

О СЛОЖНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ *)

С. Б. Гашков

Вопросы о сложности приближенной реализации непрерывных функций с разных точек зрения рассматриваются и в теории приближений, и в вычислительной математике (см., например, [1]).

Задача о сложности приближенной реализации непрерывных функций в интересующем нас ракурсе была рассмотрена А. Н. Колмогоровым в начале шестидесятых годов [2]. Введенная А. Н. Колмогоровым мера сложности в настоящее время часто называется битовой сложностью (см., например, [3]). Ее можно интерпретировать как оценку числа битовых операций, необходимых для приближенного вычисления функции, и использовать для оценки сложности компьютерных вычислений с очень большим числом значащих цифр. Мы будем рассматривать также другие меры сложности, оценивающие количество непрерывных, например арифметических, операций из заданного базиса B , необходимых для приближения функции с заданной точностью ε (в предположении, что базисные операции выполняются абсолютно точно). Эти меры сложности можно трактовать как оценку времени, затраченного для приближенного вычисления функции при не слишком малых ε таких, что можно выполнять арифметические операции при помощи машинной арифметики или калькулятора.

А. Н. Колмогоров отметил в [2], что для битовой сложности обратные теоремы теории приближений неверны ввиду того, что «невысокая сложность» функции не означает ее «высокую гладкость». В качестве примера он привел нигде не дифференцируемую функцию Ван-дер-Вардена.

Для упомянутых выше мер сложности

в нашей работе получены оценки сложности некоторых конкретных функций, часто фигурирующих в классических контрпримерах анализа, а именно: различные варианты функций Вейерштрасса, Ван-дер-Вардена, Кантора, Пеано — Гильберта. Оказывается, что эти функции с невысокой сложностью реализуются такими схемами, сложность и глубина которых полиномиально эквивалентны; сложность же реализации таких функций формулами в экспоненциальное число раз больше по сравнению со «схемной сложностью» (определения схемы, формулы, их сложности и глубины см. в § 1). Другими словами, эти функции «легко вычислимы», но существенно ускорить их вычисление с помощью «распараллеливания» программ нельзя, ибо сложность вычисления полиномиально эквивалентна глубине.

В работе также получены некоторые обобщения результатов автора, а именно: доказаны утверждения, дополняющие следствие 3 из [4] и показы-

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-011-1527).

вающие вместе с ним, что $\tilde{L}_B(\mathcal{M}, \varepsilon)$ — сложность ε -приближения компакта $\mathcal{M}$ — существенно зависит от выбора базиса B . Отсюда следует, что некоторые варианты функции Вейерштрасса являются примерами функций, для которых выполнено одно из утверждений следствия 5 из [4], и справедлив тот факт, что в формулировке следствия 7 из [4] ограничение, наложенное на полиномиальные базисы, в общем случае устранить нельзя.

В § 5 работы приведены конечно-автоматные определения для отображения, задающего кривую Пеано, и «лестницы Кантора». С их помощью получены оценки битовой сложности соответствующих функций.

Отметим, что элементарные функции, например экспонента и натуральный логарифм, в базисе $\{x \pm y, xy, x/y, 1\}$ тоже имеют экспоненциально малую «схемную» сложность по сравнению с «формульной» сложностью. Первое утверждение см. в [3], а второе следует из теоремы 1 [5] и известного в теории трансцендентных чисел утверждения о том, что константы e и $\ln 2$ не являются трансцендентными числами Лиувилля, но их сложность в экспоненциальное число раз меньше по сравнению со сложностью рассматриваемых далее функций из классических контрпримеров. Интересно отметить, что битовая сложность элементарных функций экспоненциально велика по сравнению с их же рациональной сложностью (см. [3], а также [6], где построены алгоритмы с почти равными рациональной и битовой сложностями, причем последняя весьма близка к оптимальной).

§ 1. Определения, обозначения и предварительные сведения

Пусть $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, а $\mathcal{K}$ и $\mathcal{A}$ — его подмножества такие, что для любых $x \in \mathcal{K}$ и $\varepsilon > 0$ найдется $y \in \mathcal{A}$, удовлетворяющий неравенству $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Рассмотрим некоторый функционал $\mathcal{L}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

- Сложностью элемента $y \in \mathcal{A}$ называется число $\mathcal{L}(y)$.
- Сложностью ε -приближения элемента $x \in \mathcal{K}$ называется число

$$\mathcal{L}(x, \varepsilon) = \inf\{\mathcal{L}(\tilde{y}): y \in \mathcal{A}, \|x - y\| \leq \varepsilon\}.$$

- Мерой сложности приближения называется отображение $\mathcal{L}$, сопоставляющее каждому элементу $x \in \mathcal{K}$ функцию $\mathcal{L}_x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, определяемую равенством $\mathcal{L}_x(\varepsilon) = \mathcal{L}(x, \varepsilon)$.
- Сложностью ε -приближения множества $\mathcal{K}$ называется число

$$\mathcal{L}(\mathcal{K}, \varepsilon) = \sup\{\mathcal{L}(x, \varepsilon): x \in \mathcal{K}\}.$$

Например, если $\mathcal{X}$ — пространство $C(I)$ непрерывных функций $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, с чебышевской нормой $\|f\| = \max\{|f(x)|: x \in I\}$, а $\mathcal{A}$ — множество всех полиномиальных или рациональных функций, то под сложностью функции $f \in \mathcal{A}$ обычно понимается степень соответствующего полинома или рациональной дроби (см., например, [7–9]).

Таким образом, введенные понятия несколько обобщают понятия, широко используемые в теории приближений. Чтобы понятие сложности функции f более точно отражало количество времени, затраченного на вычисление этой функции, в качестве сложности следует взять минимальное число арифметических операций, необходимых для вычисления f .

Введем некоторые определения.

- *Базисом* называется некоторое множество $B = \{w_k: k = 1, 2, \dots\}$ непрерывных операций $w_k: \mathbb{R}^{m_k} \rightarrow \mathbb{R}$.
- *Схемой в базисе B* называется произвольная последовательность $S = \langle f_1(x), \dots, f_L(x) \rangle$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$), состоящая из непрерывных функций, в которой $f_i(x) = x_i$ при $1 \leq i \leq n$ и каждая следующая функция f_l вычисляется через предшествующие функции $f_{j_1}, \dots, f_{j_m}$ с помощью некоторой базисной операции $w: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ согласно равенству

$$f_l(x) = w(f_{j_1}(x), \dots, f_{j_m}(x)).$$

- *Сложностью* схемы $S = \langle f_1(x), \dots, f_L(x) \rangle$ называется число L .
- *Глубиной D схемы S* называется максимальная длина подпоследовательности $f_{l_1}, \dots, f_{l_D}$, каждая функция которой используется в схеме для вычисления следующей за ней функции из указанной подпоследовательности.
- *Формулой* называется схема S , в которой каждая функция f_l ($l > n$) используется для вычисления других функций не более одного раза.
- *Функция f реализуется схемой S* , если f совпадает с одной из функций f_l последовательности S .
- *Сложностью реализации функции f схемами в базисе B* называется сложность минимальной схемы в базисе B , реализующей f (обозначается $L_B(f)$).

Аналогично определяются $\tilde{L}_B(f)$ — сложность реализации функции f формулами в базисе B и $D_B(f)$ — глубина функции f .

Далее в качестве $\mathcal{A}$ рассматривается множество функций $f \in C(I)$, реализуемых схемами в базисе B , а в качестве меры сложности $\mathcal{L}$ — любая из мер сложности $L_B, \tilde{L}_B, D_B$.

Величина $L_B(f, \varepsilon)$, где $B = \{x \pm y, xy, x/y, 1\}$, является естественной характеристикой объема вычислений, необходимых для приближения функции f с точностью ε .

Можно не ограничиваться базисами, содержащимися в базисе $\{x \pm y, xy, x/y, 1\}$. В [3] рассматриваются, например, базисы, содержащие радикалы и другие алгебраические функции; соответствующую им меру сложности называют алгебраической, а меру сложности, соответствующую базису $\{x \pm y, xy, x/y, 1\}$, — рациональной.

Кроме конечных базисов будем рассматривать также базисы, состоящие из конечного числа функций и континуума констант. Схемы в этих базисах можно интерпретировать как модели аналоговых вычислительных устройств, а меру сложности $L_B(f, \varepsilon)$ — как минимальную стоимость такого устройства для вычисления функции f с точностью ε .

Отметим, что для различных базисов и функций вопросы о вычислении $L_B(f)$ исследуются в алгебраической теории сложности (см., например, [10]), а для булевых функций и базисов аналогичные исследования еще раньше начались в теории сложности булевых функций (см., например, [11]).

Определим некоторые понятия из анализа и теории функций.

- *Разностью первого порядка с шагом τ* назовем оператор

$$\Delta_\tau(f, x) = f(x) - f(x + \tau),$$

а разностью второго порядка — оператор

$$\Delta_\tau^2(f, x) = \Delta_\tau(\Delta_\tau(f, x), x) = f(x) - 2f(x + \tau) + f(x + 2\tau).$$

- Модуль непрерывности первого порядка функции $f \in C(I)$ определим равенством

$$\omega_1(f, \tau) = \max \{ |\Delta_\delta(f, x)| : x, x + \delta \in I, \delta \leq \tau \},$$

а модуль непрерывности второго порядка — равенством

$$\omega_2(f, \tau) = \max \{ |\Delta_\delta^2(f, x)| : x, x + 2\delta \in I, \delta \leq \tau \}.$$

Кроме стандартного символа O будем использовать символ Ω в следующем смысле: $h = \Omega(g)$ означает, что $cg(\varepsilon) \leq h(\varepsilon) \leq Cg(\varepsilon)$ при некоторых положительных константах c и C , не зависящих от ε (т. е. h и g равны по порядку). Зависимость входящих в символы O и Ω констант от различных параметров будем отмечать перечислением этих параметров на уровне индексов, например $O_{\mathfrak{M}}(1)$.

Нам понадобится следующий вариант обобщения классической теоремы Джексона.

Теорема Джексона. Для любых $f \in C(I)$, $k, n \in \mathbb{N}$ можно построить алгебраический полином P степени n такой, что

$$\|f - P_n\| \leq O_k(\omega_k(|I|/n)).$$

В [8, 9] имеются более общие и более точные формулировки, но для наших целей достаточно этой, причем только при $k = 1$ или $k = 2$.

§ 2. Оценки сложности функций Вейерштрасса и Ван-дер-Вардена

Мы будем рассматривать следующие варианты нигде не дифференцируемых функций Ван-дер-Вардена и Вейерштрасса:

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \cdot 2\{3^k x\}, & V_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} \frac{2}{\pi} \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} 4^k x)), \\ W(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \cos(3^k x), & W_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \cos(3^k x), \end{aligned}$$

где $\{x\}$ означает дробную часть числа x . Справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \omega_1(V, \tau) &\leq O(\tau \log(1/\tau)), & \omega_1(W, \tau) &\leq O(\tau^{\log_3 2}), \\ \omega_2(V_1, \tau) &\leq O(\tau), & \omega_2(W_1, \tau) &\leq O(\tau). \end{aligned}$$

Оценки для модулей непрерывности функций W и W_1 приведены в [7, п. 93], где также показано, что для всюду плотного множества чисел x имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \limsup_{\tau \rightarrow 0} |\Delta_\tau(W, x)| / \tau^{\log_3 2} &> 0, \\ \limsup_{\tau \rightarrow 0} |\Delta_\tau(W_1, x)| / (\tau \log(1/\tau)) &> 0, \\ \omega_1(W_1, \tau) &\leq O(\tau \log(1/\tau)). \end{aligned}$$

1083 4/

БИБЛИОТЕКА
Института математики

Из теоремы Харди (см. [7,8]) следует, что функция W является нигде не дифференцируемой. Оценки для функций V и V_1 доказываются рассуждениями, аналогичными рассуждениям из [12]. Докажем, например, оценку $\omega_2(V_1, \tau) \leq O(\tau)$. Функция

$$\varphi_k(x) = 4^{-k} \frac{2}{\pi} \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} 4^k x))$$

имеет экстремумы в точках вида $(2m+1)4^{-k}$ и является линейной на каждой из половин отрезков $I_{k,m} = [2m4^{-k}, (2m+2)4^{-k}]$. Для вывода требуемой оценки достаточно оценить сверху величину

$$|\Delta_\tau^2(V_1, x)| = |V_1(x) - 2V_1(x+\tau) + V_1(x+2\tau)|.$$

Пусть $4^{-n} > 2\tau \geq 4^{-n-1}$ и $(2m+1)4^{-s} \in [x, x+2\tau]$ при некотором $s \leq n$ ($s, m \in \mathbb{N}$). Если такого числа s нет, доказательство только упрощается. Так как при $k < s$ функции φ_k линейны на отрезке $I_{s,m}$ и $[x, x+2\tau] \subseteq I_{s,m}$, имеем $\Delta_\tau^2(\sum_{k=0}^{s-1} \varphi_k, x) = 0$. Если $n \geq k > s$, то функции φ_k тоже линейны на отрезке $[x, x+2\tau]$, поскольку их экстремумы удалены от $(2m+1)4^{-s}$ не меньше чем на $4^{-n} > 2\tau$ и поэтому не лежат в $[x, x+2\tau]$, значит, $\Delta_\tau^2(\sum_{k>s}^\infty \varphi_k, x) = 0$. Отсюда в силу неравенств

$$\begin{aligned} \Delta_\tau^2(\sum_{k>n} \varphi_k, x) &\leq 4 \sum_{k>n} \|\varphi_k\| = 4 \sum_{k>n} 4^{-k} < 2 \cdot 4^{-n} \leq 16\tau, \\ |\Delta_\tau^2(\varphi_s, x)| &\leq 2\omega_1(\varphi_s, \tau) \leq 2\tau \end{aligned}$$

следует, что

$$|\Delta_\tau^2(V_1, x)| = |\Delta_\tau^2(\sum_{k=0}^\infty \varphi_k, x)| \leq 18\tau.$$

Нетрудно непосредственно проверить, что $\omega(V_1, \tau) \leq O(\tau \log(1/\tau))$. Последнее неравенство также легко следует из оценки для ω_2 и известной теоремы Маршо (см., например, [9]). С помощью закона повторного логарифма можно показать, что для почти всех x

$$\limsup_{\tau \rightarrow 0} |\Delta_\tau(V_1, x)| / \tau \sqrt{\log(1/\tau) \log \log \log(1/\tau)} \geq 1/2,$$

и вместе с тем $|\Delta_\tau(V_1, x)| \leq O(\tau)$ для некоторого континуального множества чисел x . Тот факт, что функции V и V_1 являются нигде не дифференцируемыми, доказывается так же, как в [12]. Далее рассматриваем приближения функций V и V_1 на отрезке $[0, 1]$.

Теорема 2.1. Для базиса $\{xy, x+y\} \cup \mathbb{R}$, а также любого базиса, состоящего из полиномов или рациональных дробей, содержащих переменные только в первых степенях, справедливы неравенства

$$\tilde{L}_B(V, \varepsilon) \geq \Omega(1/\varepsilon), \quad \tilde{L}_B(W, \varepsilon) \geq \Omega(\varepsilon^{-\log_2 3} / \log(1/\varepsilon));$$

для базиса $\{xy, x+y\} \cup \mathbb{R}$, а также любого базиса, для которого верна теорема 6 [4], — неравенства

$$\tilde{L}_B(V, \varepsilon) \leq O(1/\varepsilon) \log(1/\varepsilon), \quad \tilde{L}_B(W, \varepsilon) \leq O(\varepsilon^{-\log_2 3});$$

для базиса $\{x - y, xy, |x|, 1/2\}$ — неравенство

$$\tilde{L}_B(V, \varepsilon) \leq O(\log^2(1/\varepsilon));$$

для базиса $\{x - y, xy, \cos x, 1/2\}$ — неравенство

$$\tilde{L}_B(W, \varepsilon) \leq O(\log^2(1/\varepsilon));$$

для базиса $\{xy, x - y, 1/2\}$ — соотношения

$$L_B(V, \varepsilon) \leq O(\log^2 \varepsilon), \quad L_B(W, \varepsilon) = \Omega(\log(1/\varepsilon));$$

для базиса $\{xy, x - y, |x|, 1/2\}$ — неравенство

$$L_B(V, \varepsilon) \leq O(\log(1/\varepsilon));$$

для функций $V_1(x)$ и $W_1(x)$ — те же оценки, что и для $V(x)$ и $W(x)$, с заменой показателя степени $\log_2 3$ на единицу;

для базиса $\{xy, x + y\} \cup \mathbb{R}$ — равенство

$$\tilde{L}_B(V_1, \varepsilon) = \Omega(1/\varepsilon);$$

для базиса $\{xy, x - y, 1/2\}$ — неравенство

$$L_B(V_1, \varepsilon) \leq O(\log^2 \varepsilon)(\log \log(1/\varepsilon))^3;$$

для базиса $\{xy, x - y, |x|, 1/2\}$ — неравенство

$$L_B(V_1, \varepsilon) \leq O(\log^2 \varepsilon).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Функции $W(x)$ и $W_1(x)$ представляют собой примеры функций, для которых выполнено одно из утверждений следствия 5 [4]. Следствие 3 [4] вместе с приведенными в теореме 2.1 оценками показывает, что мера сложности $\tilde{L}_B(\mathfrak{M}, \varepsilon)$ существенно зависит от базиса.

Основная часть верхних оценок теоремы 2.1 доказывается с помощью приведенных выше оценок модулей непрерывности, теоремы Джексона и следующих лемм.

Лемма 2.1 (частный случай теоремы 6 [4]). Для любого полинома P и полного базиса B , состоящего из полиномов, содержащих переменные только в первых степенях, и такого, что $\mathbb{R} \subset B$, справедлива оценка $\tilde{L}_B(P) \leq O(\deg P)$.

- Базис называется *полным*, если в нем можно с любой точностью реализовать любую непрерывную функцию.

Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ класс функций $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(3^k x)$, $|a_k| \leq 2^{-k}$, а через $\mathfrak{M}_2$ — класс функций $\sum_{k=0}^{\infty} a_k 2\{3^k x\}$, $|a_k| \leq 3^{-k}$, и введем на $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ метрики пространств $C[-\pi, \pi]$ и $C[0, 1]$ соответственно.

Лемма 2.2 [4, следствия 3, 5]. Для класса $\mathfrak{M}_1$ и базиса $B_1 = \{x - y, xy, \cos x, 1/2\}$, а также для класса $\mathfrak{M}_2$ и базиса $B_2 = \{x - y, xy, |x|, 1/2\}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \frac{H_\varepsilon(\mathfrak{M})}{\log H_\varepsilon(\mathfrak{M})} \left(1 + \frac{\log \log H_\varepsilon(\mathfrak{M}) - O(1)}{\log H_\varepsilon(\mathfrak{M})} \right) &\leq L_B(\mathfrak{M}, \varepsilon) \\ &\leq \frac{H_\varepsilon(\mathfrak{M})}{\log H_\varepsilon(\mathfrak{M})} \left(1 + \frac{3 \log \log H_\varepsilon(\mathfrak{M}) + O(\mathfrak{M}(1))}{\log H_\varepsilon(\mathfrak{M})} \right), \end{aligned}$$

$$\tilde{L}_B(\mathfrak{M}, \varepsilon) = \Omega(H_\varepsilon(\mathfrak{M})),$$

где $H_\varepsilon(\mathfrak{M}) = \gamma(\ln(1/\varepsilon))^2(1 + O(\ln \ln \ln(1/\varepsilon))/\ln \ln(1/\varepsilon))$ есть ε -энтропия класса $\mathfrak{M}$, а γ — некоторая константа. Для класса $\mathfrak{M}_1$, базиса $B = \{x - y, xy, 1/2\}$ и меры сложности L_B справедливы аналогичные соотношения.

Можно указать колмогоровскую меру на $\mathfrak{M}$ такую, что для почти всех $f \in \mathfrak{M}$ и $\varepsilon < \varepsilon(f)$ будут выполнены соотношения, аналогичные вышеприведенным. Для базиса $B = \{xy, x + y\} \cup \mathbb{R}$ имеем

$$L_B(\mathfrak{M}_1, \varepsilon) = \Omega(\log(1/\varepsilon)), \quad L_B(f, \varepsilon) = \Omega(L_B(\mathfrak{M}_1, \varepsilon))$$

для почти всех $f \in \mathfrak{M}_1$.

Лемма 2.3 [13, лемма 38]. Если $B = \{x - y, xy, 1/2\}$, то для любых $a > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ можно построить алгебраический полином P степени n такой, что при $|x| \leq a$

$$\max\{0, |x| - O((3/4)^n a)\} \leq P_n(x) \leq |x|, \\ L_B(P_n) \leq O(n + \log(|\log a| + 1)).$$

Лемма 2.4. Если $B = \{x - y, xy, 1/2\}$, $q \in (0, 1)$, то для функции $\arcsin \in C[-q, q]$ справедливы оценки

$$\log \log(1/\varepsilon) \lesssim L_B(\arcsin, \varepsilon) \\ \leq O((\log \log(1/\varepsilon))^4 + \log(1/(1 - q))(\log \log(1/\varepsilon))^3),$$

а для функции $\arcsin \in C[-1, 1]$ — оценки

$$\log(1/\varepsilon) \leq L_B(\arcsin, \varepsilon) \leq O(\log \log(1/\varepsilon))^3 \log(1/\varepsilon).$$

Доказательство. Первая оценка снизу справедлива уже для $B = \{x - y, xy, x/y, 1\}$ и вытекает из равенства $\arcsin(1/2) = \pi/6$ и [5, теорема 1]. Вторая оценка снизу справедлива для $B = \{x + y, xy\} \cup \mathbb{R}$ и вытекает из оценки точности наилучшего приближения $\arcsin$ на отрезке $[-1, 1]$ полиномами степени n (см. [8] и [13, лемма 17]). Более слабую, но достаточную для нас оценку, можно получить с помощью неравенства Маркова для производной алгебраического полинома (см. [8, 9]).

Опишем способ получения верхних оценок. Доказательство будем проводить для обеих оценок одновременно, а в тех его частях, которые относятся к первой (второй) оценке, будем писать, что рассматриваем первый (второй) случай. Определим последовательность ньютоновых итераций

$$y_1 = x, \quad y_{n+1} = y_n + (x - \sin y_n) / \cos y_n.$$

Если $x > 0$, то положим $y = \arcsin x$, $\delta = y - y_n$. Тогда

$$\delta_{n+1} = \delta_n - (\sin y - \sin y_n) / \cos y_n = \delta_n - ((\cos \delta_n - 1) \sin y_n + \cos y_n \sin \delta_n) / \cos y_n = \delta_n - \sin \delta_n + (1 - \cos \delta_n) \operatorname{tg} y_n.$$

Если $0 < \delta_n < y$, то с помощью формул половинного угла получаем

$$0 < \delta_{n+1} \leq \delta_n - \sin \delta_n + (1 - \cos \delta_n) \operatorname{ctg} \delta_n = \delta_n - \operatorname{tg}(\delta_n/2) < \delta_n/2.$$

Из неравенств

$$\delta - \delta^3/6 < \sin \delta < \delta - \delta^3/6 + \delta^5/120, \\ 1 - \delta^2/2 < \cos \delta, \quad \delta + \delta^3/3 < \operatorname{tg} \delta,$$

справедливых при $0 < \delta < \pi/2$, следует

$$\delta_n^2/8 \leq \delta_{n+1} \leq \min \{ \delta_n^3/6 + (\operatorname{tg} y) \delta_n^2/2, \delta_n/2 - \delta_n^3/24 \}.$$

Последнее неравенство справедливо и при $x < 0$, если положить $\delta_n = |y - y_n|$.

Обозначим через $f_\delta(y, x)$ такое равномерное $\delta^3/24$ -приближение в прямоугольнике $[-1, 1] \times [-\pi/2 + \delta, \pi/2 - \delta]$ функции $f(x, y) = y + (x - \sin y)/\cos y$, что $L_B(f_\delta(y, x)) = L_B(f(y, x), \delta^3/24)$. Скорректируем итерационную последовательность y_n равенствами $y_{n+1} = f_{\delta_n}(y_n, x)$, где $\delta_n = |y_n - y|$. Тогда при всех n имеем

$$0 < y_n/x < y/x, \quad \delta_{n+1} \leq \min \{ \delta_n^3/4 + (\operatorname{tg} y) \delta_n^2/2, \delta_n/2 \}.$$

Индукцией по n получаем, что $\delta_n < \pi/2^n$. Во втором случае при $q > 6/10$, $n > 1$, $s = \sqrt{1 - q^2}$ имеем

$$\delta_{n+1} \leq \delta_n^3/4 + q \delta_n^2/2 \sqrt{1 - q^2} \leq \delta_n^2 (\pi/2^{n+2} + q/2 \sqrt{1 - q^2}) < \delta_n^2/s.$$

Поэтому $\delta_{n+1} \leq s(\delta_k/s)^{2^{n+1-k}}$. Следовательно, при $k = \log(1/s) + O(1)$

$$\delta_{n+1} \leq s 2^{-2^{n+1-k}}.$$

В первом случае выберем $n \leq \log(1/\varepsilon) + O(1)$, а во втором выберем $n \leq k + \log \log(1/\varepsilon) + O(1)$ так, что $\delta_n \leq \varepsilon < \delta_{n-1}$. При $\delta < \delta_0$ оценим $L_B(f_\delta(y, x))$ сверху величиной $L_B(\sin, \delta^4/96) + L_B(\sec, \delta^3/96) + 5$, а $L_B(\sec, \delta^3/96)$ величиной $L_B(\cos, \delta^5/768) + L_B(1/x, \delta^3/192)$, где функцию $1/x$ выбираем в пространстве $C[2/\delta, 1]$. Оценивая последнее слагаемое с помощью ньютоновых итераций (так же, как в [5]), а остальные с помощью известных результатов [3], получаем оценку

$$L_B(f_\delta(y, x)) \leq O(\log \log(1/\delta)^3).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L_B(\arcsin, \varepsilon) &\leq L_B(y_n) \leq n L_B(f_{\delta_{n-1}}(y, x)) \\ &\leq O(n \log \log(1/\delta_{n-1}))^3 \leq O(n \log \log(1/\varepsilon))^3. \end{aligned}$$

Подставляя значение n (в первом случае $n \leq \log(1/\varepsilon) + O(1)$, а во втором — $n \leq k + \log \log(1/\varepsilon) + O(1)$, где $k = \log(1/s) + O(1)$, $s = \sqrt{1 - q^2}$), получаем утверждение леммы. Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5. Если $B = \{x + y, xy\} \cup \mathbb{R}$, то для любого $q \in (0, 1)$ и функций $\arcsin, \arccos \in C[-q, q]$ справедливы оценки

$$\tilde{L}_B(\arcsin, \varepsilon) \leq O(\log(1/\varepsilon)), \quad \tilde{L}_B(\arccos, \varepsilon) \leq O(\log(1/\varepsilon)).$$

Доказательство. Воспользуемся известным (см. [14, с. 209, формула (62)]) разложением в ряд Фурье — Чебышева функции $\arcsin(qx)$:

$$\arcsin(qx) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} T_{2k+1}(x)$$

($T_n(x)$ — полиномы Чебышева). Коэффициенты этого ряда выражаются через гипергеометрическую функцию

$${}_2F_1(\alpha_1, \alpha_2; \beta; x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j (\alpha_1)_j (\alpha_2)_j / (j! (\beta)_j),$$

где $(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$, по формуле

$$a_{2k+1} = (1/2)_k q^{2k+1} 2^{-2k} {}_2F_1(k+1/2, k+1/2; 2k+2; q^2) / (k! (2k+1)).$$

После некоторых вычислений получаем, что

$$a_{2k+1} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} q^{2n+1} \binom{2n+1}{n-k}}{2^{4n} (2n+1)} \leq q^{2k+1} c^k, \quad 0 < c < 1.$$

Пользуясь этими оценками и формулой

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} T_{2k+1}(x/q),$$

получаем, что на отрезке $[-q, q]$ функции $\arcsin$, $\arccos$ можно приблизить с точностью ε полиномами степени $O(\log(1/\varepsilon))$. Следовательно, лемма 2.5 доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Для базиса $\{x-y, xy, |x|, 1/2\}$ достаточно установить неравенство $\tilde{L}_B(V_1, \varepsilon) \leq O(\log^2(1/\varepsilon))$, для базиса $\{xy, x-y, 1/2\}$ — неравенства

$$\begin{aligned} L_B(V, \varepsilon) &\leq O(\log^2 \varepsilon), & L_B(V_1, \varepsilon) &\leq O(\log^2 \varepsilon)(\log \log(1/\varepsilon))^3, \\ L_B(W, \varepsilon) &\leq O(\log(1/\varepsilon)), & L_B(W_1, \varepsilon) &\leq O(\log(1/\varepsilon)), \end{aligned}$$

а для базиса $\{xy, x-y, |x|, 1/2\}$ — неравенство $L_B(V, \varepsilon) \leq O(\log(1/\varepsilon))$.

Доказательство первого неравенства проводится аналогично доказательству такого же неравенства для функции V в [4, лемма 3]. Следует только заметить, что $\varphi_{n+1}(x) = 2^{-1} \cdot 4^{-n} u_{2n+1}(x + 2^{-1} \cdot 4^{-n}) - 2^{-1} \cdot 4^{-n}$, где

$$u_1(x) = 1 - |2x - 1|, \dots, u_k(x) = u_{k-1}(u_1(x)), \dots, u_{2n+1}(x) = u_{2n}(u_1(x)).$$

Поэтому $\tilde{L}_B(\sum_{k=0}^n \varphi_k) \leq O(n^2)$. Выбрав $n = O(\log(1/\varepsilon))$, получим

$$\tilde{L}_B(V_1, \varepsilon) \leq \tilde{L}_B(\sum_{k=0}^n \varphi_k).$$

Отсюда также вытекает неравенство для $L_B(V_1, \varepsilon)$. Второе неравенство получаем, используя верхнюю оценку для $L_B(V, \varepsilon)$ в случае базиса $\{xy, x-y, |x|, 1/2\}$ и лемму 2.3. Действительно, положим $\varphi_k(x) = 2\{3^k x\}$. Тогда

$$\varphi_0(x) = 1 - |2x - 1|, \quad \varphi_k(x) = \varphi(\varphi_{k-1}(x)),$$

где

$$\varphi(x) = 3x - |3x - 1| + |3x - 2| - 1, \quad V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \varphi_k.$$

Функцию $V(x)$ приближаем конечной суммой с $n = O(\log(1/\varepsilon))$, а константу $1/3$ приближаем с погрешностью ε^2 и со сложностью $O(\log \log(1/\varepsilon))$ (как это сделать, указано в [5]); используя лемму 2.3, приближаем функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi(x)$ с той же точностью и со сложностью $O(\log(1/\varepsilon))$. Наконец, с помощью формул $\varphi_k(x) = \varphi(\varphi_{k-1}(x))$ приходим к требуемой оценке

$$L_B\left(\sum_{k=0}^n 3^{-k} \varphi_k\right) \leq O(n^2).$$

Подобным методом для функции V_1 можно вывести оценку

$$L_B(V_1, \varepsilon) \leq O(\log^3 \varepsilon).$$

С помощью леммы 2.4 получим более сильную оценку

$$L_B(V_1, \varepsilon) \leq O(\log^2 \varepsilon)(\log \log(1/\varepsilon))^3.$$

Положим $\varphi(x) = 4^{-k} \frac{2}{\pi} \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} 4^k x))$ и $v_n = \sum_{k=0}^n \varphi_k(x)$. Выберем $n = \log_4(1/\varepsilon) + O(1)$ так, что $\|V_1 - v_n\| \leq \varepsilon/2$. Положим $\delta_k = \sqrt{\varepsilon_k} = 4^k \varepsilon / 6(n+1) \leq O(1/n)$ и функцию $\sin(\frac{\pi}{2} 4^k x)$ на отрезке $[0, 1]$ приблизим функцией s_k такой, что $\|s_k - \sin(\frac{\pi}{2} 4^k x)\| \leq \varepsilon_k$, $\|s_k\| \leq 1 - \varepsilon_k/3$, а функцию $\frac{2}{\pi} \arcsin$ на отрезке $[-1 + \varepsilon_k/3, 1 - \varepsilon_k/3]$ — функцией a_k такой, что $\|a_k - \frac{2}{\pi} \arcsin\| \leq \delta_k$. Известно, что для любой выпуклой функции $f(x)$ разность $f(b+x) - f(x)$ возрастает (см. [15, гл. 7, задача 1.19]). Так как $\cos x < 1 - x^2/2 + x^4/24$ при $0 < x < \pi/2$, при достаточно малом ε имеем

$$\|4^k \pi \varphi_k / 2 - \arcsin(s_k)\| \leq \pi/2 - \arcsin(1 - \varepsilon_k) = \arccos(1 - \varepsilon_k) \leq 2\sqrt{\varepsilon_k}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \|v_n - \sum_{k=0}^n 4^{-k} a_k(s_k)\| &\leq \sum_{k=0}^n (\|\varphi_k - 4^{-k} \frac{2}{\pi} \arcsin(s_k)\| \\ &\quad + 4^{-k} \|\frac{2}{\pi} \arcsin(s_k) - a_k(s_k)\|) \leq \sum_{k=0}^n 4^{-k} (2\sqrt{\varepsilon_k} + \delta_k) \leq \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Для того чтобы выполнялись наложенные выше условия $\|s_k - \sin(\frac{\pi}{2} 4^k x)\| \leq \varepsilon_k$, $\|s_k\| \leq 1 - \varepsilon_k/3$, достаточно обеспечить выполнение только условий $\|s_k - \sin(\frac{\pi}{2} 4^k x)\| \leq \varepsilon_k/9$, а потом умножить s_k на число $1 - 2^{-m_k}$ ($m \in \mathbb{N}$) такое, что $(9 - 7\varepsilon_k)/(9 + \varepsilon_k) < 1 - 2^{-m_k} < (9 - 3\varepsilon_k)/(9 + \varepsilon_k)$.

Построим теперь функции $s_0, \dots, s_n$ и оценим сверху сложность вычисления этой последовательности. Для этого воспользуемся равенством

$$\sin(\frac{\pi}{2} 4^k x) = (\sin y) U_{4^k-1}(\cos y),$$

где $y = (\pi/2)x$, $U_n = \sin((n+1) \arccos x) / \sin(\arccos x)$ — многочлен Чебышева второго рода, и соотношениями $\|U_n\| = n+1$, $\|U'_n\| \leq n^2$ (см. [14]), $16^{-k} \varepsilon_k / 18 = \varepsilon^2 / 648(n+1)^2$. Следовательно, можно выбрать $s_0, \dots, s_n$ такими, что при $\delta = \varepsilon^2 / 648(n+1)^2$ будет справедлива оценка

$$L_B(s_0, \dots, s_n) \leq L_B(\sin y, \cos y, \delta) + L_B(U_{4^k-1} : 0 \leq k \leq n) + O(\log(1/\varepsilon)).$$

Первое слагаемое в правой части оценивается величиной

$$O(\log(1/\delta)) = O(\log(1/\varepsilon))$$

(в [3] приведены существенно лучшие оценки), а второе — величиной

$$O(n) = O(\log(1/\varepsilon))$$

в силу известных тождеств $U_{2^n-1} = 2U_{2^{n-1}-1}T_{2^{n-1}}$, $T_{2^n} = 2T_{2^{n-1}}^2 - 1$. Следовательно, $L_B(s_0, \dots, s_n) \leq O(\log(1/\varepsilon))$. Значит,

$$\begin{aligned} L_B(V_1, \varepsilon) &\leq L_B(v_n, \varepsilon/2) \leq L_B(s_0, \dots, s_n) + L_B(a_0, \dots, a_n) + O(n) \\ &\leq L_B(a_0, \dots, a_n) + O(\log(1/\varepsilon)). \end{aligned}$$

Слагаемое $L_B(a_0, \dots, a_n)$ оцениваем с помощью леммы 2.4.

Укажем, как получить нижние оценки. Пусть минимальная степень рациональной функции r_N , ε -приближающей V на $[0, 1]$, равна N , а n такое, что $4^{-1} \cdot 3^{-n+1} > \varepsilon \geq 4^{-1} \cdot 3^{-n}$. Тогда функция

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n-1} 3^{-k} 2\{3^k x\} - r_N(x) + 4^{-1} \cdot 3^{-n+1}$$

в точках $r \cdot 3^{-n}/2$ ($0 \leq r \leq 2 \cdot 3^n$) принимает значения чередующихся знаков. Обозначим через k_i число ее нулей на интервале $(i \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^{-n+1}, (i+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^{-n+1})$. Тогда $k_i \geq 3$. Дважды дифференцируя функцию h , получаем рациональную дробь с числителем $4N - 2$, имеющую на каждом из этих интервалов по одному корню. Поэтому $4N > 2 \cdot 3^{n-1}$ и $N \geq \Omega(1/\varepsilon)$. С помощью леммы 17 [13] получаем, что $\tilde{L}_B(V, \varepsilon) \geq \Omega(1/\varepsilon)$ для любого базиса B , состоящего из полиномов или рациональных дробей, содержащих переменные только в первых степенях (такие базисы в [13] называются *жегалкинскими*). Из этой оценки в силу известного соотношения между «формульной» сложностью и глубиной следуют остальные нижние оценки для V .

Чтобы доказать оценки для $W(x)$, рассмотрим функцию

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} T_{3^k}(x) \in C[-1, 1].$$

Рассматривая $g(x)$ как элемент пространства $C[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, докажем, что

$$\tilde{L}_B(g, \varepsilon) \geq \Omega(1/\varepsilon^{\log_2 3})$$

для любого жегалкинского базиса B . Действительно, n -й остаток ряда для функции g на этом отрезке имеет чебышевский альтернанс в точках $\cos(3^{-n}\pi_i)$, $3^n/4 < i < 3^{n+1}/4$. Поэтому при $2^{-n} \leq \varepsilon < 2^{-n+1}$ для рациональной функции r_N степени N , приближающей на этом отрезке функцию g с точностью ε , значения разности

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k} T_{3^k}(x) - r_N(x)$$

в точках альтернанса знакочередуются. Следовательно,

$$3^{n-1} + N \geq [3^n/2].$$

Поэтому $N \geq \Omega(1/\varepsilon^{\log_2 3})$. Отсюда следует оценка $\tilde{L}_B(g, \varepsilon) \geq \Omega(1/\varepsilon^{\log_2 3})$. Рассматривая $g(x)$ и $\arccos x$ как элементы пространства $C[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ и учитывая соотношения

$$W(\arccos x) = g(x), \quad \omega(W, \tau) \leq O(\tau^{\log_2 2}),$$

получаем, что для любого жегалкинского базиса

$$\tilde{L}_B(W, \varepsilon/2) \tilde{L}_B(\arccos x, O(\varepsilon^{\log_2 3})) \geq \Omega(\tilde{L}_B(g, \varepsilon)) \geq \Omega(1/\varepsilon^{\log_2 3}).$$

Из леммы 2.5 и последнего неравенства получаем

$$\tilde{L}_B(W, \varepsilon) \geq \Omega\left(\frac{\varepsilon^{-\log_2 3}}{\log(1/\varepsilon)}\right),$$

откуда следуют и остальные нижние оценки для W . Теорема 2.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Для любого жегалкинского базиса B и для базиса $B = \{xy, x - y, 1/2\}$

$$L_B(g, \varepsilon) \geq \Omega(\log(1/\varepsilon)).$$

Ввиду примера функции $g(x)$ и базиса $B = \{x + y, xy, T_3(x), 1/2\}$, для которых

$$\tilde{L}_B(g, \varepsilon) \leq O(\log^2 \varepsilon),$$

в формулировке следствия 7 [4], вообще говоря, нельзя устранить ограничение на полиномиальные базисы. Для любого $r \in \mathbb{N}$ и сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\varphi(n)$ можно эффективно указать r -кратно дифференцируемую почти всюду функцию $f \in C(I)$ такую, что для базиса $\{x + y, xy, 1/x\} \cup \mathbb{R}$ или базиса $\{x + y, xy\} \cup \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$\Omega\left(\frac{1}{\varepsilon \varphi \log(1/\varepsilon)}\right)^{1/r} \leq \tilde{L}_B(f, \varepsilon) \leq O(\varepsilon^{-1/r}),$$

$$\Omega(\log(1/\varepsilon)) \leq L_B(f, \varepsilon) \leq O(\log^2 \varepsilon),$$

а для любой стремящейся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции $\delta(\varepsilon)$ найдутся последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и r -кратно дифференцируемая почти всюду функция $f \in C(I)$ такая, что

$$\tilde{L}_B(f, \varepsilon_n) = \Omega(\varepsilon_n^{-1/r} \delta(\varepsilon_n)).$$

§ 3. Оценки сложности отображения Пеано отрезка на квадрат

Рассмотрим построенные Гильбертом (см. [12]) функции P_1 и P_2 , осуществляющие отображение Пеано из $[0, 1]$ в $[0, 1]^2$. Их можно определить равенствами

$$P_1(x) = \begin{cases} P_2(4x)/2 & \text{при } x \in [0, 1/4] \\ (1 + P_1(4x - 1))/2 & \text{при } x \in [1/4, 1/2], \\ (1 + P_1(4x - 2))/2 & \text{при } x \in [1/2, 3/4], \\ (1 - P_2(4 - 4x))/2 & \text{при } x \in [3/4, 1], \end{cases}$$

$$P_2(x) = \begin{cases} P_1(4x)/2 & \text{при } x \in [0, 1/4], \\ P_2(4x - 1)/2 & \text{при } x \in [1/4, 1/2], \\ (1 + P_2(4x - 2))/2 & \text{при } x \in [1/2, 3/4], \\ (1 - P_1(4 - 4x))/2 & \text{при } x \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что P_1 и P_2 с точностью 2^{-n} приближаются функциями P_1^n и P_2^n , рекуррентно определяемыми такими же равенствами при начальных условиях $P_1^0 = 0$, $P_2^0 = x$ (отметим, что в [16] указаны несколько другие приближения функций P_1 и P_2). Действительно, переходя к пределу, получаем соответствующие равенства для P_i ($i = 1, 2$), из которых выводим

$$\max_i \|P_i^{n+1} - P\| = \frac{1}{2} \max_i \|P_i^n - P_i\| = 2^{-n} \max_i \|P_i^0 - P_i\| = 2^{-n}.$$

Аналогично рассуждая, с помощью индукции можно проверить, что графики функций P_1^n и P_1 симметричны относительно прямой $x = 1/2$, графики функций P_2^n и P_2 — относительно точки $(1/2, 1/2)$, а угловые коэффициенты у графиков P_i^n ($i = 1, 2$) равны нулю или $\pm 2^n$. Отсюда, в частности, получаем неравенство $\omega(P_i, \tau) \leq O(\sqrt{\tau})$. Известно также (см. [15] или [17]), что для любого «пеановского» отображения в указанном условии показатель Гёльдера не может быть больше $1/2$.

Теорема 3.1. При $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливы следующие утверждения:

если $B = \{x + y, xy\} \cup \mathbb{R}$, то $\tilde{L}_B(P_i, \varepsilon) = \Omega(\varepsilon^{-2})$,

если $B = \{x - y, xy, |x|, 1/2\}$, то $L_B(P_1, P_2, \varepsilon) \leq O(\log(1/\varepsilon))$,

если $B = \{x - y, xy, 1/2\}$, то $\Omega(\log(1/\varepsilon)) \leq L_B(P_1, P_2, \varepsilon) \leq O(\log^2 \varepsilon)$.

Доказательство. Можно проверить, что для $i = 1$ и $i = 2$ на любом отрезке длины h найдутся точки x, y ($x < y$) такие, что $|P_i(x) - P_i(y)| = \Omega(\omega(P_i, h))$ и разность $P_i(x) - P_i(y)$ имеет любой заданный знак. Действительно, в этом отрезке достаточно найти отрезок длины $4^{-n} = \Omega(h)$, на котором функция P_i совпадает с функцией $\pm 2^{-n} P_1(4^n x - m) + c$, воспользоваться равенством $P_1(1/3) - P_1(0) = 1 = -(P_1(2/3) - P_1(1))$ и выбрать соответствующие пары точек на упомянутом отрезке. Аналогично тому, как были установлены оценки сложности «формульной» реализации функций Ван-дер-Вардена, для любой функции f , удовлетворяющей предыдущему условию, можно убедиться, что $\tilde{L}_B(f, \varepsilon) \geq \Omega(1/\omega(f, c\varepsilon))$ при некоторой константе $c > 0$ и $B = \{x + y, xy\} \cup \mathbb{R}$. Следовательно, $\tilde{L}_B(P_i, \varepsilon) \geq \Omega(\varepsilon^{-2})$.

Указанные оценки обобщаются на «пеановские» отображения отрезка в n -мерный куб. Отметим, что ввиду результатов [17] и обратных теорем теории приближений (см. [8, 9]) для любого B , удовлетворяющего условиям теоремы 6 [4] (например, для $B = \{x + y, xy\} \cup \mathbb{R}$), и любого отображения $F: I^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m > n$, где $F(I^n)$ имеет внутреннюю точку, справедливо неравенство $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} L_B(F, \varepsilon) / \log(1/\varepsilon) > 0$.

Верхние оценки в первом утверждении теоремы 3.1 следуют из теоремы Джексона и указанных выше оценок $\omega(P_i, \tau) \leq O(\sqrt{\tau})$.

Докажем второе утверждение теоремы 3.1. Допустим, что $Q_i^n(x) = P_i^{n-1}(s(x))$, где $s(x) = 2 - |4x - 1| + |4x - 2| - |4x - 3|$. Тогда для $x \in [i/4, (i+1)/4]$

$$Q_1^n(x) = P_1^{n-1}(4x - i) \text{ при } 0 \leq i \leq 3,$$

$$Q_2^n(x) = P_2^{n-1}(4x - i) \text{ при } i = 0 \text{ или } 2,$$

$$Q_2^n(x) = 1 - P_2^{n-1}(4x - i) = P_2^{n-1}(i + 1 - 4x) \text{ при } i = 1 \text{ или } 3$$

(при выводе этих соотношений использованы равенства $Q_2^n(x) + Q_2^n(1 - x) = 1$, $P_2^n(x) = P_2^n(1 - x)$). Положим

$$l_1(x) = -2^n(x - 1/4) + 1/2, \quad l_3(x) = -l_1(x) + 1/2,$$

$$l_2(x) = -l_1(x) - 2^{n-1} + 1, \quad l_4(x) = -l_2(x) + 1/2,$$

$$R_1^n(x) = \min \{1/2 Q_2^n(x), \max \{l_1(x), l_2(x)\}\},$$

$$R_2^n(x) = \min \{1/2 Q_1^n(x), \max \{l_3(x), l_4(x)\}\}.$$

Тогда $P_1^n(x) = \max \{R_1^n(x), R_2^n(x)\}$ (при выводе использовано неравенство $\omega(P_i^n, \tau) \leq 2^n \tau$). Аналогично выразим $P_2^n(x)$ через $P_i^{n-1}(x)$.

Вычисляя заранее со сложностью $n + O(1)$ константы $2, 4, \dots, 2^n$, с учетом выписанных выше формул получаем, что для базиса $B = \{x - y, xy, |x|, 1/2\}$ имеет место неравенство

$$L_B(P_1^n, P_2^n) \leq L_B(P_1^{n-1}, P_2^{n-1}) + O(1).$$

Поэтому $L_B(P_1^n, P_2^n) \leq O(n)$. Следовательно,

$$L_B(P_1, P_2, \varepsilon) \leq O(\log(1/\varepsilon)).$$

Пусть теперь $B = \{x - y, xy, 1/2\}$. Из леммы 2.3 следует, что сложность δ -приближения функции $|x|$ на отрезке $[-2^{n+1}, 2^{n+1}]$ равна $O(n + \log(1/\delta))$. Выбирая $n = \log(1/\varepsilon) + O(1)$ так, что $2^{-n} \leq \varepsilon/2$, и заменяя в построенной выше схеме все элементы $|x|$ подсхемами сложности $O(\log(1/\varepsilon))$, приближающими $|x|$ на отрезке $[-2^{n+2}, 2^{n+2}]$ с точностью ε^3 , получаем схему в базисе $\{x - y, xy, 1/2\}$ сложности $O(\log^2 \varepsilon)$, приближающую P_i с точностью ε при $\varepsilon < \varepsilon_0$. Тем самым верхняя оценка $L_B(P_1, P_2, \varepsilon) \leq O(\log^2 \varepsilon)$ в последнем утверждении теоремы 3.1 доказана. Нижняя оценка $\Omega(\log(1/\varepsilon)) \leq L_B(P_1, P_2, \varepsilon)$ следует из первого утверждения теоремы 3.1. Теорема 3.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Можно доказать, что для любых $x \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$ найдется h такое, что $0 < |h| < \delta$ и $|P_i(x + h) - P_i(x)| \geq \sqrt{h}/4$. Следовательно, функции P_i ($i = 1, 2$) нигде не дифференцируемы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Для любого n можно определить «пеановское» отображение $P: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^n$, компоненты которого являются суперпозициями указанных выше «пеановских» функций и имеют сложность ε -приближения схемами в базисе $\{x - y, xy, 1/2\}$, равную $\Omega(n \log(1/\varepsilon))$.

§ 4. «Канторова лестница»

Приведем пример функции, которую можно ε -аппроксимировать в базисе $B = \{x - y, xy, 1/2\}$ схемами сложности и глубины $O(\log^2 \varepsilon)$, но нельзя ε -аппроксимировать в том же базисе формулами сложности $\Omega(\varepsilon^{-2+c})$, $c > 0$. Такой функцией является следующий вариант «канторовой лестницы»:

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}K(4x), & \text{если } x \in [0, 1/4], \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x \in [1/4, 3/4], \\ \frac{1}{2}(1 + K(4x - 3)), & \text{если } x \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

Отметим, что если $x \in [0, 1]$ задавать последовательностью $x_1, \dots, x_n, \dots$ цифр в системе счисления по основанию четыре, а $y = K(x)$ — последовательностью его цифр $y_1, \dots, y_n, \dots$ в двоичной системе счисления, то функция K будет являться следующим конечно-автоматным отображением: $y_i = 0$ при $x_i = 0$, $y_i = 1$ при $x_i = 3$ и $y_i = 1$ после первого появления x_i , равного 1 или 2, но все следующие цифры $y_{i+1}, \dots$ равны нулю (соответствующий конечный автомат имеет два состояния, а это отображение корректно определяет функцию, несмотря на неоднозначность записи числа в виде бесконечной позиционной дроби).

Теорема 4.1. Справедливы следующие утверждения:

если $B = \{x + y, xy\} \cup \mathbb{R}$, то $\Omega(\varepsilon^{-2+O(1)}) \leq \tilde{L}_B(K, \varepsilon) \leq O(\varepsilon^2)$,

если $B = \{x - y, xy, |x|, 1/2\}$, то $L_B(K, \varepsilon) \leq O(\log(1/\varepsilon))$,

если $B = \{x - y, xy, 1/2\}$, то $\Omega(\log(1/\varepsilon)) \leq L_B(K, \varepsilon) \leq O(\log, 2\varepsilon)$.

Доказательство. Функцию $K(x)$ с точностью $O(2^{-n})$ можно приблизить рекуррентно определяемой последовательностью функций

$$K_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}K_n(4x), & \text{если } x \in [0, 1/4], \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x \in [1/4, 3/4], \\ \frac{1}{2}(1 + K_n(4x - 3)), & \text{если } x \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

Индукцией по n легко проверить, что $K_n(1 - x) = 1 - K_n(x)$, $\omega(K_n, \tau) \leq 2^n \tau$. Следовательно, $K(1 - x) = 1 - K(x)$, $\omega(K, \tau) \leq O(\sqrt{\tau})$.

Пусть $\omega(f, x, h) = \max_{\tau \leq h} |\Delta_\tau(f, x)|$. Тогда $\omega(K, x, h) = 0$ для почти всех x

и $\omega(K, x, h) = O(\sqrt{h})$ для всех x из канторовского множества. По теореме Джексона $\tilde{L}_B(K, \varepsilon) \leq O(\varepsilon^{-2})$ для любого базиса B , удовлетворяющего условиям теоремы 6 [4]. Положив

$$\Pi(x) = \max \{ \min \{4x, 2 - 4x\}, \min \{4x - 2, 4 - 4x\} \}$$

и заметив, что

$$K_{n+1} = \frac{1}{2} + \max \{ K_n(\Pi(x)), \min \{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + (x - 1/4)2^n \} \} - \max \{ K_n(\Pi(x)), \min \{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + (\frac{3}{4} - x)2^n \} \},$$

получаем $L_B(K_n) \leq O(n)$. Поэтому $L_B(K, \varepsilon) \leq O(\log(1/\varepsilon))$, где $B = \{x - y, xy, |x|, 1/2\}$. Как и раньше, применяя лемму 2.3, находим, что если $B = \{x - y, xy, 1/2\}$, то $L_B(K, \varepsilon) \leq O(\log^2 \varepsilon)$.

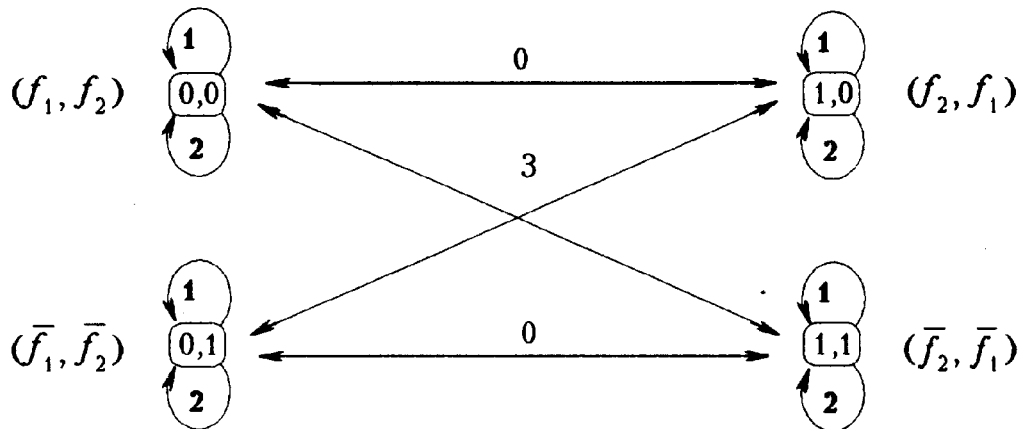
При получении нижних оценок для любого жегалкинского базиса достаточно проверить, что если полином $p(x)$ приближает $K(x)$ с точностью ε , то его степень растет быстрее $1/\varepsilon^{2-c}$ при любом $c > 0$. С этой целью при любом k рассмотрим k -ю разность для этого полинома в точке $1/4 - 4^{-n}$ с шагом 4^{-n} , где $2^{-k-n+1} \geq \varepsilon \geq 2^{-k-n}$, и оценим ее снизу величиной $c\varepsilon$, а сверху величиной $d^k 4^{-nk}$, где d — степень $p(x)$, применяя неравенство Бернштейна для производных (см. [7] или [8, 9]). Следовательно, для $B = \{x + y, xy\} \cup \mathbb{R}$

$$\tilde{L}_B(K, \varepsilon) \geq 1/\varepsilon^{2-O(1)}, \quad L_B(K, \varepsilon) \geq \Omega(\log(1/\varepsilon)).$$

Теорема 4.1 доказана.

§ 5. Кривая Пеано, конечные автоматы и битовая сложность

Вариант Гильберта отображения Пеано можно определить с помощью конечного автомата с четырехзначным входом и двумя двузначными выходами, задаваемого следующей диаграммой:



Двусторонние стрелки заменяют пары параллельных противоположно ориентированных стрелок. Цифры над стрелками — соответствующие стрелкам элементы входного алфавита $\{0, 1, 2, 3\}$. Рядом с вершинами выписаны функции выходов

Отображение, определяемое f_1 и f_2 , задается таблицей

x	0	1	2	3
f_1	0	1	1	0
f_2	0	0	1	1

Чер-

та над f означает отрицание f , т. е. $\bar{f} = 1 - f$. Автомат определяет отображение множества всех сверхслов (т. е. бесконечных последовательностей) в алфавите $\{0, 1, 2, 3\}$ в множество упорядоченных пар сверхслов в алфавите $\{0, 1\}$. Если на множестве m -ичных сверхслов определить метрику так, чтобы расстояние между двумя сверхсловами, впервые отличающимися в n -й координате, было равно m^{-n} , то автомат будет определять отображение, удовлетворяющее условию Гёльдера с показателем $1/2$ (см. [18]). Каждому четырехзначному сверхслову $x_1, x_2, \dots$ сопоставим число из отрезка $[0, 1]$, задаваемое четверичной позиционной дробью $0, x_1, x_2, \dots$, и аналогично «закодируем» двузначные сверхслова. Это «кодирование» неоднозначно, так как четверично-рациональные (соответственно двоично-рациональные) числа имеют два прообраза.

- Сверхслова, «кодирующиеся» одинаковыми числами, называем эквивалентными.

Проверим, что автомат преобразует эквивалентные сверхслова в эквивалентные. Для этого достаточно установить, что автомат с произвольным начальным состоянием переводит сверхслова $a000\dots$ и $(a-1)3333\dots$ также в эквивалентные сверхслова. Учитывая симметрию диаграммы, можно рассмотреть только случай начального состояния $(0, 0)$. Действительно, диаграмма инвариантна при перестановке вершин $(\alpha, \beta) \rightarrow (\bar{\alpha}, \beta)$, сопровождающейся перестановкой выходных функций во всех ее вершинах. Диаграмма также инвариантна при перестановке вершин $(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha, \bar{\beta})$, сопровождающейся заменой выходных функций их отрицаниями, и при перестановке вершин $(\alpha, \beta) \rightarrow (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, сопровождающейся композицией упомянутых выше преобразований выходных функций (вместе с тождественным автоморфизмом эти три перестановки образуют группу автоморфизмов диаграммы, изоморфную четверной группе Клейна). Остается заметить, что замена сверхслова его отрицанием сохраняет отношение эквивалентности. Для этого достаточно проверить, что при начальном состоянии $(0, 0)$ на выходе получаются эквивалентные упорядоченные пары сверхслов

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \text{ при } a = 1,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \end{pmatrix} \text{ при } a = 2.$$

Случай $a = 3$ сводится к случаю $a = 1$ ввиду второго из упомянутых выше автоморфизмов диаграммы.

Согласно установленному свойству автомат определяет отображение $P: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$, удовлетворяющее условию Гёльдера с показателем $1/2$.

Так как выходные функции каждого состояния автомата осуществляют биекцию между алфавитами $\{0, 1, 2, 3\}$ и $\{0, 1\}^2$, отсюда следует, что реализуемая автоматом ограниченно-детерминированная функция является биекцией между множествами сверхслов в этих алфавитах. Значит, определенное выше отображение P отрезка в квадрат есть сюръекция (биекцией оно не является, так как точки с одной двоично-рациональной координатой «кодируются» двумя разными парами сверхслов и, значит, имеют два прообраза, а точки с обеими двоично-рациональными координатами аналогичным образом имеют по четыре прообраза), и, следовательно, оно является «пеановским».

Из автоморфизмов диаграммы следует, что при нулевом начальном состоянии остаточные функции, соответствующие остальным состояниям памяти $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 1)$, выражаются через реализуемую автоматом ограниченно-детерминированную функцию (F_1, F_2) «формулами» (F_2, F_1) , $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ и $(\bar{F}_2, \bar{F}_1)$ соответственно. Отсюда непосредственно следует, что при $x = 0, x_1 x_2 \dots$ значение $P(x)$ вычисляется по значению $P(0, x_2 x_3 \dots) = P(4x - x_1)$ при помощи формул, аналогичных указанным в § 3. Так как по этим «формулам» отображение определяется однозначно (его значение вычисляется «цифра за цифрой»), оно совпадает с отображением, построенным Гильбертом.

Далее, в рассматриваемом автомате один четырехзначный вход удобно заменить двумя двузначными в соответствии с биекцией между $\{0, 1,$

2, 3} и {0, 1}². Тогда автомат можно задать системой канонических уравнений

$$\begin{aligned}q_1(t+1) &= q_1(t) + y(t) + z(y) + 1, \\q_2(t+1) &= q_2(t) + y(t)z(t), \\f_1(t) &= y(t) + q_2(t) + \overline{q_1(t)}z(t), \\f_2(t) &= y(t) + q_2(t) + q_1(t)z(t), \\q_1(t) &= q_1(1) = 0.\end{aligned}$$

Предложенный самим Пеано вариант «пеановского» отображения (см., например, [15, гл. 3, задача 4.4]) также можно задать конечным автоматом. Обозначим через $\mathcal{P}^n$ множество всех n -местных детерминированных двужначных функций. Так же, как и в [4], на нем можно определить метрику $\rho(f, g) = \max \rho(f(x), g(x))$, порожденную введенной выше метрикой на множестве всех двужначных сверхслов, а для базиса B , состоящего из функциональных элементов $\&$, $\vee$, $\neg$ и задержки, — определить меру сложности

$$L_B(f, \varepsilon) = \min \{L_B(g) : \rho(f, g) \leq \varepsilon\},$$

где $L_B(g)$ обозначает сложность реализации ограниченно-детерминированной функции g автоматными схемами в базисе B .

Пусть $X_i(m) = \{x_i(1), \dots, x_i(m)\}$. Тогда детерминированная функция f однозначно определяется последовательностью булевых функций $\{f_m(X_1(m), \dots, X_n(m))\}$, вычисляющих компоненты выходной последовательности. Пусть $L_B(f, 2^{-m}) = L_{\{\&, \vee, \neg\}}(f_1, \dots, f_m)$.

Лемма 5.1. При любом m справедливо неравенство

$$L_B(f, 2^{-m}) \leq mL_B(f, 2^{-m}) + O(1).$$

Доказательство проводится индукцией по построению схемы в базисе B , реализующей ограниченно-детерминированную функцию g такую, что $g_i = f_i$, $1 \leq i \leq m$. Каждый элемент в схеме заменим такими же элементами m , каждый вход x_i — m входами $x_i(1), \dots, x_i(m)$ и соединим элементы так же, как и в схеме в базисе B . Обратную связь можно заменить суперпозицией без использования дополнительных элементов.

Замечание 5.1. При любом m справедливо неравенство

$$L_B(f, 2^{-m}) \leq L_B(f, 2^{-m}) + O(mn).$$

Действительно, возьмем минимальную схему в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, реализующую булевский оператор $(f_1, \dots, f_m)$, входы x_i пропустим через цепочки из m задержек и выходы этих задержек подадим на соответствующие входы упомянутой минимальной схемы. Выход схемы, на котором реализуется константа 1, пропустим через задержку, ее выход — через инвертор, а выход инвертора — через цепочку из m задержек и объединим выходы этих задержек (на которых реализуются константные ограниченно-детерминированные функции $0 \dots 01000 \dots$) в пары с соответствующими выходами рассматриваемой вначале минимальной схемы и подадим на входы конъюнкторов. Выходы этих m конъюнкторов объединим с помощью m -местной дизъюнкции. Легко проверить, что выход построенной схемы в момент времени $t \leq m$ зависит от значений $X_i(t)$, $1 \leq i \leq t$, так же, как функция f_t .

Фактически с помощью этого замечания доказываются соответствующие утверждения из [4], относящиеся к мере сложности ограниченно-детерминированной функции $L_B(f, \varepsilon)$, где B — базис, состоящий из функциональных элементов $\&$, $\vee$, $-$ и задержки. А. Д. Коршуновым и Б. А. Трахтенбротом (см. [18, с. 185]) по существу рассматривалась еще одна мера сложности приближенной реализации детерминированных функций, а именно

$$Q(f, \varepsilon) = \min \{Q(g) : \rho(f, g) \leq \varepsilon\},$$

где $Q(g)$ — вес ограниченно-детерминированной функции g , т. е. минимальная величина памяти автомата, реализующего g . По-видимому, представляет интерес задача одновременной минимизации этих обеих мер сложности.

Битовая сложность 2^{-m} -приближения (впервые введенная в [2]) произвольной функции f из $C[0, 1]$ со значениями в $[-N, N]$ может быть определена как булева сложность булева $(n, m + c_N)$ -оператора, соответствующего ступенчатой функции, 2^{-m} -приближающей f . Обозначим ее $L(f, 2^{-m})$. Битовую сложность умножения двух n -разрядных двоичных чисел обозначим $M(n)$ (здесь также речь идет о сложности минимальной булевой схемы).

Теорема 5.1. При $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} L(P_1, P_2, K, \varepsilon) &\leq O(\log(1/\varepsilon)), \\ L(W, W_1, \varepsilon) &\leq O(\log(1/\varepsilon))M(\log(1/\varepsilon)), \\ L(V, V_1, \varepsilon) &\leq O(\log(1/\varepsilon))M(\log \log(1/\varepsilon)). \end{aligned}$$

Доказательство. Первое неравенство следует из указанных выше конечно-автоматных представлений и леммы 5.1. Второе доказывается подобно теореме 2.1, нужно только заменить арифметические операции их приближенными вычислениями булевыми схемами. Схема, с помощью которой доказывается третье неравенство, строится методом дихотомии. Для функции Ван-дер-Вардена этот факт отмечался в [19].

ЛИТЕРАТУРА

1. Трауб Дж., Вожняковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. М.: Мир, 1983.
2. Колмогоров А. Н. Различные подходы к оценке трудности приближенного задания и вычисления функций // Proc. Internat. Congr. Mathematicians, Stockholm, 1962. Djursholm: Inst. Mittag-Leffler, 1963. P. 369–376.
3. Borwein J. M., Borwein R. P. On the complexity of familiar functions and numbers // SIAM Rev. 1988. V. 30, N 4. P. 589–601.
4. Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации компактов в некоторых пространствах с базисами и о существовании функций с заданной сложностью // Математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1994. Вып. 6.
5. Гашков С. Б. О сложности приближенного вычисления действительных чисел схемами и формулами в различных рациональных базисах // Дискретная математика. 1990. Т. 2, № 4. С. 26–46.
6. Карацуба Е. А. О быстром вычислении трансцендентных функций // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 2. С. 278–279.
7. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
8. Тиман А. Ф. Теория приближений функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.

9. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1972.
10. Strassen V. Algebraic complexity theory // Algorithm and Complexity. Handbook of Theoretical Computer Sciences, V. A. Amsterdam etc.: Elsevier; Cambridge: MIT Press, 1990. P. 633–672.
11. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: МГУ, 1984.
12. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.
13. Гашков С. Б. О сложности приближенной реализации непрерывных функций схемами и формулами в полиномиальных и некоторых других базисах // Математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1994. Вып. 5.
14. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983.
15. Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н. Избранные задачи по вещественному анализу. М.: Наука, 1992.
16. Сухарев А. Г. Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа. М.: Наука, 1989.
17. Витушкин А. Г., Хенкин Г. М. Линейные суперпозиции функций // Успехи мат. наук. 1967. Т. 22, № 1(133). С. 77–124.
18. Трахтенброт Б. А., Бардзинь Я. М. Конечные автоматы (поведение и синтез). М.: Наука, 1970.
19. Асарин Е. А. О сложности равномерных приближений непрерывных функций // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39, вып. 3. С. 157–169.