О КОЛИЧЕСТВЕ ГРАФОВ С ФИКСИРОВАННЫМ ЧИСЛОМ ВЕРШИН, РЕБЕР И ИЗОЛИРОВАННЫХ ВЕРШИН *)

А. Д. Коршунов

§ 1. Постановка задачи и формулировка результатов

Пусть $\mathfrak{G}(n,m)$ обозначает множество обыкновенных графов с m ребрами и n помеченными вершинами, а $\mathfrak{G}(n,m,s)$ — совокупность тех графов из $\mathfrak{G}(n,m)$, в каждом из которых содержится ровно s изолированных вершин. С использованием принципа включения и исключения легко видеть, что

$$|\mathfrak{G}(n,m,s)| = \binom{n}{s}\sum_{r=0}^{n-s}\left((-1)^r\binom{n-s}{r}\binom{\binom{n-s-r}{2}}{m}\right).$$

При заданных n, m, s по этой формуле, в принципе, можно находить величину $|\mathfrak{G}(n,m,s)|$. Однако в общем случае без предварительного вычисления по этой формуле трудно судить о поведении $|\mathfrak{G}(n,m,s)|$. Поэтому представляют интерес асимптотические формулы для мощности множества $\mathfrak{G}(n,m,s)$ и, в частности, для мощности множества $\mathfrak{G}(n,m,0)$, т. е. для числа тех графов из $\mathfrak{G}(n,m)$, в которых нет изолированных вершин.

Очевидно, что множество $\mathfrak{G}(n,m,0)$ непусто лишь при $m \geqslant \lfloor n/2 \rfloor$. В настоящее время известны следующие результаты (см., например, [1]):

1) если $m \geqslant (1/2)n(\ln n + \lambda(n))$, где $\lambda(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ и $m \leqslant \binom{n}{2}$, то почти в любом графе из $\mathfrak{G}(n,m)$ нет изолированных вершин, т. е.

$$|\mathfrak{G}(n,m,0)| \sim |\mathfrak{G}(n,m)| = \binom{\binom{n}{2}}{m}; \tag{1.1}$$

2) если $m = (1/2)n(\ln n + c)$, где c — произвольная константа, то при $n \to \infty$

$$|\mathfrak{G}(n,m,0)| \sim |\mathfrak{G}(n,m)| \exp(-\exp(-c)).$$

Кроме того, в [2] имеется утверждение: если $m = (1/2)n(\ln n + \lambda(n))$, где $\lambda(n) \geqslant -\ln\ln n$, то при $n \to \infty$

$$|\mathfrak{G}(n,m,0)| \sim |\mathfrak{G}(n,m)| \exp(-\exp(-\lambda(n)))$$

(справедливость этого утверждения следует из приведенной ниже теоремы 1.1).

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93–011–1484).

В настоящей статье устанавливаются асимптотические формулы для мощности множества $\mathfrak{G}(n, m, s)$ при любых допустимых s и $m \in [\lceil n/2 \rceil, (1/2)n \ln n]$. Положим

$$\alpha = \tfrac{2m}{n}, \tag{1.2}$$

$$k = \lfloor n/e^{\alpha} \rfloor. \tag{1.3}$$

Тогда полученные результаты формулируются следующим образом.

Теорема 1.1. *Пусть $\alpha \in [\ln n - \ln \ln n, \ln n]$. Тогда при любом допустимом $s \geqslant n/2$ и $n \to \infty$*

$$|\mathfrak{G}(n, m, s)| \sim \tbinom{n}{s} |\mathfrak{G}(n - s, m)|, \tag{1.4}$$

а при любом $s \in [0, n/2]$

$$|\mathfrak{G}(n, m, s)| \sim \tbinom{n}{s} |\mathfrak{G}(n - s, m)| \exp\left(-(n - s) \exp\left(-2m/(n - s)\right)\right). \tag{1.5}$$

В частности, $|\mathfrak{G}(n, m, 0)| \sim |\mathfrak{G}(n, m)| \exp\left(-n \exp\left(-\alpha\right)\right)$.

Теорема 1.2. *Если $\alpha \in [(2/3) \ln n, \ln n - \ln \ln n]$, то при любом $s \in [k - \sqrt{k \ln k},\ k + \sqrt{k \ln k}]$ и $n \to \infty$*

$$|\mathfrak{G}(n, m, s)| \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} |\mathfrak{G}(n, m)| \exp\left(-(s - k)^2/2k\right).$$

Теорема 1.3. *Если $\alpha \in [(2/3) \ln n, \ln n - \ln \ln n]$ и $n \to \infty$, то*

$$|\mathfrak{G}(n, m, 0)| \sim |\mathfrak{G}(n, m)| \exp\left(-n \exp\left(-\alpha\right)\right).$$

Теорема 1.4. *Если $m \in [n/2 + n^{2/3}/\ln n,\ (1/3) n \ln n]$, то при любом $s \in [k - \sqrt{k \ln k},\ k + \sqrt{k \ln k}]$ и $n \to \infty$*

$$|\mathfrak{G}(n, m, s)| \sim |\mathfrak{G}(n, m)| \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 - e^{-\alpha} - \alpha e^{-\alpha})}} \exp\left(-\frac{(s - k)^2}{2k(1 - e^{-\alpha} - \alpha e^{-\alpha})}\right).$$

Теорема 1.5. *Если $m \in [n/2 + n^{2/3}/\ln n,\ (1/3) n \ln n]$, то при $n \to \infty$*

$$|\mathfrak{G}(n, m, 0)| \sim |\mathfrak{G}(\lfloor nx \rfloor, m)| \frac{1}{\sqrt{2\pi n x e^{-\alpha/x}(1 - e^{-\alpha/x} - (\alpha/x) e^{-\alpha/x}) \binom{\lfloor nx \rfloor}{n}}},$$

где $x > 1$ — любое число, удовлетворяющее неравенству $|x - y_0| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n e^{-\alpha} \ln n}}$, а y_0 является таким положительным корнем уравнения $y = (y - 1) e^{\alpha/y}$, что $y_0 \in [1, \alpha/(\alpha - 1)]$.

Теорема 1.6. *Если $m \in [\lceil n/2 \rceil,\ n/2 + n^{2/3}/\ln n]$, то при $n \to \infty$*

$$|\mathfrak{G}(n, m, 0)| \sim \frac{n!}{(2n - 3m)!\,(2m - n)!\,2^{n - m}} \exp\left(\frac{8(2m - n)^2}{3n}\right),$$

а почти каждый граф из $\mathfrak{G}(n, m, 0)$ является лесом, состоящим из деревьев, содержащих не более 4 вершин каждое.

Следствие. *Поскольку при любом допустимом s справедливо равенство $|\mathfrak{G}(n,m,s)| = |\mathfrak{G}(n-s,m,0)|\binom{n}{s}$, из сформулированных теорем непосредственно извлекаются асимптотики для мощности множества $\mathfrak{G}(n,m,s)$ при произвольных s.*

Доказательство теоремы 1.1 основано на применении принципа включения и исключения по числу изолированных вершин. Доказательства предельных локальных теорем 1.2 и 1.4 основаны на использовании следующих двух приемов. Первый прием состоит в том, что вместо множества $\mathfrak{G}(n,m)$ рассматривается множество $\mathfrak{G}(n+x,m)$, где x подбирается таким, чтобы математическое ожидание числа неизолированных вершин в графах из $\mathfrak{G}(n+x,m)$ было близко к $n-s$. Этот прием позволяет переводить графы из маловероятной области в наиболее вероятную область. Второй прием состоит в том, что вместо графов из $\mathfrak{G}(n,m)$ рассматриваются графы с помеченными ребрами и множество ребер разбивается на два подходящих подмножества. Такой прием позволяет элементарным способом убедиться в том, что если s_1 и s_2 «мало» отличаются от $ne^{-\alpha}$, то мощности множеств $\mathfrak{G}(n,m,s_1)$ и $\mathfrak{G}(n,m,s_2)$ асимптотически совпадают.

Эти приемы в различных вариантах использовались автором ранее при нахождении числа сильно связных и инициально связных конечных автоматов [3] и при комбинаторном доказательстве асимптотических формул для чисел Стирлинга второго рода [4].

Доказательства теорем 1.3 и 1.5 также основаны на переходе от множества $\mathfrak{G}(n,m)$ к множеству $\mathfrak{G}(n+x,m)$ с существенным использованием теорем 1.2 и 1.4. Наконец, при доказательстве теоремы 1.6 множество $\mathfrak{G}(n,m,0)$ разбивается на подмножества $\mathfrak{G}_1(n,m,0)$ и $\mathfrak{G}_2(n,m,0)$ такие, что каждый граф из $\mathfrak{G}_1(n,m,0)$ является лесом, состоящим из деревьев, содержащих не более 4 вершин каждое; в $\mathfrak{G}_2(n,m,0)$ включаются остальные графы из $\mathfrak{G}(n,m,0)$. Сначала для мощности множества $\mathfrak{G}_1(n,m,0)$ находится асимптотика, а затем показывается, что

$$|\mathfrak{G}_2(n,m,0)| = o(|\mathfrak{G}_1(n,m,0)|).$$

§ 2. Доказательство теоремы 1.1

Если $m \geqslant (1/2)n(\ln n - \ln\ln n)$, s допустимо и $s \geqslant (1/2)n$, то при $n \to \infty$ выполняется неравенство $m/(n-s) \geqslant 2(1+o(1))\ln n$. При соблюдении последнего неравенства, как отмечалось выше, имеет место соотношение $|\mathfrak{G}(n-s,m,0)| \sim |\mathfrak{G}(n-s,m)|$. Поэтому при таких s

$$|\mathfrak{G}(n,m,s)| = \binom{n}{s}|\mathfrak{G}(n-s,m,0)| \sim \binom{n}{s}|\mathfrak{G}(n-s,m)|,$$

т. е. справедливо (1.4).

Теперь рассмотрим случай, когда $s \in [0, n/2]$. Согласно (1.1) имеем

$$|\mathfrak{G}(n,m,s)| = \binom{n}{s}\sum_{r\geqslant 0}(-1)^r\binom{n-s}{r}\,|\mathfrak{G}(n-s-r,m)|. \qquad (2.1)$$

Положим $r_0 = \lfloor 6\ln n\rfloor$. Тогда, пользуясь соотношениями

$$\binom{n-s}{r} < \frac{(n-s)^r}{r!},$$

$$|\mathfrak{G}(n-s-r,m)| = \binom{\binom{n-s-r}{2}}{m} < \frac{1}{m!}\prod_{i=0}^{m-1}\left(\frac{(n-s-r)^2}{2} - i\right)$$
$$< \frac{(n-s-r)^{2m}}{m!\,2^m}\prod_{i=0}^{m-1}\left(1 - \frac{2i}{(n-s)^2}\right) < \frac{(n-s-r)^{2m}}{m!\,2^m}\exp\left(-\frac{m^2-m}{(n-s)^2}\right)$$
$$< \frac{(n-s-r)^{2m}}{m!\,2^m}\exp\left(-\frac{2rm}{n-s} - \frac{m^2-m}{(n-s)^2}\right),$$

получаем

$$\left|\sum_{r\geqslant r_0}(-1)^r\binom{n-s}{r}|\mathfrak{G}(n-s-r,m)|\right|$$
$$< \frac{(n-s)^{2m}}{m!\,2^m}\exp\left(-\frac{m^2-m}{(n-s)^2}\right)\sum_{r\geqslant r_0}\frac{(n-s)^r}{r!}\exp\left(-\frac{2rm}{(n-s)}\right).$$

В свою очередь,

$$\sum_{r\geqslant r_0}\frac{(n-s)^r}{r!}\exp\left(-\frac{2rm}{n-s}\right) < 2\frac{(n-s)^{r_0}}{r_0!}\exp\left(-\frac{2r_0m}{n-s}\right) \leqslant 2\frac{(\ln n)^{r_0}}{r_0!} < \frac{1}{2n^4},$$

поэтому

$$\left|\sum_{r\geqslant r_0}(-1)^r\binom{n-s}{r}|\mathfrak{G}(n-s-r,m)|\right| < \frac{(n-s)^{2m}}{m!\,2^m n^4}\exp\left(-\frac{m^2}{(n-s)^2}\right). \tag{2.2}$$

Далее, имеем

$$|\mathfrak{G}(n-s,m)| = \binom{\binom{n-s}{2}}{m} = \frac{1}{m!}\prod_{i=0}^{m-1}\left(\frac{(n-s)(n-s-1)}{2} - i\right)$$
$$= \frac{(n-s)^m(n-s-1)^m}{m!\,2^m}\prod_{i=0}^{m-1}\left(1 - \frac{2i}{(n-s)(n-s-1)}\right)$$
$$\sim \frac{(n-s)^{2m}}{m!\,2^m}\exp\left(-\frac{m}{n-s} - \frac{m^2}{(n-s)^2}\right). \tag{2.3}$$

Поскольку при $\alpha \leqslant \ln n$ и $s \leqslant n/2$

$$\exp\left(-\frac{m}{n-s}\right) \geqslant \exp\left(-\frac{2m}{n}\right) = \exp(-\alpha) \geqslant \frac{1}{n},$$

пользуясь (2.2) и (2.3), получаем

$$\left|\sum_{r\geqslant r_0}(-1)^r\binom{n-s}{r}|\mathfrak{G}(n-s-r,m)|\right| = o(|\mathfrak{G}(n-s,m)|n^{-3}). \tag{2.4}$$

Найдем асимптотику для

$$\sum_{r=0}^{r_0-1}(-1)^r\binom{n-s}{r}|\mathfrak{G}(n-s-r,m)| \stackrel{\text{def}}{=} F(n,m,s). \tag{2.5}$$

При любом $r \in [0, r_0]$ и $n \to \infty$

$$
\begin{aligned}
\binom{n-s}{r} &= \frac{(n-s)^r}{r!} \prod_{i=1}^{r-1} \left(1 - \frac{i}{n-s}\right) = \frac{(n-s)^r}{r!} \exp\left(\sum_{i=1}^{r-1} \ln\left(1 - \frac{i}{n-s}\right)\right) \\
&= \frac{(n-s)^r}{r!} \exp\left(-\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(i/(n-s))^j}{j}\right) = \frac{(n-s)^r}{r!} \exp\left(-\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{r-1} \frac{(i/(n-s))^j}{j}\right) \\
&= \frac{(n-s)^r}{r!} \exp\left(-\frac{r(r-1)}{2(n-s)} - \frac{r(r-1)(2r-1)}{12(n-s)^2} - \sum_{j=3}^{\infty} \sum_{i=1}^{r-1} \frac{(i/(n-s))^j}{j}\right) \\
&= \frac{(n-s)^r}{r!} \exp\left(-\frac{r(r-1)}{2(n-s)} - \frac{r(r-1)(2r-1)}{12(n-s)^2} + o(n^{-2,5})\right). \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

Далее,

$$
\begin{aligned}
|\mathfrak{G}(n-s-r, m)| &= \binom{\binom{n-s-r}{2}}{m} = \binom{\binom{n-s}{2} - r(n-s-1/2) + r^2/2}{m} \\
&= |\mathfrak{G}(n-s, m)| \prod_{i=0}^{m-1} \left(1 - \Big(r(n-s-1/2) - (r^2/2)\Big) \Big/ \left(\binom{n-s}{2} - i\right)\right) \\
&= |\mathfrak{G}(n-s, m)| \exp\Bigg(-\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{j}\bigg(\Big(r(n-s-1/2) \\
&\qquad - (r^2/2)\Big) \Big/ \left(\binom{n-s}{2} - i\right)\bigg)^j\Bigg). \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

Поскольку при $i \leqslant m$ и $s \leqslant n/2$

$$
\begin{aligned}
\left(\binom{n-s}{2} - i\right)^{-1} &= \binom{n-s}{2}^{-1} \left(1 - i \Big/ \binom{n-s}{2}\right)^{-1} = \binom{n-s}{2}^{-1} \left(1 + \sum_{v=1}^{\infty} \left(i \Big/ \binom{n-s}{2}\right)^v\right) \\
&= \binom{n-s}{2}^{-1} \left(1 + i \Big/ \binom{n-s}{2} + i^2 \Big/ \binom{n-s}{2}^2 + O(i^3 n^{-6})\right),
\end{aligned}
$$

имеем

$$
\begin{aligned}
&\exp\left(-\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{j}\left(\Big(r(n-s-1/2) - (r^2/2)\Big) \Big/ \left(\binom{n-s}{2} - i\right)\right)^j\right) \\
&\qquad = \exp\left(-\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} g(r, j, i)\right), \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
g(r, j, i) = \frac{1}{j}\Bigg(\Big(r(n-s-1/2) - (r^2/2)\Big) \binom{n-s}{2}^{-1} \bigg(1 + i \Big/ \binom{n-s}{2} \\
+ i^2 \Big/ \binom{n-s}{2}^2 + O(i^3 n^{-6})\bigg)\Bigg)^j. \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

Так как при $j \geqslant 4$

$$\Bigl|\sum_{i=0}^{m-1} g(r,j,i)\Bigr| < m|g(r,j,m-1)| < \frac{m(2r(n-s))^j}{4\binom{n-s}{2}^j},$$

то при $n \to \infty$

$$\sum_{j=4}^{\infty}\sum_{i=0}^{m-1} g(r,j,i) < \frac{m(2r(n-s))^4}{\binom{n-s}{2}^4} = o(n^{-2,5}). \tag{2.10}$$

Вместе с тем

$$\sum_{i=0}^{m-1} g(r,1,i) = \Bigl(r(n-s-1/2)-(r^2/2)\Bigr)\binom{n-s}{2}^{-1}\Bigl(m+\binom{m}{2}\Big/\binom{n-s}{2}$$
$$+\frac{m(m-1)(2m-1)}{6\binom{n-s}{2}^2}+O(m^4n^{-6})\Bigr) = \frac{2mr}{n-s-1}+o(n^{-2,5})+g(r,1), \tag{2.11}$$

где

$$g(r,1) = -\frac{m(r+r^2)}{2\binom{n-s}{2}}$$
$$+\Bigl(r(n-s-1/2)-(r^2/2)\Bigr)\binom{n-s}{2}^{-1}\Bigl(\binom{m}{2}\Big/\binom{n-s}{2}+\frac{m(m-1)(2m-1)}{6\binom{n-s}{2}^2}\Bigr); \tag{2.12}$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} g(r,2,i) = (1/2)\Bigl(r(n-s-1/2)-(r^2/2)\Bigr)^2\Big/\binom{n-s}{2}^2$$
$$\times\sum_{i=0}^{m-1}\Bigl(1+2i\Big/\binom{n-s}{2}+O(i^2n^{-4})\Bigr) = g(r,2)+o(n^{-2,5}), \tag{2.13}$$

где

$$g(r,2) = (1/2)m\Bigl(r(n-s-1/2)-(r^2/2)\Bigr)\binom{n-s}{2}^{-2}\Bigl(1+(m-1)\Big/\binom{n-s}{2}\Bigr); \tag{2.14}$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} g(r,3,i) = (1/3)\Bigl(r(n-s-1/2)-(r^2/2)\Bigr)^3\Big/\binom{n-s}{2}^3+o(n^{-2,5})$$
$$= g(r,3)+o(n^{-2,5}), \tag{2.15}$$

где

$$g(r,3) = mr^3(n-s)^3\Big/\binom{n-s}{2}^3. \tag{2.16}$$

Собрав (2.8)–(2.16) и воспользовавшись (2.5)–(2.7), получаем

$$F(n,m,s) = |\mathfrak{G}(n-s,m)|\sum_{r=0}^{r_0-1}\Bigl((-1)^r\frac{(n-s)^r}{r!}\exp\Bigl(-\frac{2mr}{n-s-1}-\frac{r(r-1)}{2(n-s)}$$
$$-\frac{r(r-1)(2r-1)}{12(n-s)^2}-g(r,1)-g(r,2)-g(r,3)+o(n^{-2,5})\Bigr)\Bigr). \tag{2.17}$$

Пользуясь соотношением $e^{-x} = 1 - x + (1/2)x^2 + O(x^3)$, которое верно при любом x, $|x| \leqslant 1$, нетрудно видеть, что при $n \to \infty$

$$\exp\Big(- \tfrac{r(r-1)}{2(n-s)} - \tfrac{r(r-1)(2r-1)}{12(n-s)^2} - g(r,1) - g(r,2) - g(r,3) + o(n^{-2,5})\Big)$$
$$= 1 - \tfrac{r(r-1)}{2(n-s)} - \tfrac{r(r-1)(2r-1)}{12(n-s)^2} + \tfrac{r^2(r-1)^2}{8(n-s)^2} - g(r,1) - g(r,2) - g(r,3)$$
$$+ (1/2)g^2(r,1) + (1/2)g^2(r,2) + g(r,1)g(r,2) + g(r,1)g(r,3) + o(n^{-2,5}).$$

Отсюда и из (2.17) получаем

$$F(n,m,s) = |\mathfrak{G}(n-s,m)| \sum_{r=0}^{r_0-1} \Big((-1)^r \tfrac{(n-s)^r}{r!} \exp\Big(- \tfrac{2mr}{n-s-1}\Big)$$
$$\times \Big(1 - \tfrac{r(r-1)}{2(n-s)} - \tfrac{r(r-1)(2r-1)}{12(n-s)^2} + \tfrac{r^2(r-1)^2}{8(n-s)^2}$$
$$- g(r,1) - g(r,2) - g(r,3) + (1/2)g^2(r,1) + (1/2)g^2(r,2) + g(r,1)g(r,2)$$
$$+ g(r,1)g(r,3) + o(n^{-2,5})\Big)\Big). \qquad (2.18)$$

В свою очередь, при $s \leqslant n/2$ имеем

$$\sum_{r=0}^{r_0-1} (-1)^r \tfrac{(n-s)^r}{r!} \exp\Big(- \tfrac{2mr}{n-s-1}\Big) \sim \exp\Big(- (n-s)\exp\Big(- \tfrac{2m}{n-s}\Big)\Big), \qquad (2.19)$$

$$\sum_{r=0}^{r_0-1} (-1)^r \tfrac{(n-s)^r r(r-1)}{r!\, 2(n-s)} \exp\Big(- \tfrac{2mr}{n-s-1}\Big)$$
$$< \sum_{r=2}^{r_0-1} \tfrac{(-1)^{r+1}(n-s)^{r-1}}{(r-2)!} \exp\Big(- \tfrac{2mr}{n-s}\Big) < (n-s)\exp\Big(- \tfrac{4m}{n-s}\Big)$$
$$- (n-s)\exp\Big(- \tfrac{2m}{n-s}\Big) = o(\exp(-(n-s)\exp(-2m/(n-s)))). \qquad (2.20)$$

Далее, полиномы от r, встречающиеся в (2.18), можно выразить в виде суммы убывающих факториальных степеней. Например,

$$r(r-1)(2r-1) = 2r(r-1)(r-2) + 3r(r-1),$$
$$r^2(r-1)^2 = r(r-1)(r-2)(r-3) + 4r(r-1)(r-2) + 2r(r-1)$$

и т. д. Пользуясь таким представлением, как и в (2.19), убеждаемся, что

$$\sum_{r=0}^{r_0-1} \tfrac{(-1)^r(n-s)^r}{r!} \exp\Big(- \tfrac{2m}{n-s-1}\Big)\Big(- \tfrac{r(r-1)(2r-1)}{12(n-s)^2} + \tfrac{r^2(r-1)^2}{8(n-s)^2}$$
$$- g(r,1) - g(r,2) - g(r,3) + (1/2)g^2(r,1) + (1/2)g^2(r,2) + g(r,1)g(r,2)$$
$$+ g(r,1)g(r,3)\Big) = o\Big(\exp\Big(- (n-s)\exp\Big(- \tfrac{2m}{n-s}\Big)\Big)\Big). \qquad (2.21)$$

Наконец,

$$\Big|\sum_{r=0}^{r_0-1}\frac{(-1)^r(n-s)^r}{r!}\exp\Big(-\frac{2mr}{n-s-1}\Big)o(n^{-2,5})\Big|$$

$$\leqslant o(n^{-2,5})\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(n-s)^r}{r!}\exp\Big(-\frac{2mr}{n-s}\Big)$$

$$= o(n^{-2,5})\exp\Big(2(n-s)\exp\Big(-\frac{2m}{n-s}\Big)\Big)\exp\Big(-(n-s)\exp\Big(-\frac{2m}{n-s}\Big)\Big)$$

$$< o(n^{-2,5})\exp(2ne^{-\alpha})\exp\Big(-(n-s)\exp\Big(-\frac{2m}{n-s}\Big)\Big)$$

$$= (\text{так как } \alpha \geqslant \ln n - \ln\ln n) = o(\exp(-(n-s)\exp(-(2m)/(n-s)))). \tag{2.22}$$

Подставляя (2.19)–(2.22) в (2.18), имеем

$$F(n,m,s) \sim |\mathfrak{G}(n-s,m)|\exp\Big(-(n-s)\exp\Big(-\frac{2m}{n-s}\Big)\Big). \tag{2.23}$$

Пользуясь (2.1), (2.4), (2.5), (2.23), получаем второе утверждение теоремы 1.1, т. е. (1.5). Теорема 1.1 полностью доказана.

§ 3. Вспомогательные утверждения

Пусть α и k взяты из (1.2) и (1.3), а

$$k_0 = n\binom{\binom{n-1}{2}}{m}\Big/\binom{\binom{n}{2}}{m}, \tag{3.1}$$

т. е. k_0 равно математическому ожиданию числа изолированных вершин в случайном графе из $\mathfrak{G}(n,m)$, когда все графы этого множества являются равновероятными.

Лемма 3.1. *Если $\alpha \in [1, \ln n]$, то при $n \to \infty$ справедливо $|k-k_0| < 1$.*

Доказательство. В самом деле,

$$k_0 = n\prod_{i=0}^{m-1}\Big(\Big(\tbinom{n-1}{2}-i\Big)\Big/\Big(\tbinom{n}{2}-i\Big)\Big)$$

$$= n\Big(\tbinom{n-1}{2}\Big/\tbinom{n}{2}^m\Big)\prod_{i=0}^{m-1}\Big(\Big(1-i/\tbinom{n-1}{2}\Big)\Big/\Big(1-i/\tbinom{n}{2}\Big)\Big).$$

В свою очередь,

$$\Big(\tbinom{n-1}{2}\Big/\tbinom{n}{2}\Big)^m = (1-2n^{-1})^m = \exp\Big(-m\sum_{i=1}^{\infty}i^{-1}(2n^{-1})^i\Big)$$

$$= \exp(-\alpha - 2mn^{-2} + o(n^{-1})),$$

$$\prod_{i=0}^{m-1}\left(1-i/\tbinom{n-1}{2}\right)=\exp\left(-\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\left(i/\tbinom{n-1}{2}\right)^r\right)$$
$$=\exp\left(-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m-1}\left(i/\tbinom{n-1}{2}\right)^r\right)$$
$$=\exp\left(-\frac{m(m-1)}{2\binom{n-1}{2}}-\frac{m(m-1)(2m-1)}{12\binom{n-1}{2}^2}+o(n^{-1})\right)$$
$$=\exp\left(-\frac{m(m-1)}{(n-1)(n-2)}-\frac{2m^3}{3n^4}+o(n^{-1})\right),$$
$$\prod_{i=0}^{m-1}\left(1-i/\tbinom{n}{2}\right)=\exp\left(-\frac{m(m-1)}{n(n-1)}-\frac{2m^3}{3n^4}+o(n^{-1})\right).$$

Следовательно,

$$k_0=n\exp\left(-\alpha-\frac{2m}{n^2}-\frac{m(m-1)}{(n-1)(n-2)}+\frac{m(m-1)}{n(n-1)}+o(n^{-1})\right)$$
$$=n\exp\left(-\alpha-\frac{\alpha}{n}-\frac{2m^2}{n^3}+o(n^{-1})\right)=ne^{-\alpha}\left(1-\frac{\alpha}{n}-\frac{2m^2}{n^3}+o(n^{-1})\right)$$
$$=ne^{-\alpha}-\alpha e^{-\alpha}-(1/2)\alpha^2e^{-\alpha}+o(1).$$

Поэтому, полагая $\nu=ne^{-\alpha}-k$, при $n\to\infty$ имеем $|k-k_0|=|\alpha e^{-\alpha}+(1/2)\alpha^2e^{-\alpha}+o(1)-\nu|<\max(\nu,\alpha e^{-\alpha}+(1/2)\alpha^2e^{-\alpha}+o(1))\leqslant 1$. Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. *Если* $\alpha\in[1,\ln^2 n]$, *то при* $n\to\infty$

$$|\mathfrak{G}(n,m)|\sim(m!)^{-1}n^{2m}2^{-m}\exp(-mn^{-1}-m^2n^{-2}).$$

Доказательство. Действительно,

$$|\mathfrak{G}(n,m)|=\binom{\binom{n}{2}}{m}=\frac{1}{m!}\binom{n}{2}^m\prod_{i=1}^{m-1}\left(1-i/\tbinom{n}{2}\right)$$
$$\sim\frac{n^{2m}}{m!\,2^me^{m/n}}\prod_{i=1}^{m-1}\left(1-i/\tbinom{n}{2}\right).\quad(3.2)$$

В свою очередь, при любом $\alpha\in[1,\ln^2 n]$ и $n\to\infty$ имеем

$$\prod_{i=1}^{m-1}\left(1-i/\tbinom{n}{2}\right)=\exp\left(-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m-1}\left(i/\tbinom{n}{2}\right)^r\right)$$
$$\sim\exp\left(-\sum_{i=1}^{m-1}\left(i/\tbinom{n}{2}\right)\right)\sim\exp(-m^2n^{-2}).\quad(3.3)$$

Из (3.2) и (3.3) следует утверждение леммы 3.2.

Лемма 3.3. *Пусть $\alpha \in [1, \ln n - \ln\ln n]$ и $n \to \infty$. Тогда при любом $s \in [0, k - \sqrt{k \ln k}]$*

$$|\mathfrak{G}(n,m,s)| < |\mathfrak{G}(n,m)| \exp(-(1+o(1))(k-s^2)/(2k)) \tag{3.4}$$

и при любом $s \in [k + \sqrt{k\ln k}, ne^{-\alpha+2}]$

$$|\mathfrak{G}(n,m,s)| < O\left(|\mathfrak{G}(n,m)| \prod_{r=1}^{s-k} \frac{1}{1+r/k}\right). \tag{3.5}$$

Доказательство. Из определения $\mathfrak{G}(n,m,s)$ следует, что при любых допустимых s и x

$$|\mathfrak{G}(n,m,s)| = \binom{n}{n-s} |\mathfrak{G}(n-s,m,0)|, \tag{3.6}$$

$$|\mathfrak{G}(n+x,m,s+x)| = \binom{n+x}{n-s} |\mathfrak{G}(n-s,m,0)| < |\mathfrak{G}(n+x,m)|,$$

т. е.

$$|\mathfrak{G}(n-s,m,0)| < |\mathfrak{G}(n+x,m)| / \binom{n+x}{n-x}. \tag{3.7}$$

Подставляя (3.7) в (3.6), получаем

$$\begin{aligned} |\mathfrak{G}(n,m,s)| &< |\mathfrak{G}(n+x,m)| \binom{n}{n-s} / \binom{n+x}{n-s} \\ &= |\mathfrak{G}(n+x,m)| \prod_{r=0}^{n-s-1} \left(\frac{n-r}{n+x-r}\right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Положим $x = k - s$. Тогда из (3.8) следует, что при любом $s < k$

$$\begin{aligned} |\mathfrak{G}(n,m,s)| &< |\mathfrak{G}(n+k-s,m)| \prod_{r=0}^{k-s-1} \left(\tfrac{k-r}{n+1+r}\right) \\ &< |\mathfrak{G}(n+k-s,m)| n^{s-k} \prod_{r=0}^{k-s-1} (k-r) < (\text{см. } (3.1)) \\ &< |\mathfrak{G}(n+k-s,m)| \exp(-\alpha(k-s)) \prod_{r=1}^{k-s-1} (1-r/k). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Далее, согласно лемме 3.2 имеем

$$\begin{aligned} |\mathfrak{G}(n+k-s,m)| &\sim \tfrac{(n+k-s)^{2m}}{(m!)2^m} \exp\left(-\tfrac{m}{n+k-s} - \tfrac{m^2}{(n+k-s)^2}\right) \\ &< \tfrac{n^{2m}}{(m!)2^m} \exp\left(\alpha(k-s) - \tfrac{m}{n+k-s} - \tfrac{m^2}{(n+k-s)^2}\right), \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\prod_{r=1}^{k-s-1} \left(1 - \tfrac{r}{k}\right) < \exp\left(-\tfrac{(k-s-1)^2}{2k}\right). \tag{3.11}$$

Подставляя (3.10) и (3.11) в (3.9), получаем

$$|\mathfrak{G}(n,m,s)| < \tfrac{n^{2m}}{(m!)2^m} \exp\left(-\tfrac{m}{n+k-s} - \tfrac{m^2}{(n+k-s)^2} - \tfrac{(k-s-1)^2}{2k}\right). \tag{3.12}$$

В свою очередь, если $s \in [0, k - \sqrt{k \ln k}]$ и $n \to \infty$, то

$$\frac{m}{n+k-s} = \frac{m}{n} - \frac{m(k-s)}{n(n+k-s)} = \frac{m}{n} + O\left(\frac{\alpha(k-s)}{n}\right) = \frac{m}{n} + O(1), \tag{3.13}$$

$$\frac{m^2}{(n+k-s)^2} = \frac{m^2}{n^2} + O\left(\frac{m^2(k-s)}{n^3}\right) = \frac{m^2}{n^2} + O(1). \tag{3.14}$$

Из (3.12)–(3.14) следует, что при $s \in [0, k - \sqrt{k \ln k}]$ и $n \to \infty$

$$|\mathfrak{G}(n,m,s)| < \frac{n^{2m}}{(m!)2^m} \exp\left(-mn^{-1} - m^2n^{-2} - (1+o(1))(k-s)^2/(2k)\right)$$
$$< (\text{ см. лемму 3.2}) < |\mathfrak{G}(n,m)| \exp\left(-(1+o(1))(k-s)^2/(2k)\right),$$

т. е. справедливо неравенство (3.4).

Пусть $s \in [k + \sqrt{k \ln k}, ne^{-\alpha+2}]$. Тогда, пользуясь (3.8), получаем

$$\begin{aligned} |\mathfrak{G}(n,m,s)| &< |\mathfrak{G}(n+k-s,m)| \prod_{r=0}^{n-s-1} \frac{n-r}{n+k-s-r} \\ &< |\mathfrak{G}(n+k-s,m)| n^{s-k} \prod_{r=1}^{s-k} \frac{1}{k+r} \\ &= |\mathfrak{G}(n+k-s,m)| (n/k)^{s-k} \prod_{r=1}^{s-k} \frac{1}{1+r/k}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Далее, из (3.1) и леммы 3.1 следует, что $k = ne^{-\alpha} + \gamma$, где $|\gamma| < 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{k}\right)^{s-k} &= \left(\frac{n}{ne^{-\alpha}+\gamma}\right)^{s-k} = \frac{e^{\alpha(s-k)}}{(1+\gamma e^{\alpha} n^{-1})^{s-k}} \\ &= (\text{так как } s \leqslant n^{-\alpha+2}) = O(e^{\alpha(s-k)}). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Наконец, пользуясь леммой 3.2, имеем

$$\begin{aligned} |\mathfrak{G}(n+k-s,m)| &\sim \frac{(n+k-s)^{2m}}{(m!)2^m} \exp\left(-\frac{m}{n+k-s} - \frac{m^2}{(n+k-s)^2}\right) \\ &< \frac{(n+k-s)^{2m}}{(m!)2^m} \exp\left(-\frac{m}{n} - \frac{m^2}{n^2}\right) \\ &\sim \frac{n^{2m}}{(m!)2^m} \exp\left(-\alpha(s-k) - \frac{m}{n} - \frac{m^2}{n^2}\right). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Подставляя (3.16) и (3.17) в (3.15), получаем

$$|\mathfrak{G}(n,m,s)| = O\left((m!)^{-1}2^{-m}n^{2m} \exp(-mn^{-1} - m^2n^{-2}) \prod_{r=1}^{s-k}(1+r/k)^{-1}\right)$$
$$= (\text{см. лемму 3.2}) = O\left(|\mathfrak{G}(n,m)| \prod_{r=1}^{s-k}(1+r/k)^{-1}\right),$$

т. е. справедливо (3.5). Тем самым лемма 3.3 полностью доказана.

Пусть при $s < k$

$$T_1(n,m,s) = \sum_{v=0}^{s} |\mathfrak{G}(n,m,v)|, \tag{3.18}$$

а при $s > k$

$$T_2(n,m,s) = \sum_{v\geqslant s}^{s} |\mathfrak{G}(n,m,v)|. \tag{3.19}$$

Лемма 3.4. *Пусть $\alpha \in [1, \ln n - \ln\ln n]$ и $n \to \infty$. Тогда при любом $s \in [0, k - 4\sqrt{k \ln k}]$*

$$T_1(n,m,s) = o(|\mathfrak{G}(n,m)|k^{-3}) \tag{3.20}$$

и при любом $s > k + 4\sqrt{k\ln k}$

$$T_2(n,m,s) = o(|\mathfrak{G}(n,m)|k^{-3}). \tag{3.21}$$

Доказательство. Пользуясь (3.4) и (3.18), при $n \to \infty$ получаем

$$\begin{aligned} T_1(n,m,s) &< |\mathfrak{G}(n,m)| \sum_{v=0}^{s} \exp\left(-(1+o(1))(k-v)^2/(2k)\right) \\ &< |\mathfrak{G}(n,m)| \sum_{v=0}^{s} \exp\left(-(k-v)^2/(3k)\right) \\ &< s|\mathfrak{G}(n,m)| \exp\left(-(k-s)^2/(3k)\right) \\ &< (\text{ибо } s \leqslant k - 4\sqrt{k\ln k}) \\ &< s|\mathfrak{G}(n,m)|k^{-16/3} = o(|\mathfrak{G}(n,m)|k^{-3}), \end{aligned}$$

т. е. имеет место (3.20).

Убедимся в справедливости (3.21). Ясно, что

$$T_2(n,m,s) \leqslant \sum_{v\geqslant k+4(k\ln k)^{1/2}} |\mathfrak{G}(n,m,v)|. \tag{3.22}$$

Далее, пользуясь (3.5), имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{v=\lfloor k+4(k\ln k)^{1/2}\rfloor}^{\lfloor ne^{-\alpha+2}\rfloor} |\mathfrak{G}(n,m,v)| \\ &= O\left(|\mathfrak{G}(n,m)| \sum_{v=\lfloor k+4(k\ln k)^{1/2}\rfloor}^{\lfloor ne^{-\alpha+2}\rfloor} \prod_{r=1}^{v-k} \frac{1}{1+r/k}\right) \\ &= O\left(ne^{-\alpha}|\mathfrak{G}(n,m)| \prod_{r=1}^{4(k\ln k)^{1/2}} \frac{1}{1+r/k}\right) \\ &= O(ne^{-\alpha}|\mathfrak{G}(n,m)| \exp(-8\ln k)) = o(|\mathfrak{G}(n,m)|k^{-3}). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{v>ne^{-\alpha+2}} |\mathfrak{G}(n,m,v)| < \binom{n}{\lfloor ne^{-\alpha+2}\rfloor} \binom{\binom{n-\lfloor ne^{-\alpha+2}\rfloor}{2}}{m}. \tag{3.24}$$

В свою очередь, если $\lfloor ne^{-\alpha+2}\rfloor > n$, то правая часть из (3.24) равна нулю, в противном случае

$$\binom{n}{\lfloor ne^{-\alpha+2}\rfloor} < \frac{n^{\lfloor ne^{-\alpha+2}\rfloor}}{\lfloor ne^{-\alpha+2}\rfloor!} < (\text{ибо } \lfloor ne^{-\alpha+2}\rfloor! > (\lfloor ne^{-\alpha+1}\rfloor)^{\lfloor ne^{-\alpha+2}\rfloor}) \\ < \exp\left((\alpha-1)\lfloor ne^{-\alpha+2}\rfloor\right), \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} \binom{\binom{n-\lfloor ne^{-\alpha+2}\rfloor}{2}}{m} &= \frac{1}{m!}\binom{n-\lfloor ne^{-\alpha+2}\rfloor}{2}^m \prod_{i=1}^{m-1}\left(1-i/\binom{n-\lfloor ne^{-\alpha+2}\rfloor}{2}\right) \\ &< \frac{1}{m!}(n-\lfloor ne^{-\alpha+2}\rfloor)^{2m}2^{-m}e^{-m/n}\prod_{i=1}^{m-1}\left(1-i/\binom{n}{2}\right) \\ &< \frac{n^{2m}}{(m!)2^m}\exp\left(-\alpha\lfloor ne^{-\alpha+2}\rfloor - mn^{-1} - m^2n^{-2}\right). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Подставляя (3.25) и (3.26) в (3.24), при $n \to \infty$ получаем

$$\sum_{v>ne^{-\alpha+2}} |\mathfrak{G}(n,m,v)| < \frac{n^{2m}}{(m!)2^m}\exp\left(-\lfloor ne^{-\alpha+2}\rfloor - mn^{-1} - m^2n^{-2}\right) \\ \sim (\text{см. лемму 3.2}) \sim 2|\mathfrak{G}(n,m)|\exp\left(-\lfloor ne^{-\alpha+2}\rfloor\right) = o(|\mathfrak{G}(n,m)|k^{-3}). \tag{3.27}$$

Из (3.22), (3.23) и (3.27) следует (3.21). Лемма 3.4 доказана.

§ 4. Гладкость распределения вблизи математического ожидания числа изолированных вершин

Как видно из леммы 3.4 число графов из $\mathfrak{G}(n,m)$, в каждом из которых количество изолированных вершин существенно отличается от математического ожидания числа таких вершин, равно $o(|\mathfrak{G}(n,m)|k^{-3})$. Теперь займемся рассмотрением остальных графов. С этой целью вместо множества $\mathfrak{G}(n,m)$ будем рассматривать множество графов $\overline{\mathfrak{G}}(n,m)$, в каждом из которых все ребра пронумерованы числами от 1 до m. Два графа $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$ из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m)$ считаются одинаковыми только в следующем случае: если две вершины в $\overline{G}_1$ соединены ребром с меткой i, то такие вершины в $\overline{G}_2$ также соединены ребром с меткой i. Очевидно, из каждого графа множества $\mathfrak{G}(n,m)$ получается $m!$ графов из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m)$, а различным графам из $\mathfrak{G}(n,m)$ соответствуют различные графы из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m)$. Поэтому

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)| = |\mathfrak{G}(n,m)|\,m!, \quad |\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| = |\mathfrak{G}(n,m,s)|\,m!,$$

где $\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)$ есть совокупность всех графов из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m)$, содержащих s изолированных вершин каждый. Следовательно,

$$|\mathfrak{G}(n,m,s)|/|\mathfrak{G}(n,m)| = |\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)|/|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|. \tag{4.1}$$

При различных s_1 и s_2, близких к величине из (1.3), мы устанавливаем следующие зависимости между мощностями множеств $\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s_1)$ и $\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s_2)$.

Лемма 4.1. *Пусть* $\alpha \in [(2/3)\ln n, \ln n - \ln\ln n]$, а s_1, s_2 *таковы, что*

$$s_1, s_2 \in [k - (k\ln^{-4}k)^{1/6}, k + (k\ln^{-4}k)^{1/6}]. \tag{4.2}$$

Тогда при $n \to \infty$

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s_1)| \sim |\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s_2)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}). \tag{4.3}$$

Лемма 4.2. *Пусть* $\alpha \in [1, (2/3)\ln n]$, а s_1, s_2 *таковы, что*

$$s_1, s_2 \in [k - k^{1/4}\ln^2 n,\ k + k^{1/4}\ln^2 n]. \tag{4.4}$$

Тогда при $n \to \infty$

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s_1)| = |\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s_2)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}). \tag{4.5}$$

Сначала сведем утверждения лемм 4.1 и 4.2 к более специальным утверждениям (леммы 4.3 и 4.4). С этой целью опишем следующий способ получения графов из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)$. Представим m в виде $m = m_1 + m_2$, где

$$m_2 = \lfloor (n^2 e^{\alpha})^{1/3} \rfloor, \text{ если } \alpha \in [(2/3)\ln n, \ln n - \ln\ln n], \tag{4.6}$$

$$m_2 = \lfloor (n^{3/4} e^{\alpha/6}) \ln^{-4} n \rfloor, \text{ если } \alpha \in [1, (2/3)\ln n], \tag{4.7}$$

и положим

$$\alpha_1 = \alpha - 2m_2 n^{-1}. \tag{4.8}$$

Все графы из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)$ можно получить следующим способом. Сначала берется n изолированных вершин, помеченных символами $v_1, \dots, v_n$, и m_1 первых ребер. Эти ребра размещаются так, чтобы получился граф из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1)$, т. е. граф без петель и параллельных ребер (такие размещения назовем *допустимыми*). Число графов из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1)$, в каждом из которых содержится r изолированных вершин, равно $|\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1,r)|$. Остальные ребра размещаются так, чтобы получился граф из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)$.

Ясно, что граф $\overline{G} \in \overline{\mathfrak{G}}(n,m_1,r)$ может перейти в граф из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)$ после допустимого размещения m_2 ребер только тогда, когда $s \leqslant r \leqslant s+2m_2$. Кроме того очевидно, что при каждом фиксированном r из любого графа $\overline{G} \in \overline{\mathfrak{G}}(n,m_1,r)$ при допустимом размещении m_2 ребер получается одно и то же число графов из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)$. Поэтому в качестве $\overline{G}$ из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1,r)$ мы будем использовать граф $\overline{G}_0$, в котором вершины из $V_1 = \{v_1, \dots, v_r\}$ являются изолированными. Множество графов из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)$, получающихся из $\overline{G}_0$ путем допустимого размещения m_2 ребер, обозначим через $\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1,r,m_2,s)$.

Из сказанного следует, что

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| = \sum_{r=s}^{s+2m_2} |\overline{\mathfrak{G}}(n,m_{1,r})| \cdot |\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1,r,m_2,s)|. \tag{4.9}$$

Пусть $k_1 = n\binom{\binom{n-1}{2}}{m_1}/\binom{\binom{n}{2}}{m_1}$, т. е. k_1 равно математическому ожиданию числа изолированных вершин в случайном графе из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1)$. Пользуясь леммой 3.1, имеем

$$k_1 \sim ne^{-2m_1/n} = ne^{-2(m-m_2)/n} \sim (\text{ибо } m_2 = o(n)) \sim ne^{-\alpha} \sim k. \tag{4.10}$$

Значит, при любом $\alpha \in [1, \ln n - \ln\ln n]$

$$\sum_{r=s}^{k_1-4(k\ln k)^{1/2}} |\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1,r)| \cdot |\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1,r,m_2,s)|$$
$$+ \sum_{r\geqslant k_1+4(k\ln k)^{1/2}} |\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1,r)| \cdot |\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1,r,m_2,s)|$$
$$< \frac{1}{m_2!}\binom{\binom{n}{2}-m_1}{m_2}\Biggl(\sum_{r=s}^{k_1-4(k\ln k)^{1/2}} |\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1,r)|$$
$$+ \sum_{r\geqslant k_1+4(k\ln k)^{1/2}} |\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1,r)|\Biggr) = (\text{см. лемму 3.4 и (4.1)})$$
$$= o\biggl(\frac{1}{m_2!}\binom{\binom{n}{2}-m_1}{m_2}|\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1)|k^{-3}\biggr) = o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-3}). \tag{4.11}$$

Из (4.6), (4.9) и (4.11) получаем

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| = \sum_{|r-k_1|\leqslant 4(k\ln k)^{1/2}} |\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1,r)||\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1,r,m_2,s)|$$
$$+ o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-3}).$$

Поэтому справедливость (4.3) вытекает из следующего утверждения.

Лемма 4.3. *Пусть* $\alpha \in [(2/3)\ln n, \ln n - \ln\ln n]$, r *таково, что*

$$|r - k_1| \leqslant 4(k\ln k)^{1/2}, \tag{4.12}$$

а s_1, s_2 *взяты из* (4.2). *Тогда при* $n \to \infty$

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1,r,m_2,s_1)| \sim |\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1,r,m_2,s_2)| + o((n^2/2)^{m_2}k^{-1}).$$

Ниже будет показано (лемма 7.4), что в случае $\alpha \in [1,(2/3)\ln n]$ вместо (4.12) можно использовать более сильное неравенство

$$|r - k_1| \leqslant n^{1/2}e^{-(2/3)\alpha}(\ln n)^{-6,5}, \tag{4.13}$$

а (4.5) вытекает из следующего утверждения.

Лемма 4.4. *Пусть* $\alpha \in [1,(2/3)\ln n]$, r *удовлетворяет* (4.13), *а* s_1, s_2 *взяты из* (4.4). *Тогда при* $n \to \infty$

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1,r,m_2,s_1)| \sim |\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1,r,m_2,s_2)| + o((n^2/2)^{m_2}k^{-1}).$$

§ 5. Вспомогательные утверждения, используемые при доказательстве леммы 4.3

Лемма 5.1. *Пусть* $\alpha \in [(2/3)\ln n, \ln n - \ln\ln n]$, r *удовлетворяет* (4.12), *а* s *принадлежит интервалу из* (4.2). *Тогда при* $n \to \infty$

$$r - s = 2m_2 e^{-\alpha} + O((k\ln k)^{1/2}) \sim 2m_2 e^{-\alpha}.$$

Доказательство. При рассматриваемых α, r и s

$$r - s = k_1 + O(\sqrt{k\ln k}) - k = (\text{см. лемму 3.1 и (4.10)}) = ne^{-2m_1/n} - ne^{-\alpha} + O(\sqrt{k\ln k}).$$

Поскольку $e^{-2m_1/n} = e^{-\alpha+2m_2/n} = e^{-\alpha}(1 + 2m_2 n^{-1} + O(m^2 n^{-2}))$, имеем

$$r - s = 2m_2 e^{-\alpha} + O(m_2^2 n^{-1} e^{-\alpha}) + O((k\ln k)^{1/2}) = \ (\text{см. (4.6)}) = 2m_2 e^{-\alpha} + O((k\ln k)^{1/2}) \sim 2m_2 e^{-\alpha}.$$

Лемма 5.1 доказана.

Обозначим через $\overline{\mathfrak{G}}_1(n, m_1, r, m_2, s)$ совокупность графов $\overline{G}$ из $\overline{\mathfrak{G}}(n, m_1, r, m_2, s)$ таких, что в подграфе графа $\overline{G}$ с множеством вершин V_1 имеется не менее трех ребер.

Лемма 5.2. *Пусть* $\alpha \in [(2/3)\ln n, \ln n - \ln\ln n]$, r *удовлетворяет* (4.12), *а* s *принадлежит интервалу из* (4.2). *Тогда при* $n \to \infty$

$$|\overline{\mathfrak{G}}_1(n, m_1, r, m_2, s)| = o((n^2/2)^{m_2} k^{-3}).$$

Доказательство. Все графы из $\overline{\mathfrak{G}}_1(n, m_1, r, m_2, s)$ могут быть получены следующим способом.

1. Берется граф $\overline{G}_0$ и среди m_2 ребер отбираются три ребра. Имеется $\binom{m_2}{3} < \frac{m_2^3}{6}$ возможностей.

2. Отобранные ребра допустимым способом размещаются в $\overline{G}_0$ так, чтобы каждое такое ребро соединяло вершины из V_1. Имеется менее $\binom{r}{2}^3 < \frac{r^6}{8}$ возможностей.

3. Остальные ребра допустимым способом размещаются в имеющемся графе. Число возможностей меньше $\binom{n}{2}^{m_2-3} < \left(\frac{n^2}{2}\right)^{m_2-3}$.

Следовательно, при $n \to \infty$

$$|\overline{\mathfrak{G}}_1(n, m_1, r, m_2, s)| < (1/6) m_2^3 r^6 n^{-6} < (\text{см. (4.10) и лемму 3.1}) < m_2^3 e^{-6\alpha}(n^2/2)^{m_2} < (\text{см. (4.6)}) < n^2 e^{-5\alpha}(n^2/2)^{m_2} = (\text{ибо } \alpha \geqslant (2/3)\ln n) = o((n^2/2)^{m_2} n^{-1}) = o((n^2/2)^{m_2} k^{-3}).$$

Лемма 5.2 доказана.

Обозначим через $\overline{\mathfrak{G}}_2(n, m_1, r, m_2, s)$ совокупность графов $\overline{G}$ из $\overline{\mathfrak{G}}(n, m_1, r, m_2, s)$ таких, что в $\overline{G}$ среди вершин из V_1 имеется вершина степени не менее 7.

Лемма 5.3. *Пусть* $\alpha \in [(2/3)\ln n, \ln n - \ln\ln n]$, r *удовлетворяет* (4.12), *а* s *принадлежит интервалу из* (4.2). *Тогда при* $n \to \infty$

$$|\overline{\mathfrak{G}}_2(n, m_1, r, m_2, s)| = o((n^2/2)^{m_2} k^{-1}).$$

Доказательство. Все графы из $\overline{\mathfrak{G}}_2(n, m_1, r, m_2, s)$ могут быть получены следующим способом.

1. Берется граф $\overline{G}_0$ и среди m_2 ребер отбираются семь ребер. Имеется $\binom{m_2}{7} < \frac{m_2^7}{7!}$ возможностей.

2. Отобранные ребра допустимым способом размещаются в $\overline{G}_0$ так, чтобы каждое такое ребро соединяло одну и ту же вершину из V_1 с произвольными вершинами из V. Имеется менее rn^7 возможностей.

3. Остальные ребра допустимым способом размещаются в имеющемся графе. Число возможностей меньше величины $\binom{n}{2}^{m_2-7} < \left(\frac{n^2}{2}\right)^{m_2-7}$.

Следовательно, при $n \to \infty$ имеем

$$|\overline{\mathfrak{G}}_2(n, m_1, r, m_2, s)| < (1/30) r m_2^7 n^{-7} (n^2/2)^{m_2} < m_2^7 n^{-6} e^{-\alpha} (n^2/2)^{m_2}$$
$$\leqslant (\text{см. (4.6)}) \leqslant (e^{\alpha} n^{-1})^{4/3} (n^2/2)^{m_2} = o((n^2/2)^{m_2} k^{-1}).$$

Лемма 5.3 доказана.

Пусть $\overline{\mathfrak{G}}_3(n, m_1, r, m_2, s)$ — совокупность графов $\overline{G}$ из $\overline{\mathfrak{G}}(n, m_1, r, m_2, s)$ таких, что в $\overline{G}$ среди вершин V_1 имеется более

$$u = \lfloor 4e m_2^2 r n^{-2} \rfloor + 1 \tag{5.1}$$

попарно несмежных вершин, каждая из которых смежна не менее чем с двумя вершинами графа $\overline{G}$.

Лемма 5.4. *Пусть* $\alpha \in [(2/3)\ln n, \ln n - \ln\ln n]$, r *удовлетворяет* (4.12), *а* s *принадлежит интервалу из* (4.2). *Тогда при* $n \to \infty$

$$|\overline{\mathfrak{G}}_3(n, m_1, r, m_2, s)| = o((n^2/2)^{m_2} k^{-3}).$$

Доказательство. Все графы из $\overline{\mathfrak{G}}_3(n, m_1, r, m_2, s)$ могут быть получены следующим способом.

1. Берется граф $\overline{G}_0$ и в V_1 отмечаются u вершин. Имеется $\binom{r}{u} < \frac{r^u}{u!} < \left(\frac{er}{u}\right)^u$ возможностей.

2. Среди m_2 ребер отбираются $2u$ ребер. Имеется $\binom{m_2}{2u} < \frac{m_2^{2u}}{(2u)!}$ возможностей.

3. Отобранные ребра допустимым способом размещаются в $\overline{G}_0$ так, чтобы каждая отмеченная вершина оказалась смежной с двумя неотмеченными вершинами. Имеется менее $(2u)! n^{2u} 2^{-u}$ возможностей.

4. Остальные ребра размещаются произвольным допустимым способом. Имеется менее $\binom{n}{2}^{m_2-2u} < \left(\frac{n^2}{2}\right)^{m_2-2u}$ возможностей.

Следовательно, при $n \to \infty$

$$|\overline{\mathfrak{G}}_3(n, m_1, r, m_2, s)| < (2erm_2^2 n^{-1} u^{-1})^u (n^2/2)^{m_2} \leqslant (\text{см. (5.1)})$$
$$\leqslant 2^u (n^2/2)^{m_2} = (\text{ибо } u \sim 4e m_2^2 r n^{-2} \sim 4e m_2^2 n^{-1} e^{-\alpha} \sim (\text{см. (4.6)})$$
$$\sim 4e(ne^{-\alpha})^{1/3} \sim 4ek^{1/3}) = o((n^2/2)^{m_2} k^{-3}).$$

Лемма 5.4 доказана.

§ 6. Доказательство леммы 4.3

Пусть $\overline{\mathfrak{G}}_4(n,m_1,r,m_2,s) = \overline{\mathfrak{G}}(n,m_1,r,m_2,s) \setminus \bigcup_{i=1}^3 \overline{\mathfrak{G}}_i(n,m_1,r,m_2,s)$, где множества $\overline{\mathfrak{G}}_i(n,m_1,r,m_2,s)$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, определены в предыдущем параграфе. Тогда из лемм 5.2–5.4 следует, что для доказательства леммы 4.3 достаточно показать, что если r удовлетворяет (4.12), s принадлежит интервалу из (4.2), то при любом $h \in [0,(k\ln^{-4}k)^{1/6}]$ и $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$|\overline{\mathfrak{G}}_4(n,m_1,r,m_2,s)|/|\overline{\mathfrak{G}}_4(n,m_1,r,m_2,s+h)| \sim 1. \tag{6.1}$$

С этой целью множества $\overline{\mathfrak{G}}_4(n,m_1,r,m_2,s)$ и $\overline{\mathfrak{G}}_4(n,m_1,r,m_2,s+h)$ разобьем на следующие подмножества. Пусть $\overline{G}$ — произвольный граф из $\overline{\mathfrak{G}}_4(n,m_1,r,m_2,s)$ (или $\overline{\mathfrak{G}}_4(n,m_1,r,m_2,s+h)$). Тогда граф $\overline{G}^1$ назовем *остаточным* для $\overline{G}$, если $\overline{G}^1$ получается из $\overline{G}$ путем удаления всех ребер, соединяющих вершины степени 1 из $V \setminus V_1$, и всех ребер, соединяющих вершины степени 1 из V_1 с вершинами из $V \setminus V_1$. Два графа из $\overline{\mathfrak{G}}_4(n,m_1,r,m_2,s)$ (или $\overline{\mathfrak{G}}_4(n,m_1,r,m_2,s+h)$) включаются в одно подмножество тогда и только тогда, когда их остаточные графы идентичны.

Будем считать, что все подмножества, на которые распадается множество $\overline{\mathfrak{G}}_4(n,m_1,r,m_2,s)$ (или $\overline{\mathfrak{G}}_4(n,m_1,r,m_2,s+h)$), перенумерованы, а i-е подмножество обозначено через $\overline{\mathfrak{G}}_{4,i}(n,m_1,r,m_2,s)$ (или $\overline{\mathfrak{G}}_{4,i}(n,m_1,r,m_2,s+h)$), $i=1,2,\dots$. Из определения множеств $\overline{\mathfrak{G}}_j(n,m_1,r,m_2,s)$, $1 \leqslant j \leqslant 4$, следует, что в любом остаточном графе имеется не более

$$\begin{aligned}2+6u \leqslant (\text{см. (5.1)}) \leqslant 3+24em_2^2rn^{-2} \sim 24em_2^2e^{-\alpha}n^{-1}\\ = o(m_2e^{-\alpha}) = (\text{см. лемму 5.1}) = o(r-s)\end{aligned}$$

ребер и не более $4+u=o(r-s)$ неизолированных вершин из V_1. Следовательно, совокупность остаточных графов для графов из $\overline{\mathfrak{G}}_4(n,m_1,r,m_2,s)$ совпадает с совокупностью остаточных графов для графов из $\overline{\mathfrak{G}}_4(n,m_1,r,m_2,s)$. Поэтому можно считать, что предложенные нумерации являются согласованными, т. е. остаточный граф для графов из $\overline{\mathfrak{G}}_{4,i}(n,m_1,r,m_2,s)$ идентичен остаточному графу для графов из $\overline{\mathfrak{G}}_{4,i}(n,m_1,r,m_2,s+h)$. Ясно, что справедливость (6.1) вытекает из следующего утверждения: при любом допустимом i, рассматриваемых r, s, h и $n \to \infty$

$$|\overline{\mathfrak{G}}_{4,i}(n,m_1,r,m_2,s)|/|\overline{\mathfrak{G}}_{4,i}(n,m_1,r,m_2,s+h)| \sim 1. \tag{6.2}$$

Убедимся в истинности (6.2). Обозначим через v и t соответственно число неизолированных вершин и число ребер в остаточном графе для графов из $\overline{\mathfrak{G}}_{4,i}(n,m_1,r,m_2,s)$. Из определения разбиения множества $\overline{\mathfrak{G}}_4(n,m_1,r,m_2,s)$ (и множества $\overline{\mathfrak{G}}_4(n,m_1,r,m_2,s+h)$) на подмножества следует, что среди вершин из V_1 в каждом графе из этого класса содержится $r-s-v$ вершин степени 1, смежных с вершинами из $V \setminus V_1$, и $m-t-r+s+v$ ребер, соединяющих вершины из $V \setminus V_1$. Следовательно, все графы из $\overline{\mathfrak{G}}_{4,i}(n,m_1,r,m_2,s)$ (и только они) могут быть однозначно получены следующим способом.

1. Берется граф, являющийся объединением графа $\overline{G}_0$ и остаточного графа для графов из $\overline{\mathfrak{G}}_{4,i}(n, m_1, r, m_2, s)$, а среди $m_2 - t$ ребер отбираются $r - s - v$ ребер. Имеется $\binom{m_2-t}{r-s-v} = \frac{(m_2-t)!}{(r-s-v)!\,(m_2-t-r+s+v)!}$ возможностей.

2. Среди изолированных вершин в имеющемся графе отмечаются $r - s - v$ вершин. Имеется $\binom{r-v}{r-s-v} = \frac{(r-v)!}{(r-s-v)!\,s!}$ возможностей.

3. Отобранные ребра размещаются в имеющемся графе так, чтобы каждая отмеченная вершина оказалась смежной с одной вершиной из $V \setminus V_1$. Имеется $(r-s-v)!\,(n-r)^{r-s-v}$ возможностей.

4. Остальные ребра допустимым способом размещаются так, чтобы каждое такое ребро соединяло вершины из $V \setminus V_1$. Число возможностей равно величине

$$\binom{\binom{n-r}{2} - m_1}{m_2 - t - r + s + v}(m_2 - t - r + s + v)! = \prod_{j=0}^{m_2-t-r+s+v-1}\left(\binom{n-r}{2} - m_1 - j\right).$$

Следовательно,

$$|\overline{\mathfrak{G}}_{4,i}(n, m_1, r, m_2, s)| = \frac{(m_2-t)!\,(r-v)!\,(n-r)^{r-s-v}}{(m_2-t-r+s+v)!\,(r-s-v)!\,s!} \times \prod_{j=0}^{m_2-t-r+s+v-1}\left(\binom{n-r}{2} - m_1 - j\right). \quad (6.3)$$

Заменяя s на $s + h$, аналогично получаем

$$|\overline{\mathfrak{G}}_{4,i}(n, m_1, r, m_2, s+h)| = \frac{(m_2-t)!\,(r-v)!\,(n-r)^{r-s-h-v}}{(m_2-t-r+s+h+v)!\,(r-s-h-v)!\,(s+h)!} \times \prod_{j=0}^{m_2-t-r+s+h+v-1}\left(\binom{n-r}{2} - m_1 - j\right). \quad (6.4)$$

Пользуясь (6.3) и (6.4), имеем

$$|\overline{\mathfrak{G}}_{4,i}(n, m_1, r, m_2, s)|/|\overline{\mathfrak{G}}_{4,i}(n, m_1, r, m_2, s+h)| = \frac{(n-r)^h(m_2-t-r+s+h+v)!\,(r-s-h-v)!\,(s+h)!}{(m_2-t-r+s+v)!\,(r-s-v)!\,s!} \times \prod_{j=0}^{h-1}\left(\binom{n-r}{2} - m + t + r - s - v - j\right)^{-1}. \quad (6.5)$$

В свою очередь, поскольку

$$s \sim (\text{см. лемму 3.1}) \sim ne^{-\alpha}, r - s \sim (\text{см. лемму 5.1}) \sim 2m_2e^{-\alpha},$$

$v \leqslant 3 + 4em_2^2rn^{-2}$, $t \leqslant 6v$ и $h \leqslant (k\ln^{-4}k)^{1/6}$ имеем

$$\frac{(s+h)!}{s!} \sim (ne^{-\alpha})^h \sim ((n-r)e^{-\alpha})^h, \quad (6.6)$$

$$\frac{(r-s-v)!}{(r-s-h-v)!} = (r-s-v)^h\prod_{j=0}^{h-1}\left(1 - \frac{j}{r-s-v}\right) \sim (r-s-v)^h \sim (r-s)^h$$

$$= (\text{см. лемму 5.1 и (4.10)}) = 2m_2e^{-\alpha} + O(\sqrt{k\ln k}))^h \sim (2m_2e^{-\alpha})^h, \quad (6.7)$$

$$\frac{(m_2-t-r+s+h+v)!}{(m_2-t-r+s+v)!} \sim (m_2-t-r+s+v)^h \sim m_2^h, \tag{6.8}$$

$$\prod_{j=0}^{h-1}\left(\binom{n-r}{2}-m+t+r-s-v-j\right) \sim \binom{n-r}{2}^h \sim (n-r)^{2h}2^{-h}. \tag{6.9}$$

Подставляя (6.6)–(6.9) в (6.5), получаем (6.2). Лемма 4.3 доказана.

§ 7. Доказательство условия (4.13) и вспомогательные утверждения для леммы 4.4

Обозначим через $\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1,r,m_2)$ множество всех тех графов из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m)$, которые получаются путем произвольного допустимого размещения m_2 ребер в графе $\overline{G}_0$. Пусть $\overline{G}$ — произвольный граф из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m_1,r,m_2)$ и $\overline{G}^1$ — подграф графа $\overline{G}$ с множеством вершин V_1. Вершину $v_i \in V_1$ назовем *особой* в $\overline{G}$, если v_i принадлежит компоненте связности графа $\overline{G}^1$, содержащей не менее трех вершин.

Обозначим через $\overline{\mathfrak{G}}^1(n,m_1,r,m_2)$ совокупность графов $\overline{G}$ из $\overline{\mathfrak{G}}(n,\ m_1,\ r,\ m_2)$ таких, что в $\overline{G}$ имеется более

$$w_0 = \lfloor r^3m_2^2n^{-4}\ln n + 2\ln n\rfloor \sim m_2^2e^{-3\alpha}n^{-1}\ln n + 2\ln n \tag{7.1}$$

особых вершин.

Лемма 7.1. *Пусть* $\alpha \in [1,(2/3)\ln n]$ *и* r *удовлетворяет* (4.12). *Тогда при* $n\to\infty$

$$|\overline{\mathfrak{G}}^1(n,m_1,r,m_2)| = o((n^2/2)^{m_2}n^{-2}).$$

Доказательство. Обозначим через $\overline{\mathfrak{G}}^1(n,m_1,r,m_2,w,z)$ совокупность графов $\overline{G}\in\overline{\mathfrak{G}}^1(n,m_1,r,m_2)$ таких, что в $\overline{G}$ имеется w особых вершин и z ребер, соединяющих эти вершины. Все графы из $\overline{\mathfrak{G}}^1(n,m_1,r,m_2,w,z)$ могут быть получены следующим способом.

1. Берется граф $\overline{G}_0$ и w вершин в V_1 объявляются особыми. Имеется $\binom{r}{w} < \frac{r^w}{w!}$ возможностей.

2. Среди m_2 ребер отбираются z ребер. Имеется $\binom{m_2}{z} < \frac{m_2^z}{z!}$ возможностей.

3. Отобранные ребра допустимым способом размещаются в $\overline{G}_0$ так, чтобы каждое такое ребро соединяло особые вершины. Имеется $\binom{\binom{w}{2}}{z}z! < w^{2z}2^{-z}$ возможностей.

4. Остальные ребра произвольным допустимым способом размещаются в имеющемся графе. Имеется менее $(n^2/2)^{m_2-z}$ возможностей.

Следовательно,

$$|\overline{\mathfrak{G}}^1(n,m_1,r,m_2,w,z)| < r^w(n^2/2)^{m_2}(w!)^{-1}f(z), \tag{7.2}$$

где

$$f(z) = (m_2w^2n^{-2})^z\frac{1}{z!}. \tag{7.3}$$

Ясно, что если w-вершинный граф распадается на компоненты связности, содержащие не менее трех вершин каждая, то минимальное число ребер в таком графе не меньше $\lceil (2/3)w \rceil$. Поэтому $z \geqslant \lceil (2/3)w \rceil$. В свою очередь, при таком z и $w \geqslant w_0$, где w_0 взято из (7.1), имеем

$$f(z+1)/f(z) = m_2 w^2/(n^2(z+1)) < 2m_2 w n^{-2} < 2m_2 r n^{-2} = o(1).$$

Пользуясь (7.2) и (7.3), получаем

$$\sum_{z \geqslant \lceil (2/3)w \rceil} |\overline{\mathfrak{G}}^1(n, m_1, r, m_2, w, z)| < 2r^w (n^2/2)^{m_2} (w!)^{-1} f(\lceil (2/3)w \rceil).$$

Отсюда и из неравенства

$$|\overline{\mathfrak{G}}^1(n, m_1, r, m_2)| \leqslant \sum_{w \geqslant w_0} \sum_{z \geqslant \lceil (2/3)w \rceil} |\overline{\mathfrak{G}}^1(n, m_1, r, m_2, w, z)|$$

при $n \to \infty$ получаем

$$|\overline{\mathfrak{G}}^1(n, m_1, r, m_2)| \leqslant 2(n^2/2)^{m_2} \sum_{w \geqslant w_0} r^w (w!)^{-1} f(\lceil (2/3)w \rceil) = (\text{см. } (7.3))$$

$$= 2(n^2/2)^{m_2} \sum_{w \geqslant w_0} r^w (w!)^{-1} (m_2 w^2 n^{-2})^{\lceil (2/3)w \rceil} (\lceil (2/3)w \rceil !)^{-1}$$

$$< (\text{ибо } (w!)^{-1} < (e/w)^w,$$

$$(\lceil (2/3)w \rceil !)^{-1} < (3e/(2w))^{\lceil (2/3)w \rceil})$$

$$< 2(n^2/2)^{m_2} (er/w)^w (3em_2 w/(2n^2))^{(2/3)w}$$

$$< (\text{заменяем } w \text{ на } w_0 \text{ из } (7.1))$$

$$< 2(n^2/2)^{m_2} (en^4/(r^2 m_2^2 \ln n))^w ((3/2) e r^3 m_2^3 n^{-6} \ln n)^{(2/3)w}$$

$$= 2(n^2/2)^{m_2} (9e^5/(4 \ln n))^{w/3} = o((n^2/2)^{m_2} n^{-2}).$$

Лемма 7.1 доказана.

Обозначим через $\overline{\mathfrak{G}}^2(n, m_1, r, m_2)$ совокупность графов $\overline{G}$ из $\overline{\mathfrak{G}}(n, m_1, r, m_2)$ таких, что в $\overline{G}$ среди вершин из V_1 имеется по крайней мере одна вершина степени не менее 8.

Лемма 7.2. *Пусть* $\alpha \in [1, (2/3)\ln n]$ *и* r *удовлетворяет* (4.12). *Тогда при* $n \to \infty$

$$|\overline{\mathfrak{G}}^2(n, m_1, r, m_2)| = o((n^2/2)^{m_2} n^{-1}).$$

Доказательство этой леммы фактически совпадает с доказательством леммы 5.3, отличие состоит лишь в том, что вместо нижней оценки для степеней вершин из V_1, равной семи, надо использовать аналогичную оценку, равную восьми, а вместо (4.6) — формулу (4.7).

Пусть $\overline{\mathfrak{G}}^3(n, m_1, r, m_2)$ — совокупность графов $\overline{G}$ из множества $\overline{\mathfrak{G}}(n, m_1, r, m_2)$ таких, что в $\overline{G}$ среди вершин из V_1 имеется более

$$u_0 = \lceil 4em_2^2 r n^{-2} + 3\log_2 n \rceil \sim 4em_2^2 e^{-\alpha} n^{-1} + 3\log_2 n \qquad (7.4)$$

попарно несмежных вершин, каждая из которых является особой и смежна не менее чем с двумя другими вершинами.

Лемма 7.3. *Пусть* $\alpha \in [1, (2/3)\ln n]$ *и* r *удовлетворяет* (4.12). *Тогда при* $n \to \infty$

$$|\overline{\mathfrak{G}}^3(n, m_1, r, m_2)| = o((n^2/2)^{m_2} n^{-2}).$$

Доказательство. Пользуясь способом получения графов из множества $\overline{\mathfrak{G}}_3(n, m_1, r, m_2, s)$ при доказательстве леммы 5.4, при $n \to \infty$ получаем

$$|\overline{\mathfrak{G}}^3(n, m_1, r, m_2)| < (2m_2^2 r n^{-2})^{u_0}(n^2/2)^{m_2}(u_0!)^{-1}$$
$$< (2em_2^2 r n^{-2} u_0^{-1})^{u_0}(n^2/2)^{m_2} \leqslant (\text{см. } (7.4)) \leqslant 2^{u_0}(n^2/2)^{m_2} = o((n^2/2)^{m_2} n^{-2}).$$

Лемма 7.3 доказана.

Пусть $\overline{G}$ — произвольный граф из $\overline{\mathfrak{G}}(n, m_1, r, m_2)$.

- Граф $\overline{G}^1$ назовем *остаточным для* $\overline{G}$, если $\overline{G}^1$ получается из $\overline{G}$ после удаления из него всех ребер графа $\overline{G}_0$, а также каждого ребра, соединяющего произвольную вершину степени 1 из V_1 с вершиной из $V \setminus V_1$, и каждого ребра, соединяющего вершины степени 1 из V_1.

Пусть

$$\overline{\mathfrak{G}}^4(n, m_1, r, m_2) = \overline{\mathfrak{G}}(n, m_1, r, m_2) \setminus \bigcup_{i=1}^{3} \overline{\mathfrak{G}}^i(n, m_1, r, m_2). \tag{7.5}$$

Множество $\overline{\mathfrak{G}}^4(n, m_1, r, m_2)$ разобьем на подмножества: два графа из $\overline{\mathfrak{G}}^4(n, m_1, r, m_2)$ включаются в одно подмножество тогда и только тогда, когда их остаточные графы идентичны. Далее, пусть $v = v(i)$ и $t = t(i)$ обозначают соответственно число неизолированных вершин в V_1 и число ребер в остаточном графе, которым задается множество $\overline{\mathfrak{G}}^4(n, m_1, r, m_2)$. Из определения множества $\overline{\mathfrak{G}}^4(n, m_1, r, m_2)$, леммы 7.2, формул (7.1), (7.4) следует, что

$$v \leqslant w_0 + 2u_0 \leqslant (\text{см. } (7.1) \text{ и } (7.4)) \leqslant O((m_2^2 e^{-\alpha} n^{-1} + 1)\ln n), \tag{7.6}$$

$$t \leqslant 7w_0 + 14u_0 = O((m_2^2 e^{-\alpha} n^{-1} + 1)\ln n). \tag{7.7}$$

Обозначим через $\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n, m_1, r, m_2, q, z)$ совокупность графов $\overline{G}$ из множества $\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n, m_1, r, m_2)$ таких, что в $\overline{G}$ имеется q ребер, принадлежащих двухвершинным компонентам связности в $\overline{G}^1$, и z вершин степени 1 из V_1, смежных с вершинами из $V \setminus V_1$.

Лемма 7.4. *При любых допустимых* q *и* z

$$|\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n, m_1, r, m_2, q, z)| \sim \frac{(m_2-t)!\,(r-v)!\,2^z (n^2/2)^{m_2-t}}{q!\,z!\,(m_2-t-q-z)!\,(r-v-2q-z)!\,(n-r)^{2q+z}}.$$

Доказательство. Все графы из $\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n, m_1, r, m_2, q, z)$ (и только они) могут быть получены следующим способом.

1. Берется граф, являющийся объединением графа $\overline{G}_0$ и остаточного графа для графов из $\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n, m_1, r, m_2)$. Этот граф определен однозначно.

2. Среди m_2-t ребер отбираются q ребер. Для этого имеется $\binom{m_2-t}{q} = \frac{(m_2-t)!}{q!\,(m_2-t-q)!}$ возможностей.

3. В имеющемся графе среди изолированных вершин отмечаются $2q$ вершин. Имеется $\binom{r-v}{2q} = \frac{(r-v)!}{(2q)!\,(r-v-2q)!}$ возможностей.

4. Отмеченные вершины соединяются отобранными ребрами так, чтобы степень каждой такой вершины оказалась равной 1. Имеется $\frac{(2q)!}{2^q}$ возможностей.

5. Среди оставшихся ребер отбираются z ребер. Имеется $\binom{m_2-t-q}{z} = \frac{(m_2-t-q)!}{z!\,(m_2-t-q-z)!}$ возможностей.

6. В имеющемся графе среди изолированных вершин отмечаются z вершин. Имеется $\binom{r-v-2q}{z} = \frac{(r-v-2q)!}{z!\,(r-v-2q-z)!}$ возможностей.

7. Ребра, отобранные в п. 5, размещаются в имеющемся графе так, чтобы каждая вершина, отмеченная в п. 6, оказалась смежной с одной вершиной из $V \setminus V_1$. Имеется $z!\,(n-r)^z$ возможностей.

8. Остальные ребра допустимым способом размещаются в имеющемся графе так, чтобы каждое такое ребро соединяло вершины из $V\setminus V_1$. Число возможностей равно величине

$$\prod_{j=1}^{m_2-t-q-z-1} \left(\binom{n-r}{2} - m_1 - j\right) \sim \left(\frac{(n-r)^2}{2}\right)^{m_2-t-q-z}.$$

Из пп. 1–8 следует утверждение леммы 7.4.

Пусть

$$q_0 = \lceil m_2 e^{-2\alpha_1}\rceil, \qquad z_0 = \lceil 2m_2 e^{-\alpha_1}(1-e_{-\alpha_1})\rceil, \tag{7.8}$$

где α_1 взято из (4.8), и пусть

$$\overline{\mathfrak{G}}_i^*(n,m_1,r,m_2) = \bigcup_{|q-q_0|+|z-z_0|\leqslant 4(m_2e^{-\alpha}\ln n)^{1/2}} \overline{\mathfrak{G}}_i^4(n,m_1,r,m_2,q,z). \tag{7.9}$$

Лемма 7.5. *Пусть $\alpha \in [1,(2/3)\ln n]$ и r удовлетворяет* (4.13). *Тогда при $n \to \infty$*

$$|\overline{\mathfrak{G}}_i^*(n,m_1,r,m_2)| = |\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n,m_1,r,m_2)|(1+o(n^{-2})).$$

Доказательство. Пусть $f(q,z) = 2^z/(q!\,z!\,(m_2-t-q-z)!\,(r-v-2q-z)!\,(n-r)^{2q+z})$. Тогда, пользуясь леммой 7.4, получаем

$$|\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n,m_1,r,m_2,q,z)| \sim (m_2-t)!\,(r-v)!\,(n^2/2)^{m_2-t} f(q,z). \tag{7.10}$$

Положив $q=q_0+x$, $z=z_0+y$, имеем

$$\begin{aligned} f(q,z) &< f(q_0,z_0)\frac{q_0!\,z_0!\,(m_2-q_0-z_0)^{x+y} r^{2x+y} 2^y}{(q_0+x)!\,(z_0+y)!\,(n-x)^{2x+y}} < (\text{см. } (7.5)) \\ &< f(q_0,z_0)\frac{q_0!\,z_0!\,m_2^{x+y}(1-e^{-\alpha_1})^{2(x+y)} r^{2x+y} 2^y}{(q_0+x)!\,(z_0+y)!\,(n-x)^{2x+y}}. \end{aligned} \tag{7.11}$$

$$\frac{q_0!}{(q_0+x)!} = \begin{cases} q_0^{-x}\prod_{j=1}^{x}(1+j/q_0)^{-1} < q_0^{-x}\prod_{j=1}^{x-1}(1+j/q_0)^{-1}, & \text{если } x>0,\\ q_0^{-x}\prod_{j=1}^{-x-1}(1-j/q_0) < q_0^{-x}\prod_{j=1}^{-x-1}(1+j/q_0)^{-1}, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Таким образом, при любом x

$$\frac{q_0!}{(q_0+x)!} \leqslant q_0^{-x}\prod_{j=1}^{|x|-1}\left(1+\frac{j}{q_0}\right)^{-1}. \tag{7.12}$$

Аналогично

$$\frac{z_0!}{(z_0+x)!} \leqslant z_0^{-y}\prod_{j=1}^{|z|-1}\left(1+\frac{j}{z_0}\right)^{-1}. \tag{7.13}$$

Далее, поскольку $|r-ne^{-\alpha_1}| \leqslant O\sqrt{k\ln k}$, имеем

$$(r/(n-r))^{2x+y} = (e^{-\alpha}(1-e^{-\alpha})^{-1})^{2x+y}(1+O((n^{-1}e^{\alpha}\ln n)^{1/2})^{x+y}). \tag{7.14}$$

Подставляя (7.12)–(7.14) в (7.11) и пользуясь (7.8), получаем

$$f(q,z) < f(q_0,z_0)(1+O((n^{-1}e^{\alpha}\ln n)^{1/2}))^{x+y}\prod_{j=1}^{|x|-1}\left(1+\frac{j}{q_0}\right)^{-1}\prod_{j=1}^{|y|-1}\left(1+\frac{j}{z_0}\right)^{-1}.$$

Отсюда и из (7.10) следует, что

$$\sum_{|q-q_0|+|z-z_0|>4(m_2e^{-\alpha}\ln n)^{1/2}} |\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n,m_1,r,m_2,q,z)|$$
$$< |\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n,m_1,r,m_2)| \sum_{|x|+|y|>4(m_2e^{-\alpha}\ln n)^{1/2}} (1+O((n^{-1}e^{\alpha}\ln n)^{1/2}))^{x+y}$$
$$\times \prod_{j=1}^{|x|-1}\left(1+\frac{j}{q_0}\right)^{-1}\prod_{j=1}^{|y|-1}\left(1+\frac{j}{z_0}\right)^{-1} \sim |\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n,m_1,r,m_2)|$$
$$\times \sum_{|x|+|y|>(m_2e^{-\alpha}\ln n)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2q_0}-\frac{y^2}{2z_0}\right) = o(|\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n,m_1,r,m_2)|n^{-2}). \tag{7.15}$$

Применяя (7.9) и (7.15), получаем утверждение леммы 7.5.

Пусть $\overline{\mathfrak{G}}_i^*(n,m_1,r,m_2,s)$ обозначает совокупность графов $\overline{G}$ из $\overline{\mathfrak{G}}_i^*(n,$ $m_1,r,m_2)$ таких, что $\overline{G}\in\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)$.

Лемма 7.6. *Пусть* $\alpha\in[1,(2/3)\ln n]$, s *принадлежит интервалу из* (4.4), *а* r *удовлетворяет* (4.12) *и* $|r-ne^{-\alpha_1}| > n^{1/2}e^{-(2/3)\alpha}(\ln n)^{-6,5}$. *Тогда при* $n\to\infty$ *множество* $\overline{\mathfrak{G}}_i^*(n,m_1,r,m_2,s)$ *пусто.*

Доказательство. Пусть $\overline{G}$ — произвольный граф из $\overline{\mathfrak{G}}_i^*(n, m_1, r, m_2, s)$, в котором содержится v особых и p изолированных вершин. Тогда, положив $r = \lfloor ne^{-\alpha_1} \rfloor + l$, имеем $p = ne^{-\alpha_1} + l - v - 2q_0 - z_0 + O((m_2 e^{-\alpha} \ln n)^{1/2})$. В свою очередь,

$$ne^{-\alpha_1} = ne^{-2(m-m_2)/n} = ne^{-\alpha+2m_2/n} = ne^{-\alpha}(1 + 2m_2 n^{-1} + O(m_2^2 n^{-2})) = ne^{-\alpha} + 2m_2 e^{-\alpha} + O(m_2^2 n^{-1} e^{-\alpha}), \quad (7.16)$$

$$2q_0 + z_0 = (\text{см. } (7.8)) = 2m_2 e^{-\alpha_1} + O(1) = 2m_2 e^{-\alpha}(1 + O(m_2 n^{-1})).$$

Поэтому

$$p = ne^{-\alpha} + l - v + O(m_2^2 n^{-1} e^{-\alpha}) + O((m_2 e^{-\alpha} \ln n)^{1/2}) = (\text{см. } (4.7)) = ne^{-\alpha} + l - v + o(n^{1/2} e^{-(2/3)\alpha} \ln^{-7} n) = (\text{см. } (7.6)) = ne^{-\alpha} + l + o(n^{1/2} e^{-(2/3)\alpha} (\ln n)^{-6,5}).$$

Если $|l| > n^{1/2} e^{-(2/3)\alpha} (\ln n)^{-6,5}$, то $s \neq p$ при любом s, принадлежащем интервалу из (4.4), и $n \to \infty$. Следовательно, граф $\overline{G}$ не принадлежит множеству $\overline{\mathfrak{G}}(n, m, s)$. Лемма 7.6 доказана.

§ 8. Доказательство леммы 4.4

Обозначим через $\overline{\mathfrak{G}}^4(n, m_1, r, m_2, s)$ совокупность графов $\overline{G}$ из $\overline{\mathfrak{G}}^4(n, m_1, r, m_2)$ таких, что $\overline{G} \in \overline{\mathfrak{G}}(n, m, s)$, а $\overline{\mathfrak{G}}^4(n, m_1, r, m_2)$ взято из (7.5). Из лемм 7.1–7.3 следует, что если выполняются условия леммы 4.4, то $|\overline{\mathfrak{G}}^4(n, m_1, r, m_2, s)| = |\overline{\mathfrak{G}}(n, m_1, r, m_2, s)| + o((n^2/2)^{m_2} n^{-2})$. Поэтому для доказательства леммы 4.4 достаточно показать, что если r взято из (4.13), а s принадлежит интервалу из (4.4), то при $n \to \infty$ и любом $h \in [0, k^{1/4} \ln^2 n]$, где k взято из (1.3), справедливо соотношение

$$|\overline{\mathfrak{G}}^4(n, m_1, r, m_2, s)| / |\overline{\mathfrak{G}}^4(n, m_1, r, m_2, s + h)| \sim 1. \quad (8.1)$$

Будем считать, что множества $\overline{\mathfrak{G}}^4(n, m_1, r, m_2, s)$, $\overline{\mathfrak{G}}^4(n, m_1, r, m_2, s + h)$ разбиты на подмножества $\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n, m_1, r, m_2, s)$ и $\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n, m_1, r, m_2, s + h)$ так, как осуществлялось разбиение множества $\overline{\mathfrak{G}}^4(n, m_1, r, m_2)$ на подмножества $\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n, m_1, r, m_2)$ перед леммой 7.4. При этом будем полагать, что нумерации подмножеств из $\overline{\mathfrak{G}}^4(n, m_1, r, m_2, s)$ и $\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n, m_1, r, m_2, s + h)$ согласованы, т. е. графы из этих подмножеств имеют идентичные остаточные графы. Такая нумерация возможна, ибо в любом остаточном графе имеется не более $7(w_0 + u_0) = (\text{см. } (7.1) \text{ и } (7.4)) = o(m_2 e^{-\alpha}) = o(r - s)$ ребер и не более $w_0 + u_0 = o(r - s)$ неизолированных вершин из V_1.

Ясно, что справедливость (8.1) вытекает из следующего утверждения: при любом допустимом i, рассматриваемых r, s, h и $n \to \infty$

$$|\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n, m_1, r, m_2, s)| / |\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n, m_1, r, m_2, s + h)| \sim 1. \quad (8.2)$$

Убедимся в истинности (8.2). Пусть v и t обозначают соответственно число неизолированных вершин из V_1 и число ребер в остаточном графе, по которым определяется $\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n, m_1, r, m_2, s)$. Пользуясь множеством $\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n, m_1, r, m_2, q, z)$, введенным перед леммой 7.4, и полагая $z = r - v - s - 2q$, получаем

$$|\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n, m_1, r, m_2, s)| = \sum_{q=0}^{(r-v-s)/2} |\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n, m_1, r, m_2, q, r - v - s - 2q)|.$$

Отсюда и из леммы 7.4 следует, что при $n \to \infty$

$$|\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n, m_1, r, m_2, s)| \sim \frac{(m_2-t)!\,(r-v)!\,((n-r)^2/2)^{m_2-t}2^{r-v-s}}{s!\,(n-r)^{r-v-s}} \sum_{q=0}^{(r-v-s)/2} f_1(q), \tag{8.3}$$

где

$$f_1(q) = \frac{1}{q!\,(r-v-s-2q)!\,(m_2-t-r+s+v+q)!\,4^q}. \tag{8.4}$$

Как и при доказательстве (7.13), убеждаемся, что

$$\sum_{q=0}^{(r-v-s)/2} f_1(q) \sim \sum_{|q-q_0|\leqslant 4(q_0 \ln n)^{1/2}} f_1(q), \tag{8.5}$$

где q_0 взято из (7.8). В свою очередь, если $q_0 < \ln^5 n$, то при $|q - q_0| \leqslant 4(q_0 \ln n)^{1/2}$, рассматриваемых r, s, v, t и $n \to \infty$ имеем

$$f_1(q) \sim \frac{(r-v-s)^{2q}}{q!\,(r-v-s)!\,(m_2-t-r+s+v)!\,(m_2-t-r+s+v)^q 4^q}.$$

Следовательно,

$$\sum_{|q-q_0|\leqslant 4(q_0 \ln n)^{1/2}} f_1(q) \sim \frac{1}{q!\,(r-v-s)!\,(m_2-t-r+s+v)} \exp\left(\frac{(r-v-s)^2}{4(m_2-t-r+s+v)}\right). \tag{8.6}$$

Если s заменить на $s+h$, то, пользуясь множеством $\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n, m_1, r, m_2, q, z)$ и положив $z = r - s - h - v - 2q$, получаем

$$|\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n, m_1, r, m_2, s + h)|$$
$$\sim \frac{(m_2-t)!\,(r-v)!\,((n-r)^2/2)^{m_2-t}2^{r-v-s-h}}{(s+h)!\,(n-r)^{r-v-s-h}} \sum_{q=0}^{(r-v-s-h)/2} f_2(q), \tag{8.7}$$

где

$$f_2(q) = \frac{1}{q!\,(r-v-s-h-2q)!\,(m_2-t-r+s+h+v+q)!\,4^q}. \tag{8.8}$$

Как и при доказательстве (7.13), убеждаемся, что

$$\sum_{q=0}^{(r-v-s-h)/2} f_2(q) \sim \sum_{|q-q_0|\leqslant 4(q_0 \ln n)^{1/2}} f_2(q). \tag{8.9}$$

В свою очередь, если $q_0 < \ln^5 n$, то при $|q-q_0| \leqslant 4(q_0 \ln n)^{1/2}$, рассматриваемых r, s, h, v, t и $n \to \infty$ имеем

$$f_2(q) \sim \frac{(r-v-s-h)^{2q}}{q!\,(r-v-s-h)!\,(m_2-t-r+s+h+v)!\,(m_2-t-r+s+h+v)^q 4^q}$$
$$\sim \frac{(r-v-s)^{2q}}{q!\,(r-v-s-h)!\,(m_2-t-r+s+h+v)!\,(m_2-t-r+s+v)^q 4^q}.$$

Следовательно,

$$\sum_{|q-q_0|\leqslant 4(q_0\ln n)^{1/2}} f_2(q) \sim \frac{1}{(r-v-s-h)!\,(m_2-t-r+s+h+v)!} \exp\left(\frac{(r-v-s)^2}{4(m_2-t-r+s+v)}\right). \tag{8.10}$$

Таким образом, если $q_0 < \ln^5 n$, то из (8.3) – (8.10) следует, что при $n \to \infty$

$$\frac{|\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n,m_1,r,m_2,s)|}{|\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n,m_1,r,m_2,s+h)|} \sim \frac{2^h (s+h)!\,(r-v-s-h)!\,(m_2-t-r+s+h+v)!}{s!\,(n-r)^h (r-v-s)!\,(m_2-t-r+s+v)!}. \tag{8.11}$$

В свою очередь,

$$(s+h)!\,/s! \sim (\text{см. } (4.4)) \sim (ne^{-\alpha})^h, \tag{8.12}$$

$$(n-r)^h \sim (\text{см. } (4.13)) \sim n^h(1-e^{-\alpha_1})^h \sim (\text{ибо } e^{-\alpha_1} < (\text{см. } (7.8))$$
$$< (q_0 m_2^{-1})^{1/2} \leqslant (m_2^{-1}\ln^5 n)^{1/2}) \sim n^h, \tag{8.13}$$

$$\frac{(m_2-t-r+s+h+v)!}{(m_2-t-r+s+v)!} = \prod_{j=1}^{h}(m_2-t-r+s+v+j) = (\text{см. } (7.6), (7.7) \text{ и } (7.16))$$
$$= (m_2 + O(m_2 e^{-\alpha}))^h \sim m_2^h, \tag{8.14}$$

$$\frac{(r-v-s-h)!}{(r-v-s)!} = \prod_{j=1}^{h-1}(r-v-s-j) = (\text{см. } (7.16))$$
$$= (2m_2e^{-\alpha})^{-h}(1+O(e^{-\alpha}))^h \sim (2m_2e^{-\alpha})^{-h}. \tag{8.15}$$

Подставляя (8.12)–(8.15) в (8.11), убеждаемся в справедливости (8.2) при $q_0 < \ln^5 n$.

Теперь рассмотрим случай, когда $q_0 \geqslant \ln^5 n$. Полагая $q = q_0 + x$, имеем

$$\sum_{|q-q_0|\leqslant 4(q_0\ln n)^{1/2}} f_1(q) \sim f_1(q_0) \sum_{|x|\leqslant 4(q_0\ln n)^{1/2}} \left(\frac{(r-v-s-2q_0)^2}{4q_0(m_2-t-r+s+v+q_0)}\right)^x$$
$$\times \exp\left(-\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{q_0} + \frac{1}{m_2-t-r+s+v+q_0} + \frac{4}{r-v-s-2q_0}\right)\right), \tag{8.16}$$

$$\sum_{|q-q_0|\leqslant 4(q_0\ln n)^{1/2}} f_2(q) \sim f_2(q_0) \sum_{|x|\leqslant 4(q_0\ln n)^{1/2}} \left(\frac{(r-v-s-2q_0-h)^2}{4q_0(m_2-t-r+s+h+v+q_0)}\right)^x$$
$$\times \exp\left(-\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{q_0} + \frac{1}{m_2-t-r+s+h+v+q_0} + \frac{4}{r-v-s-h-2q_0}\right)\right)$$
$$\sim f_2(q_0) \sum_{|x|\leqslant 4(q_0\ln n)^{1/2}} \left(\frac{(r-v-s-2q_0)^2}{4q_0(m_2-t-r+s+v+q_0)}\right)^x$$
$$\times \exp\left(-\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{q_0} + \frac{1}{m_2-t-r+s+v+q} + \frac{4}{r-v-s-2q_0}\right)\right). \tag{8.17}$$

Пользуясь (8.3)–(8.5), (8.8), (8.9), (8.16) и (8.17), получаем

$$\frac{|\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n,m_1,r,m_2,s)|}{|\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n,m_1,r,m_2,s+h)|} \sim \frac{(s+h)!\,2^h f_1(q_0)}{s!\,(n-r)^h f_2(q_0)}$$
$$= \frac{(s+h)!\,2^h (r-v-s-h-2q_0)!\,(m_2-t-r+s+h+v+q_0)!}{s!\,(n-r)^h (r-v-s-2q_0)!\,(m_2-t-r+s+v+q_0)!}$$
$$= \frac{(s+h)!\,2^h}{s!\,(n-r)^h} \prod_{j=1}^{h} \left(\frac{m_2-t-r+s+v+q_0+j}{r-v-s-2q_0+1-j} \right). \tag{8.18}$$

В свою очередь,

$$\frac{(s+h)!}{s!} \sim (ne^{-\alpha})^h, \tag{8.19}$$

$$(n-r)^h \sim (\text{см. } (4.13)) \sim (n-ne^{-\alpha_1})^h \sim (n-ne^{-\alpha})^h, \tag{8.20}$$

$$\prod_{j=1}^{h} (m_2 - t - r + s + v + q_0 + j) \sim (\text{см. } (4.4),\ (7.6) \text{ и } (7.7))$$
$$\sim (m_2 - r + s + q_0)^h \sim (\text{см. } (4.13) \text{ и } (7.8))$$
$$\sim (m_2 - ne^{-\alpha_1} + ne^{-\alpha} + m_2 e^{-2\alpha_1})^h \sim (\text{см. } (7.16))$$
$$\sim m_2^h (1 - 2e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + O(m_2 n^{-1} e^{-\alpha}))^h \sim m_2^h (1-e^{-\alpha})^{2h}, \tag{8.21}$$

$$\prod_{j=1}^{h} \frac{1}{r-v-s-2q_0+1-j} \sim (\text{см. } (4.4),\ (7.6) \text{ и } (7.7)) \sim \frac{1}{(r-s-2q_0)^h}$$
$$\sim \frac{1}{(ne^{-\alpha_1} - ne^{-\alpha} + 2m_2 e^{-2\alpha})^h} \sim \frac{1}{(2m_2 e^{-\alpha} - 2m_2 e^{-2\alpha})^h}$$
$$= \frac{1}{(2m_2 e^{-\alpha}(1-e^{-\alpha}))^h}. \tag{8.22}$$

Подставляя (8.19) – (8.22) в (8.18), убеждаемся в справедливости (8.2) при $q_0 \geqslant \ln^5 n$. Тем самым лемма 4.4 доказана.

§ 9. Доказательство теоремы 1.2

Идея доказательства теоремы 1.2 (а также теоремы 1.4) состоит в следующем. Во-первых, вместо обычных графов рассматриваются графы с помеченными ребрами. Такой переход правомерен ввиду соотношения (4.1). Во-вторых, при каждом рассматриваемом s величина $|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)|$ выражается через $|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)|$, где $k = \lfloor ne^{-\alpha} \rfloor$. В-третьих, суммируя по всем таким s и пользуясь леммой 3.4, получаем выражение, асимптотически равное величине $|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|$. В-четвертых, с помощью этой асимптотики находим асимптотику для $|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)|$. Наконец, пользуясь этой асимптотикой и имеющейся связью между $|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)|$ и $|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)|$, находим асимптотику для $|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)|$.

Если $|s-k| \leqslant (k\ln^{-4}k)^{1/6}$, то согласно лемме 4.1 имеем

$$\begin{aligned}|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| &\sim |\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}) \\ &\sim |\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| \exp\left((s-k)^2/(2k)\right) + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}).\end{aligned} \tag{9.1}$$

Для остальных s мы различаем следующие случаи.

Случай 1: $(k\ln^{-4}k)^{1/6} \leqslant k-s \leqslant 4(k\ln k)^{1/2}$.

Случай 2: $(k\ln^{-4}k)^{1/6} \leqslant s-k \leqslant 4(k\ln k)^{1/2}$.

Рассмотрим случай 1. При фиксированном s вместо графов из $\overline{G}(n,m)$ будем рассматривать графы из $\overline{\mathfrak{G}}(n+w,m)$ с множеством вершин $V_2 = V \cup V_1$, где $V_1 = \{v_{n+1},\dots,v_{n+w}\}$, а $w = k-s = \lfloor ne^{-\alpha}\rfloor - s$.

- Вершины из V будем называть *основными*, а из V_1 — *вспомогательными*.

Ясно, что

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n+w,m,s+w)| = |\overline{\mathfrak{G}}(n-s,m,0)|\binom{n+w}{n-s}.$$

Поэтому $|\overline{\mathfrak{G}}(n-s,m,0)| = |\overline{\mathfrak{G}}(n+w,m,s+w)|/\binom{n+w}{n-s}$. Отсюда и из соотношения $|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| = \binom{n}{s}|\overline{\mathfrak{G}}(n-s,m,0)|$ получаем

$$\begin{aligned}|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| &= |\overline{\mathfrak{G}}(n+w,m,s+w)|\binom{n}{s}\Big/\binom{n+w}{n-s} \\ &= (\text{ибо } s+w=k) = |\overline{\mathfrak{G}}(n+w,m,k)|(s/n)^w \prod_{i=1}^{w}\frac{1+i/s}{1+i/n}.\end{aligned} \tag{9.2}$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned}(s/n)^w = ((\lfloor ne^{-\alpha}\rfloor - w)n^{-1})^w &\sim e^{-\alpha w}(1-we^{\alpha}n^{-1})^w \\ &\sim \exp\left(-\alpha w - w^2e^{\alpha}n^{-1}\right),\end{aligned} \tag{9.3}$$

$$\prod_{i=1}^{w}\frac{1+i/s}{1+i/n} \sim \exp\left(\frac{w^2}{2s}-\frac{w^2}{2n}\right) \sim \exp\frac{w^2(e^{\alpha}-1)}{2n}. \tag{9.4}$$

Подставляя (9.3) и (9.4) в (9.2), получаем

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| \sim |\overline{\mathfrak{G}}(n+w,m,k)| \exp\Big(-\alpha w - \frac{w^2(e^{\alpha}+1)}{2n}\Big). \tag{9.5}$$

Множество $\overline{\mathfrak{G}}(n+w,m,k)$ представим в виде

$$\overline{\mathfrak{G}}(n+w,m,k) = \bigcup_{i=1}^{4}\overline{\mathfrak{G}}_i(n+w,m,k), \tag{9.6}$$

где

$\overline{\mathfrak{G}}_1(n+w,m,k)$ — совокупность графов $\overline{G} \in \overline{\mathfrak{G}}(n+w,m,k)$ таких, что вспомогательным вершинам в $\overline{G}$ инцидентно менее $(4/5)\alpha w$ ребер;

$\overline{\mathfrak{G}}_2(n+w,m,k)$ — совокупность графов $\overline{G}$ из $\overline{\mathfrak{G}}(n+w,m,k)$ таких, что вспомогательным вершинам в $\overline{G}$ инцидентно более $2\alpha w$ ребер;

$\overline{\mathfrak{G}}_3(n+w,m,k)$ — совокупность графов $\overline{G}$ из $\overline{\mathfrak{G}}(n+w,m,k)$ таких, что вспомогательным вершинам в $\overline{G}$ инцидентно z ребер, $(4/5)\alpha w \leqslant z \leqslant 2\alpha w$, и среди этих вершин имеется не менее шести изолированных вершин;

$\overline{\mathfrak{G}}_4(n+w,m,k)$ — совокупность остальных графов из $\overline{\mathfrak{G}}(n+w,m,k)$.

Сначала оценим сверху мощности множеств $\overline{\mathfrak{G}}_i(n+w,m,k)$ при $i = 1,2,3$. Все графы $\overline{G}$ из $\overline{\mathfrak{G}}(n+w,m,k)$ такие, что вспомогательным вершинам в $\overline{G}$ инцидентно z ребер, могут быть получены следующим способом.

1. Берется множество изолированных вершин V_2 и среди m помеченных ребер отбираются z ребер. Эти ребра допустимым способом размещаются так, чтобы каждое такое ребро оказалось инцидентно не менее чем одной вспомогательной вершине. Имеется $\binom{m}{z}\binom{wn+\binom{w}{2}}{z}z! < \frac{1}{z!}(mw(n+w/2))^z$ возможностей.

2. Остальные ребра размещаются допустимым способом так, чтобы каждое такое ребро соединяло основные вершины. Число возможностей равно величине

$$\binom{\binom{n}{2}}{m-z}(m-z)! = \binom{n}{2}^{m-z}\prod_{i=1}^{m-z-1}\Bigl(1-i/\tbinom{n}{2}\Bigr)$$
$$\sim \binom{n}{2}^{m-z}\exp\Bigl(-\tfrac{(m-z)^2}{n^2}\Bigr) \sim n^{2m-2z}2^{-m+z}\exp\Bigl(-\tfrac{m-z}{n}-\tfrac{(m-z)^2}{n^2}\Bigr).$$

Поэтому

$$|\overline{\mathfrak{G}}_1(n+w,m,k)| < \tfrac{n^{2m}}{2^m}\sum_{z=0}^{(4/5)\alpha w}\frac{1}{z!}(2mw(n+w/2)n^{-2})^z$$
$$\times\exp\Bigl(-\tfrac{m-z}{n}-\tfrac{(m-z)^2}{n^2}\Bigr)$$
$$\sim \tfrac{n^{2m}}{2^m}\exp\Bigl(-\tfrac{m}{n}-\tfrac{m^2}{n^2}\Bigr)\sum_{z=0}^{(4/5)\alpha w}\frac{1}{z!}(\alpha w(n+w/2)n^{-1})^z. \quad (9.7)$$

В свою очередь,

$$\sum_{z=0}^{(4/5)\alpha w}\frac{1}{z!}\Bigl(\frac{\alpha w(n+w/2)}{n}\Bigr)^z \sim \sum_{z=0}^{(4/5)\alpha w}\frac{(\alpha w)^z}{z!}$$
$$< \frac{5}{\lfloor(4/5)\alpha w\rfloor!}(\alpha w)^{\lfloor(4/5)\alpha w\rfloor} < 5\Bigl(\frac{5e}{4}\Bigr)^{(4/5)\alpha w}$$
$$= (\text{ибо } w \geqslant (k\ln^{-4}k)^{1/6} \text{и } \alpha \geqslant (2/3)\ln n) = o\Bigl(\frac{e^{\alpha w}}{n^2}\Bigr). \quad (9.8)$$

Из (9.7), (9.8) следует, что

$$|\overline{\mathfrak{G}}_1(n+w,m,k)| < o\Bigl(\Bigl(\frac{n^2}{2}\Bigr)^m n^{-2}\exp\Bigl(\frac{m}{n}-\Bigl(\frac{m}{n}\Bigr)^2+\alpha w\Bigr)\Bigr). \quad (9.9)$$

Поскольку $|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)| = |\mathfrak{G}(n,m)|m!$, пользуясь леммой 3.2, из (9.9) при $n \to \infty$ получаем

$$|\overline{\mathfrak{G}}_1(n+w,m,k)| = o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|e^{\alpha w}n^{-2}). \tag{9.10}$$

Далее, при $n \to \infty$

$$|\overline{\mathfrak{G}}_2(n+w,m,k)| < \left(\tfrac{n^2}{2}\right)^m \sum_{z \geqslant 2\alpha w} \tfrac{1}{z!}\left(\tfrac{\alpha w(n+w)}{n}\right)^z \exp\left(-\tfrac{m-z}{n} - \left(\tfrac{m-z}{n}\right)^2\right).$$

Поскольку при $z \geqslant 2\alpha w$ и $n \to \infty$ выражение под знаком суммы как функция от z убывает быстрее геометрической прогрессии с знаменателем $2/3$, имеем

$$\begin{aligned}|\overline{\mathfrak{G}}_2(n+w,m,k)| &< \tfrac{3}{\lfloor 2\alpha w\rfloor!}\left(\tfrac{n^2}{2}\right)^m (\alpha w)^{\lfloor 2\alpha w\rfloor} \exp\left(-\tfrac{m}{n} - \left(\tfrac{m}{n}\right)^2\right)\\ &\sim (\text{см. лемму 3.2}) \sim |\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|\tfrac{3(\alpha w)^{\lfloor 2\alpha w\rfloor}}{\lfloor 2\alpha w\rfloor!} < |\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|(e/2)^{2\alpha w}\\ &= (\text{ибо } w \geqslant (k\ln^{-4}k)^{1/6} \to \infty \text{при } n \to \infty \text{и } \alpha \geqslant (2/3)\ln n)\\ &= o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|e^{\alpha w}n^{-2}).\end{aligned} \tag{9.11}$$

Наконец, нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}|\overline{\mathfrak{G}}_3(n+w,m,k)| &< \binom{w}{6}\binom{\binom{n+w-6}{2}}{m}m!\\ &= \binom{w}{6}\binom{n+w-6}{2}^m \prod_{i=1}^{m-1}\left(1 - \frac{i}{\binom{n+w-6}{2}}\right) \sim \binom{w}{6}\binom{n+w-6}{2}^m \exp\left(-\tfrac{m}{n}\right)^2.\end{aligned}$$

В свою очередь, $\binom{n+w-6}{2}^m \sim (\frac{n^2}{2})^m \exp(\alpha(w-6) - \frac{m}{n})$. Поэтому

$$\begin{aligned}|\overline{\mathfrak{G}}_3(n+w,m,k)| &< \binom{w}{6}(\tfrac{n^2}{2})^m \exp\left(\alpha(w-6) - \tfrac{m}{n} - \left(\tfrac{m}{n}\right)^2\right)\\ &\sim (\text{см. лемму 3.2}) \sim |\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|\binom{w}{6}\exp(\alpha(w-6))\\ &< |\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|e^{\alpha w}(we^{-\alpha})^6\\ &\leqslant |\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|e^{\alpha w}(4(ne^{-\alpha}\ln(ne^{-\alpha}))^{1/2}e^{-\alpha})^6\\ &= (\text{ ибо } \alpha \geqslant (2/3)\ln n) = o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|e^{\alpha w}n^{-2}).\end{aligned} \tag{9.12}$$

Теперь найдем асимптотику для мощности множества $\overline{\mathfrak{G}}_4(n+w,m,k)$. Сначала убедимся в том, что если

$$r \leqslant \lfloor 2\alpha\sqrt{k}\ln k\rfloor \text{и } v \in [0,5], \tag{9.13}$$

то

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k-v)| \sim |\overline{\mathfrak{G}}(n,m-r,k-v)|(n^2/2)^r + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}). \tag{9.14}$$

С этой целью множество $\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k-v)$ представим в виде

$$\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k-v) = \overline{\mathfrak{G}}^1(n,m,k-v) \cup \overline{\mathfrak{G}}^2(n,m,k-v), \tag{9.15}$$

где

$\overline{\mathfrak{G}}^1(n,m,k-v)$ — совокупность графов $|\bar{G} \in \overline{\mathfrak{G}}(n,m,k-v)$ таких, что после удаления из $\overline{G}$ ребер с метками $m-r+1,\dots,m$ получается граф с $k-v$ изолированными вершинами, т. е. граф из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m-r,k-v)$;

$\overline{\mathfrak{G}}^2(n,m,k-v)$ — совокупность остальных графов из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k-v)$.

Ясно, что

$$|\overline{\mathfrak{G}}^1(n,m,k-v)| = |\overline{\mathfrak{G}}(n,m-r,k-v)|\binom{\binom{n-k+v}{2}}{r}r!$$
$$\sim |\overline{\mathfrak{G}}(n,m-r,k-v)|(n^2/2)^r. \qquad (9.16)$$

Далее, все графы из $\overline{\mathfrak{G}}^2(n,m,k-v)$ могут быть получены следующим способом.

1. Фиксируется произвольное $l \in [1,r]$ и берется произвольный граф $\overline{G}$ из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m-r,k-v+l)$.

2. Ребро с меткой i, $m-r+1 \leqslant i \leqslant m$, добавляется к $\overline{G}$ таким образом, чтобы оно оказалось инцидентно по крайней мере одной изолированной вершине графа $\overline{G}$. Имеется не более $rn(k-v+l) \leqslant rn(k+r)$ возможностей.

3. Ребра с метками $m-r+1,\dots,i-1,i+1,\dots,m$ размещаются в $\overline{G}$ произвольным допустимым способом. Имеется менее $(n^2/2)^{r-1}$ возможностей.

Следовательно,

$$|\overline{\mathfrak{G}}^2(n,m,k-v)| < rn(k+r)(n^2/2)^{r-1}\sum_{l=1}^{r}|\overline{\mathfrak{G}}(n,m-r,k-v+l)|$$
$$< rn(k+r)(n^2/2)^{r-1}|\overline{\mathfrak{G}}(n,m-r)| \sim 2r(k+r)n^{-1}|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|$$
$$= (\text{см. } (9.13)) = o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}). \qquad (9.17)$$

Пользуясь (9.15)–(9.17), получаем (9.14).

Далее, множество $\overline{\mathfrak{G}}_4(n+w,m,k)$ представим в виде

$$|\overline{\mathfrak{G}}_4(n+w,m,k)| = |\overline{\mathfrak{G}}_4^1(n+w,m,k)| \cup \overline{\mathfrak{G}}_4^2(n+w,m,k), \qquad (9.18)$$

где

$\overline{\mathfrak{G}}_4^1(n+w,m,k)$ — совокупность графов $\overline{G}$ из $\overline{\mathfrak{G}}_4(n+w,m,k)$ таких, что любое ребро, инцидентное некоторой вспомогательной вершине, может быть инцидентно только такой вершине из V, которая смежна с другой вершиной из V;

$\overline{\mathfrak{G}}_4^2(n+w,m,k)$ — совокупность остальных графов из $\overline{\mathfrak{G}}_4(n+w,m,k)$.

Все графы из $\overline{\mathfrak{G}}_4^1(n+w,m,k)$ (и только они) могут быть получены следующим способом.

1. Берется множество изолированных вершин V_2 и среди m ребер отбираются $m-z$ ребер, где $(4/5)\alpha w \leqslant z \leqslant 2\alpha w$. Имеется $\binom{m}{z} \sim m^z/z! = ((1/2)\alpha n)^z/z!$ возможностей.

2. Отобранные ребра допустимым способом размещаются так, чтобы они соединяли основные вершины и среди этих вершин оказалось $k-v$

изолированных вершин, $0 \leqslant v \leqslant 5$. Число возможностей равно величине

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n, m-z, k-v)| \sim (\text{см. (9.14)}) \sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n, m, k-v)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n, m)|k^{-1}))(2n^{-2})^z \sim (\text{см. лемму 4.1}) \sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n, m, k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n, m)|k^{-1}))(2n^{-2})^z.$$

3. Остальные ребра допустимым способом размещаются так, чтобы каждое такое ребро было инцидентно по крайней мере одной вспомогательной вершине и не было инцидентно изолированной основной вершине в графе, полученном в п. 2, а среди вспомогательных вершин оказалось v изолированных вершин. Число возможностей обозначим через $R(n, w, z, v)$.

Следовательно,

$$|\overline{\mathfrak{G}}_4^1(n+w, m, k)| \sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n, m, k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n, m)|k^{-1})) \sum_{z=\lfloor (4/5)\alpha w \rfloor}^{\lfloor 2\alpha w \rfloor} \frac{1}{z!}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^z \sum_{v=0}^{5} R(n, w, z, v).$$

В свою очередь, в силу (9.12) имеем

$$\sum_{v=0}^{5} R(n, w, z, v) \sim \binom{\binom{w}{2} + w(n-k)}{z} z! \sim (w(n-k))^z \sim (wn)^z.$$

Поэтому

$$|\overline{\mathfrak{G}}_4^1(n+w, m, k)| \sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n, m, k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n, m)|k^{-1})) \sum_{z=\lfloor (4/5)\alpha w \rfloor}^{\lfloor 2\alpha w \rfloor} \frac{(\alpha w)^z}{z!} \sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n, m, k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n, m)|k^{-1}))e^{\alpha w}. \quad (9.19)$$

Теперь оценим сверху мощность множества $\overline{\mathfrak{G}}_4^2(n+w, m, k)$. Все графы из этого множества могут быть получены следующим способом.

1. Осуществляются первые два шага, которые использовались при получении графов из $\overline{\mathfrak{G}}_4^1(n+w, m, k)$. Имеется менее

$$\binom{m}{z}|\overline{\mathfrak{G}}(n, m-z)| < \frac{1}{z!}m^z(2n^{-2})^z|\overline{\mathfrak{G}}(n, m)| = \frac{1}{z!}(\alpha n^{-1})^z|\overline{\mathfrak{G}}(n, m)|$$

возможностей.

2. Из оставшихся ребер отбирается одно ребро и размещается так, чтобы оно оказалось инцидентно вспомогательной вершине и изолированной основной вершине имеющегося графа. Имеется менее $2zwne^{-\alpha}$ возможностей.

3. Остальные ребра размещаются так, чтобы каждое такое ребро оказалось инцидентно по крайней мере одной вспомогательной вершине и не менее чем одна вспомогательная вершина осталась изолированной. Число возможностей меньше величины

$$2w\binom{\binom{w}{2} + (w-1)n}{z-1}(z-1)! \sim 2w((w-1)n)^{z-1} = 2n^{-1}(wn)^z e^{-(z-1)/w} \leqslant (\text{ибо } z \geqslant (4/5)\alpha w) \leqslant 3n^{-1}(wn)^z e^{-(4/5)\alpha}.$$

Следовательно,

$$|\overline{\mathfrak{G}}_4^2(n+w,m,k)| \leqslant 3|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|we^{-(9/5)\alpha} \sum_{z=\lfloor(4/5)\alpha w\rfloor}^{\lfloor 2\alpha w\rfloor} \frac{(\alpha w)^z}{(z-1)!}$$
$$= o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|e^{\alpha w}k^{-1}). \quad (9.20)$$

Пользуясь (9.18)–(9.20), получаем

$$|\overline{\mathfrak{G}}_4(n+w,m,k)| \sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)|) + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1})e^{\alpha w}. \quad (9.21)$$

Из (9.6), (9.10)–(9.12) и (9.21) следует, что

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n+w,m,k)| \sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)|) + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1})e^{\alpha w}. \quad (9.22)$$

Подставляя (9.22) в (9.5), получаем

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| \sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)|+o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}))\exp\left(-(k-s)^2e^{\alpha}/(2n)\right). \quad (9.23)$$

Рассмотрим случай 2. Пусть $w = s - \lfloor ne^{-\alpha}\rfloor = s - k > 0$. Как и в первом случае, имеем

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| = \tbinom{n}{s}|\overline{\mathfrak{G}}(n-w,m,k)|/\tbinom{n-w}{k}.$$

В свою очередь, при $\alpha \geqslant (2/3)\ln n$ и $w \in [0, 4(k\ln k)^{1/2}]$

$$\binom{n}{s} \sim \frac{n^s}{s!} = \frac{n^s}{k!}\prod_{i=1}^{w}\frac{1}{k+1} \sim \frac{n^k}{k!}\exp\left(\alpha w - \frac{w^2e^{\alpha}}{2n}\right),$$

$$\binom{n-w}{k} \sim \frac{n^k}{k!}.$$

Поэтому

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| \sim |\overline{\mathfrak{G}}(n-w,m,k)|\exp\left(\alpha w - \frac{w^2e^{\alpha}}{2n}\right). \quad (9.24)$$

Рассмотрим $\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)$. Пусть $V_3 = \{v_{n-w+1},\dots,v_n\}$. Множество $\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)$ представим в виде

$$\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k) = \bigcup_{i=1}^{4}\overline{\mathfrak{G}}^i(n,m,k), \quad (9.25)$$

где

$\overline{\mathfrak{G}}^1(n,m,k)$ — совокупность графов $\overline{G}$ из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)$ таких, что вершинам из V_3 в $\overline{G}$ инцидентно менее $(4/5)\alpha w$ ребер;

$\overline{\mathfrak{G}}^2(n,m,k)$ — совокупность графов $\overline{G}$ из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)$ таких, что вершинам из V_3 в $\overline{G}$ инцидентно более $2\alpha w$ ребер;

$\overline{\mathfrak{G}}^3(n,m,k)$ — совокупность графов $\overline{G}$ из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)$ таких, что вершинам из V_3 в $\overline{G}$ инцидентно z ребер, $(4/5)\alpha w \leqslant z \leqslant 2\alpha w$, и среди этих вершин имеется не менее 6 изолированных вершин;

$\overline{\mathfrak{G}}^4(n,m,k)$ — совокупность остальных графов из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)$.

Пользуясь рассуждениями, которые применялись при установлении (9.10)–(9.12), убеждаемся, что при $i = 1, 2, 3$ и $n \to \infty$

$$|\overline{\mathfrak{G}}^i(n, m, k)| = o(|\overline{\mathfrak{G}}(n, m)|n^{-2}). \tag{9.26}$$

Далее, если r и v удовлетворяют (9.13), то из (9.14) следует, что

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{G}}(n-w, m, k-v)| &\sim |\overline{\mathfrak{G}}(n-w, m-r, k-v)|((n-w)^2/2)^r + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n-w, m)|k^{-1}) \\ &\sim |\overline{\mathfrak{G}}(n-w, m-r, k-v)|((n^2/2)^r + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n-w, m)|k^{-1}). \end{aligned} \tag{9.27}$$

Теперь рассмотрим множество $\overline{\mathfrak{G}}^4(n, m, k)$. Представим его в виде

$$\overline{\mathfrak{G}}^4(n, m, k) = \overline{\mathfrak{G}}^{4,1}(n, m, k) \cup \overline{\mathfrak{G}}^{4,2}(n, m, k), \tag{9.28}$$

где

$\overline{\mathfrak{G}}^{4,1}(n, m, k)$ — совокупность графов $\overline{G}$ из $\overline{\mathfrak{G}}^4(n, m, k)$ таких, что любое ребро в $\overline{G}$, инцидентное некоторой вершине из V_3, может быть инцидентно только такой вершине из $V \setminus V_3$, которая смежна с другой вершиной из $V \setminus V_3$;

$\overline{\mathfrak{G}}^{4,2}(n, m, k)$ — совокупность остальных графов из $\overline{\mathfrak{G}}^4(n, m, k)$.

Используя способ получения графов из множества $\overline{\mathfrak{G}}_4^1(n + v, m, k)$, который был описан при исследовании его мощности (заменяя V_1 на V и V на $V \setminus V_3$), убеждаемся, что

$$\begin{aligned} &|\overline{\mathfrak{G}}^{4,1}(n, m, k)| \\ &\sim \sum_{z=\lfloor (4/5)\alpha w \rfloor}^{\lfloor 2\alpha w \rfloor} \frac{(\alpha n)^z}{z! 2^z} \sum_{v=0}^{5} |\overline{\mathfrak{G}}(n-w, m-z, k-v)| R(n-w, w, z, v) \\ &\sim (\text{см. } (9.27)) \sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n-w, m, k)|) \\ &+ o(|\overline{\mathfrak{G}}(n-w, m)|k^{-1}) \sum_{z=\lfloor (4/5)\alpha w \rfloor}^{\lfloor 2\alpha w \rfloor} \frac{1}{z!}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^z \sum_{v=0}^{5} R(n-w, w, z, v). \end{aligned}$$

В свою очередь, нетрудно видеть, что

$$\sum_{v=0}^{5} R(n-w, w, z, v) \sim \binom{\binom{w}{2} + w(n-w-k)}{2} z! \sim (wn)^z.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{G}}^{4,1}(n, m, k)| &\sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n-w, m, k)| \\ &\quad + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n-w, m)|k^{-1})) \sum_{z=\lfloor (4/5)\alpha w \rfloor}^{\lfloor 2\alpha w \rfloor} \frac{(\alpha w)^z}{z!} \\ &\sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n-w, m, k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n-w, m)|k^{-1}))e^{\alpha w}. \end{aligned} \tag{9.29}$$

Повторяя рассуждения, которые применялись при установлении (9.20), убеждаемся, что

$$|\overline{\mathfrak{G}}^{4,2}(n,m,k)| = o(|\overline{\mathfrak{G}}(n-w,m)|e^{\alpha w}k^{-1}). \tag{9.30}$$

Пользуясь (9.28)–(9.30), получаем

$$|\overline{\mathfrak{G}}^{4}(n,m,k)| \sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n-w,m,k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n-w,m)|k^{-1}))e^{\alpha w}. \tag{9.31}$$

Из (9.25), (9.26) и (9.31) следует, что

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n-w,m,k)| \sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}))e^{-\alpha w}. \tag{9.32}$$

Подставляя (9.32) в (9.24), при $n \to \infty$ получаем

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| \sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}))\exp(-(k-s)^2 e^{\alpha}/(2n)). \tag{9.33}$$

Перейдем к завершению доказательства теоремы 1.2. Собирая (9.1), (9.23), (9.33) и пользуясь леммой 3.4, имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{s\geqslant 0} |\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| &= |\overline{\mathfrak{G}}(n,m)| \\
&\sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1})) \sum_{s=\lfloor k-4(k\ln k)^{1/2}\rfloor}^{\lfloor k+4(k\ln k)^{1/2}\rfloor} \exp\Big(-\frac{(s-k)^2 e^{\alpha}}{2n}\Big) \\
&\sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1})) \sum_{s=-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\frac{(s-k)^2 e^{\alpha}}{2n}\Big) \\
&\sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1})) \int_{x=-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\frac{x^2}{2k}\Big)\,dx \\
&= (|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}))\sqrt{2\pi k}.
\end{aligned}$$

Поэтому $|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| \sim |\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|(2\pi k)^{-1/2}$. Отсюда с учетом (9.1), (9.23), (9.33) и (4.1) приходим к утверждению теоремы 1.2.

§ 10. Доказательство теоремы 1.3

Положим

$$x = ne^{-\alpha}, \quad k = \lfloor x \rfloor, \quad \nu = x - k \tag{10.1}$$

и рассмотрим графы из $\overline{\mathfrak{G}}(n+k,m)$. Пусть

$$f(n,m) = (n+k)e^{-\alpha/(1+k/n)} - k. \tag{10.2}$$

Покажем, что

$$|f(n,m)| < 2. \tag{10.3}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}
|f(n,m)| &= |ne^{-\alpha/(1+k/n)} - k| + o(1) \leqslant (\text{см. } (10.1)) \\
&\leqslant |ne^{-\alpha/(1+k/n)} - x| + \nu + o(1) \\
&= |(ne^{\alpha} - ne^{\alpha/(1+k/n)})e^{-\alpha-\alpha/(1+k/n)}| + \nu + o(1).
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{\alpha}{1+k/n} = \alpha(1 + \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i(k/n)^i) = \alpha + O\left(\frac{\alpha k}{n}\right),$$

имеем $\exp(\alpha/(1+k/n)) = \exp(\alpha + O(\alpha k/n)) = e^{\alpha}(1 + O(\alpha k/n))$. Следовательно,

$$|f(n,m)| \leqslant O(\alpha k e^{\alpha})e^{-\alpha-\alpha/(1+k/n)} + \nu + o(1) = \nu + o(1) < 2,$$

т. е. справедливо (10.3).

Далее, согласно лемме 3.1 математическое ожидание числа изолированных вершин для графов из $\mathfrak{G}(n+k,m)$, равное

$$(n+k)\binom{\binom{n+k-1}{2}}{m}\Big/\binom{\binom{n+k}{2}}{m},$$

отличается от $\lfloor (n+x)e^{-\alpha/(1+k/n)}\rfloor$ не более чем на 1. Отсюда и из (10.2), (10.3) следует, что это математическое ожидание отличается от k не более чем на 3. Пользуясь этим фактом и теоремой 1.2, получаем

$$|\mathfrak{G}(n+k,m,k)| \sim (1/\sqrt{2\pi k})|\mathfrak{G}(n+k,m)|.$$

В свою очередь,

$$|\mathfrak{G}(n,m,0)| = |\mathfrak{G}(n+k,m,k)|/\binom{n+k}{k}.$$

Поэтому

$$|\mathfrak{G}(n,m,0)| \sim (1/\sqrt{2\pi k})|\mathfrak{G}(n+k,m)|/\binom{n+k}{k}. \tag{10.4}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{G}(n+k,m)| &= \binom{\binom{n+k}{2}}{m} = \frac{1}{m!}\binom{n+k}{2}^m \prod_{i=0}^{m-1}\left(1 - i/\binom{n+k}{2}\right)\\
&\sim \frac{1}{m!}\binom{n+k}{2}^m \exp\left(-\frac{m^2}{(n+k)(n+k-1)}\right) \sim \frac{1}{m!}\binom{n+k}{2}^m \exp\left(-\frac{m}{n}\right)^2\\
&= \frac{(n+k)^m(n+k-1)^m}{m!2^m}\exp\left(-\frac{m}{n}\right)^2 \sim \frac{(n+k)^{2m}}{m!2^m}\exp\left(-\frac{m}{n} - \left(\frac{m}{n}\right)^2\right)\\
&\sim |\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|e^{\alpha k},
\end{aligned} \tag{10.5}$$

$$\binom{n+k}{k} \sim \frac{n^k}{k!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\left(\frac{en}{k}\right)^k. \tag{10.6}$$

Подставляя (10.5) и (10.6) в (10.4), получаем

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{G}(n,m,0)| &\sim |\mathfrak{G}(n,m)|e^{\alpha k}(k/en)^k = |\mathfrak{G}(n,m)|e^{\alpha k}((x-\nu)/(en))^k\\
&\sim |\mathfrak{G}(n,m)|e^{\alpha k-\nu}(x/(en))^k = (\text{см. } 10.1)) = |\mathfrak{G}(n,m)|e^{-k-\nu}\\
&= |\mathfrak{G}(n,m)|e^{-x} = |\mathfrak{G}(n,m)|\exp(-n\exp(-\alpha))\\
&= |\mathfrak{G}(n,m)|\exp(-n\exp(-2m/n)).
\end{aligned}$$

Тем самым теорема 1.3 доказана.

§ 11. Доказательство теоремы 1.4

Доказательство теоремы 1.4 аналогично доказательству теоремы 1.2, но технически реализуется несколько иначе. Если $|s - ne^{-\alpha}| \leqslant k^{1/4}\ln^2 n$, то согласно лемме 4.2 имеем

$$\begin{aligned}|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| &\sim |\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1})\\ &\sim |\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)|\exp(-(s-k)^2/(2k)) + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}). \quad (11.1)\end{aligned}$$

Для остальных s из интервала $[k-4\sqrt{k\ln k}, k+4\sqrt{k\ln k}]$ будем различать два случая.

Случай 1:

$$k^{1/4}\ln^2 n \leqslant ne^{-\alpha} - s \leqslant 4\sqrt{k\ln k}. \quad (11.2)$$

Случай 2:

$$k^{1/4}\ln^2 n \leqslant s - ne^{-\alpha} \leqslant 4\sqrt{k\ln k}. \quad (11.3)$$

Рассмотрим случай 1. Пусть

$$v = \lfloor ne^{-\alpha}\rfloor - s = k - s, \quad x = \lfloor \tfrac{v}{(1-e^{-\alpha}-\alpha e^{-\alpha})}\rfloor = \lfloor \tfrac{ve^{\alpha}}{e^{\alpha}-1-\alpha}\rfloor. \quad (11.4)$$

Тогда при каждом s вместо графов из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m)$ рассмотрим множество графов из $\overline{\mathfrak{G}}(n+x,m)$. Ясно, что

$$\begin{aligned}|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| &= \tbinom{n}{s}|\overline{\mathfrak{G}}(n+x,m,s+x)|/\tbinom{n+x}{s+x}\\ &= |\overline{\mathfrak{G}}(n+x,m,s+x)|(s/n)^x\prod_{i=1}^{x}\left(\tfrac{1+i/s}{1+i/n}\right). \quad (11.5)\end{aligned}$$

В свою очередь,

$$\left(\tfrac{s}{n}\right)^x = \left(\tfrac{(ne^{-\alpha}-v)}{n}\right)^x = e^{-\alpha x}(1-ve^{\alpha}n^{-1})^x \sim \exp(-\alpha x - xve^{\alpha}n^{-1}), \quad (11.6)$$

$$\prod_{i=1}^{x}\left(\tfrac{1+i/s}{1+i/n}\right) \sim \exp\left(\tfrac{x^2}{2s} - \tfrac{x^2}{2n}\right) \sim \exp\left(\tfrac{x^2(e^{\alpha}-1)}{2n}\right). \quad (11.7)$$

Подставляя (11.6) и (11.7) в (11.5), получаем

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| \sim |\overline{\mathfrak{G}}(n+x,m,s+x)|\exp(-\alpha x - xve^{\alpha}n^{-1} + x^2(e^{\alpha}-1)/(2n)). \quad (11.8)$$

Множество $\overline{\mathfrak{G}}(n+x,m,s+x)$ представим в виде

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n+x,m,s+x) = \bigcup_{i=1}^{4}\overline{\mathfrak{G}}^{i}(n+x,m,s+x), \quad (11.9)$$

где

$\overline{\mathfrak{G}}^1(n+x,m,s+x)$ — совокупность графов $\overline{G}$ из $\overline{\mathfrak{G}}(n+x,m,s+x)$ таких, что вспомогательным вершинам (т. е. вершинам из $V_1 = \{v_{n+1},\dots,v_{n+x}\}$) в $\overline{G}$ инцидентно менее $z_0 = \lfloor \alpha x - 3(\alpha x\ln n)^{1/2}\rfloor$ ребер;

$\overline{\mathfrak{G}}^2(n+x,m,s+x)$ — совокупность графов $\overline{G}$ из $\overline{\mathfrak{G}}(n+x,m,s+x)$ таких, что вспомогательным вершинам в $\overline{G}$ инцидентно более $z_1 = \lfloor \alpha x + 3(\alpha x \ln n)^{1/2} \rfloor$ ребер;

$\overline{\mathfrak{G}}^3(n+x,m,s+x)$ — совокупность графов $\overline{G} \in \overline{\mathfrak{G}}(n+x,m,s+x)$ таких, что вспомогательным вершинам в $\overline{G}$ инцидентно z ребер, $z_0 \leqslant z \leqslant z_1$, а среди таких вершин есть либо менее $w_0 = \lfloor xe^{-z/x} - 4(\lceil xe^{-\alpha} \rceil \ln n)^{1/2} \rfloor$, либо более $w_1 = \lfloor xe^{-z/x} + 4(\lceil xe^{-\alpha} \rceil \ln n)^{1/4} \rfloor$ изолированных вершин;

$\overline{\mathfrak{G}}^4(n+x,m,s+x)$ — совокупность остальных графов.

Сначала оценим сверху мощности множеств $\overline{\mathfrak{G}}^i(n+x,m,s+x)$ при $i = 1,2,3$. Используя способ получения графов, который описан перед (9.7) (заменяя лишь w на x и $s+w$ на $s+x$), при $n \to \infty$ имеем

$$
\begin{aligned}
&|\overline{\mathfrak{G}}^1(n+x,m,s+x)| \\
&\quad < \tfrac{n^{2m}}{2^m} \exp\left(-\tfrac{m}{n} - \tfrac{m^2}{n^2}\right) \sum_{z=0}^{z_0} \tbinom{m}{z} \binom{\binom{x}{2} + xn}{z} z!\, 2^z n^{-2z} \\
&\quad < (\text{см. лемму 3.2}) < |\overline{\mathfrak{G}}(n,m)| z_0 \binom{m}{z_0} \binom{\binom{x}{2} + xn}{z_0} z_0!\, 2^{z_0} n^{-2z_0} \\
&\quad \sim |\overline{\mathfrak{G}}(n,m)| z_0 (2mn^{-2})^{z_0} \binom{\binom{x}{2} + xn}{z_0} \exp(-z_0^2/(2m)) \\
&\quad \sim \frac{1}{z!} |\overline{\mathfrak{G}}(n,m)| z_0 (\alpha x(1 + x/(2n)))^{z_0} \exp(-\alpha x^2 n^{-1}) \\
&\quad < |\overline{\mathfrak{G}}(n,m)| e^{z_0} z_0 (\alpha x(1 + x/(2n)) z_0^{-1})^{z_0} \exp(-\alpha x^2 n^{-1}) \\
&\quad = o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)| n^{-2} \exp(\alpha x - \alpha x^2/(2n))).
\end{aligned}
\tag{11.10}
$$

Аналогично убеждаемся, что

$$
|\overline{\mathfrak{G}}^2(n+x,m,s+x)| = o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)| n^{-2} \exp(\alpha x - \alpha x^2/(2n))). \tag{11.11}
$$

Все графы $\overline{G} \in \overline{\mathfrak{G}}^3(n+x,m,s+x)$ такие, что в $\overline{G}$ имеется z ребер, каждое из которых инцидентно по крайней мере одной вспомогательной вершине и среди этих вершин имеется точно w изолированных вершин, могут быть получены следующим способом.

1. Берется $n+x$ изолированных вершин и среди m отмеченных ребер отбираются $m-z$ ребер. Имеется

$$
\binom{m}{z} \sim \frac{1}{z!} m^z \exp(-z^2/(2m)) \sim \frac{1}{z!} m^z \exp(-\alpha x^2 n^{-1})
$$

возможностей.

2. Отобранные ребра допустимым способом размещаются так, чтобы каждое из них соединяло основные вершины. Число возможностей равно

$$
\binom{\binom{n}{2}}{m-z} (m-z)! \sim (n^2/2)^{m-z} \exp(-mn^{-1} - m^2 n^{-2}) \sim |\overline{\mathfrak{G}}(n,m)| (2n^{-2})^z.
$$

3. Остальные ребра размещаются так, чтобы каждое из них оказалось инцидентным по крайней мере одной вспомогательной вершине и среди

таких вершин осталось w изолированных вершин. Число возможностей обозначим через $P(z,w)$.

Следовательно,

$$|\overline{\mathfrak{G}}^3(n+x,m,s+x)| < 2|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|\exp(-\alpha x^2 n^{-1}) \times \sum_{z=z_0}^{z_1} \frac{1}{z!}(\alpha n^{-1})^z \Bigl(\sum_{w=0}^{w_0} P(z,w) + \sum_{w\geqslant w_1} P(z,w)\Bigr). \tag{11.12}$$

Ясно, что если z ребер размещаются так, чтобы каждое из них оказалось инцидентным по крайней мере одной вспомогательной вершине, то математическое ожидание числа изолированных вспомогательных вершин равно величине

$$x\binom{\binom{x-1}{2}+(x-1)n}{z}\Big/\binom{\binom{x}{2}+xn}{2}$$
$$= x\Bigl(\Bigl(\binom{x-1}{2}+(x-1)n\Bigr)\Big/\Bigl(\binom{x}{2}+xn\Bigr)\Bigr)^z(1+O(z^2x^{-2}n^{-1}))$$
$$= x\Bigl(1-(x+n-1)\Big/\Bigl(\binom{x}{2}+xn\Bigr)\Bigr)^z(1+O(z^2x^{-2}n^{-1}))$$
$$= \exp\Bigl(-z(x+n-1)\Big/\Bigl(\binom{x}{2}+xn\Bigr)+O(zx^{-2})\Bigr)(1+O(z^2x^{-2}n^{-1}))$$
$$= x\exp\Bigl(-z(x+n-1)\Big/\Bigl(\binom{x}{2}+xn\Bigr)\Bigr)+o(1)$$
$$= x\exp\Bigl(-\frac{z}{x}-\frac{z}{2n}+O(n^{-1})\Bigr)+o(1) = x\exp\Bigl(-\frac{z}{x}-\frac{\alpha x}{2n}\Bigr)+o(1).$$

Если $w\leqslant w_0$, то к $n+x$ вершинам добавим $\lfloor xe^{-\alpha}-w\rfloor$ вспомогательных вершин и будем размещать z ребер так, чтобы каждое из них оказалось инцидентно по крайней мере одной вспомогательной вершине. Пользуясь доказательствами лемм 3.3 и 3.4, показываем, что справедливо

$$\sum_{w=0}^{w_0} P(z,w) = \binom{\binom{x}{2}+nx}{z} z!\,o(k^{-3}) = o\Bigl(\Bigl(\binom{x}{2}+nx\Bigr)^z k^{-3}\Bigr). \tag{11.13}$$

Далее, если $w > w_1$, то вместо множества вспомогательных вершин V_1 следует использовать множество вспомогательных вершин $V_3=\{v_{n+1},\dots, v_{n+x-y}\}$, где $y=\lfloor w-xe^{-\alpha}\rfloor$, и z ребер следует размещать так, чтобы каждое из них оказалось инцидентным по крайней мере одной вершине из V_3. Используя соображения из доказательств лемм 3.3 и 3.4, убеждаемся, что

$$\sum_{w\geqslant w_1} P(z,w) = o\Bigl(\Bigl(\binom{x}{2}+nx\Bigr)^z k^{-3}\Bigr). \tag{11.14}$$

Подставляя (11.13) и (11.14) в (11.12), получаем

$$|\overline{\mathfrak{G}}^3(n+x,m,s+x)|$$
$$= o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-2}\exp(-\alpha x^2n^{-1}))\sum_{z=z_0}^{z_1}\Bigl(\frac{1}{z!}\Bigl(\binom{x}{2}+nx\Bigr)^z\Bigr)$$
$$= o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-2}\exp(\alpha x-\alpha x^2/(2n))). \tag{11.15}$$

Рассмотрим множество $\overline{\mathfrak{G}}^4(n+x,m,s+x)$. Пусть $\overline{\mathfrak{G}}^4(n+x,m,s+x,z)$ обозначает совокупность графов $\overline{G} \in \overline{\mathfrak{G}}^4(n+x,m,s+x)$ таких, что число ребер в $\overline{G}$, каждое из которых инцидентно по крайней мере одной вспомогательной вершине, равно z. Тогда

$$|\overline{\mathfrak{G}}^4(n+x,m,s+x)| = \sum_{z=z_0}^{z_1} |\overline{\mathfrak{G}}^4(n+x,m,s+x,z)|. \tag{11.16}$$

Если $\overline{G}$ — произвольный граф из $\overline{\mathfrak{G}}^4(n+x,m,s+x,z)$, то через $\overline{G}^1$ обозначим граф, получаемый из $\overline{G}$ после удаления из него тех ребер, каждое из которых инцидентно по крайней мере одной вспомогательной вершине. Введем обозначения

- ◇ $\overline{\mathfrak{G}}_1^4(n+x,m,s+x,z)$ — совокупность графов $\overline{G} \in \overline{\mathfrak{G}}^4(n+x,m,s+x,z)$ таких, что среди основных вершин в $\overline{G}^1$ содержится r изолированных вершин, где $|r - n\exp(-2(m-z)/n)| > 4(ne^{-\alpha}\ln n)^{1/2}$;
- ◇ $\overline{\mathfrak{G}}_2^4(n+x,m,s+x,z)$ — совокупность графов $\overline{G} \in \overline{\mathfrak{G}}(n+x,m,s+x,z) \setminus \overline{\mathfrak{G}}_1^4(n+x,m,s+x,z)$ таких, что в $\overline{G}$ имеется u ребер, каждое из которых инцидентно как вспомогательной, так и основной вершине, последняя является изолированной в $\overline{G}^1$ и $|u - ze^{-\alpha}| \geqslant 4(\lceil ze^{-\alpha}\rceil \ln n)^{1/2}$;
- ◇ $\overline{\mathfrak{G}}_3^4(n+x,m,s+x,z)$ — совокупность графов $\overline{G}$ из $\overline{\mathfrak{G}}^4(n+x,m,s+x,z) \setminus \cup_{i=1}^2 \overline{\mathfrak{G}}_i^4(n+x,m,s+x,z)$ таких, что в $\overline{G}$ имеется не менее $t = \lfloor(\alpha\ln n)^2\rfloor$ ребер, каждое из которых инцидентно произвольным вершинам v_i, v_j таким, что $v_i \in V$, $v_j \in V_1$, причем v_i изолирована в $\overline{G}^1$ и имеет степень не менее 2 в $\overline{G}$.

В силу леммы 3.4 справедливо

$$|\overline{\mathfrak{G}}_1^4(n+x,m,s+x,z)| = o(|\overline{\mathfrak{G}}(n+x,m)|k^{-2}). \tag{11.17}$$

Далее, нетрудно видеть, что

$$|\overline{\mathfrak{G}}_2^4(n+x,m,s+x,z)| = o(|\overline{\mathfrak{G}}(n+x,m)|k^{-2}). \tag{11.18}$$

Наконец, все графы из $\overline{\mathfrak{G}}_3^4(n+x,m,s+x,z)$ могут быть получены следующим способом.

1. Берется $n+x$ изолированных вершин и среди m помеченных ребер отбираются $m-z$ ребер. Имеется $\binom{m}{z}$ возможностей.

2. Отобранные ребра допустимым способом размещаются так, чтобы каждое из них соединяло основные вершины. Получается граф $\overline{G}^1$. Число возможностей меньше величины $|\overline{\mathfrak{G}}(n,m-z)|$.

3. Среди r основных вершин, которые оказались изолированными в $\overline{G}^1$, отмечаются $u = \lfloor t/2 \rfloor$ вершин, а среди оставшихся ребер отбираются t ребер. Имеется $\binom{r}{u}\binom{z}{t} < \frac{r^u z^t}{u!\,t!}$ возможностей.

4. Отобранные ребра размещаются так, чтобы каждое из них было инцидентно как вспомогательной, так и основной вершине, отмеченной в п. 3. Имеется не более $(xu)^t$ возможностей.

5. Остальные ребра размещаются допустимым способом так, чтобы каждое из них оказалось инцидентно по крайней мере одной вспомогательной вершине. Число возможностей меньше величины

$$\binom{\binom{x}{2}+xn}{z-t}(z-t)! = \prod_{i=0}^{z-t-1}\left(\binom{x}{2}+xn-i\right) < \frac{1}{(xn-z)^t}\prod_{i=0}^{z-1}\left(\binom{x}{2}+xn-i\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}|\overline{\mathfrak{G}}_3^4(n+x,m,s+x,z)| &< |\overline{\mathfrak{G}}(n,m-z)|\binom{m}{z}\prod_{i=0}^{z-1}\left(\binom{x}{2}+xn-i\right)\frac{(xz)^t r^u u^t}{t!(xn-z)^t u!}\\ &< |\overline{\mathfrak{G}}(n+x,m)|\frac{(xz)^t r^{t/2}(t/2)^t}{[t/2]!}\\ &< |\overline{\mathfrak{G}}(n+x,m)|(c/\ln n)^{t/2} = o(|\overline{\mathfrak{G}}(n+x,m)|n^{-3}). \qquad (11.19)\end{aligned}$$

Пусть

$$\overline{\mathfrak{G}}_4^4(n+x,m,s+x,z) = \overline{\mathfrak{G}}^4(n+x,m,s+x,z)\setminus\bigcup_{i=1}^{3}\overline{\mathfrak{G}}_i^4(n+x,m,s+x,z). \qquad (11.20)$$

Все графы из $\overline{\mathfrak{G}}_4^4(n+x,m,s+x,z)$ (и только они) могут быть получены следующим способом.

1. Осуществляются первые два пункта при получении графов из $\overline{\mathfrak{G}}_3^4(n+x,m,s+x,z)$. Число возникающих графов $\overline{G}^1$, в которых среди основных вершин содержится по r изолированных вершин, равно $\binom{m}{z}|\overline{\mathfrak{G}}(n,m$-$z,r)|$.

2. Остальные ребра размещаются в $\overline{G}^1$ так, чтобы получился граф из $\overline{\mathfrak{G}}_4^4(n+x,m,s+x,z)$, в котором среди вспомогательных вершин содержится w изолированных вершин, где $|w-xe^{-z/x}| \leqslant 4(xe^{-z/x}\ln n)^{1/2}$. Число возможностей обозначим через $P(z,r,w)$.

Таким образом,

$$|\overline{\mathfrak{G}}_4^4(n+x,m,s+x,z)| = \binom{m}{z}\sum P(z,r,w)|\overline{\mathfrak{G}}(n,m-z,r)|, \qquad (11.21)$$

где суммирование осуществляется по всем допустимым r и w. Ясно, что r обязано быть таким, чтобы выполнялось неравенство

$$|s+x-r-xe^{-z/x}+ze^{-\alpha}| \leqslant 4(xe^{-z/x}\ln n)^{1/2}+4(ze^{-\alpha}\ln n)^{1/2}+(\alpha\ln n)^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}r &= s+x-xe^{-z/x}+ze^{-\alpha}+o(k^{1/4}\ln^2 n) = s+x(1-e^{-\alpha}-\alpha e^{-\alpha})+\alpha xe^{-\alpha}\\ &+ze^{-\alpha}+o(k^{1/4}\ln^2 n) = (\text{см. (11.4)}) = s+v+\alpha xe^{-\alpha}+ze^{-\alpha}+o(k^{1/4}\ln^2 n)\\ &= ne^{-\alpha}+2ze^{-\alpha}+o(k^{1/4}\ln^2 n) = ne^{-\alpha_2}+o(k^{1/4}\ln^2 n),\end{aligned}$$

где

$$\alpha_2 = 2(m-z)/n. \qquad (11.22)$$

Из леммы 4.2 следует, что при любом таком r

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m-z,r)| \sim |\bar{\mathfrak{G}}(n,m-z,\lfloor ne^{-\alpha_2}\rfloor)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m-z)|k^{-2}). \quad (11.23)$$

Подставляя (11.23) в (11.21), получаем

$$|\overline{\mathfrak{G}}_4^4(n+x,m,s+x,z)| \sim \binom{m}{z}|\overline{\mathfrak{G}}(n,m-z,\lfloor ne^{-\alpha_2}\rfloor)|\sum P(z,r,w) + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n+x,m)|k^{-2}).$$

В свою очередь, из (11.17)–(11.20) следует, что

$$\sum P(z,r,w) \sim \binom{\binom{x}{2}+nx}{z}z! \sim \left(\binom{x}{2}+nx\right)^z \sim (nx)^z\exp(xz/(2n)) \sim (nx)^z\exp(\alpha x^2/(2n)).$$

Поэтому

$$|\overline{\mathfrak{G}}_4^4(n+x,m,s+x,z)| \sim |\overline{\mathfrak{G}}(n,m-z,\lfloor ne^{-\alpha}\rfloor)|\binom{m}{z}(nx)^z\exp(\alpha x^2/(2n)) + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n+x,m)|k^{-1}). \quad (11.24)$$

Покажем, что при рассматриваемых z

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m-z,\lfloor ne^{-\alpha_2}\rfloor)|n^{2z}2^{-z} \sim |\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-2}). \quad (11.25)$$

Все графы из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)$ можно получить следующим способом.

1. Берется n изолированных вершин и первые $m-z$ ребер размещаются так, чтобы число изолированных вершин в получаемом графе $\overline{G}^1$ оказалось равным v, где $v \in [k,k+z]$. Число таких графов равно $|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,m-z,v)|$.

2. Остальные z ребер добавляются к $\overline{G}^1$ так, чтобы в полученном графе оказалось k изолированных вершин. Число возможностей равно $|\overline{\mathfrak{G}}(n,m-z,v,z,s)|$.

Следовательно,

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| = \sum_{v=k}^{k+z}|\overline{\mathfrak{G}}(n,m-z,v)|\cdot|\overline{\mathfrak{G}}(n,m-z,r,z,k)|.$$

Положим $v_1 = \lfloor ne^{-\alpha_2}\rfloor$, где α_2 взято из (11.22). Тогда, как и при исследовании множества $\overline{\mathfrak{G}}_4^4(n+x,m,s+x,z)$, достаточно ограничиться рассмотрением только таких v, которые удовлетворяют неравенству $|v-v_1| \leqslant o(k^{1/4}\ln^2 n)$. Вместе с тем при таких v, как следует из леммы 4.2, справедливо соотношение

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m-z,v)| \sim |\overline{\mathfrak{G}}(n,m-z,\lfloor ne^{-\alpha_2}\rfloor)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m-z)|k^{-1}).$$

Отсюда и из (11.25) получаем

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| \sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n,m-z,\lfloor ne^{-\alpha_2}\rfloor)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m-z)|k^{-1})) \times \sum_{|v-v_1|\leqslant o(k^{1/4}\ln^2 n)}|\overline{\mathfrak{G}}(n,m-z,v,z,k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}). \quad (11.26)$$

Далее, используя доказательство леммы 4.4, убеждаемся, что

$$\sum_{|v-v_1|\leqslant o(k^{1/k}\ln^2 n)} |\overline{\mathfrak{G}}(n,m-z,v,z,k)| \sim n^{2z}2^{-z}. \qquad (11.27)$$

Из (11.26) и (11.27) следует (11.25). Подставляя (11.25) в (11.24) и пользуясь (11.16)–(11.19), получаем

$$\begin{aligned}
&|\overline{\mathfrak{G}}^4(n+x,m,s+x)| \\
&\sim (|\overline{G}(n,m,k)| + o(|\overline{G}(n,m)|k^{-1}))\exp(\alpha x^2/(2n)) \sum_{z=z_0}^{z_1} \binom{m}{z}(2xn^{-1})^z \\
&\qquad + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}\exp(\alpha x - \alpha x^2/(2n))).
\end{aligned}$$

Поскольку при рассматриваемых z

$$\begin{aligned}
\binom{m}{z} &\sim \frac{1}{z!}m^z\exp(-z^2/(2m)) \sim \frac{1}{z!}m^z\exp(-\alpha^2x^2/(2m)) \\
&= \frac{1}{z!}m^z\exp(-\alpha x^2 n^{-1}), \qquad (11.28)
\end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned}
&|\overline{\mathfrak{G}}^4(n+x,m,s+x)| \\
&\sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}))\exp(-\alpha x^2/(2n)) \sum_{z=z_0}^{z_1} \frac{1}{z!}(\alpha x)^z \\
&\qquad + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}\exp(\alpha x - \alpha x^2/(2n))) \\
&\sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}))\exp(\alpha x - \alpha x^2/(2n)). \qquad (11.29)
\end{aligned}$$

Собирая (11.8)–(11.11), (11.15) и (11.29), получаем

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| \sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}))\exp\Big(-\frac{xve^\alpha}{n} + \frac{x^2(e^\alpha-1-\alpha)}{2n}\Big).$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned}
&\exp\Big(-\frac{xve^\alpha}{n} + \frac{x^2(e^\alpha-1-\alpha)}{2n}\Big) \sim (\text{см. } (11.4)) \\
&\sim \exp\Big(-\frac{xve^\alpha}{n} + \frac{xve^\alpha}{2n}\Big) \sim \exp\Big(-\frac{e^\alpha(ne^{-\alpha}-s)^2}{(2n(1-e^{-\alpha}-\alpha e^{-\alpha}))}\Big). \qquad (11.30)
\end{aligned}$$

Поэтому при выполнении (11.2) имеем

$$\begin{aligned}
&|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| \sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| \\
&\qquad + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}))\exp\Big(-\frac{e^\alpha(ne^{-\alpha}-s)^2}{2n(1-e^{-\alpha}-\alpha e^{-\alpha})}\Big). \qquad (11.31)
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай 2. Пусть

$$v = s - \lfloor ne^{-\alpha}\rfloor = s - k, \quad x = \Big\lfloor \frac{v}{1-e^{-\alpha}-\alpha e^{-\alpha}} \Big\rfloor = \Big\lfloor \frac{ve^\alpha}{e^\alpha-1-\alpha} \Big\rfloor. \qquad (11.32)$$

Поскольку

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| = |\overline{\mathfrak{G}}(n-s,m,0)|\tbinom{n}{s},$$

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n-s,m,0)| = |\overline{\mathfrak{G}}(n-x,m,s-x)|/\tbinom{n-x}{s-x},$$

имеем

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| = |\overline{\mathfrak{G}}(n-x,m,s-x)|\tbinom{n}{s}/\tbinom{n-x}{s-x}$$
$$= |\overline{\mathfrak{G}}(n-x,m,s-x)|(n/s)^x \prod_{i=1}^{x}\left(\tfrac{1-i/n}{1-i/s}\right).$$

Как и в (7.6), (7.7), убеждаемся, что

$$(n/s)^x \sim \exp(\alpha x - xve^{\alpha}n^{-1}),$$

$$\prod_{i=1}^{x}\tfrac{1-i/n}{1-i/s} \sim \exp(x^2(e^{\alpha}-1)/(2n)).$$

Поэтому

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| \sim |\overline{\mathfrak{G}}(n-x,m,s-x)|\exp(\alpha x - xve^{\alpha}n^{-1} + x^2(e^{\alpha}-1)/(2n)). \tag{11.33}$$

Выразим мощность множества $\overline{\mathfrak{G}}(n-x,m,s-x)$ через мощность множества $\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)$. В множестве $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$ первые $n-x$ вершин назовем *основными*, а остальные — *запасными*. Множество $\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)$ представим в виде

$$\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k) = \bigcup_{i=1}^{4}\overline{\mathfrak{G}}_i(n,m,k), \tag{11.34}$$

где

$\overline{\mathfrak{G}}_1(n,m,k)$ — совокупность графов $\overline{G}\in\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)$ таких, что запасным вершинам в $\overline{G}$ инцидентно менее $z_0=\lfloor \alpha x - 3(\alpha x\ln n)^{1/2}\rfloor$ ребер;

$\overline{\mathfrak{G}}_2(n,m,k)$ — совокупность графов $\overline{G}\in\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)$ таких, что запасным вершинам в $\overline{G}$ инцидентно более $z_1=\lfloor \alpha x + 3(\alpha x\ln n)^{1/2}\rfloor$ ребер;

$\overline{\mathfrak{G}}_3(n,m,k)$ — совокупность графов $\overline{G}\in\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)$ таких, что запасным вершинам в $\overline{G}$ инцидентно z ребер, $z_0\leqslant z\leqslant z_1$, а среди таких вершин есть либо менее $w_0=\lfloor xe^{-z/x} - 4(\lceil xe^{-\alpha}\rceil\ln n)^{1/2}\rfloor$, либо более $w_1=\lfloor xe^{-z/x} + 4(\lceil xe^{-\alpha}\rceil\ln n)^{1/2}\rfloor$ изолированных вершин;

$\overline{\mathfrak{G}}_4(n,m,k)$ — совокупность остальных графов из $\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)$.

Ясно, что

$$|\overline{\mathfrak{G}}_1(n,m,k)| = \sum_{z=0}^{z_0}\tbinom{m}{z}\binom{\binom{x}{2}+x(n-x)}{z}z!\binom{\binom{n-x}{2}}{m-z}(m-z)!$$
$$= m!\sum_{z=0}^{z_0}\binom{\binom{x}{2}+x(n-x)}{z}\binom{\binom{n-x}{2}}{m-z} < m!z_0\binom{\binom{x}{2}+x(n-x)}{z_0}\binom{\binom{n-x}{2}}{m-z_0}$$

$$< m!\, z_0 \binom{\binom{x}{2} + x(n-x)}{\lfloor \alpha x \rfloor} \binom{\binom{n-x}{2}}{m - \lfloor \alpha x \rfloor} \prod_{i=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor - z_0 - 1} (\alpha x - i)$$

$$\times \left(\left(\binom{n-x}{2} - m + \alpha x \right) \Big/ \left(\left(\binom{x}{2} + x(n-x) - \alpha x \right) (m - \alpha x) \right) \right)^{\lfloor \alpha x \rfloor - z_0}$$

$$< |\overline{\mathfrak{G}}(n,m)| z_0 \left(\binom{n-x}{2} \alpha x / (x(n-x)m) \right)^{\lfloor \alpha x \rfloor - z_0} \prod_{i=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor - z_0 - 1} \left(1 - \frac{i}{\alpha x} \right)$$

$$\sim |\overline{\mathfrak{G}}(n,m)| z_0 \prod_{i=0}^{\lfloor \alpha x \rfloor - z_0 - 1} \left(1 - \frac{i}{\alpha x} \right) = o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)| n^{-2}). \quad (11.35)$$

Аналогично доказываем, что

$$|\overline{\mathfrak{G}}_2(n,m,k)| = o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)| n^{-2}). \quad (11.36)$$

Далее, воспользовавшись способом получения графов, описанным перед (11.12) (заменяя $n + x$ на n, n на $n - x$ и вспомогательные вершины на запасные), получаем

$$|\overline{\mathfrak{G}}_3(n,m,k)| = o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)| k^{-2}). \quad (11.37)$$

Наконец, множество $\overline{\mathfrak{G}}_4(n,m,k)$ представим в виде

$$\overline{\mathfrak{G}}_4(n,m,k) = \bigcup_{i=1}^{4} \overline{\mathfrak{G}}_{4,i}(n,m,k),$$

а множество $\overline{\mathfrak{G}}_{4,4}(n,m,k)$ — в виде

$$\overline{\mathfrak{G}}_{4,4}(n,m,k) = \bigcup_{z=z_0}^{z_1} \overline{\mathfrak{G}}_{4,4}(n,m,k,z)$$

аналогично тому, как в первом случае разбивались множества $\overline{\mathfrak{G}}^4(n + x, m, s + x)$ и $\overline{\mathfrak{G}}_4^4(n + x, m, s + x)$. Повторяя рассуждения, использованные при установлении (11.17)–(11.19) и (11.24), убеждаемся, что при $i = 1,2,3$

$$|\overline{\mathfrak{G}}_{4,i}(n,m,k)| = o(|\overline{\mathfrak{G}}(n;m)| k^{-1}), \quad (11.38)$$

$$|\overline{\mathfrak{G}}_{4,4}(n,m,k,z)| \sim |\overline{\mathfrak{G}}(n-x, m-z, \lfloor (n-x) e^{-2(m-z)/(n-x)} \rfloor)|$$
$$\times \binom{m}{z} \left(\binom{x}{2} + x(n-x) \right)^z + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)| k^{-1}). \quad (11.39)$$

Ясно, что

$$\binom{m}{z} \left(\binom{x}{2} + x(n-x) \right)^z \sim (\text{см. } (11.28)) \sim \frac{1}{z!} (mxn)^z \exp\left(-\frac{z^2}{2m} - \frac{xz}{2n} \right)$$
$$\sim \frac{1}{z!} (mxn)^z \exp\left(-\frac{3\alpha x^2}{2n} \right). \quad (11.40)$$

Кроме того, как и для (11.25), нетрудно показать, что

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n-x, m-z, \lfloor (n-x)e^{-2(m-z)/(n-x)}\rfloor)|(n-x)^{2z}2^{-z}$$
$$\sim |\overline{\mathfrak{G}}(n-x, m, \lfloor (n-x)e^{-2m/(n-x)}\rfloor)| \sim |\overline{\mathfrak{G}}(n-x, m, s-x)|. \quad (11.41)$$

Пользуясь (11.39)–(11.41), получаем

$$|\overline{\mathfrak{G}}_4(n,m,k)| \sim |\overline{\mathfrak{G}}(n-x, m, s-x)| \exp\Big(-\tfrac{3\alpha x^2}{2n}\Big)$$
$$\times \sum_{z=z_0}^{z_1} \frac{1}{z!}\Big(\tfrac{2mxn}{(n-x)^2}\Big)^z + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}).$$

Поскольку

$$\sum_{z=z_0}^{z_1} \frac{1}{z!}\Big(\tfrac{2mxn}{(n-x)^2}\Big)^z = \sum_{z=z_0}^{z_1} \frac{1}{z!}\Big(\tfrac{\alpha x}{(1-x/n)^2}\Big)^z$$
$$\sim \exp\Big(\tfrac{\alpha x}{(1-x/n)^2}\Big) \sim \exp(\alpha x + 2\alpha x n^{-1}),$$

имеем

$$|\overline{\mathfrak{G}}_4(n,m,k)| \sim (\text{см. (11.38)–(11.40)}) \sim |\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)|$$
$$\sim |\overline{\mathfrak{G}}(n-x, m, s-x)| \exp(\alpha x + \alpha x^2/(2n)) + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}).$$

Отсюда и из (11.34)–(11.37) следует, что

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n-x, m, s-x)| \sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)|$$
$$+ o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}))\exp(-\alpha x - \alpha x^2/(2n)). \quad (11.42)$$

Подставляя (11.42) в (11.33), при выполнении (11.3) получаем

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| \sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)|$$
$$+ o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}))\exp\Big(-\tfrac{xve^\alpha}{n} + \tfrac{x^2(e^\alpha-1-\alpha)}{2n}\Big) \sim (\text{см. (11.32)})$$
$$\sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}))\exp\Big(-\tfrac{e^\alpha(s-ne^{-\alpha})^2}{2n(1-e^{-\alpha}-\alpha e^{-\alpha})}\Big). \quad (11.43)$$

Перейдем к завершению доказательства теоремы 1.4. Собирая (11.1), (11.31), (11.43) и пользуясь леммой 3.4, имеем

$$\sum_{s\geqslant 0} |\overline{\mathfrak{G}}(n,m,s)| = |\overline{\mathfrak{G}}(n,m) \sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)|$$
$$+ o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1})) \sum_{s=\lfloor k-4(k\ln k)^{1/2}\rfloor}^{\lfloor k+4(k\ln k)^{1/2}\rfloor} \exp\Big(-\tfrac{(s-k)^2e^\alpha}{2n(1-e^{-\alpha}-\alpha e^{-\alpha})}\Big)$$
$$\sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1})) \sum_{s=-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\tfrac{(s-k)^2}{2k(1-e^{-\alpha}-\alpha e^{-\alpha})}\Big)$$
$$\sim (|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1})) \int_{x=-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\tfrac{x^2}{2k(1-e^{-\alpha}-\alpha e^{-\alpha})}\Big)\,dx$$
$$= (|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| + o(|\overline{\mathfrak{G}}(n,m)|k^{-1}))\sqrt{2\pi k(1-e^{-\alpha}-\alpha e^{-\alpha})}.$$

Поэтому

$$|\overline{\mathfrak{G}}(n,m,k)| \sim |\overline{\mathfrak{G}}(n,m)| \frac{1}{\sqrt{2\pi k(1-\mathrm{e}^{-\alpha}-\alpha\mathrm{e}^{-\alpha})}}.$$

Пользуясь этим фактом, а также (11.1), (11.31), (11.43), получаем утверждение теоремы 1.4.

§ 12. Доказательство теоремы 1.5

Пусть $f(x) = x - (x-1)e^{\alpha/x}$. Поскольку $f(1) > 0$ и $f(\alpha/(\alpha-1)) = 1 + 1/(\alpha-1) - e^{\alpha-1}/(\alpha-1) < 1 + 1/(\alpha-1) - (1+\alpha-1)/(\alpha-1) = 0$, то в интервале $[1, \alpha/(\alpha-1)]$ имеется по крайней мере одно x_0 такое, что $f(x_0) = 0$. Убедимся в том, что такое x_0 единственно. В самом деле, первая и вторая производные функции $f(x)$ равны $f'(x) = 1 + e^{\alpha/x}(\alpha x^{-1} - \alpha x^{-2} - 1)$, $f''(x) = \alpha x^{-3} e^{\alpha/x}(2 + \alpha x^{-1} - \alpha)$. Так как $2 + \alpha x^{-1} - \alpha > 0$ при любом $x \in [1, \alpha/(\alpha-1)]$, то $f''(x) > 0$ при таких x. Поэтому в указанном интервале функция $f'(x)$ возрастает. Вместе с тем

$$\begin{aligned} f'(\alpha/(\alpha-1)) &= 1 + e^{\alpha-1}(\alpha - 2 - (\alpha-1)^2\alpha^{-1}) \\ &= 1 - \alpha^{-1}e^{\alpha-1} < 1 - \alpha^{-1}(1 + \alpha - 1 + (\alpha-1)^2/2) < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, в интервале $[1, \alpha/(\alpha-1)]$ функция $f(x)$ убывает, и поэтому имеется только одно x_0 такое, что $f(x_0) = 0$, т. е.

$$x_0 e^{-\alpha/x_0} = x_0 - 1. \tag{12.1}$$

Далее, пусть $y = \lfloor nx_0 \rfloor$ и $\varphi(y)$ обозначает разность между математическим ожиданием числа изолированных вершин в случайном графе из $\overline{\mathfrak{G}}(y,m)$ и величиной $y - n$. Тогда

$$\varphi(y) = y \binom{\binom{y-1}{2}}{m} \Big/ \binom{\binom{y}{2}}{m} - y + n.$$

Отсюда и из леммы 3.1 следует, что если $\alpha \in [2, (2/3)\ln n]$, то $|\varphi(y)| \leqslant |y\mathrm{e}^{-2m/y} - y + n| + 1$. Пусть $\varepsilon = nx_0 - \lfloor nx_0 \rfloor$. Тогда при таких α имеем

$$\begin{aligned} |\varphi(y)| &\leqslant |nx_0 e^{-2m/(nx_0 - \varepsilon)} - nx_0 + n| + O(1) \\ &= |nx_0 \exp\left(-2m(nx_0)^{-1}(1 + O(\varepsilon/(nx_0)))\right) - nx_0 + n| + O(1) \\ &= |nx_0 e^{-\alpha/x_0}(1 + O(\varepsilon m n^{-2})) - nx_0 + n| + O(1) \\ &= |nx_0 e^{-\alpha/x_0} - nx_0 + n| + O(1) = (\text{см. } (12.1) = O(1). \end{aligned} \tag{12.2}$$

Пользуясь (12.2) и теоремой 1.4, получаем

$$|\mathfrak{G}(y, m, y-n)| \sim |\mathfrak{G}(y,m)| \sqrt{2\pi y e^{-\alpha_3}(1 - e^{-\alpha_3} - \alpha e^{-\alpha_3})},$$

где $\alpha_3 = 2m/y = 2m/\lfloor nx \rfloor \sim \alpha/x$. Отсюда и из соотношения $|\mathfrak{G}(n,m,0)| = |\mathfrak{G}(y,m)|/\binom{y}{y-n}$ следует утверждение теоремы 1.5 при $\alpha \in [2, (2/3)\ln n]$.

Справедливость теоремы 1.5 при $\alpha \in [1 + 2n^{-1/3}/\ln n, 2]$ устанавливается аналогичным способом. Заметим лишь, что лемма 3.1 остается справедливой до ограничения $\alpha \in [(n^{1/3}\ln n)^{-1}, \ln n]$.

§ 13. Доказательство теоремы 1.6

Множество $\mathfrak{G}(n,m,0)$ представим в виде

$$\mathfrak{G}(n,m,0) = \mathfrak{G}_1(n,m,0) \cup \mathfrak{G}_2(n,m,0), \tag{13.1}$$

где $\mathfrak{G}_1(n,m,0)$ — совокупность графов из $\mathfrak{G}(n,m,0)$, в каждом из которых нет циклов и отсутствуют компоненты связности более чем с 4 вершинами; $\mathfrak{G}_2(n,m,0)$ — совокупность остальных графов из $\mathfrak{G}(n,m,0)$. Сначала найдем асимптотику для числа графов из $\mathfrak{G}_1(n,m,0)$.

Обозначим через $\mathfrak{G}_1(n,m,0,r)$ совокупность графов из $\mathfrak{G}_1(n,m,0)$, в которых содержится точно по r 4-вершинных компонент связности. Ясно, что в любом графе из $\mathfrak{G}_1(n,m,0,r)$ имеется точно $2n-3m+r$ 2-вершинных и $2m-n-2r$ 3-вершинных компонент связности. Кроме того, $\mathfrak{G}_1(n,m,0,r)$ непусто только при таких r, когда $0 \leqslant r \leqslant \lfloor (1/2)(2m-n) \rfloor$. Все графы из $\mathfrak{G}_1(n,m,0,r)$ (и только они) могут быть получены следующим способом.

1. Из n вершин отбираются $4r$ вершин. Имеется $\binom{n}{4r}$ возможностей.
2. Отобранные вершины соединяются $3r$ ребрами так, чтобы полученный граф с множеством этих вершин являлся лесом, состоящим из 4-вершинных деревьев. Имеется $\frac{(4r)!2^r}{r!\,3^r}$ возможностей.
3. Из оставшихся вершин отбираются $4n-6m+2r$ вершин. Имеется $\binom{n-4r}{4n-6m+2r}$ возможностей.
4. Вершины, отобранные в п. 3, соединяются $2n-3m+r$ ребрами так, чтобы степень каждой такой вершины оказалась равной 1. Имеется $\frac{(4n-6m+2r)!}{(2n-3m+r)!\,2^{2n-3m+r}}$ возможностей.
5. Остальные вершины, число которых равно $6m-3n-6r$, соединяются $2(2m-n-2r)$ ребрами так, чтобы полученный граф с множеством этих вершин являлся лесом, состоящим из 3-вершинных деревьев. Имеется $\frac{(6m-3n-6r)!}{(2m-n-2r)!2^{2m-n-2r}}$ возможностей.

Следовательно,

$$|\mathfrak{G}_1(n,m,0,r)| = n!/(r!(2n-3m+r)!(2m-n-2r)!2^{n-m-2r}3^r). \tag{13.2}$$

Поэтому $|\mathfrak{G}_1(n,m,0)| = n!2^{m-n}\sum_{r=0}^{\lfloor (1/2)(2m-n)\rfloor} f(r)$, где $f(r) = 4^r/(r!(2n-3m+r)!(2m-n-2r)!3^r)$. Поскольку при $m \in [\lceil n/2 \rceil, n/2 + n^{2/3}/\ln n]$, $r > (2m-n)^2 n^{-1}\ln n$ и $n \to \infty$ справедливо соотношение

$$\frac{f(r+1)}{f(r)} = \frac{4(2m-n-2r)(2m-n-2r-1)}{3(r+1)(2n-3m+r+1)} < \frac{4(2m-n)^2}{3r(2n-3m)} = o(1),$$

имеем

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{G}_1(n,m,0)| &\sim n!2^{m-n}\sum_{r=0}^{(2m-n)^2n^{-1}\ln n} \frac{4^r}{r!(2n-3m+r)!(2m-n-2r)!3^r} \\
&\sim \frac{n!}{(2n-3m)!(2m-n)!2^{n-m}} \sum_{r=0}^{(2m-n)^2n^{-1}\ln n} \frac{4^r(2m-n)^{2r}}{r!(2n-3m)^r 3^r} \\
&\sim \frac{n!}{(2n-3m)!(2m-n)!2^{n-m}} \exp\left(\frac{4(2m-n)^2}{3(2n-3m)}\right) \\
&\sim \frac{n!}{(2n-3m)!(2m-n)!2^{n-m}} \exp((8/3)(2m-n)^2n^{-1})).
\end{aligned} \tag{13.3}$$

Теперь оценим сверху мощность множества $\mathfrak{G}_2(n,m,0)$. Обозначим через $\mathfrak{G}_2(n,m,0,r,s,w)$ совокупность графов G из $\mathfrak{G}_2(n,m,0)$ таких, что в G содержится точно r 4-вершинных, s 2-вершинных и w 3-вершинных компонент связности без циклов. Все графы из $\mathfrak{G}_2(n,m,0,r,s,w)$ могут быть получены следующим способом.

1. Из n вершин отбираются $4r+2s+3w$ вершин. Имеется $\binom{n}{4r+2s+3w}$ возможностей.

2. Отобранные вершины соединяются $3r+s+2w$ ребрами так, чтобы полученный граф с множеством этих вершин являлся лесом, состоящим из r 4-вершинных, s 2-вершинных и w 3-вершинных деревьев. Как и выше убеждаемся в том, что число возможностей равно $\frac{(4r+2s+3w)!}{r!s!w!2^{s+w-r}3^r}$.

3. Остальные вершины соединяются $n-3r-s-2w$ ребрами произвольным способом. Число возможностей не превосходит величины

$$\binom{\binom{n-4r-2s-3w}{2}}{m-3r-s-2w} < \frac{(n-4r-2s-3w)^{2(m-3r-s-2w)}}{(m-3r-s-2w)!2^{m-3r-s-2w}}.$$

Следовательно,

$$|\mathfrak{G}_2(n,m,0,r,s,w)| < \frac{n!(n-4r-2s-3w)^{2(m-3r-s-2w)}}{r!s!w!(n-4r-2s-3w)!(m-3r-s-2w)!3^r2^{m-4r-w}} = \varphi(s,w). \quad (13.4)$$

Поскольку $r \leqslant O(n^{2/3}/\ln n)$, $s \sim n$, $n-4r-2s-3w \leqslant O(n^{2/3}/\ln n)$ и $m-3r-s-2w \leqslant (4/5)(n-4r-2s-3w)$, при $n \to \infty$ имеем

$$\frac{\varphi(s-1,w+1)}{\varphi(s,w)} = \frac{2s(m-3r-s-2w)(n-4r-2s-3w-1)^{2(m-3r-s-2w-1)}}{(w+1)(n-4r-2s-3w)^{2(m-3r-s-2w)-1}} > n^{1/3}.$$

Обозначим через $\mathfrak{G}_2(n,m,0,r)$ совокупность графов G из $\mathfrak{G}_2(n,m,0)$ таких, что среди компонент связности графа G имеется точно r 4-вершинных деревьев. Рассмотрим графы из $\mathfrak{G}_2(n,m,0,r)$, в которых все компоненты связности, за исключением одной, являются деревьями, содержащими не более 4 вершин каждое, а одна компонента связности является

(а) либо 5-вершинным деревом,

(б) либо 3-вершинным циклом,

(в) либо 4-вершинным графом с одним циклом.

Ясно, что если имеет место случай (а), то $s = 2n-3m+r+2$ и $w = 2m-n-2r-3$. В свою очередь, пользуясь (13.4), получаем

$$|\mathfrak{G}_2(n,m,0,r,2n-3m+r+2,2m-n-2r-3)| < \frac{n!5^8}{5!4!r!(2n-3m+r+2)!3^r2^{n-m-2r+3}} = (\text{см. (13.3)}) = o(|\mathfrak{G}_1(n,m,0,r)|). \quad (13.5)$$

Если имеет место случай (б), то $s = 2n-3m+r+3$ и $w = 2m-n+2r-3$. При таких s и w согласно (13.4) имеем

$$|\mathfrak{G}_2(n,m,0,r,2n-3m-r+3,2m-n+2r+3)| < \frac{n!3^6}{3!3!r!(2n-3m+r+3)!(2m-n-2r-3)!3^r2^{n-m-2r+3}} = o(|\mathfrak{G}_1(n,m,0,r)|). \quad (13.6)$$

Наконец, если имеет место случай (в), то $s = 2n - 3m + r + 4$ и $w = 2m - n - 2r - 4$. При таких s и w согласно (13.4) имеем

$$|\mathfrak{G}_2(n,m,0,r,2n-3m+r+4,2m-n-2r-4)| < \frac{n!4^8}{4!4!r!(2n-3m+r+4)!(2m-n-2r-4)!)} = o(|\mathfrak{G}_1(n,m,0,r)|. \quad (13.7)$$

Суммируя (13.5)–(13.7) и учитывая (13.2), получаем

$$|\mathfrak{G}_2(n,m,0,r)| = o(|\mathfrak{G}_1(n,m,0,r)|).$$

Следовательно, $\sum_r |\mathfrak{G}_2(n,m,0,r)| = o(|\mathfrak{G}_1(n,m,0)|)$. Отсюда и из (13.1), (13.3) следует утверждение теоремы 1.6.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Renyi A., Erdős P.** On the evolution of random graphs // Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 1960. V. 5, N 1–2. P. 17–61.
2. **Коршунов А. Д.** О мощности некоторых классов графов // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193, № 6. С. 1230–1233.
3. **Коршунов А. Д.** О перечислении конечных автоматов // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1978. Вып. 34. С. 5–82.
4. **Коршунов А. Д.** Об асимптотике чисел Стирлинга второго рода // Методы дискретного анализа в исследовании экстремальных структур. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983. Вып. 39. С. 24–41.