j, \xi_2^j)$. Зафиксируем интервал (ξ_1^j, ξ_2^j), выберем на нем два числа ξ, ξ' $(\xi < \xi')$ и определим множество $\Theta(\xi, \xi') = \Theta(\xi') \backslash \Theta(\xi)$. Для его характеристической функции $\mu(\vartheta, \xi, \xi') = \mu(\vartheta, \xi') - \mu(\vartheta, \xi)$ при любом $\vartheta \in [\varphi_1, \varphi_2]$ справедливо равенство $\mu(\vartheta, \xi, \xi')\zeta(\vartheta) = 0$, так как $\zeta(\vartheta) = 0$ для всех $\vartheta \in \Theta(\xi, \xi')$. Но тогда в силу (6.2) $E_{\xi'}u - E_\xi u = 0$, т. е. $E_\xi u$ постоянна на любом интервале (ξ_1^j, ξ_2^j). Значит, $\sigma'(\xi) = 0$ при любом $\xi \in (\xi_1^j, \xi_2^j)$. Поскольку последнее равенство выполняется также при $\xi < a$, $\xi > b$, для неубывающей функции $\sigma(\xi)$ имеем $\sigma'(\xi) = 0$ на множестве полной меры.

Покажем, что функция $\sigma(\xi)$ непрерывна. Пусть ξ_1, ξ_2 $(\xi_1 < \xi_2)$ выбраны произвольно. Рассматривая множество $\Theta(\xi_1, \xi_2)$ и его характеристическую функцию $\mu(\vartheta, \xi_1, \xi_2) = \mu(\vartheta, \xi_2) - \mu(\vartheta, \xi_1)$, отметим, что $\mu(\vartheta, \xi_1, \xi_2)\zeta(\vartheta)$ может отличаться от нуля только при $\vartheta \in \Theta_0(\xi_1, \xi_2) = \Theta(\xi_1, \xi_2) \cap S_0$. По лемме 2.4

$$s_0(\xi) = \mathfrak{F}_{\rm sc}(\xi; \lambda(\varphi), [\varphi_1, \varphi_2]) = \mathfrak{F}(\xi; \lambda(\varphi), S_0) = m(\{\vartheta \mid \lambda(\vartheta) < \xi,\ \vartheta \in S_0\}).$$

Следовательно, $m(\Theta_0(\xi_1, \xi_2)) = s_0(\xi_2) - s_0(\xi_1)$ и в силу непрерывности $s_0(\xi)$ имеем $m(\Theta_0(\xi_1, \xi_2)) \to 0$ при $\xi_2 \to \xi_1 + 0$. По построению $|\zeta(\vartheta)| \leqslant M$ для некоторого M. Положим $\Delta = [\xi_1, \xi_2)$. Тогда

$$\sigma(\xi_2) - \sigma(\xi_1) = \langle E_\Delta u, u \rangle = \langle E_\Delta u, E_\Delta u \rangle = \|E_\Delta u\|_1^2.$$

Из (6.2) получаем

$$E_\Delta u = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mu(\vartheta, \xi_1, \xi_2)\zeta(\vartheta)\chi(x, y, \vartheta)\, d\vartheta. \tag{6.3}$$

Используя оценку (4.30), находим

$$\begin{aligned}\sigma(\xi_2) - \sigma(\xi_1) &= \|E_\Delta u\|_1^2 \leqslant c\|\mu(\vartheta, \xi_1, \xi_2)\zeta(\vartheta)\|^2_{L_2[\varphi_1, \varphi_2]} \\ &= c \int\limits_{\Theta_0(\xi_1, \xi_2)} |\zeta(\vartheta)|^2\, d\vartheta \leqslant cM^2 m(\Theta_0(\xi_1, \xi_2)) = cM^2(s_0(\xi_2) - s_0(\xi_1)).\end{aligned}$$

Поскольку функции $s_0(\xi)$ и $\sigma(\xi)$ неубывающие и $s_0(\xi)$ непрерывна, функция $\sigma(\xi)$ также непрерывна. Однако $\sigma'(\xi) = 0$ на множестве полной меры, поэтому $\sigma(\xi)$ — сингулярная функция.

По построению значения $\zeta(\vartheta)$ на множестве S_0 произвольны. Поэтому существует бесконечное множество линейно-независимых функций $u \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ вида (6.1), для которых спектральная мера $\sigma(\xi)$ сингулярна. □

Замечание 6.3. Множество S_0, которое рассматривалось при доказательстве теоремы 1.2, не может содержать внутренних точек. Рассуждая по той же схеме, что и в замечании 6.1, можно показать, что любая функция $u \in H^k_N$, для которой спектральная мера $\sigma(\xi) = \langle E_\xi u, u\rangle$ сингулярна, не может принадлежать $C^1(\overline{\Omega})$. Это означает, что при всех N, k пересечение $SH^k_N \cap C^1(\overline{\Omega})$ содержит только тождественно равную нулю в Ω функцию.

Доказательство теоремы 1.3. Пусть оператор A имеет собственное число $\lambda_0 = -\cos^2\alpha_0$ ($\alpha_0 \in (0, \pi/2)$). По теореме 1.1 найдется функция $\alpha^k_N(\varphi)$ такая, что $\alpha^k_N(\varphi) = \alpha_0$ на множестве $S \subset \Gamma$ положительной меры. Рассмотрим образующую дугу $\Gamma_0 = [\varphi_1, \varphi_2]$, соответствующую значениям N, k. Как уже отмечалось при доказательстве теоремы 1.1, множество S инвариантно относительно группы $G(N, k)$ диффеоморфизмов границы и $m(S_0) = m(S \cap \Gamma_0) > 0$. Следовательно, функция $\alpha^k_N(\varphi)$ удовлетворяет условиям леммы 2.6 на промежутке $[\varphi_1, \varphi_2]$. По лемме 2.6 найдется функция $g \in C^\infty[\varphi_1, \varphi_2]$ такая, что $\operatorname{supp} g(\varphi)$ принадлежит некоторому отрезку $[\varphi_1', \varphi_2']$, лежащему внутри интервала (φ_1, φ_2), и при любом $\varepsilon \neq 0$ сингулярная компонента $\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi; \alpha^k_N(\varphi) + \varepsilon g(\varphi), [\varphi_1, \varphi_2])$ нетривиальна. Функция $\tau(\varphi, \varepsilon) = \varepsilon g(\varphi)$ удовлетворяет на Γ_0 всем условиям теоремы 3.1. Поэтому для некоторого $\varepsilon_1 > 0$ при всех $\varepsilon \in [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ определено семейство границ $\Gamma(\varepsilon)$: $\rho = \rho(\varphi, \varepsilon)$, ограничивающих выпуклые области $\Omega(\varepsilon)$ и обладающих следующими свойствами: $\|\rho(\varphi, \varepsilon) - \rho(\varphi)\|_{C^n} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, соответствующая $\Gamma(\varepsilon)$ функция $\alpha^k_N(\varphi, \varepsilon)$ равна $\alpha^k_N(\varphi) + \varepsilon g(\varphi)$ для $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Следовательно, сингулярная компонента $\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi; \alpha^k_N(\varphi, \varepsilon), [\varphi_1, \varphi_2])$ нетривиальна при любом $\varepsilon \neq 0$. Как отмечалось в §2, из (2.7) получаем, что функция $\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi; \alpha^k_N(\varphi, \varepsilon))$ нетривиальна для всего промежутка $[0, 2\pi]$. Множества критических точек $\mathcal{K}(\alpha^k_N)$ и $\mathcal{K}(\lambda^k_n)$, $\mathcal{B}(\alpha^k_N)$ и $\mathcal{B}(\lambda^k_N)$ (следовательно, $\mathcal{C}(\alpha^k_N)$ и $\mathcal{C}(\lambda^k_N)$) для функций $\alpha^k_N(\varphi, \varepsilon)$ и $\lambda^k_N(\varphi, \varepsilon) = -\cos^2\alpha^k_N(\varphi, \varepsilon)$ совпадают при любом заданном ε. Поскольку функция $\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi; \alpha^k_N(\varphi, \varepsilon))$ нетривиальна, по лемме 2.4 $m(\mathcal{C}(\lambda^k_N)) = m(\mathcal{C}(\alpha^k_N)) > 0$. Значит, функция $S^k_N(\xi, \varepsilon) = \mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi; \lambda^k_N(\varphi, \varepsilon))$ нетривиальна. По теореме 1.2 оператор A имеет сингулярную компоненту спектра в $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega(\varepsilon))$ при любом $\varepsilon \in [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ ($\varepsilon \neq 0$).

Для доказательства «обратного» утверждения предположим, что у оператора A отсутствуют собственные числа, принадлежащие множеству значений функции $\lambda^k_N(\varphi)$; в противном случае деформация границы не требуется. Это означает, что $\mathfrak{F}_{\mathrm{p}}(\xi; \lambda^k_N(\varphi)) \equiv 0$. Поэтому $\mathfrak{F}_{\mathrm{p}}(\xi; \alpha^k_N(\varphi)) \equiv 0$. По условию функция $S^k_N(\xi) = \mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi; \lambda^k_N(\varphi))$ нетривиальна. Тогда так же, как и выше, заключаем, что нетривиальной является функция $\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi; \alpha^k_N(\varphi))$. По следствию 2.2 множество $S = \mathcal{C}(\alpha^k_N) = \mathcal{K}(\alpha^k_N)\backslash\mathcal{B}(\alpha^k_N) = \mathcal{K}(\alpha^k_N)$ имеет положительную меру на Γ. Кроме того, $m(S_0) = m(S \cap \Gamma_0) > 0$, поскольку S инвариантно относительно группы диффеоморфизмов $G(N, k)$. Тогда $\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi; \alpha^k_N(\varphi), [\varphi_1, \varphi_2])$ нетривиальна по следствию 2.2, тогда как $\mathfrak{F}_{\mathrm{p}}(\xi; \alpha^k_N(\varphi), [\varphi_1, \varphi_2]) \equiv 0$. Следовательно, функция $\alpha^k_N(\varphi)$ удовлетворяет на промежутке $[\varphi_1, \varphi_2]$ условиям леммы 2.7 и существует семейство функций $g(\varphi, \varepsilon)$, $g \in C^\infty[\varphi_1, \varphi_2]$ ($0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$), такое, что

$$\operatorname{supp} g(\varphi,\varepsilon) \subset [\varphi_1', \varphi_2'] \subset (\varphi_1, \varphi_2), \quad \|g(\varphi,\varepsilon)\|_{C^n} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0$$

для любого n и точечная компонента $\mathfrak{F}_{\mathrm{P}}(\xi; \alpha_N^k(\varphi) + g(\varphi,\varepsilon), [\varphi_1,\varphi_2])$ нетривиальна при любом ε. По теореме 3.1 при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ существует семейство границ $\Gamma(\varepsilon)$: $\rho = \rho(\varphi,\varepsilon)$, для которых $\|\rho(\varphi,\varepsilon) - \rho(\varphi)\|_{C^n} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для любого n и $\alpha_N^k(\varphi,\varepsilon) = \alpha_N^k(\varphi) + g(\varphi,\varepsilon)$ для $\varphi \in [\varphi_1,\varphi_2]$. Поскольку $\mathfrak{F}_{\mathrm{P}}(\xi; \alpha_N^k(\varphi,\varepsilon), [\varphi_1,\varphi_2])$ нетривиальна, при любом $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$ существует число α_0 такое, что $\alpha_N^k(\varphi,\varepsilon) = \alpha_0$ на множестве положительной меры. По теореме 1.1 $\lambda_0 = -\cos^2\alpha_0$ будет собственным числом оператора A в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega(\varepsilon))$, где $\Omega(\varepsilon)$ — область, ограниченная кривой $\Gamma(\varepsilon)$. □

Доказательство теоремы 1.4. Рассмотрим инвариантное подпространство H_N^k для оператора A и его разложение в прямую сумму подпространств $PH_N^k + SH_N^k + AH_N^k$, на которых спектр оператора A соответственно точечный, сингулярный и абсолютно непрерывный. Пусть

$$a = a_N^k = \min_{\varphi\in[0,2\pi]} \lambda_N^k(\varphi), \qquad b = b_N^k = \max_{\varphi\in[0,2\pi]} \lambda_N^k(\varphi).$$

Если $a = b$, то утверждение теоремы очевидно, поскольку тогда $H_N^k = PH_N^k = H_a$ — подпространство собственных функций, соответствующих собственному числу a, и все решения задачи (0.6) с начальными данными из H_N^k периодичны по t.

Рассмотрим случай $a < b$. По следствию 4.2 спектр оператора A на H_N^k совпадает с отрезком $[a,b]$. Пусть $\Xi(\lambda_N^k)$ — множество критических значений функции $\lambda_N^k(\varphi)$. Поскольку a, b принадлежат $\Xi(\lambda_N^k)$, множество $\widetilde{Q}(\lambda_N^k) = [a,b]\backslash\Xi(\lambda_N^k)$ открытое. Представим $\widetilde{Q}(\lambda_N^k)$ в виде объединения $\bigcup_{j\in J}(\xi_1^j,\xi_2^j)$ не более чем счетного числа непересекающихся интервалов (ξ_1^j,ξ_2^j). Докажем, что на каждом интервале функция $\rho(\xi) = \langle E_\xi u, u\rangle$ абсолютно непрерывна при любом выборе $u \in H_N^k$. Пусть заданным в условии теоремы 1.4 значениям N, k соответствует образующая дуга $\Gamma_0 = [\varphi_1,\varphi_2]$. Рассмотрим сначала случай, когда в представлении (4.28) функция $\zeta(\vartheta)$ ограниченная. Выберем на произвольно взятом интервале (ξ_1^j,ξ_2^j) две точки ξ, ξ' $(\xi < \xi')$. Определяя, как и ранее, множество $\Theta(\xi,\xi') = \{\vartheta \,|\, \xi \leqslant \lambda_N^k(\vartheta) < \xi', \vartheta \in [\varphi_1,\varphi_2]\}$, промежуток $\Delta = [\xi,\xi')$ и характеристическую функцию $\mu(\vartheta,\xi,\xi') = \mu(\vartheta,\xi') - \mu(\vartheta,\xi)$ множества $\Theta(\xi,\xi')$, получаем для $E_\Delta u$ представление вида (6.3). Поскольку (ξ_1^j,ξ_2^j) состоит из регулярных значений $\lambda_N^k(\vartheta)$, как и при доказательстве леммы 2.4, получаем, что существует неотрицательная суммируемая функция $\nu_j(\xi)$, заданная на интервале (ξ_1^j,ξ_2^j) и такая, что

$$m(\Theta(\xi,\xi')) = \mathfrak{F}(\xi'; \lambda_N^k(\varphi), [\varphi_1,\varphi_2]) - \mathfrak{F}(\xi; \lambda_N^k(\varphi), [\varphi_1,\varphi_2]) = \int_\xi^{\xi'} \nu_j(\eta)\, d\eta.$$

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1.2, и учитывая неравенство $|\zeta(\vartheta)| \leqslant M$, приходим к соотношениям

$$\rho(\xi') - \rho(\xi) = \|E_\Delta u\|_1^2 \leqslant c\|\mu(\vartheta,\xi,\xi')\zeta(\vartheta)\|^2_{L_2[\varphi_1,\varphi_2]}$$

$$\leqslant cM^2 m(\Theta(\xi,\xi')) = cM^2 \int\limits_{\xi}^{\xi'} \nu_j(\eta)\,d\eta.$$

Таким образом, функция $\rho(\xi)$ абсолютно непрерывна на интервале $\Delta_j = (\xi_1^j,\xi_2^j)$ при любом j. Значит, для любого такого промежутка $E_{\Delta_j}u = (E_{\xi_2^j}u - E_{\xi_1^j+0})u \in AH_N^k$. Поскольку рассмотренное множество функций u плотно в H_N^k и любой оператор E_{Δ_j} непрерывен, включение $E_{\Delta_j}u \in AH_N^k$ верно для любой функции $u \in H_N^k$. Следовательно, $E_{\widetilde{Q}}u \in AH_N^k$ для всего открытого множества $\widetilde{Q}(\lambda_N^k)$ при любом выборе $u \in H_N^k$, где $E_{\widetilde{Q}} = \sum_{j\in J} E_{\Delta_j}$ — сумма попарно ортогональных проекторов E_{Δ_j}. Поскольку $\widetilde{Q}(\lambda_N^k)$ — множество полной меры на $[a,b]$, имеем $E_{\widetilde{Q}}(H_N^k) = AH_N^k$. Значит, $\sigma_{\rm sc}(A) \subset \Xi(\lambda_N^k)$, где $\sigma_{\rm sc}(A)$ — спектр оператора A на SH_N^k.

Рассмотрим на подпространстве H_N^k оператор $T = |A|^{1/2}$, определенный равенством

$$Tu = \int\limits_a^b |\xi|^{1/2}\,dE_\xi u, \qquad u \in H_N^k.$$

Оператор T ограниченный и самосопряженный. Кроме того, $Tu \in H_N^k$, так как H_N^k — инвариантное подпространство для A. Поскольку $|\xi|^{1/2} \geqslant |b|^{1/2} > 0$, оператор T обратим на подпространстве H_N^k. По теореме об отображении спектров спектр оператора T совпадает с отрезком $[\alpha,\beta] = [|b|^{1/2},|a|^{1/2}]$, а для его спектральной функции $\widetilde{E}_\xi$, поскольку $|\xi|^{1/2}$ строго убывает на отрезке $[a,b]$, справедливо представление $\widetilde{E}_\xi = I - E_{-\xi^2+0}$. Учитывая, что

$$\frac{d|\xi|^{1/2}}{d\xi} \leqslant -\frac{|a|^{-1/2}}{2} < 0, \qquad \xi \in [a,b],$$

заключаем, что $\tilde{\rho}(\xi) = \langle \widetilde{E}_\xi u, u\rangle$ абсолютно непрерывна при любой функции $u \in H_N^k$ на промежутках (α_j,β_j), где $\alpha_j = |\xi_2^j|^{1/2}$, $\beta_j = |\xi_1^j|^{1/2}$, а (ξ_1^j,ξ_2^j) — интервалы, образующие множество $\widetilde{Q}(\lambda_N^k)$. Из представления спектральной функции $\widetilde{E}_\xi$ оператора T следует, что спектр оператора T абсолютно непрерывный на AH_N^k, точечный на PH_N^k и сингулярный на SH_N^k. Остается заметить, что $\omega_N^k(\varphi) = \cos\lambda_N^k(\varphi) = |\lambda_N^k(\varphi)|^{1/2}$. Поэтому для функции $\omega_N^k(\varphi)$ имеем: $[\alpha,\beta]$ — множество ее значений, $\widetilde{Q}_\omega = \bigcup_{j\in J}(\alpha_j,\beta_j)$ —

множество регулярных значений ω_N^k, $\Xi_N^k = [\alpha, \beta]\backslash\widetilde{Q}_\omega$ — множество критических значений ω_N^k. Поскольку на любом интервале (α_j, β_j) функция $\langle \widetilde{E}_\xi u, u\rangle$ абсолютно непрерывна для $u \in H_N^k$, имеем $\sigma_{\rm sc}(T) \subset \Xi_N^k$.

Чтобы привести задачу Коши (0.6) к виду (5.1), рассмотрим пространство $\widehat{H}$ вектор-функций $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, где $v_1, v_2 \in H_N^k$. Введем в $\widehat{H}$ скалярное произведение $[V, W] = \langle v_1, w_1\rangle + \langle v_2, w_2\rangle$, определим оператор $B = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T & 0 \end{pmatrix}$ и положим $V_0 = \begin{bmatrix} v_1^0 \\ v_2^0 \end{bmatrix}$, где $v_1^0 = u_0$, $v_2^0 = T^{-1}u_1$; $u_0, u_1 \in H_N^k$ — начальные данные в (0.6). Рассматривая задачу Коши

$$\frac{dV}{dt} = iBV, \qquad V(0) = V_0, \tag{6.4}$$

легко убедиться в том, что $v_1(t)$ является решением задачи (0.6). Оператор B самосопряженный и ограниченный в $\widehat{H}$ со спектром $\sigma(B) = [-\beta, -\alpha] \cup [\alpha, \beta]$. По заданной спектральной функции $\widetilde{E}_\xi$ для T легко выписать для B его спектральную функцию $\widehat{E}_\lambda$ в $\widehat{H}$:

$$\widehat{E}_\lambda = \begin{cases} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I-\widetilde{E}_{-\lambda+0} & -I+\widetilde{E}_{-\lambda+0} \\ -I+\widetilde{E}_{-\lambda+0} & I-\widetilde{E}_{-\lambda+0} \end{pmatrix}, & \text{если } \lambda < 0, \\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I+\widetilde{E}_\lambda & -I+\widetilde{E}_\lambda \\ -I+\widetilde{E}_\lambda & I+\widetilde{E}_\lambda \end{pmatrix}, & \text{если } \lambda \geqslant 0. \end{cases} \tag{6.5}$$

Из представления (6.5) и установленных ранее свойств спектральной функции $\widetilde{E}_\lambda$ следует, что функция $\hat{\rho}(\lambda) = [\widehat{E}_\lambda V, V]$ абсолютно непрерывна на интервалах, составляющих множество $\widetilde{Q}_\omega \cup (-\widetilde{Q}_\omega)$ при любом выборе $V \in \widehat{H}$. Поэтому $\sigma_{\rm sc}(B) \subset (\Xi_N^k \cup (-\Xi_N^k)) = \Xi$. Как показано в [9], если $Z \subset [-\pi, \pi]$ является U-множеством, то $(-Z)$ тоже U-множество, и объединение двух (и даже не более чем счетного семейства) замкнутых U-множеств остается U-множеством. Следовательно, Ξ — U-множество. По определению тогда и его часть $\sigma_{\rm sc}(B)$ является U-множеством.

Представим $\widehat{H}$ в виде ортогональной суммы инвариантных для оператора B подпространств $\widehat{H}_{\rm p} + \widehat{H}_{\rm sc} + \widehat{H}_{\rm ac}$. Покажем, что каждое подпространство образовано элементами $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, для которых v_1 и v_2 одновременно принадлежат PH_N^k, SH_N^k, AH_N^k. Действительно, для произвольного $V \in \widehat{H}$ разложим v_1 и v_2 в сумму $v_1 = v_1^{\rm p} + v_1^{\rm sc} + v_1^{\rm ac}$, $v_2 = v_2^{\rm p} + v_2^{\rm sc} + v_2^{\rm ac}$ их проекций на подпространства PH_N^k, SH_N^k, AH_N^k. Положим

$$V^{\rm p} = \begin{bmatrix} v_1^{\rm p} \\ v_2^{\rm p} \end{bmatrix}, \qquad V^{\rm sc} = \begin{bmatrix} v_1^{\rm sc} \\ v_2^{\rm sc} \end{bmatrix}, \qquad V^{\rm ac} = \begin{bmatrix} v_1^{\rm ac} \\ v_2^{\rm ac} \end{bmatrix}.$$

Тогда $V = V^{\rm p} + V^{\rm sc} + V^{\rm ac}$, причем слагаемые ортогональны относительно скалярного произведения $[\cdot, \cdot]$. В силу (6.5) функция $\hat{\rho}_{\rm ac}(\lambda) = [\widehat{E}_\lambda V^{\rm ac}, V^{\rm ac}]$ абсолютно непрерывна, а функция $\hat{\rho}_{\rm sc}(\lambda) = [\widehat{E}_\lambda V^{\rm sc}, V^{\rm sc}]$ сингулярна, т. е.

$V^{\mathrm{ac}} \in \widehat{H}_{\mathrm{ac}}$, $V^{\mathrm{sc}} \in \widehat{H}_{\mathrm{sc}}$. Любой собственной функции $u(\lambda_j)$ оператора T соответствуют два ортогональных собственных вектора $U_+(\lambda_j) = \begin{bmatrix} u(\lambda_j) \\ u(\lambda_j) \end{bmatrix}$, $U_-(\lambda_j) = \begin{bmatrix} u(\lambda_j) \\ -u(\lambda_j) \end{bmatrix}$, причем λ_j и $-\lambda_j$ — собственные значения оператора B, соответствующие собственным векторам U_+ и U_-.

Рассмотрим ортогональные разложения

$$v_1^{\mathrm{p}} = \sum_{\lambda_j} P(\lambda_j) v_1^{\mathrm{p}} = \sum_{\lambda_j} u_1(\lambda_j), \qquad v_2^{\mathrm{p}} = \sum_{\lambda_j} P(\lambda_j) v_2^{\mathrm{p}} = \sum_{\lambda_j} u_2(\lambda_j),$$

где $P(\lambda_j)$ — проекторы на подпространства $H_{\lambda_j} \subset H_N^k$ собственных функций оператора T. Ортогональное разложение вектор-функции V^{p} по собственным векторам оператора B следует из (6.5) и имеет вид

$$V^{\mathrm{p}} = \sum_{\lambda_j} U_+(\lambda_j) + \sum_{\lambda_j} U_-(\lambda_j),$$

где

$$U_+(\lambda_j) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1(\lambda_j) + u_2(\lambda_j) \\ u_1(\lambda_j) + u_2(\lambda_j) \end{bmatrix}, \qquad U_-(\lambda_j) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1(\lambda_j) - u_2(\lambda_j) \\ -u_1(\lambda_j) + u_2(\lambda_j) \end{bmatrix}.$$

Поэтому $V^{\mathrm{p}} \in \widehat{H}_{\mathrm{p}}$.

Поскольку подпространства PH_N^k, SH_N^k и AH_N^k инвариантны относительно оператора T, они инвариантны и для оператора T^{-1}. При начальных данных

$$u_0 = u_0^{\mathrm{p}} + u_0^{\mathrm{sc}}, \qquad u_1 = u_1^{\mathrm{p}} + u_1^{\mathrm{sc}} \in PH_N^k + SH_N^k$$

задачи Коши (0.6) вектор-функция V_0 в (6.4) имеет вид

$$V_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ T^{-1} u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^{\mathrm{p}} \\ T^{-1} u_1^{\mathrm{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0^{\mathrm{sc}} \\ T^{-1} u_1^{\mathrm{sc}} \end{bmatrix} = V_0^{\mathrm{p}} + V_0^{\mathrm{sc}},$$

т. е. $V_0 \in \widehat{H}_{\mathrm{p}} + \widehat{H}_{\mathrm{sc}}$. Как отмечалось выше, спектр $\sigma_{\mathrm{sc}}(B)$ является U-множеством. По теореме 5.1 решение $V(t)$ задачи (6.4) с начальными данными $V_0 \in \widehat{H}_{\mathrm{p}} + \widehat{H}_{\mathrm{sc}}$ обладает QP-свойством, т. е. при любом выборе $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \widehat{H}$ имеем $\psi \equiv 0$, если $\psi(t) = [V(t), W] \to 0$ при $|t| \to \infty$. Поскольку $v_1(t) = u(t)$ — решение задачи (0.6), ограничивая выбор W элементами вида $\begin{bmatrix} w_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, где $w_1 \in H_N^k$, получаем требуемое утверждение. □

Замечание 6.4. Если начальные данные u_0, u_1 в (0.6) и функция w_1 принимают на Ω действительные значения, то в силу представления E_λ (см. (4.34)) и $\widehat{E}_\lambda$ (см. (6.5)) функция $\hat{\rho}(\lambda) = [\widehat{E}_\lambda V_0, W]$ также принимает только действительные значения. Поэтому для $\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda t)\, d\hat{\rho}(\lambda)$ справедливо равенство $\psi(t) = \overline{\psi(-t)}$ для всех t. Следовательно, в теореме 1.4 при указанных предположениях достаточно требовать, чтобы $\psi(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Следствие 6.1. *Пусть Ξ_N^k — U-множество. Тогда для каждого решения $u(x,y,t)$ задачи (0.6) с начальными данными u_0, u_1 из $PH_N^k + SH_N^k$ можно указать замкнутое множество $\mathbb{E} \subset \overline{\Omega}$ такое, что $u(x,y,t) \equiv 0$ для $(x,y) \in \mathbb{E}$, в то время как в точках $(x,y) \in \overline{\Omega}\backslash\mathbb{E}$ выполняется условие $\overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}} |u(x,y,t)| > 0$.*

Доказательство. Обозначим $\mathbb{E}(t) = \{(x,y) \,|\, (x,y) \in \overline{\Omega}, u(x,y,t) = 0\}$. По лемме 4.9 при каждом $t \in \mathbb{R}$ функция $u(x,y,t)$ принадлежит $C(\overline{\Omega})$ и любой функционал $\delta_{x_0,y_0}(v) = v(x_0,y_0)$ непрерывен на H_N^k по норме $\|\cdot\|_1$. Следовательно, $\mathbb{E}(t)$ — замкнутые множества. Положим $\mathbb{E} = \bigcap\limits_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(t)$. Множество $\mathbb{E}$ замкнуто, $u(x,y,t) \equiv 0$ для $(x,y) \in \mathbb{E}$, $t \in \mathbb{R}$. Для любой точки $(x_0,y_0) \in \overline{\Omega}\backslash\mathbb{E}$ рассмотрим $\psi(t) = u(x_0,y_0,t)$. Если $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \psi(t) = 0$, то по теореме 1.4 $\psi(t) \equiv 0$, поскольку функционал δ_{x_0,y_0} непрерывен. Поэтому $(x_0,y_0) \in \mathbb{E}(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$, т. е. $(x_0,y_0) \in \mathbb{E}$. Приходим к противоречию. Таким образом, $\overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}} |u(x_0,y_0,t)| > 0$. □

Следствие 6.2. *Пусть Ξ_N^k является U-множеством, $\mathbb{B}$ — банахово пространство с нормой $|||\cdot|||$, $\mathcal{L}\colon H_N^k \to \mathbb{B}$ — произвольный ограниченный оператор со значениями в $\mathbb{B}$ и с тривиальным ядром. Если $u(t)$ — решение задачи (0.6) с начальными данными u_0, u_1 из $PH_N^k + SH_N^k$, то из условия $\lim\limits_{t\to\pm\infty} |||\mathcal{L}u(t)||| = 0$ следует $u(t) \equiv 0$.*

Доказательство. Выберем произвольный функционал $l \in \mathbb{B}^*$, где через $\mathbb{B}^*$ обозначено сопряженное к $\mathbb{B}$ пространство. Заметим, что $\tilde{l}(u) = l(\mathcal{L}u)$ — непрерывный функционал на H_N^k. Рассмотрим функцию $\psi(t) = l(\mathcal{L}u(t))$. Из условия очевидно следует, что $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \psi(t) = 0$. По теореме 1.4 имеем $\psi(t) \equiv 0$. Поскольку функционал l произволен, получаем, что $\mathcal{L}u(t) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Поскольку ядро оператор $\mathcal{L}$ тривиально, имеем $u(t) \equiv 0$. □

В качестве $\mathcal{L}$ можно рассмотреть оператор непрерывного вложения $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ в какое-либо банахово пространство $\mathbb{B}$. Тогда решения $u(t)$ задачи (0.6) с начальными данными из $PH_N^k + SH_N^k$ не могут стремиться к нулю при $t \to \pm\infty$ ни в какой более слабой, чем $\|\cdot\|_1$, норме, если Ξ_N^k — U-множество. Как уже отмечалось, противоположным свойством обладает любое решение с начальными данными из AH_N^k: в этом случае $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \|u(t)\|_0 = 0$.

Следствие 6.3. *Пусть $\mathcal{K}_N^k$ — множество критических точек функции $\lambda_N^k(\varphi)$ на Γ. Спектр оператора A на подпространстве H_N^k абсолютно непрерывен (т. е. $H_N^k = AH_N^k$) в том и только том случае, если $m(\mathcal{K}_N^k) = 0$.*

Доказательство. Случай $\lambda_N^k(\varphi) \equiv \lambda_0$ очевиден. Пусть $\lambda_N^k(\varphi)$ не постоянная и $[a,b]$ — множество ее значений.

Необходимость. Будем вести доказательство от противного. Предположим, что $m(\mathcal{K}_N^k) > 0$. Тогда возможны два случая.

Случай 1: некоторое значение λ_0 функция $\lambda_N^k(\varphi)$ принимает на множестве положительной меры. Тогда λ_0 — собственное число по теореме 1.1 и существует бесконечномерное подпространство собственных функций $H_{\lambda_0} \subset H_N^k$.

Случай 2: значений λ_0, указанных в случае 1, нет. Тогда функция $\Lambda_N^k(\xi)$ непрерывна. Как и при доказательстве теоремы 1.2, устанавливаем, что $\mathcal{B}(\lambda_N^k) = \varnothing$, $\mathcal{C}(\lambda_N^k) = \mathcal{K}_N^k \backslash \mathcal{B}(\lambda_N^k) = \mathcal{K}_N^k$, $m(\mathcal{C}(\lambda_N^k)) > 0$. По следствию 2.2 функция $S_N^k(\xi)$ не постоянная. По теореме 1.2 подпространство $SH_N^k \subset H_N^k$, на котором спектр оператора A сингулярен, нетривиально.

Следовательно, если $m(\mathcal{K}_N^k) > 0$, то $H_N^k \neq AH_N^k$.

Достаточность. Пусть $\Gamma_0 = [\varphi_1, \varphi_2]$ — образующая дуга и $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_N^k \cap \Gamma_0$. Обозначим через $\lambda(\varphi)$ сужение $\lambda_N^k(\varphi)$ на промежуток $[\varphi_1, \varphi_2]$. Пусть $\Xi = \lambda(\mathcal{K}_0)$ — множество критических значений функции $\lambda(\varphi)$. Рассмотрим, как и при доказательстве теоремы 1.4, множество $\widetilde{\mathcal{Q}} = [a, b] \backslash \Xi$ и его представление в виде не более чем счетного объединения $\bigcup\limits_{j \in J} \Delta_j$ интервалов $\Delta_j = (\xi_1^j, \xi_2^j)$. Рассмотрим прообраз $\mathcal{Q}_1 = \lambda^{-1}(\widetilde{\mathcal{Q}})$. Ясно, что $\mathcal{Q}_1 \subset \mathcal{Q} = [\varphi_1, \varphi_2] \backslash \mathcal{K}_0$, где $\mathcal{Q}$ — множество регулярных точек функции $\lambda(\varphi)$. Поскольку $\lambda^{-1}(\Xi) \supset \mathcal{K}_0$, то $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \cup (\lambda^{-1}(\Xi) \cap \mathcal{Q})$. При доказательстве леммы 2.4 установлено, что $\mathrm{mes}(\lambda^{-1}(\Xi) \cap \mathcal{Q}) = 0$. Отсюда $\mathrm{mes}\, \mathcal{Q}_1 = \mathrm{mes}\, \mathcal{Q} = \mathrm{mes}\, [\varphi_1, \varphi_2]$, так как $\mathrm{mes}\, \mathcal{K}_0 = 0$. Следовательно, $\mathcal{Q}_1$ — множество полной меры на $[\varphi_1, \varphi_2]$.

Возьмем произвольную функцию $u \in H_N^k$. По лемме 4.9 найдется $\zeta(\vartheta) \in L_2[\varphi_1, \varphi_2]$ такая, что u допускает представление (4.28) с помощью $\zeta(\vartheta)$. Рассмотрим спектральный проектор E_{Δ_j}, соответствующий промежутку Δ_j. Пусть $\mu_j(\vartheta)$ — характеристическая функция множества $\lambda^{-1}(\Delta_j)$. Тогда, как и при доказательстве теоремы 1.2, получаем

$$E_{\Delta_j} u = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mu_j(\vartheta) \zeta(\vartheta) \chi(x, y, \vartheta)\, d\vartheta.$$

Если $j_1 \neq j_2$, то $\lambda^{-1}(\Delta_{j_1}) \cap \lambda^{-1}(\Delta_{j_2}) = \varnothing$. Поэтому $\sum_{j \in J} \mu_j(\vartheta) = \mu(\vartheta)$ — характеристическая функция множества $\mathcal{Q}_1$, т. е. $\mu(\vartheta) = 1$ почти всюду на $[\varphi_1, \varphi_2]$. Но тогда $E_{\widetilde{\mathcal{Q}}} u = \sum_{j \in J} E_{\Delta_j} u = u$. При доказательстве теоремы 1.4 установлено, что $E_{\widetilde{\mathcal{Q}}} u \in AH_N^k$. Поскольку функция $u \in H_N^k$ выбиралась произвольно, $H_N^k = AH_N^k$. □

В дальнейшем нам потребуется следующее определение [9, 16].

- Целое алгебраическое число $\eta > 1$ называется *числом Пизо*, если оно является корнем некоторого многочлена

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

с целыми коэффициентами такого, что все остальные его корни, называемые *сопряженными к* η, лежат внутри круга $|z| < 1$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Теорема 6.1 [17]. *Чтобы симметрическое совершенное множество $K(\varkappa, [-\pi, \pi])$ с постоянным отношением $\varkappa < 1/2$ было U-множеством, необходимо и достаточно, чтобы число $\eta = 1/\varkappa$ было числом Пизо.*

Доказательство теоремы 1.5. Пусть функция $\alpha_N^k(\varphi)$, построенная для заданной области Ω_0, удовлетворяет условию $\alpha_N^k(\varphi) \equiv \alpha_0$. Положим $\omega_0 = \cos \alpha_0$. Рассмотрим образующую дугу $\Gamma_1 = [\varphi_1, \varphi_2]$, соответствующую значениям N, k. Выберем число $h = (\varphi_2 - \varphi_1)/5$ и рассмотрим на промежутке $[\varphi_1, \varphi_2]$ функцию

$$g(\varphi, \varkappa) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi \in [\varphi_1, \varphi_1 + h] \\ & \qquad \cup [\varphi_2 - h, \varphi_2], \\ -\gamma((\varphi - \varphi_1 - h)/h), & \text{если } \varphi \in (\varphi_1 + h, \varphi_1 + 2h), \\ 2f((\varphi - \varphi_1 - 2h)/h, \varkappa) - 1, & \text{если } \varphi \in [\varphi_1 + 2h, \varphi_1 + 3h], \\ \gamma((\varphi_2 - h - \varphi)/h), & \text{если } \varphi \in (\varphi_1 + 3h, \varphi_2 - h), \end{cases} \tag{6.6}$$

где $\gamma(x)$ определяется соотношением (2.1), а $f(x, \varkappa)$ — функция, построенная в лемме 2.2, для которой множество $\Xi(f)$ критических значений на отрезке $[0, 1]$ совпадает с симметрическим совершенным множеством $K(\varkappa)$ с постоянным отношением $\varkappa$. По следствию 2.1 при $\varkappa \leqslant 16^{-n}$ функция $f(x, \varkappa)$ принадлежит $C^n[0, 1]$ по x. Положим $\varkappa_0 = 16^{-3}$. Тогда построенная функция $g(\varphi, \varkappa)$ принадлежит $C^3[\varphi_1, \varphi_2]$ по переменной φ при $\varkappa \leqslant \varkappa_0$, причем если $\varkappa \leqslant \varkappa_n = 16^{-n}$, то $g \in C^n[\varphi_1, \varphi_2]$. Действительно, ввиду выбора $g(\varphi, \varkappa)$ в (6.6) и определения $\gamma(x)$, $f(x, \varkappa)$ функция $g(\varphi, \varkappa)$ непрерывна в точках $\varphi_1 + lh$ ($l = 1, 2, 3, 4$), а производные указанных в (6.6) функций стремятся к нулю при $\varphi \to \varphi_1 + lh$ на соответствующих промежутках. Для функции $f((\varphi - \varphi_1 - 2h)/h, \varkappa)$ число производных, для которых справедливо это утверждение, не меньше n при $\varkappa \leqslant \varkappa_n$, а для $\gamma((\varphi - \varphi_1 - h)/h)$ и $\gamma((\varphi_2 - h - \varphi)/h)$ утверждение верно для производных всех порядков.

Положим $g_1(\varphi, \varepsilon, \varkappa) = \arccos(\omega_0 + \varepsilon g(\varphi, \varkappa)) - \alpha_0$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, где ε_1 выбрано так, что условие $0 < \omega_0 + \varepsilon g(\varphi, \varkappa) < 1$ выполняется при всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Такой выбор возможен, поскольку $|g(\varphi, \varkappa)| \leqslant 1$. Ясно, что $g_1(\varphi, \varepsilon, \varkappa)$ имеет по φ производные всех тех порядков, которые определены для $g(\varphi, \varkappa)$ при $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$. Из (6.6) вытекают следующие свойства функции $g_1(\varphi, \varepsilon, \varkappa)$:

(i) $g_1(\varphi, \varepsilon, \varkappa) \equiv 0$ при $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_1 + h] \cup [\varphi_2 - h, \varphi_2]$,
(ii) $\|g_1(\varphi, \varepsilon, \varkappa)\|_{C^n[\varphi_1, \varphi_2]} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для $\varkappa \leqslant \varkappa_n$.

Из построения функции $f(x, \varkappa)$ следует, что $\|f(x, \varkappa)\|_{C^3[\varphi_1, \varphi_2]} \leqslant M$ при некотором $M > 0$ для всех $\varkappa \leqslant \varkappa_0$. Поэтому $\|g_1(\varphi, \varepsilon, \varkappa)\|_{C^3[\varphi_1, \varphi_2]} \to 0$ ($\varepsilon \to 0$) равномерно на всем промежутке $(0, \varkappa_0]$. По теореме 3.1 найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\varkappa \in (0, \varkappa_0]$ определено семейство замкнутых кривых $\Gamma(\varepsilon, \varkappa)$: $\rho = \rho_0(\varphi) + \beta(\varphi, \varepsilon, \varkappa)$, кривизна которых положительна в каждой их точке, ограничивающих выпуклые области $\Omega(\varepsilon, \varkappa)$. Границам $\Gamma(\varepsilon, \varkappa)$ соответствуют функции $\alpha_N^k(\varphi, \varepsilon, \varkappa)$, причем при $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$

выполняется равенство

$$\alpha_N^k(\varphi,\varepsilon,\varkappa)=\alpha_N^k(\varphi)+g_1(\varphi,\varepsilon,\varkappa)=\arccos(\omega_0+\varepsilon g(\varphi,\varkappa)),$$

так как $\alpha_N^k(\varphi)\equiv\alpha_0$. При этом в силу (ii)

$$\|\beta(\varphi,\varepsilon,\varkappa)\|_{C^n}\to 0 \qquad (\varepsilon\to 0)$$

при $\varkappa\leqslant\varkappa_n$. Очевидно, что $\Gamma(0,\varkappa)=\Gamma_0$ при $\varepsilon=0$, т. е. $\Omega(0,\varkappa)=\Omega_0$. Таким образом, утверждения (а), (б) теоремы 1.5 выполняются.

Покажем, что при любых $\varepsilon>0$ и $\varkappa\in(0,\varkappa_0]$ оператор A имеет в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega(\varepsilon,\varkappa))$ сингулярную компоненту спектра. Для $\varphi\in[\varphi_1,\varphi_1+h]\cup[\varphi_2-h,\varphi_2]$ верны равенства $\alpha_N^k(\varphi,\varepsilon,\varkappa)=\alpha_N^k(\varphi)=\alpha_0$ при всех ε, $\varkappa$. Поэтому образующая дуга $\Gamma_1(\varepsilon,\varkappa)$ границы $\Gamma(\varepsilon,\varkappa)$ имеет те же угловые координаты $[\varphi_1,\varphi_2]$, что и Γ_1. Действительно, при деформации, описанной в теореме 3.1, границы $\Gamma(\varepsilon,\varkappa)$ и Γ_0 совпадают в окрестностях всех вершин вырожденных циклов, лежащих на Γ_0. Как отмечалось выше, множества критических точек функций $\alpha_N^k(\varphi,\varepsilon,\varkappa)$, $\omega_N^k(\varphi,\varepsilon,\varkappa)$, $\lambda_N^k(\varphi,\varepsilon,\varkappa)$ совпадают и так же, как соответствующие функции, инвариантны относительно группы $G(N,k;\varepsilon,\varkappa)$ диффеоморфизмов границы $\Gamma(\varepsilon,\varkappa)$. Поэтому достаточно изучить их структуру лишь на образующей дуге $\Gamma_1(\varepsilon,\varkappa)=[\varphi_1,\varphi_2]$. Рассмотрим множество $\mathcal{K}_N^k(\varepsilon,\varkappa)$ критических точек функции $\omega_N^k(\varphi,\varepsilon,\varkappa)=\cos(\alpha_N^k(\varphi,\varepsilon,\varkappa))=\omega_0+\varepsilon g(\varphi,\varkappa)$ и множество $\Xi_N^k(\varepsilon,\varkappa)$ ее критических значений. На отрезках $[\varphi_1,\varphi_1+h]$ и $[\varphi_2-h,\varphi_2]$ функция $\omega_N^k(\varphi,\varepsilon,\varkappa)$ постоянна и равна ω_0. Поэтому $\omega_0\in\Xi_N^k(\varepsilon,\varkappa)$, $[\varphi_1,\varphi_1+h]\cup[\varphi_2-h,\varphi_2]\subset\mathcal{K}_N^k(\varepsilon,\varkappa)$. На интервалах $(\varphi_1+h,\varphi_1+2h)$ и $(\varphi_1+3h,\varphi_2-h)$ функция $g(\varphi,\varkappa)$ строго убывает по φ, поскольку $\gamma'(x)>0$ при $x\in(0,1)$ согласно определению $\gamma(x)$ (см. (2.1)). Следовательно, на указанных интервалах нет критических точек ни при каких $\varepsilon>0$, $\varkappa\in(0,\varkappa_0]$. На промежутке $[\varphi_1+2h,\varphi_1+3h]$ производная $g'_\varphi(\varphi,\varkappa)=\frac{2}{h}f'_x((\varphi-\varphi_1-2h)/h,\varkappa)$ равна нулю на множестве $\widetilde{K}_0$, которое получается из симметрического совершенного подмножества K_0 отрезка [0, 1] (см. построение функции $f(x,\varkappa)$ в лемме 2.2) с помощью подобного преобразования $x\to xh+\varphi_1+2h$. Поскольку $\operatorname{mes}K_0=1/2$, имеем $\operatorname{mes}\widetilde{K}_0=h/2>0$. По построению $f(1/2,\varkappa)=1/2$, $f'_x(1/2,\varkappa)>0$ при любом $\varkappa$ и функция $f(x,\varkappa)$ строго возрастает по x. Следовательно, $g(\varphi_*,\varkappa)=0$, $\omega_N^k(\varphi_*,\varepsilon,\varkappa)=\omega_0$ при $\varphi_*=\varphi_1+5h/2$, причем φ_* не является критической точкой, а ω_0 — критическим значением функции $\omega_N^k(\varphi,\varepsilon,\varkappa)$ на промежутке $[\varphi_1+2h,\varphi_2+3h]$. Таким образом, $\mathcal{K}_N^k(\varepsilon,\varkappa)=[\varphi_1,\varphi_1+h]\cup[\varphi_2-h,\varphi_2]\cup\widetilde{K}_0$ при любом выборе $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\varkappa\in(0,\varkappa_0]$. Единственное значение, которое функция $\omega_N^k(\varphi,\varepsilon,\varkappa)$ принимает на подмножестве положительной меры промежутка $[\varphi_1,\varphi_2]$ — это ω_0. Поэтому $\mathcal{C}(\omega_N^k(\varphi,\varepsilon,\varkappa))=\mathcal{K}_N^k(\varepsilon,\varkappa)\backslash\omega^{-1}(\omega_0)=\mathcal{K}_N^k(\varepsilon,\varkappa)\backslash([\varphi_1,\varphi_1+h]\cup[\varphi_2-h,\varphi_2]\cup\{\varphi_*\})=\widetilde{K}_0$, где $\omega^{-1}(\omega_0)$ обозначает полный прообраз значения ω_0 для функции $\omega_N^k(\varphi,\varepsilon,\varkappa)$ на промежутке $[\varphi_1,\varphi_2]$. Поскольку $\operatorname{mes}\widetilde{K}_0>0$, согласно следствию 2.2 функция $\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi;\omega_N^k(\varphi,\varepsilon,\varkappa),[\varphi_1,\varphi_2])$ нетривиальна. Рассуждая, как и при доказательстве теоремы 1.2, приходим к выводу, что $S_N^k(\xi;\varepsilon,\varkappa)=\mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi;\lambda_N^k(\varphi,\varepsilon,\varkappa),[0,2\pi])$ нетривиальна при любых $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$,

$\varkappa \in (0, \varkappa_0]$. По теореме 1.2 оператор A имеет в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega(\varepsilon, \varkappa))$ сингулярную компоненту спектра при любом выборе $\varepsilon, \varkappa$ из указанного множества, и тем самым утверждение (в) теоремы 1.5 доказано.

Изучим теперь структуру множества $\Xi_N^k(\varepsilon, \varkappa)$. По построению множество критических значений функции $f(x, \varkappa)$ совпадает с симметрическим совершенными множеством $K(\varkappa)$ на отрезке $[0, 1]$. Ввиду вышеизложенного множество $\Xi_N^k(\varepsilon, \varkappa)$ критических значений функции $\omega_N^k(\varphi, \varepsilon, \varkappa)$ состоит из точки ω_0 при $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_1 + h] \cup [\varphi_2 - h, \varphi_2]$ и множества $\widetilde{K}(\varepsilon, \varkappa)$ — образа множества $\widetilde{K}_0 \subset [\varphi_1 + 2h, \varphi_1 + 3h]$. Из (6.6) следует, что $\widetilde{K}(\varepsilon, \varkappa)$ получается из $K(\varkappa)$ преобразованием $y \to \omega_0 + \varepsilon(2y - 1)$, т. е. $\widetilde{K}(\varepsilon, \varkappa)$ совпадает с $K(\varkappa; [\omega_0 - \varepsilon, \omega_0 + \varepsilon])$, причем $\omega_0 \notin \widetilde{K}(\varepsilon, \varkappa)$. Поэтому $\Xi_N^k(\varepsilon, \varkappa) = \widetilde{K}(\varepsilon, \varkappa) \cup \{\omega_0\}$. Свойство быть U- или M-множеством сохраняется при подобных преобразованиях (см. [9]), поэтому $\widetilde{K}(\varepsilon, \varkappa)$ является U-множеством тогда и только тогда, когда $K(\varkappa)$ — U-множество. По теореме 6.1 $K(\varkappa)$ будет U-множеством в том и только том случае, если $1/\varkappa$ — число Пизо. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество чисел $\varkappa \in (0, \varkappa_0]$ таких, что $1/\varkappa$ — число Пизо. Поскольку множество алгебраических чисел счетно, множество $\mathcal{M}$ не более чем счетно. С другой стороны, любое натуральное число m является корнем уравнения $x - m = 0$, т. е. числом Пизо. Поэтому $1/m \in \mathcal{M}$ для $m \geqslant 1/\varkappa_0$. Следовательно, множество $\mathcal{M}$ бесконечно и имеет предельную точку 0. Как показано в [16], множество чисел Пизо является замкнутым. Следовательно, $\mathcal{M}$ нигде не плотно на отрезке $[0, \varkappa_0]$. (Заметим, что при этом у $\mathcal{M}$ существуют предельные точки, отличные от нуля.) Поскольку $\{\omega_0\}$ является U-множеством (см. [9]), $\Xi_N^k(\varepsilon, \varkappa)$ как объединение двух замкнутых U-множеств будет U-множеством для всех $\varkappa \in \mathcal{M}$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. С другой стороны, из определения очевидно следует, что добавление точки $\{\omega_0\}$ к M-множеству $\widetilde{K}(\varepsilon, \varkappa)$ при $\varkappa \notin \mathcal{M}$ дает M-множество $\Xi_N^k(\varepsilon, \varkappa)$, что завершает доказательство утверждения (г).

Для построения требуемого в утверждении (д) решения задачи (0.6) зададим функцию $\zeta \in C^\infty[\varphi_1, \varphi_2]$ такую, что

$$\begin{aligned}
&\zeta(\vartheta) \geqslant 0, \quad \vartheta \in [\varphi_1, \varphi_2],\\
&\zeta(\vartheta) \equiv 1, \quad \vartheta \in [\varphi_1 + 2h, \varphi_1 + 3h],\\
&\zeta(\vartheta) \equiv 0, \quad \vartheta \in [\varphi_1, \varphi_1 + h] \cup [\varphi_2 - h, \varphi_2].
\end{aligned}$$

Используя (4.28) и выбранную функцию $\zeta(\vartheta)$, определим в $\Omega(\varepsilon, \varkappa)$ начальные данные для задачи (0.6):

$$u_0(x, y) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \chi(x, y, \vartheta; \varepsilon, \varkappa) \zeta(\vartheta)\, d\vartheta, \qquad u_1(x, y) \equiv 0, \tag{6.7}$$

где $\chi(x, y, \vartheta; \varepsilon, \varkappa)$ — соответствующее семейство обобщенных собственных функций из $L_2(\Omega(\varepsilon, \varkappa))$ оператора A. Поскольку $\zeta(\vartheta) \equiv 0$ при $\vartheta \in [\varphi_1, \varphi_1 + h] \cup [\varphi_2 - h, \varphi_2]$, согласно замечанию 4.4 для остальных значений ϑ все функции $\chi(x, y, \vartheta; \varepsilon, \varkappa)$ тождественно равны единице в окрестности некоторой точки $(x_0, y_0) \in \Omega(\varepsilon, \varkappa)$. Как следует из построения, границы $\Gamma(\varepsilon, \varkappa)$ и Γ_0 совпадают вблизи вершин вырожденных циклов, лежащих на Γ_0. Поэтому система уравнений, указанная в замечании 4.4, определяет одну и ту же точку (x_0, y_0) для всех областей $\Omega(\varepsilon, \varkappa)$. При этом окрестность точки (x_0, y_0), где выполнено условие $\chi(x, y, \vartheta; \varepsilon, \varkappa) \equiv 1$, будет общей для всего семейства $\Omega(\varepsilon, \varkappa)$. Используя теорему 4.1 и полагая $\omega(\vartheta) = \omega_N^k(\varphi, \varepsilon, \varkappa)$, решение задачи (0.6) с начальными данными (6.7) можно представить в виде

$$u(x, y, t) = \operatorname{Re} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \exp(i\omega(\vartheta)t)\chi(x, y, \vartheta; \varepsilon, \varkappa)\zeta(\vartheta)\, d\vartheta. \tag{6.8}$$

Рассмотрим круг $D(r) = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant r^2\}$ с достаточно малым радиусом r такой, что $\chi(x, y, \vartheta; \varepsilon, \varkappa) \equiv 1$ при $(x, y) \in D(r)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varkappa \in (0, \varkappa_0]$, $\vartheta \in [\varphi_1 + h, \varphi_2 - h]$. Исследуем поведение при $|t| \to \infty$ следующего функционала:

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi r^2 h} \int_{D(r)} u(x, y, t)\, dxdy. \tag{6.9}$$

Поскольку функционал $\psi(t)$ непрерывен в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega(\varepsilon, \varkappa))$, существует элемент $v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega(\varepsilon, \varkappa))$ такой, что $\psi(t) = \langle u(t), v\rangle$. Так как $\chi(x, y, \vartheta; \varepsilon, \varkappa) \equiv 1$ в $D(r)$ для $\vartheta \in [\varphi_1 + h, \varphi_2 - h]$, имеем

$$\frac{1}{\pi r^2} \int_{D(r)} \chi(x, y, \vartheta; \varepsilon, \varkappa)\, dxdy = 1.$$

Учитывая условие $\zeta(\vartheta) = 0$ при $\vartheta \in [\varphi_1, \varphi_1 + h] \cup [\varphi_2 - h, \varphi_2]$, подставляя представление $u(x, y, t)$ (см. (6.8)) в (6.9) и меняя порядок интегрирования, приходим к равенству

$$\psi(t) = \operatorname{Re} \frac{2}{h} \int_{\varphi_1+h}^{\varphi_2-h} \exp(i\omega(\vartheta)t)\zeta(\vartheta)\, d\vartheta. \tag{6.10}$$

Разобьем промежуток интегрирования на три части: $[\varphi_1 + h, \varphi_1 + 2h]$, $[\varphi_1 + 2h, \varphi_1 + 3h]$ и $[\varphi_1 + 3h, \varphi_1 + 4h]$ и положим $\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t) + \psi_3(t)$, где $\psi_j(t)$ обозначает интеграл вида (6.10) по отрезку $[\varphi_1 + jh, \varphi_1 + (j+1)h]$.

Рассмотрим функцию $\psi_1(t)$. На отрезке $[\varphi_1 + h, \varphi_1 + 2h]$ функция $\xi = \omega(\vartheta) = \omega_N^k(\vartheta, \varepsilon, \varkappa) = \omega_0 - \varepsilon\gamma((\vartheta - \varphi_1 - h)/h)$ изменяется в пределах от ω_0 до $\omega_0 - \varepsilon$, причем $\omega'(\vartheta) < 0$ во всех внутренних точках. Следовательно, существует обратная функция $\vartheta = \gamma(\xi)$, производная $\gamma'(\xi) < 0$ которой определена на интервале $(\omega_0 - \varepsilon, \omega_0)$ и суммируема. После замены переменной $\vartheta = \gamma(\xi)$ в (6.10) получаем

$$\psi_1(t) = \operatorname{Re} \frac{2}{h} \int_{\omega_0-\varepsilon}^{\omega_0} \exp(i\xi t)\zeta(\gamma(\xi))|\gamma'(\xi)|\, d\xi.$$

Следовательно, $\psi_1(t)$ стремится к нулю при $|t| \to \infty$ как преобразование Фурье суммируемой функции $\zeta(\gamma(\xi))|\gamma'(\xi)|$, носитель которой принадлежит отрезку $[\omega_0 - \varepsilon, \omega_0]$. Аналогично доказывается, что $\psi_3(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$.

Рассмотрим теперь $\psi_2(t)$. Положим $\tau = t\varepsilon/\pi$, $\omega_1(\vartheta) = \pi\omega(\vartheta)/\varepsilon = \pi\omega_0/\varepsilon + \pi(2f((\vartheta - \varphi_1 - 2h)/h, \varkappa) - 1)$ при $\vartheta \in [\varphi_1 + 2h, \varphi_1 + 3h]$. Так как $\zeta(\vartheta) \equiv 1$ при $\vartheta \in [\varphi_1 + 2h, \varphi_1 + 3h]$, имеем

$$\psi_2(\pi\tau/\varepsilon) = \operatorname{Re} \frac{2}{h} \int\limits_{\varphi_1+2h}^{\varphi_1+3h} \exp(i\omega_1(\vartheta)\tau)\, d\vartheta. \tag{6.11}$$

Функция $\xi = \omega_1(\vartheta) - \pi\omega_0/\varepsilon$ при $\vartheta \in [\varphi_1 + 2h, \varphi_1 + 3h]$ строго возрастает, а множество ее значений совпадает с отрезком $[-\pi, \pi]$. Рассмотрим обратную к ней строго возрастающую функцию $\vartheta = \nu(\xi)$, определенную на отрезке $[-\pi, \pi]$. Полагая $\vartheta = \nu(\xi)$, можно записать (6.11) в виде интеграла Стилтьеса:

$$\psi_2(\pi\tau/\varepsilon) = \operatorname{Re} \frac{2}{h} \exp((i\pi\tau\omega_0)/\varepsilon) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp(i\xi\tau)\, d\nu(\xi). \tag{6.12}$$

Поскольку функция $\nu(\xi)$ непрерывна и возрастающая, ее можно представить в виде суммы $\nu(\xi) = \nu_{\mathrm{ac}}(\xi) + \nu_{\mathrm{sc}}(\xi)$ неубывающих функций, где $\nu_{\mathrm{ac}}(\xi)$ абсолютно непрерывна, а $\nu_{\mathrm{sc}}(\xi)$ сингулярна. Следовательно, почти всюду существует суммируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$ производная $\nu'_{\mathrm{ac}}(\xi) \geqslant 0$. Из (6.12) тогда следует, что

$$\psi_2(\pi\tau/\varepsilon) = \psi_2^{\mathrm{ac}}(\pi\tau/\varepsilon) + \psi_2^{\mathrm{sc}}(\pi\tau/\varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned} \psi_2^{\mathrm{ac}}(\pi\tau/\varepsilon) &= \operatorname{Re} \frac{2}{h} \exp((i\pi\tau\omega_0)/\varepsilon) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp(i\xi\tau)\nu'_{\mathrm{ac}}(\xi)\, d\xi, \\ \psi_2^{\mathrm{sc}}(\pi\tau/\varepsilon) &= \operatorname{Re} \frac{2}{h} \exp((i\pi\tau\omega_0)/\varepsilon) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp(i\xi\tau)\, d\nu_{\mathrm{sc}}(\xi). \end{aligned} \tag{6.13}$$

Как и выше, $\psi_2^{\mathrm{ac}} \to 0$ при $|\tau| \to \infty$.

Рассмотрим функцию $\psi_2^{\mathrm{sc}}(\pi\tau/\varepsilon)$. Согласно замечанию 2.1 и определению функции $f(x, \varkappa)$ множество критических значений функции $\omega_1(\vartheta) - \pi\omega_0/\varepsilon$ при $\vartheta \in [\varphi_1 + 2h, \varphi_1 + 3h]$ совпадает с симметрическим совершенным множеством $K(\varkappa; [-\pi, \pi])$. Как показано в лемме 2.5, $\nu_{\mathrm{sc}}(\xi) = \mathfrak{F}_{\mathrm{sc}}(\xi; \omega_1(\vartheta) - \pi\omega_0/\varepsilon, [\varphi_1 + 2h, \varphi_1 + 3h])$. В силу замечания 2.1 функция $(2/h)\nu_{\mathrm{sc}}(\xi)$ порождает стандартную сингулярную меру $d\mu(\xi)$ для множества $K(\varkappa; [-\pi, \pi])$, а интеграл $\frac{2}{h} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp(i\xi\tau)\, d\nu_{\mathrm{sc}}(\xi)$ является ее преобразованием Фурье — Стилтьеса. Это преобразование, вычисленное в [9], имеет вид

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp(i\xi\tau)\, d\mu(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} \cos(\pi\tau\varkappa^{j-1}(1 - \varkappa)). \tag{6.14}$$

Используя (6.13), (6.14) и возвращаясь к переменной t, получаем для $\psi(t)$ представление

$$\psi(t) = \cos(\omega_0 t) \prod_{j=1}^{\infty} \cos(t\varepsilon\varkappa^{j-1}(1 - \varkappa)) + \psi_0(t), \tag{6.15}$$

где $\psi_0(t) = \psi_1(t) + \psi_3(t) + \psi_2^{\mathrm{ac}}(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$. Доказательство теоремы 6.1 в [9] основано на исследовании поведения при $|t| \to \infty$ бесконечного произведения $\widetilde{\psi}(t)$ в правой части (6.15). Установлено, что $\widetilde{\psi}(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\varkappa \notin \mathcal{M}$, т. е. $1/\varkappa$ не является числом Пизо. Представим теперь $u_0(x,y)$ в виде суммы $u_0^{\mathrm{sc}} + u_0^{\mathrm{ac}}$, где

$$u_0^{\mathrm{sc}}(x,y) = \int\limits_{\widetilde{K}_0} \chi(x,y,\vartheta;\varepsilon,\varkappa)\zeta(\vartheta)\,d\vartheta, \qquad u_0^{\mathrm{ac}} = u_0 - u_0^{\mathrm{sc}}.$$

Здесь $\widetilde{K}_0$ — уже рассмотренное ранее множество критических точек функции $\omega_N^k(\varphi,\varepsilon,\varkappa)$ на промежутке $[\varphi_1 + 2h, \varphi_1 + 3h]$, $\operatorname{mes}\widetilde{K}_0 = h/2 > 0$. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1.2, нетрудно убедиться, что $u_0^{\mathrm{sc}} \in SH_N^k(\Omega(\varepsilon,\varkappa))$, $u_0^{\mathrm{ac}} \in AH_N^k(\Omega(\varepsilon,\varkappa))$. Рассмотрим решение $u_0^{\mathrm{sc}}(x,y,t)$ задачи (0.6) с начальными данными $u_0 = u_0^{\mathrm{sc}}$, $u_1 \equiv 0$. Ввиду вышеизложенного значения рассматриваемого функционала для этого решения имеют вид

$$\langle u_0^{\mathrm{sc}}(t), v\rangle = \psi_2^{\mathrm{sc}}(t) = \cos(\omega_0 t)\prod_{j=1}^{\infty}\cos(t\varepsilon\varkappa^{j-1}(1-\varkappa))$$

и $\psi_2^{\mathrm{sc}}(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$ в том и только том случае, если $\Xi_N^k(\varepsilon,\varkappa)$ является M-множеством, т. е. $\varkappa \notin \mathcal{M}$. При $t = 0$ получаем, что $\psi_2^{\mathrm{sc}}(0) = 1$. Тем самым установлено утверждение (д) теоремы 1.5. □

Замечание 6.5. Анализируя представление (6.8) решения $u(x,y,t)$, нетрудно заметить, что при фиксированном t функция $u(x,y,t)$ постоянна по (x,y) в круге $D(r)$. Следовательно, $\psi(t)$ с точностью до постоянного множителя $2/h$ задает значения $u(x_0,y_0,t)$, а $\psi_2^{\mathrm{sc}}(t)$ — значения $u_0^{\mathrm{sc}}(x_0,y_0,t)$. Для исходной области Ω_0 при $\varepsilon_0 = 0$ решение (6.8) в точке (x_0,y_0) имеет вид $u_0(x_0,y_0)\cos(\omega_0 t)$. Функция $\psi_2^{\mathrm{sc}}(t)$ имеет аналог в теории гармонических колебаний. Известно, что при сложении двух гармонических колебаний $\frac{1}{2}\cos(\omega_1 t)$ и $\frac{1}{2}\cos(\omega_2 t)$ возникает биение вида $\cos(\omega_0 t)\cos(\Delta\omega t)$, где $\omega_0 = (\omega_1+\omega_2)/2$, $\Delta\omega = (\omega_1-\omega_2)/2$, причем если $\Delta\omega$ мало, принято называть ω_0 *основной частотой колебаний*, $\cos(\Delta\omega t)$ — *модулирующим множителем*, $\Delta\omega$ —*модулирующей частотой*. С этой точки зрения $\psi_2^{\mathrm{sc}}(t)$ можно характеризовать как колебание с основной частотой ω_0, имеющее бесконечное число модуляций, частоты которых образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\varkappa \leqslant \varkappa_0$.

Замечание 6.6. Если в конструкции, использованной при доказательстве теоремы 1.5, вместо $f(x,\varkappa)$ в (6.6) рассмотреть функцию $f \in C^\infty[0,1]$, построенную в лемме 2.2 для заданной последовательности $\widetilde{\varkappa} = \{\varkappa_n\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что $\varkappa_n \leqslant 16^{-n}$, то множество $\Xi_N^k(\varepsilon) = \Xi(\omega_N^k(\varphi,\varepsilon)) = \widetilde{K}(\widetilde{\varkappa};\varepsilon) \cup \{\omega_0\}$, где $\widetilde{K}(\widetilde{\varkappa};\varepsilon)$, получается подобным преобразованием из симметрического совершенного множества $K(\widetilde{\varkappa})$. В этом случае $\Xi_N^k(\varepsilon)$ является U-множеством при любом $\varepsilon > 0$, поскольку если $\varkappa_n = o(1/n)$, то $K(\widetilde{\varkappa})$ будет U-множеством (см. [18]). При этом $\Gamma(\varepsilon) \in C^\infty$ при любом $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, а сингулярная компонента спектра оператора A в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega(\varepsilon))$ нетривиальна при $\varepsilon > 0$. Положим, в частности, $\varkappa_n = 16^{-n}$ и рассмотрим решение

$u(x,y,t)$ задачи (0.6), полученное с помощью представления аналогичного (6.8), в точках $(x,y)\in D(r)$:

$$
\begin{aligned}
u(x,y,t) &= \frac{2}{h}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \exp(i\omega(\vartheta)t)\chi(x,y,\vartheta;\varepsilon)\zeta(\vartheta)\,d\vartheta \\
&= \exp(i\omega_0 t)\prod_{j=1}^{\infty}\cos(t\varepsilon\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{j-1}(1-\varkappa_j)) + \psi_0(t) \\
&= \exp(i\omega_0 t)\prod_{j=1}^{\infty}\cos(t\varepsilon\cdot 16^{-j(j-1)/2}(1-16^{-j})) + \psi_0(t),
\end{aligned}
$$

где $\psi_0(t)\to 0$ при $|t|\to\infty$. Решение $u(x,y,t)$ в точках круга $D(r)$ описывает своеобразный колебательный процесс, который обладает следующими свойствами: для любого $\delta>0$ при $t\to\infty$ существуют сколь угодно длинные промежутки времени такие, что $|u(x,y,t)|<\delta$, в то же время для $t=t_m=\frac{2\pi}{\varepsilon}\cdot 16^{m(m-1)/2}$ величина $|u(x,y,t)|$ становится сколь угодно близкой к единице при $m\to\infty$.

Доказательство теоремы 1.6. По теореме 3.2 существует область $\widetilde{\Omega}$ с аналитической границей $\widetilde{\Gamma}$: $\rho=\widetilde{\rho}(\varphi)$, кривизна которой положительна в каждой точке, такая, что $\|\rho-\widetilde{\rho}\|_{C^n}<\varepsilon/2$ и $\alpha_N^k(\varphi)\equiv\alpha_0$ при некотором выборе N,k. Зафиксируем значения N,k и рассмотрим порождающую дугу $\widetilde{\Gamma}_0=[\varphi_1,\varphi_2]$ границы $\widetilde{\Gamma}$, определяемую их выбором. Положим $\omega_0=\cos\alpha_0$, $h=(\varphi_2-\varphi_1)/5$. Продолжим заданную функцию $\psi(s)$ для всех $s\in\mathbb{R}$ так, чтобы $\psi\in C^\infty$ и $\operatorname{supp}(\psi)\subset(-1,2)$.

Разобьем, как и при доказательстве теоремы 1.5, $[\varphi_1,\varphi_2]$ на пять равных промежутков длиной h. Положим $g(\varphi)=\psi((\varphi-\varphi_1-2h)/h)$. Учитывая способ продолжения функции ψ, имеем следующие свойства функции g: $g\in C^\infty[\varphi_1,\varphi_2]$, $g(\varphi)\equiv 0$ для $\varphi\in[\varphi_1,\varphi_1+h]\cup[\varphi_2-h,\varphi_2]$. Определим функцию $\zeta(\varphi)=\nu((\varphi-\varphi_1-2h)/h)$ для $\varphi\in[\varphi_1+2h,\varphi_1+3h]$ и продолжим ζ нулем на остальную часть отрезка $[\varphi_1,\varphi_2]$.

Введем функцию $g_1(\varphi,\delta)=\arccos(\omega_0+\delta g(\varphi))-\alpha_0$. Рассуждая как при доказательстве теоремы 1.5, легко убедиться, что для некоторого $\delta_0>0$ при всех $\delta\in(0,\delta_0]$ определено семейство границ $\Gamma(\delta)$: $\rho=\rho(\varphi,\delta)$, кривизна которых положительна в каждой точке и $\|\widetilde{\rho}(\varphi)-\rho(\varphi,\delta)\|_{C^n}\to 0$ при $\delta\to 0$. При этом границам $\Gamma(\delta)$ соответствуют функции

$$\alpha_N^k(\varphi,\delta)=\alpha_0+g_1(\varphi,\delta)=\arccos(\omega_0+\delta g(\varphi)),$$

$$\omega_N^k(\varphi,\delta)=\cos\alpha_N^k(\varphi,\delta)=\omega_0+\delta g(\varphi).$$

Зафиксируем значение $\delta>0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\|\widetilde{\rho}(\varphi)-\rho(\varphi,\delta)\|_{C^n}<\varepsilon/2$, и положим $\Gamma_1=\Gamma(\delta)$, $\rho_1(\varphi)=\rho(\varphi,\delta)$, $\omega_1(\varphi)=\omega_N^k(\varphi,\delta)$. Ясно, что $\|\rho-\rho_1\|_{C^n}<\varepsilon$.

Пусть Ω_1 — область, ограниченная кривой Γ_1. Согласно построению заданным N,k соответствует образующая дуга на Γ_1, угловые координаты точек которой совпадают с отрезком $[\varphi_1,\varphi_2]$. Рассмотрим в Ω_1 решение задачи (0.6) вида

$$u(x,y,t) = \frac{1}{h}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \exp(i\omega_1(\vartheta)t)\chi(x,y,\vartheta)\zeta(\vartheta)\,d\vartheta, \tag{6.16}$$

где $\chi(x,y,\vartheta)$ — семейство обобщенных собственных функций из $L_2(\Omega_1)$ оператора A. Поскольку $\zeta \in L_2[\varphi_1,\varphi_2]$, из оценки (4.31) следует, что $u(x,y,t)$ принадлежит $C(\overline{\Omega}_1)$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Если $\nu \in C_0^\infty[0,1]$, то по построению $\zeta \in C_0^\infty[\varphi_1,\varphi_2]$, $\operatorname{supp}(\zeta) \subset [\varphi_1+2h, \varphi_1+3h]$. По лемме 4.6(г) в этом случае $u(x,y,t)$ принадлежит $C^\infty(\overline{\Omega}_1)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

По определению $\zeta(\vartheta) = 0$ при $\vartheta \in [\varphi_1, \varphi_1+2h] \cup [\varphi_1+3h, \varphi_2]$, поэтому в (6.16) можно ограничиться интегрированием по промежутку $[\varphi_1+2h, \varphi_1+3h]$. Делая замену переменной $\vartheta = \vartheta(s) = \varphi_1 + (s+2)h$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ и замечая, что $\omega_1(\vartheta(s)) = \omega_0 + \delta g(\varphi_1+(s+2)h) = \omega_0 + \delta\psi(s)$, $\zeta(\vartheta(s)) = \nu(s)$, приходим к равенству

$$u(x,y,t) = \exp(i\omega_0 t)\int\limits_0^1 \exp(i\delta t\psi(s))\chi(x,y,\vartheta(s))\nu(s)\,ds. \tag{6.17}$$

Поскольку $\vartheta(s) \in [\varphi_1+2h, \varphi_1+3h]$, в силу замечания 4.4 существует точка $(x_0,y_0) \in \Omega_1$ такая, что в некоторой подобласти $\Omega' \subset \Omega_1$, содержащей (x_0,y_0), $\chi(x,y,\vartheta(s)) \equiv 1$ для всех $(x,y) \in \Omega'$, $s \in [0,1]$. Тогда для $(x,y) \in \Omega'$ из (6.17) получаем

$$u(x,y,t) = \exp(i\omega_0 t)\int\limits_0^1 \exp(i\delta t\psi(s))\nu(s)\,ds = \exp(i\omega_0 t)f(\delta t),$$

что и требовалось доказать. □

Доказательство теоремы 1.7. Пусть $\Gamma_0 = [\varphi_1,\varphi_2]$ — образующая дуга границы Γ и φ_0^+, φ_1^+, φ_0^-, φ_1^- — вершины области, соответствующие указанному в условии теоремы выбору значений N, k. В качестве линейного многообразия $\mathbb{L}_N^k$ возьмем множество функций $u(x,y)$, построенных с помощью представления (4.28) для $\zeta(\vartheta) \in C^\infty[\varphi_1,\varphi_2]$, $\operatorname{supp}(\zeta) \subset (\varphi_1,\varphi_2)$. По определению подпространства H_N^k многообразие $\mathbb{L}_N^k$ является плотным в H_N^k. При указанном выборе функций ζ соответствующие им функции $u(x,y)$ из (4.28) принадлежат пространству $C^\infty(\overline{\Omega})$. Следовательно, $\mathbb{L}_N^k \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \cap H_N^k$.

Рассмотрим функцию $\omega(\varphi) = \omega_N^k(\varphi) = \cos\alpha_N^k(\varphi)$. Определим для $(x,y) \in \overline{\Omega}$ функции $\omega_1(x,y) = \omega(\Phi^+(x,y))$, $\omega_2(x,y) = \omega(\Phi^-(x,y))$, где Φ^+ и Φ^- — решения задач (4.3), (4.4). Тогда ω_1 постоянна на отрезках прямых семейства (3.7) — характеристиках уравнения из (4.3), а ω_2 — на отрезках прямых семейства (3.8). Используя гладкость по φ и инвариантность $\omega(\varphi)$ относительно диффеоморфизмов G_+ и G_- границы Γ и повторяя рассуждения, проведенные при доказательствах леммы 3.14 и теоремы 3.2, можно ввести в окрестностях вершин области новые локальные координаты и показать, что функции ω_1 и ω_2 принадлежат $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Предположим, что начальные данные u_0, u_1 из (0.3) принадлежат $\mathbb{L}^k_N$ и получены с помощью (4.28) соответственно для функций ζ_0, ζ_1. Представление (4.36) решения задачи (0.1)–(0.3) после очевидных преобразований можно записать в виде

$$u(x,y,t) = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \chi(x,y,\vartheta)(\zeta_+(\vartheta)\exp(i\omega(\vartheta)t) + \zeta_-(\vartheta)\exp(-i\omega(\vartheta)t))\,d\vartheta, \quad (6.18)$$

где $\zeta_+(\vartheta)$ и $\zeta_-(\vartheta)$ легко выражаются через исходные функции ζ_0, ζ_1 и принадлежат $C_0^\infty(\varphi_1,\varphi_2)$. В частности, из (6.18) следует, что если $u_0, u_1 \in \mathbb{L}^k_N$, то $u(x,y,t)$ принадлежит $\mathbb{L}^k_N \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Используя (4.26), (4.27), (4.28) и определение $\chi(x,y,\vartheta) = \chi_+(x,y,\vartheta) - \chi_-(x,y,\vartheta)$ из § 4, представим решение $u(x,y,t)$ (см. (6.18)) в виде суммы четырех слагаемых P^+, P^-, Q^+, Q^-, заданных формулами

$$P^\pm(x,y,t) = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \chi_+(x,y,\vartheta)\zeta_\pm(\vartheta)\exp(\pm i\omega(\vartheta)t)\,d\vartheta, \quad (6.19)$$

$$Q^\pm(x,y,t) = -\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \chi_-(x,y,\vartheta)\zeta_\pm(\vartheta)\exp(\pm i\omega(\vartheta)t)\,d\vartheta. \quad (6.20)$$

Используя (4.21), определим для всех $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \Gamma$ функции $h^+(\varphi,t)$ и $h^-(\varphi,t)$ с помощью соотношений

$$h^\pm(\varphi,t) = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} z(\varphi,\vartheta)\zeta_\pm(\vartheta)\exp(\pm i\omega(\vartheta)t)\,d\vartheta, \quad (6.21)$$

где $z(\varphi,\vartheta)$ определена формулой (4.20). Из доказательства леммы 4.4 следует, что функция $h^+(\varphi,t)$ инвариантна по φ относительно группы диффеоморфизмов $G(N,k)$ границы Γ, принадлежит классу $C^\infty(\Gamma)$ по переменной φ (в силу выбора $\zeta_+(\vartheta)$), причем $\frac{\partial h^+}{\partial\varphi}(\varphi,t) = 0$ в окрестностях всех вершин вырожденных циклов на Γ, в том числе и вершин φ_0^+, φ_1^+ области. Как показано в лемме 4.4, для $\varphi \in \Gamma_0 = [\varphi_1,\varphi_2]$ справедливо равенство

$$\frac{\partial h^+}{\partial\varphi}(\varphi,t) = \zeta_+(\varphi)\exp(i\omega(\varphi)t). \quad (6.22)$$

Рассмотрим произвольный диффеоморфизм $F \in G(N,k)$ и дугу $\Gamma_F = F(\Gamma_0)$. Пусть $f(\varphi)$ — порождающая функция для F, $\psi = f(\varphi) \in \Gamma_F$, $\varphi \in [\varphi_1,\varphi_2]$. Тогда $h^+(\psi,t) = h^+(f(\varphi),t) = h^+(\varphi,t)$. Дифференцируя последнее равенство по φ, имеем

$$f'(\varphi)\frac{\partial h^+}{\partial\varphi}(f(\varphi),t) = \frac{\partial h^+}{\partial\varphi}(\varphi,t) = \zeta_+(\varphi)\exp(i\omega(\varphi)t).$$

Полагая $\varphi = f^{-1}(\psi)$ и учитывая равенства $\omega(\psi) = \omega(f(\varphi)) = \omega(\varphi)$, для $\psi \in \Gamma_F$ можно записать

$$\frac{\partial h^+}{\partial\varphi}(\psi,t) = (\zeta_+(f^{-1}(\psi))/f'(f^{-1}(\psi)))\exp(i\omega(\psi)t).$$

Рассматривая для диффеоморфизмов $F_i \in G(N,k)$ $(i=1,\dots,2N)$ все дуги $F_i(\Gamma_0)$, которые в сумме составляют Γ, и доопределяя в точках $\psi \in F_i(\Gamma_0)$ функцию ζ_+ с помощью соотношения

$$\zeta_+(\psi) = \zeta_+(f_i^{-1}(\psi))/f_i'(f_i^{-1}(\psi)), \tag{6.23}$$

где f_i — порождающая функция для F_i, можно считать, что равенство (6.22) выполняется всюду на Γ.

Рассмотрим теперь одно из слагаемых решения $u(x,y,t)$, определенных в (6.19), (6.20), например $P^+(x,y,t)$. Как следует из доказательства леммы 4.6, функция $P^+(x,y,t)$ при каждом фиксированном значении t является решением задачи (4.13) с начальными данными $P^+\big|_{\Gamma_+} = h^+(\varphi,t)$, где $\Gamma_+ = [\varphi_0^+, \varphi_1^+]$, и имеет вид $P^+(x,y,t) = h^+(\Phi^+(x,y),t)$. Дифференцируя по x последнее равенство и учитывая соотношение (6.22), справедливое на Γ_+, и определение функции ω_1, получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial P^+}{\partial x} &= \frac{\partial h^+}{\partial \varphi}(\Phi^+(x,y),t)\frac{\partial \Phi^+}{\partial x}\\ &= \zeta_+(\Phi^+(x,y))\exp(i\omega(\Phi^+(x,y))t)\frac{\partial \Phi^+}{\partial x}\\ &= \zeta_+(\Phi^+(x,y))\exp(i\omega_1(x,y)t)\frac{\partial \Phi^+}{\partial x}.\end{aligned} \tag{6.24}$$

Аналогично выглядит формула для вычисления $\frac{\partial P^+}{\partial y}$. Заметим, что производные $\frac{\partial P^+}{\partial x}$ и $\frac{\partial P^+}{\partial y}$ принадлежат $C^\infty(\overline{\Omega})$, так как $\zeta_+(\Phi^+(x,y)) \equiv 0$ для всех (x,y), лежащих в некоторых окрестностях вершин области φ_0^+, φ_1^+. Поэтому особенности производных $\frac{\partial \Phi^+}{\partial x}$ и $\frac{\partial \Phi^+}{\partial y}$ в этих точках роли не играют (см. лемму 4.6).

Доопределяя так же, как в (6.23), функцию ζ_- во всех точках границы Γ, получаем для $\frac{\partial P^-}{\partial x}$ представление

$$\frac{\partial P^-}{\partial x} = \zeta_-(\Phi^+(x,y))\exp(-i\omega_1(x,y)t)\frac{\partial \Phi^+}{\partial x} \tag{6.25}$$

и аналогичное выражение для $\frac{\partial P^-}{\partial y}$.

Рассуждения при рассмотрении функций $Q^+(x,y,t)$ и $Q^-(x,y,t)$ отличаются от вышеизложенного только тем, что Q^+ и Q^- являются при каждом $t \in \mathbb{R}$ решениями задачи (4.14) с начальными данными $Q^+\big|_{\Gamma_-} = -h^+(\varphi,t)$ и $Q^-\big|_{\Gamma_-} = -h^-(\varphi,t)$, где $\Gamma_- = [\varphi_0^-, \varphi_1^-]$. Поэтому выражения для их производных первого порядка по x и y содержат вместо функции $\Phi^+(x,y)$ функцию $\Phi^-(x,y)$, а вместо функции $\omega_1(x,y)$ функцию $\omega_2(x,y) = \omega(\Phi^-(x,y))$.

Суммируя полученные выражения, находим $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и убеждаемся, что при $|\beta| = 1$ имеет место представление (1.3). При $|\beta| \geqslant 2$ формула (1.3) получается дальнейшим дифференцированием по x и y выражений вида (6.24), (6.25). Не выписывая явных громоздких выражений, заметим, что максимальная степень множителей t^m, которые при этом возникают, может быть равной $|\beta| - 1$.

Пусть теперь множество $\mathcal{K}(\omega(\varphi))$ критических точек функции $\omega(\varphi)$ (совпадающее с данным в условии $\mathcal{K}(\alpha_N^k(\varphi)))$ имеет положительную меру на Γ. Поскольку функция $\omega(\varphi)$ инвариантна относительно группы диффеоморфизмов $G(N,k)$, множество $\mathcal{K}(\omega(\varphi))$ тоже обладает этим свойством. Как и при доказательстве теорем 1.1, 1.2, делаем вывод, что часть $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}(\omega(\varphi)) \cap \Gamma_0$, лежащая на образующей дуге, тоже имеет положительную меру. Представим $\mathcal{K}_0$ в виде объединения замкнутого совершенного множества S_0 и не более чем счетного множества $\mathcal{K}_0 \backslash S_0$. Положим $S = \bigcup\limits_{i=1}^{2N} F_i(S_0)$, $F_i \in G(N,k)$. Множество S является совершенным и имеет положительную меру, $\omega'(\varphi) = 0$ для всех $\varphi \in S$. Поскольку каждая точка из S является предельной для его остальных точек, рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 2.7, заключаем, что $\omega^{(j)}(\varphi) = 0$ для всех $j \geqslant 1$, $\varphi \in S$.

Положим $S_+ = S \cap \Gamma_+$, $\mathbb{E}_+ = \{(x,y) \in \overline{\Omega} \,|\, \Phi^+(x,y) \in S_+\}$. Поскольку функция Φ^+ непрерывна в $\overline{\Omega}$, множество $\mathbb{E}_+$ замкнутое. По определению Φ^+ множество $\mathbb{E}_+$ является объединением всех отрезков характеристик уравнения из (4.3), лежащих в $\overline{\Omega}$, один из концов которых принадлежит множеству S_+. Поскольку $m(S_+) > 0$, имеем $\operatorname{mes} \mathbb{E}_+ > 0$.

Заметим, что любое слагаемое, которое возникает при последовательном дифференцировании по x, y выражений вида (6.24), (6.25) и содержит t^m с показателем $m \geqslant 1$, обязательно включает в качестве одного из сомножителей какую-либо частную производную функций $\omega_1(x,y)$ или $\omega_2(x,y)$. Согласно определению функции ω_1 любая ее производная порядка $|\beta| \geqslant 1$ представима в виде

$$\frac{\partial^{|\beta|}\omega_1}{\partial x^{\beta_1}\partial y^{\beta_2}}(x,y) = \sum_{j=1}^{|\beta|} \omega^{(j)}(\Phi^+(x,y)) \cdot H_{j,\beta}(x,y), \tag{6.26}$$

где $H_{j,\beta}$ — некоторые функции, которые выражаются через производные функции $\Phi^+(x,y)$. Если $(x,y) \in \mathbb{E}_+$, то $\Phi^+(x,y) \in S_+ \subset S$. Поэтому все сомножители $\omega^{(j)}(\Phi^+(x,y))$ в (6.26) обращаются в нуль. Следовательно, производные всех порядков функции $\omega_1(x,y)$ равны нулю в точках $(x,y) \in \mathbb{E}_+$. Значит, дифференцирование по x, y функций $P^+(x,y,t)$ и $P^-(x,y,t)$ приводит к выражениям вида (1.3), для которых все коэффициенты при t^m $(m \geqslant 1)$ обращаются в нуль во всех точках $(x,y) \in \mathbb{E}_+$.

Рассматривая аналогичным образом множества $S_- = S \cap \Gamma_-$, $\mathbb{E}_- = \{(x,y) \in \overline{\Omega} \,|\, \Phi^-(x,y) \in S_-\}$, делаем те же выводы о производных функций $\omega_2(x,y)$, $Q^+(x,y,t)$ и $Q^-(x,y,t)$ в точках множества $\mathbb{E}_-$.

Положим $\mathbb{E} = \mathbb{E}_+ \cap \mathbb{E}_-$. Ясно, что $\operatorname{mes} \mathbb{E} > 0$. В силу вышеизложенного при любом выборе начальных данных $u_0, u_1 \in \mathbb{L}_N^k$ в представлении (1.3) производных решения $u(x,y,t)$ задачи (0.1)–(0.3) во всех точках $(x,y) \in \mathbb{E}$ справедливы равенства $u^+_{m,\beta,j}(x,y) = u^-_{m,\beta,j}(x,y) = 0$ при $m \geqslant 1$.

Для доказательства достаточности в п. (г) теоремы заметим, что если $\alpha_N^k(\varphi) \equiv \alpha_0$, то в силу предыдущих построений $\omega_1(x,y) \equiv \omega_2(x,y) \equiv \omega_0 = \cos \alpha_0$, $\mathbb{E}_+ = \mathbb{E}_- = \mathbb{E} = \overline{\Omega}$.

Необходимость сформулированного условия доказывается от противного. Предположим, что функция $\alpha^k_N(\varphi)$ не постоянна. Тогда на образующей дуге $\Gamma_0 = [\varphi_1, \varphi_2]$ найдется точка $\varphi_* \in (\varphi_1, \varphi_2)$ такая, что $\omega'(\varphi_*) \neq 0$. Обозначим $\Gamma(\varepsilon) = \{\varphi \in \Gamma_0 \,|\, |\varphi - \varphi_*| < \varepsilon\}$ — окрестность точки φ_* такую, что $\omega'(\varphi) \neq 0$ при $\varphi \in \Gamma(\varepsilon)$. Выберем функцию $\zeta_0 \in C^\infty[\varphi_1, \varphi_2]$ такую, что $\zeta_0(\varphi_*) = 1$ и $\operatorname{supp}(\zeta_0) \subseteq \Gamma(\varepsilon/2)$, и рассмотрим решение

$$u_0(x,y,t) = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \chi(x,y,\vartheta)\zeta_0(\vartheta)\exp(i\omega(\vartheta)t)\,d\vartheta$$

задачи (0.1)–(0.3). Тогда в (6.19), (6.20) $\zeta_+(\vartheta) = \zeta_0(\vartheta)$, $\zeta_-(\vartheta) \equiv 0$. Поэтому $u_0(x,y,t) = P^+(x,y,t) + Q^+(x,y,t)$. Рассмотрим характеристику уравнения из (4.3), определяющего $\Phi^+(x,y)$, которая проходит через точку $\varphi_* \in \Gamma_0$, и характеристику уравнения из (4.4), определяющего $\Phi^-(x,y)$, проведенную через вершину области $\varphi_0^+ = \varphi_1 \in \Gamma_0$. Пусть $(x_0, y_0) \in \Omega$ — точка их пересечения. Тогда $\Phi^+(x_0,y_0) = \varphi_*$ и в некоторой окрестности U точки (x_0,y_0) выполняются соотношения $\omega'(\Phi^+(x,y)) \neq 0$, $\zeta_0(\Phi^+(x,y)) \neq 0$. В то же время, как следует из рассуждений, проведенных при доказательстве леммы 4.6, определения (6.21) функции $h^+(\varphi,t)$ и равенства (6.22), имеем $h^+(\varphi_1,t) = 0$ и $h^+(\varphi,t) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $|\varphi - \varphi_1| \leqslant \delta$ при некотором $\delta > 0$. Поскольку $Q^+(x,y,t) = h^+(\Phi^-(x,y),t)$ (следовательно, функция Q^+ постоянна на характеристиках уравнения из (4.4)), в некоторой окрестности V точки (x_0,y_0) имеет место тождество $Q^+(x,y,t) \equiv 0$. Тогда для $(x,y) \in U \cap V$ получаем равенство $u_0(x,y,t) = P^+(x,y,t)$. В силу (6.24) для производных порядка $|\beta| \geqslant 2$ получаем представление

$$\frac{\partial^{|\beta|}u(x,y,t)}{\partial x^{\beta_1}\partial y^{\beta_2}} = \frac{\partial^{|\beta|}P^+(x,y,t)}{\partial x^{\beta_1}\partial y^{\beta_2}}$$

$$= (it)^{|\beta|-1}\zeta_0(\Phi^+)(\omega'(\Phi^+))^{|\beta|-1}\left[\frac{\partial\Phi^+}{\partial x}\right]^{\beta_1}\left[\frac{\partial\Phi^+}{\partial y}\right]^{\beta_2}\exp(i\omega(\Phi^+)t) + \dots,$$

где невыписанные слагаемые содержат степени переменной t, не превосходящие $|\beta|-2$. В силу выбора φ_*, ζ_0 и оценок производных $\frac{\partial\Phi^+}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi^+}{\partial y}$ из леммы 4.2 все сомножители при $t^{|\beta|-1}$ отличны от нуля в точках $(x,y) \in U \cap V$. Поэтому производные порядка m решения $u_0(x,y,t)$ на множестве положительной меры в Ω растут при $t \to \infty$ по абсолютной величине как t^{m-1}. Следовательно, $\mathbb{E} \neq \overline{\Omega}$, если функция $\alpha^k_N(\varphi)$ не постоянна. □

Замечание 6.7. Для аналитической границы Γ функция $\alpha^k_n(\varphi)$ или постоянна, или имеет конечное число критических точек на Γ. Следовательно, $\mathbb{E} = \overline{\Omega}$ или $\mathbb{E} = \varnothing$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Соболев С. Л.** Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
2. **Александрян Р. А.** Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева // Тр. Моск. мат. о-ва. 1960. Т. 9. С. 455–505.
3. **Зеленяк Т. И.** Избранные вопросы качественной теории уравнений с частными производными. Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1970.
4. **Зеленяк Т. И.** Об обобщенных собственных функциях оператора, связанного с одной задачей С. Л. Соболева // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, № 5. С. 1075–1092.
5. **Зеленяк Т. И.** Об асимптотике решений одной смешанной задачи // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 1. С. 47–64.
6. **Фокин М. В.** О спектре одного оператора // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1. С. 135–141.
7. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
8. **Натансон И. П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
9. **Бари Н. К.** Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
10. **John F.** The Dirichlet problem for a hyperbolic equation // Amer. J. Math. 1941. V. 63, N 1. P. 141–154.
11. **Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.** Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука, 1984.
12. **Литвинчук Г. С.** Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977.
13. **Herman M.** Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle a des rotations // Paris: Publ. Math. 1979. N 49. P. 5–233.
14. **Фокин М. В.** О разрешимости задачи Дирихле для уравнения колебания струны // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272, № 4. С. 801–805.
15. **Березанский Ю. М.** Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965.
16. **Касселс Дж. В. С.** Введение в теорию диофантовых приближений. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
17. **Salem R., Zigmund A.** Sur un theoreme de Piatetcki — Shapiro // C. R. Acad. Sci. Paris. 1955. V. 240. P. 2040–2042.
18. **Salem R.** Sets of uniqueness and sets of multiplicity // Trans. Amer. Math. Soc. 1943. V. 54, N 2. P. 218–228; 1944. V. 56, N1. P. 32–49.